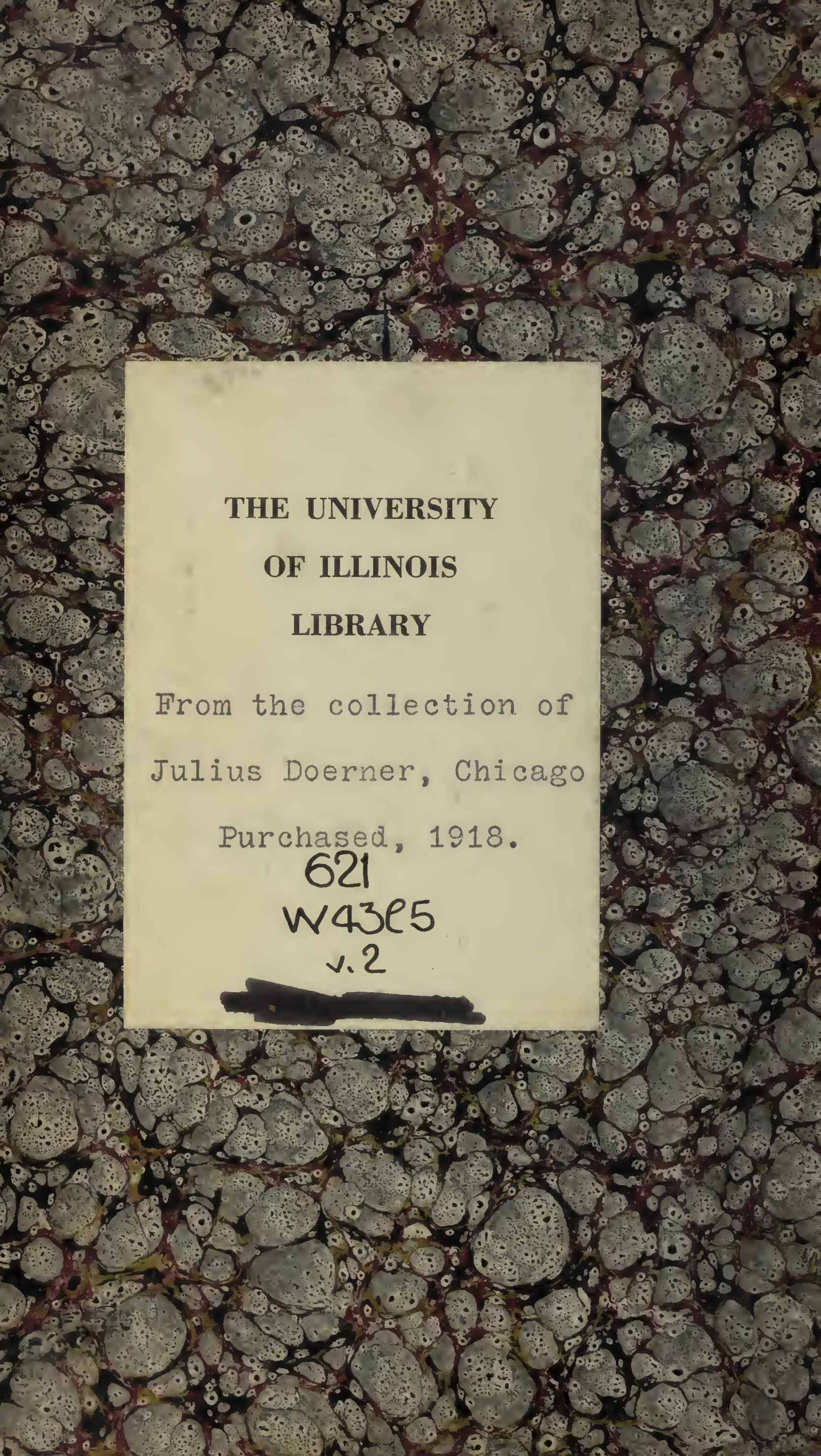
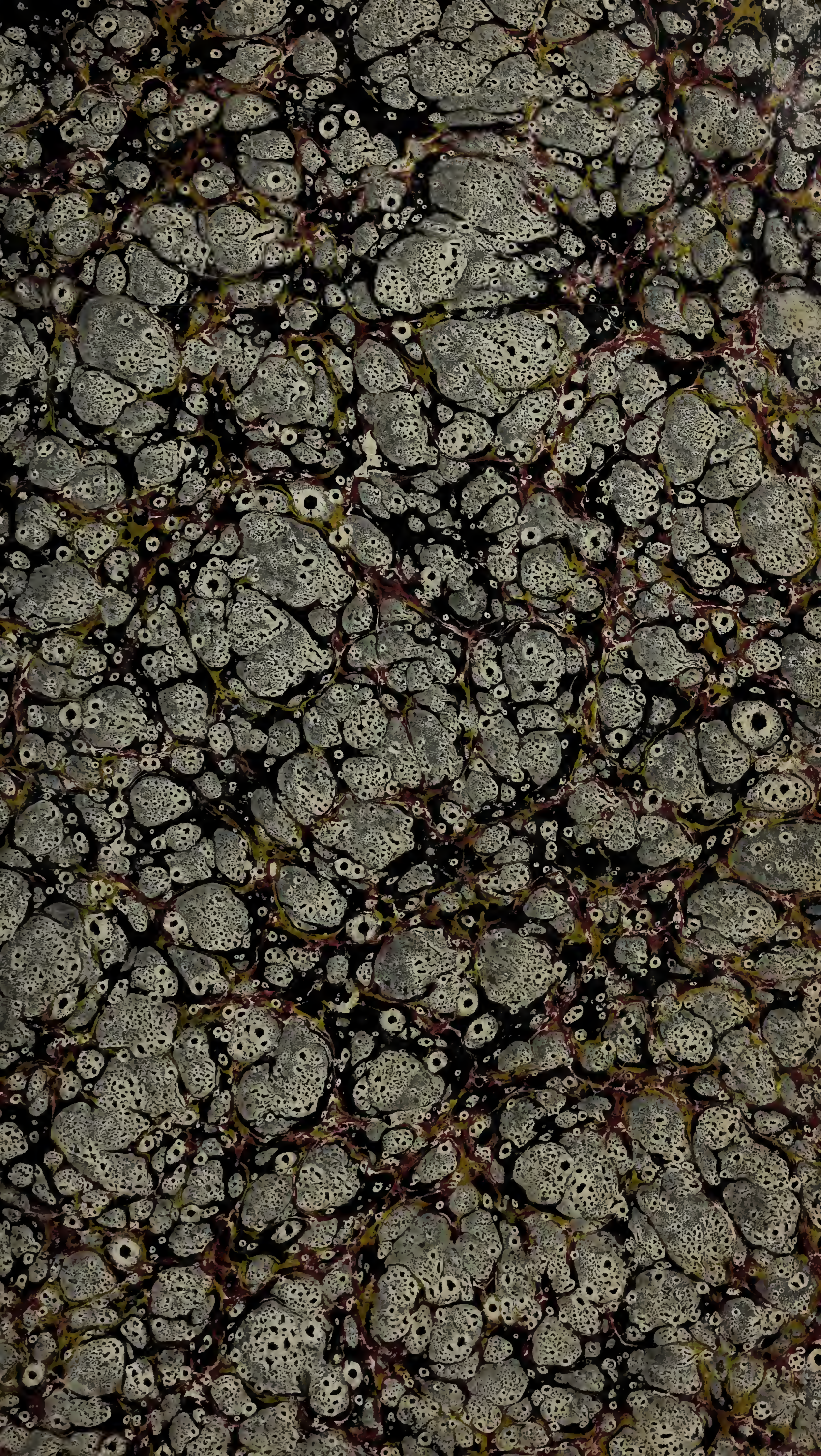






J R Brenden

Holzstiche
aus dem xylographischen Atelier
von Friedrich Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Papier
aus der mechanischen Papier-Fabrik
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen
bei Braunschweig.

Lehrbuch

der

Ingenieur- und Maschinen-Mechanik.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis
für den
Unterricht an technischen Lehranstalten
sowie zum
Gebrauche für Techniker
bearbeitet
von

Dr. phil. Julius Weisbach,

Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg; Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

In drei Theilen.

Zweiter Theil:

Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen.

Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1865 — 1868.

Lehrbuch

der

Statik der Bauwerke

und der

Mechanik

der

Umtriebsmaschinen.

Mit den nöthigen Hülfslehren aus der Analysis
für den
Unterricht an technischen Lehranstalten
sowie zum
Gebrauche für Techniker
bearbeitet
von

Dr. phil. **Julius Weisbach,**
Königl. sächsischer Bergrath und Professor an der königl. sächsischen Bergakademie zu Freiberg;
Ritter des königl. sächsischen Verdienstordens und des kaiserl. russ. St. Annenordens II. Classe, correspondirendes
Mitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg; Ehrenmitglied des Vereins deutscher
Ingenieure, sowie correspondirendes Mitglied des Vereins für Eisenbahnkunde u. s. w.

Vierte verbesserte und vervollständigte Auflage.

Mit gegen 900 in den Text eingedruckten Holzstichen.

Braunschweig,
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.
1865 — 1868.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Bearbeitung dieses zweiten Bandes meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik bin ich den schon in der Vorrede des ersten Bandes ausgesprochenen und in diesem Bande befolgten Ansichten möglichst nachgegangen. Ich weiß zwar, daß diese Ansichten nicht von Allen getheilt werden, daß zumal von Manchen eine allgemeinere Darstellung und gelehrtere Behandlung in diesem Werke vermißt wird, allein ich habe auch die Erfahrung zur Seite, daß der in diesem Buche eingeschlagene elementare und mehr populäre Weg leicht von Jedem verfolgt werden kann, welcher nicht im Besitze ausgedehnter analytisch-mathematischer Kenntnisse ist, und deshalb auch dahin führt, der Mechanik mehr Eingang und Anwendung und dadurch wieder mehr Werth und Geltung in der Technik zu verschaffen, als es bis jetzt der Fall gewesen ist.

Man findet noch immer sehr häufig, daß Praktiker bei ihren Ausführungen die Anwendung der wissenschaftlichen Mechanik verschmähen und es vorziehen, den Weg der Empirie einzuschlagen; entweder haben dieselben nicht das erforderliche Zutrauen zu den Regeln der Wissenschaft, oder sie finden die betreffenden Schriften nicht genügend, um sie als Rathgeber und Führer bei Anordnung und Berechnung ihrer Constructionen gebrauchen zu können. Wenn man nun weiß, wie viel in so vielen Hinsichten darauf ankommt, daß Maschinen und Bauwerke allen Anforderungen vollkommen entsprechend ausgeführt werden, und erwägt, daß dies nur durch richtige Anwendung richtig begründeter Regeln der Wissenschaft möglich ist, so wird

man auch das Bestreben des Verfassers, den ausgesprochenen Mängeln entgegenzuwirken, zu würdigen wissen.

Richtige Begründung und Einfachheit sind gewiß die Haupterfordernisse von einem Werke, welches Praktikern als Lehrer und Führer dienen soll. Mangel an beiden sind aber die vorzüglichsten Ursachen, welche der Anwendung der Mechanik auf die Praxis bis jetzt noch so viel Eintrag gethan haben. Wenn bei Entwickelung von Regeln unsichere oder unzulässige Voraussetzungen gemacht werden, wenn hierbei nicht das Wesentliche vom Unwesentlichen, das Ueberwiegende von dem Untergeordneten gehörig getrennt wird, wenn endlich wichtige Verhältnisse oder Einflüsse außer Acht gelassen, dagegen untergeordnete in Betracht gezogen werden, so können natürlich auch die Regeln selbst, so richtig auch deren Ableitungen sein mögen, nicht die für die Anwendung hinreichende Brauchbarkeit besitzen. Leider wird gerade auf diese Weise von Schriftstellern oft gefehlt, und es ist daher kein Wunder, wenn Praktiker sehr oft theoretische Regeln unrichtig oder wenigstens unzulänglich finden. Daher kommt es auch, daß Praktiker nicht selten von einer unrichtigen Theorie sprechen, während doch nur von einer unangemessenen Begründung und Anwendung derselben die Rede sein kann. Es ist allerdings nicht immer leicht, sachgemäße und richtige Regeln und Formeln zum Gebrauche der praktischen Mechanik aufzufinden; es gehört hierzu nicht nur eine genaue Bekanntschaft mit der Natur des Gegenstandes, die zuweilen nur durch besondere Beobachtungen oder Versuche verschafft wird, sondern auch eine besondere Aufmerksamkeit und selbst eine gewisse geistige Fähigkeit. Der Verfasser hat beim Aufsetzen des vorliegenden zweiten Bandes, wo es darauf ankam, praktisch brauchbare Theorien zu entwickeln, sein Augenmerk vorzüglich auf diesen Gegenstand gerichtet; er hat sich wenigstens nach Kräften bemüht, in dem vorliegenden Buche Praktikern den zur Sprache gebrachten Rathgeber und Führer zu verschaffen, ermißt aber recht wohl, daß ihm dies nicht vollkommen gelungen ist.

Auch der Mangel an Einfachheit und die große Allgemeinheit in der Behandlung der Wissenschaft und der von ihr entwickelten Formeln ist der allgemeineren Einführung der Mechanik in die Praxis sehr hinderlich. Nicht selten findet man, daß selbst mathematisch vorgebildete Praktiker in

ihrem Berufe die Hülfe der wissenschaftlichen Mechanik vernachlässigen, weil ihnen dieselbe zu umständlich und beschwerlich ist, und daß Diejenigen, welche keine umfassende Kenntniß in der Mathematik oder wenig Fertigkeit in der Behandlung derselben besitzen, die Anwendung der wissenschaftlichen Mechanik auf die Praxis aus demselben Grunde ganz verschmähen. Um einer allgemeineren Anwendung der wissenschaftlichen Mechanik auf die Praxis Vorschub zu leisten, ist es daher nöthig, den Vortrag dieser Wissenschaft zu popularisiren und die durch diese gewonnenen Regeln möglichst zu vereinfachen. Man hat aus diesem Grunde z. B. statt einer großen allgemeinen Formel oft mehrere kleine und vereinfachte Specialformeln aufzustellen oder, nach Befinden, statt derselben vereinfachte Näherungsformeln zu entwickeln, ferner durch Einführung von Coefficienten eine größere Vereinfachung der Formeln zu erstreben u. s. w.

Der vorliegende zweite Band meiner Mechanik zerfällt in zwei Abtheilungen, von denen die eine die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke, die zweite aber die auf Maschinen, und zwar insbesondere die Theorien und kurze Beschreibungen der sogenannten Kraft- oder Umtriebsmaschinen enthält. Vielleicht finden Manche die erste Abtheilung zu kurz, die zweite hingegen zu lang. In Betreff der ersten muß ich allerdings gestehen, daß es mir jetzt selbst leid thut, nicht tiefer in die Theorien der hölzernen und steinernen Brücken eingegangen zu sein, namentlich auch Ardant's Abhandlung über die Sprengwerke nicht benutzt zu haben, da dieser Gegenstand durch die vielen Eisenbahnanlagen jetzt eine besondere Wichtigkeit erlangt hat. Was aber die zweite Abtheilung anlangt, so glaube ich, daß hier nur bei wenigen Artikeln eine größere Kürze möglich ist, ohne den Werth des Buches zu beeinträchtigen. Es kann sein, daß mancher Leser das Capitel über Wassersäulenmaschinen zu groß findet, weil die Anwendung dieser Maschinen fast nur auf den Bergbau eingeschränkt ist. Ich habe allerdings bei Bearbeitung dieses Gegenstandes im Auge gehabt, daß hier eine Lücke in der Literatur auszufüllen sei, da in allen Lehr- und Handbüchern über Mechanik wenig oder so viel wie nichts über diese Maschinen gesagt wird, und zugleich gehofft, dadurch den Berg-Ingenieuren einen Dienst zu erweisen. Das Capitel über Turbinen wird vielleicht auch von einigen zu ausgedehnt

gefunden, zumal da dasselbe auch eine Monographie der älteren Stoß- und Druckturbinen enthält. Ich glaube jedoch, daß in diesem Capitel ein Weglassen oder Abkürzen nur von Nachtheil gewesen sein würde, aus dem Grunde, daß gerade zur Beurtheilung des Werthes einer vollkommenen Maschine es nöthig ist, die Theorie und also auch die Mängel anderer ähnlichen unvollkommenen Maschinen zu kennen. Uebrigens wird der Gebrauch unvollkommener Maschinen nie aufhören, da es immer Orte und Verhältnisse geben wird, wo auf eine Oekonomie der Arbeitskraft nichts, wohl aber auf die Wohlfeilheit der Maschine selbst sehr viel ankommt. In dem Capitel über das Messen der Arbeitskräfte u. s. w. hätte ich vielleicht etwas ausführlicher über die Dynamometer sprechen sollen; wäre zur Zeit der Bearbeitung Morin's Leçons de mécanique pratique in meinen Händen gewesen, so würde ich es vielleicht auch gethan haben. Am meisten Schwierigkeiten hat mir die Bearbeitung des zweiten Abschnittes, zumal aber die des Capitels über Dampfmaschinen, verursacht, und ich befürchte auch noch, daß dieser Abschnitt nicht allenthalben den Anforderungen des Lesers entsprechen werde. Vielleicht hätte ich das Capitel über Wärme kürzer fassen oder dasselbe ganz weglassen können, da es in der Regel dem Vortrage über Physik überlassen wird; wenn ich indessen bedenke, daß ich hierin nur das abgehandelt habe, was für die Baukunst und für die Maschinenlehre, zumal aber für die Dampfmaschinen von Wichtigkeit ist, so scheint mir allerdings dieser Gegenstand mit Recht eine Stelle in diesem Buche einzunehmen. Bei der Bearbeitung des Capitels über Dampfmaschinen habe ich sowohl von der Poncelet-Morin'schen Coefficiententheorie als auch von der neueren Pambour'schen Theorie Gebrauch gemacht; zugleich bin ich hierin auch meinen eigenen Ansichten gefolgt, und kann hoffen, daß meine Bearbeitung dieses Gegenstandes nicht als eine bloße Compilation wird angesehen werden können.

Wesentliche Dienste haben mir bei Bearbeitung dieses Werkes die Ergebnisse meiner hydraulischen Versuche geleistet, da ich mit Hülfe der durch diese erlangten Widerstandscoefficienten in den Stand gesetzt worden bin, die Arbeitsverluste zu berechnen, welche aus den hydraulischen Hindernissen bei den Turbinen, Wassersäulen- und Dampfmaschinen entspringen. Ich kann

behaupten, daß dadurch der Entwickelung brauchbarer Theorien dieser Maschinen ein besonderer Vorschub geleistet wird.

Es bleibt mir nun noch übrig, dem geehrten Leser darüber Rechenschaft abzulegen, daß ich das ganze Werk mit diesem zweiten Bande, wie anfänglich beabsichtigt wurde, nicht zum Schlusse bringe, und daß ich noch einen dritten Band hinzuzufügen mich genöthigt sehe. Allerdings ist mir hier ein Irrthum untergelaufen, welcher darin besteht, daß ich den Umfang des vorliegenden Materials zu klein geschätzt habe. Nachdem ich aber einmal mit der Bearbeitung des Werkes weiter fortgeschritten, und mir darüber von so vielen Seiten Beweise des Beifalls zu Theil geworden waren, so blieb mir nichts weiter übrig, als auf der betretenen Bahn fortzugehen, und nun entweder am Plane des Werkes abzuschneiden oder am Umfange desselben zuzusetzen. Das Erstere zu thun, konnte ich mich aber deshalb nicht entschließen, weil gerade die noch fehlenden Gegenstände, nämlich die Zwischen- und Arbeitsmaschinen, in den vorhandenen Werken über Mechanik sehr stiefmütterlich behandelt sind, und es an einem vollständigeren Werke über die letzteren Maschinen ganz fehlt. So hoffe ich denn durch die Hinzufügung eines dritten Bandes einem Bedürfnisse abzuhelfen.

Bei der Revision des Druckes haben mich die Herren Bornemann und Röting wesentlich unterstützt, und gewiß hat die Correctheit des Buches diesen Herren Vieles zu danken, was ich hier auszusprechen nicht unterlassen darf.

Freiberg, den 1. December 1847.

Julius Weisbach.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Dieser zweiten Auflage vom zweiten Bande der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik sind mehrfache Verbesserungen und Ergänzungen zu Theil geworden. In der ersten Abtheilung, der Statik der Bauwerke, sind besonders die Brücken viel ausführlicher behandelt worden, als in der ersten Auflage, und es haben auch Röhrenbrücken aus Eisenblech, welche in der neuesten Zeit von den Engländern construirt worden sind, in dieser Auflage einen Platz gefunden. Es hat ferner der Verfasser in dem Capitel über die verticalen, und insbesondere über die oberschlägigen Wasserräder mehrfache Ergänzungen und Berichtigungen angebracht, und es ist auch das Capitel über Reactionsräder und Turbinen, zumal durch die Resultate der an diesen Maschinen in der neuesten Zeit angestellten Versuche, bereichert worden. Endlich hat noch die Lehre von der Wärme und von den Dämpfen einige wesentliche Ergänzungen erhalten, da bei der Revision derselben die neuesten Versuche von Regnault (s. Mémoire de l'académie royale des sciences de l'institut de France, T. XXI.) benutzt werden konnten. Durch die Hinzufügung guter Abbildungen von der Gölzschthalbrücke und der Britanniabrücke, sowie von einem Tangentialrade, von einer Sims'schen Dampfmaschine u. s. w. hat diese neue Auflage ebenfalls an Werth gewonnen. Uebrigens stimmt sowohl im Ganzen als auch in der Behandlungsweise diese zweite Auflage mit der ersten vollkommen überein.

Freiberg, den 24. Mai 1851.

Julius Weisbach.

Vorrede zur dritten Auflage.

Auch in der vorliegenden dritten Auflage vom zweiten Bande meiner Ingenieur- und Maschinen-Mechanik sind die nöthig gewordenen Berichtigungen und Verbesserungen, sowie die den Fortschritten der Wissenschaft entsprechenden Ergänzungen angebracht, und, mit Beseitigung des Ueberflüssigen und Unbrauchbargewordenen, mehrfach vollständige Umarbeitungen vorgenommen worden. Ich kann versichern, daß ich auf die Bearbeitung dieser Auflage viel Mühe und Sorgfalt verwendet habe, und wenn ich trotzdem in derselben den Wünschen des geehrten Publicums nicht allenthalben entsprechen sollte, so bitte ich zu bedenken, daß die Auswahl, Zusammenstellung und Bearbeitung der wichtigsten Gegenstände aus dem kaum mehr zu übersehenden Gebiete der praktischen Mechanik eine schwierige, mühsame und zeitraubende ist.

In der ersten Abtheilung, welche die Statik der Bauwerke enthält, hat sowohl die Theorie des Erddruckes als auch die der Gewölbe einige wichtige Ergänzungen erhalten, und es ist die Theorie der Holz- und Eisenconstruction größtentheils ganz umgearbeitet worden. In der zweiten Abtheilung, welche die Mechanik der Umtriebsmaschinen behandelt, habe ich das Capitel über die Dynamometer ausführlicher behandelt als in der zweiten Auflage, ferner das Capitel über die verticalen Wasserräder zum Theil umgearbeitet und vervollständigt, sowie das Capitel über horizontale Wasserräder durch die Beschreibung und theoretische Betrachtung neuer Turbinen ergänzt. Auch das Capitel über die Wassersäulenmaschinen habe ich mit Weglassung einer

Maschine nach älterem Principe, durch die Beschreibung und Behandlung neuer Wassersäulenmaschinen bereichert. Wesentliche Umänderungen und Vervollständigungen sind im Abschnitte über Dampfmaschinen angebracht worden, wiewohl ich hier noch weiter gegangen wäre, wenn es der Raum gestattet hätte. Auf die neueren Theorien der Wärme und ihre Anwendung auf die Dampfmaschinen bin ich nicht speciell eingegangen, da sie wohl noch nicht dahin gelangt sind, um sie mit Sicherheit und Vortheil bei der Theorie der Dampfmaschinen zu Grunde legen zu können.

Die Abbildungen dieser neuen Auflage sind größtentheils neu gezeichnet und neu gestochen, auch ist die Anzahl derselben sehr vermehrt worden. Die Güte und Richtigkeit derselben möchte wohl nur in seltenen Fällen etwas zu wünschen übrig lassen.

Freiberg, den 24. April 1859.

Julius Weisbach.

Vorrede zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage des zweiten Bandes meiner Ingenieur- und Maschinenmechanik, welche ich hiermit in die Oeffentlichkeit schicke, ist zwar in Hinsicht auf Plan und Anordnung von der dritten Auflage nicht verschieden, zeichnet sich aber sowohl in ihrem äußeren Gewande, als auch durch die in ihr angebrachten Verbesserungen, Ergänzungen und Zusätze vor den älteren Auflagen desselben aus. Was die äußere Erscheinung dieser neuen Auflage betrifft, so sind die Abbildungen in derselben größtentheils neu angefertigt, und die auf schwarzem Grunde durch andere auf weißem Grunde ersetzt worden, wie es auch bereits in der vierten Auflage des ersten Bandes geschehen ist. In Betreff des Inhalts derselben habe ich Folgendes mitzutheilen. Der vorliegende zweite Band besteht auch in der vierten Auflage aus zwei Abschnitten, der eine die Statik der Bauwerke, der andere die Mechanik der Kraft- oder Umtriebsmaschinen enthaltend. In beiden Abschnitten ist in den letzten Jahren die Literatur bedeutend angewachsen, zumal in den Capiteln über Holz- und Eisenconstructionen und in denen über Wärme, Dämpfe, Dampfkessel und Dampfmaschinen. Wenn ich bei Bearbeitung dieser neuen Auflage nicht in dem Umfange von den Novitäten in der Literatur Gebrauch gemacht habe, als vielleicht von Vielen gewünscht wird, so hat dies seinen Grund darin, daß ich es für zweckmäßig halte, in einem elementaren Werke, wie die Ingenieur- und Maschinenmechanik ist, nur diejenigen Lehren aufzu-

nehmen, welche bereits eine allgemeine Anwendung gefunden und von mehreren Seiten her in Untersuchung gezogen worden sind, oder sich in der Praxis als hinreichend und zuverlässig bewährt haben. Jedenfalls ist es oft besser, neue theoretische Ansichten und Lehren zunächst nur Journalen und Monographien zu überlassen und dann erst in technischen Lehrbüchern aufzunehmen, wenn sich dieselben in dem Läuterungsproceß der Praxis bewährt haben. Wie im mündlichen, so auch im schriftlichen Unterricht, sollte man immer darauf bedacht sein, die Zuhörer und Leser durch Einfachheit, Kürze und passende Vergleiche für den Gegenstand zu gewinnen und nicht durch weitläufige, schwierige und unpraktische Speculationen denselben die Lust zum Studium einer für das praktische Leben sehr wichtigen Wissenschaft zu benehmen. Aus diesen Gründen habe ich bei der Bestimmung des Erddrucks und Gewölbschubs, noch die alte Theorie von Coulomb beibehalten, und nur bei den Holz- und Eisenconstructionen bewährten neueren Fortschritten in der Elasticitätslehre Rechenschaft getragen, sowie die Theorien einiger neuen Brückensysteme, z. B. der Charnierbrücken, Pauli's Bogenbrücken u. s. w. mit aufgenommen. In der Mechanik der Umtriebsmaschinen ist eine kurze Theorie des Schönemann'schen Horizontaldynamometers, sowie die von mir schon vor nahe 30 Jahren aufgesetzte Theorie der Staucurven und die Bestimmung der Drucklinie in Röhrenleitungen mit aufgenommen worden. In den beiden Capiteln über die hydraulischen Umtriebsmaschinen sind die Strahlturbinen des Verfassers, sowie die Turbinen von Hänel und von Schiele mit abgehandelt worden, auch hat hier die Althanse'sche Wassersäulenmaschine auf der Grube Centrum bei Eschweiler einen passenden Platz gefunden. Von den neuen Abhandlungen Pambours über die Theorie der Wasserräder, welche in den Comptes rendues der Pariser Academie mitgetheilt worden sind, habe ich hier keinen Gebrauch gemacht, weil dieselben in der Hauptsache nichts Neues enthalten. In den Capiteln über Wärme und Dämpfe sind nur mehrfache Ergänzungen, Zusätze und Verbesserungen angebracht worden, da eine gänzliche Umarbeitung derselben nach der mechanischen Wärmetheorie noch nicht hinreichend gerechtfertigt zu sein schien. Bei Berechnung der theoretischen Leistung von Dampfmaschinen sind nicht nur die älteren Formeln von Poncelet-Morin und Pambour, sondern auch die

Näherungsformeln der mechanischen Wärmetheorie von Rankine und Zeuner in Anwendung gebracht worden. Außerdem habe ich noch einen Abriß der mechanischen Wärmetheorie nach Zeuner und deren Anwendung auf die Berechnung der Arbeitsfähigkeit einer Dampfmaschine (§. 484 bis §. 487), sowie zum Schluß Einiges über die im Vergleich mit Dampfmaschinen sehr geringe Leistung der calorischen- und Gaskraftmaschinen u. s. w. mitgetheilt.

Freiberg, im Monat November 1868.

Julius Weisbach.

Inhalt des zweiten Theiles.

Erste Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

Erstes Capitel.

Von dem Zusammenhange und Drucke lockerer Massen.

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

Zweite Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Kraftmaschinen.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Von den bewegenden Kräften der Thiere, des Wassers und Windes, sowie von den Maschinen zur Aufnahme dieser Kräfte.

Erstes Capitel.

Von dem Messen der bewegenden Kräfte und ihren Wirkungen.

Zweites Capitel.

Von den Menschen- und Thierkräften, sowie von den Maschinen zur Aufnahme derselben.

Drittes Capitel.

Vom Ansammeln, sowie von dem Zu- und Abführen des Aufschlagwassers.

Viertes Capitel.

Von den verticalen Wasserrädern.

Fünftes Capitel.

Von den horizontalen Wasserrädern (Turbinen).

Sechstes Capitel.

Von den Wassersäulenmaschinen.

Siebentes Capitel.

Von den Windrädern.

Zweiter Abschnitt.

Von der Wärme, von den Dämpfen und von den Dampfmaschinen.

Erstes Capitel.

Von den Eigenschaften der Wärme.

Zweites Capitel.

Von den Wasserdämpfen.

Drittes Capitel.

Von den Dampferzeugungsapparaten.

Viertes Capitel.

Von den Dampfmaschinen.

Zweiter Theil.

Die

Anwendung der Mechanik auf Bauwerke

und

Umtriebsmaschinen.

Erste Abtheilung.

Die

Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

Erste Abtheilung.

Die Anwendung der Mechanik auf Bauwerke.

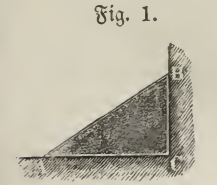
Erstes Capitel.

Von dem Zusammenhange und dem Drucke lockerer Massen.

Natürliche Böschung. Lockere oder halbflüssige Massen §. 1
(franz. terres, demifluides; engl. earth-masses) sind Anhäufungen kleiner Körper, wie Sand, Getreide, Schrot, Erde u. s. w. Sie sind insofern den Flüssigkeiten ähnlich, als sie, wie diese, einer Unterstützung von außen bedürfen, um eine gewisse Form zu behalten. Doch ist der Zusammenhang der Theile einer lockeren Masse nicht so klein wie beim Wasser; während das Wasser in jedem Falle einer Einfassung bedarf, ist dieselbe bei den lockeren Massen nur in manchen Fällen nöthig, und während das Wasser nur dann im Gleichgewichte ist, wenn seine Oberfläche eine horizontale Lage hat, können lockere Massen auch bei einer geneigten Lage ihrer Oberfläche im Gleichgewichte beharren.

Wenn die Theile einer lockeren Masse nur durch die Reibung mit einander verbunden sind, so ist dieselbe im Gleichgewichte, so lange ihre Oberfläche eine Neigung gegen den Horizont hat, welche den Reibungswinkel ϱ (s. I. §. 172) nicht übertrifft. Durch den Reibungswinkel wird die größte oder natürliche Böschung (franz. talus naturel; engl. natural slope) einer lockeren Masse bestimmt. Insofern man unter Böschung eines Abhanges AB, Fig. 1, das Verhältniß $\frac{b}{a}$ seiner horizontalen Länge $AC = b$ zur Höhe $BC = a$ versteht, hat man dieselbe $= cotang.\ \varrho$, oder, da $tang.\ \varrho$ dem Reibungscoefficienten φ gleich ist, $\frac{b}{a} = cotang.\ \varrho = \frac{1}{\varphi}$.

Fig. 1.



Nach Martony de Köszegh ist z. B. für möglichst trockene Dammerde die natürliche Böschung $\frac{b}{a} = 1,243$, für angefeuchtete Dammerde aber $\frac{b}{a} = 1,083$; hiernach beträgt der Böschungswinkel im ersten Falle, $\varrho = 39^0$ und im zweiten, $\varrho = 43^0$.

Für ganz feinen Sand hat man die Böschung $= {}^5/_3$, daher den Böschungswinkel $= 31^0$ gefunden. Roggenkörner haben dem Verfasser $\varrho = 30^0$ gegeben, sowie Erbsen, $\varrho = 27^0$, dagegen lockerer Haldensturz, aus Gneisstücken von 1 Cubikzoll bis 1 Cubikfuß bestehend, sowie Steinkohlenhaufen und Schlacken in Stücken von 3 bis 7 Cubikzoll im Mittel, $\varrho = 38$ Grad; für Schrotkörner hat man ferner $\varrho = 25^0$ und für Vogeldunst $\varrho = 22^1/_2{}^0$ gefunden. Für Sägespäne ist $\varrho = 44^0$.

Anmerkung. Versuche über die natürliche Böschung lockerer Massen werden durch Aufschütten und Streichen dieser Massen von unten nach oben angestellt.

§. 2 **Erddruck.** Wird eine lockere Masse Q, Fig. 2 und Fig. 3, von einer Seitenwand AB begrenzt, so übt sie gegen dieselbe einen gewissen, im Fol-

Fig. 2.

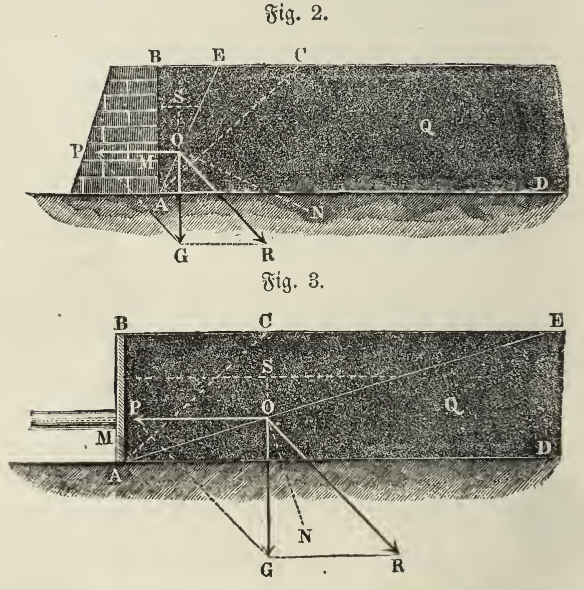


Fig. 3.

genden zu bestimmenden Druck, den sogenannten Erddruck (franz. poussée de terre; engl. pressure of earth), aus. Derselbe ist entweder ein activer oder ein passiver, je nachdem es darauf ankommt, durch diese Wand das

Herabrollen der Masse zu verhindern, oder das Hinaufschieben derselben zu bewirken. Der Druck der Masse auf diese Wand heißt im ersteren Falle gewöhnlich Erddruck schlecht weg, der Druck oder Widerstand im zweiten Falle wird dagegen auch die Hebekraft der lockeren Masse (franz. butée de terre; engl. resistance of earth) genannt. Da die Reibung zwischen den Theilen der lockeren Masse unter einander, als passive Kraft, der Bewegung der Masse in jeder Richtung entgegenwirkt, so kommt sie der Kraft, womit dem Herabgleiten der Masse entgegengewirkt wird, zu Hülfe, und wirkt dagegen der Kraft zum Hinaufschieben der Masse entgegen, und es ist folglich der Erddruck, im gewöhnlichen Sinne genommen, die kleinere, dagegen der Erdwiderstand oder die sogenannte Hebekraft der Erde die größere Kraft.

Der einfachste und gewöhnlichste Fall besteht in der Begrenzung der lockeren Masse Q durch eine Verticalebene AB, welche von der Seitenfläche einer Mauer, der sogenannten Futtermauer (franz. mur de revêtement; engl. retaining wall), wie Fig. 2, oder, nach Befinden, von der einer Holz- oder Bohlenwand (franz. palplanche; engl. walling-timber, sheet-piling), wie Fig. 3, gebildet wird.

Nehmen wir in einem solchen Falle an, daß die obere Fläche BC der lockeren Masse horizontal sei und mit der verticalen Begrenzungsfläche einerlei Höhe $AB = h$ habe. Stellen wir uns vor, daß sich von der ganzen Masse ein Keil ABE lostrenne und sich nun auf der einen Seite gegen die Mauer und auf der anderen gegen die übrige Masse AEQ stütze; bezeichnen wir den noch unbestimmten Winkel AEB, welchen die Trennungsfläche AE mit der Horizontalebene BC einschließt, durch α, die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikfußes der Masse durch γ, und ziehen wir nur ein Massenstück von der Länge = Eins in Betracht, so haben wir für das Gewicht des gedachten Keiles ABE:

$$G = \frac{AB\,.\,BE}{2} \cdot 1\,.\,\gamma = \tfrac{1}{2}\,h\,.\,h\,cotg.\,\alpha\,.\,\gamma = \tfrac{1}{2}\,h^2\,\gamma\,cotg.\,\alpha.$$

Sieht man von der Reibung an der verticalen Bekleidungsfläche AB ab, so läßt sich annehmen, daß diese Fläche nur den Druck $\overline{OP} = P$ aufnimmt, welcher gegen sie rechtwinkelig, also horizontal gerichtet ist, daß also auch eine gleich große entgegengesetzt gerichtete Kraft $(-P)$ das Prisma ABE entweder auf der schiefen Ebene AE erhält oder auf derselben hinaufschiebt. Wir wissen aus Bd. I., §. 172 und §. 176, daß eine Kraft von einem Körper noch aufgenommen wird, wenn die Richtung derselben nicht mehr als um den Reibungswinkel von der Normale der Bewegungsebene des Körpers abweicht, können daher auch hier voraussetzen, daß die zweite Seitenkraft R des Gewichtes G von der Masse unterhalb AE aufgenommen werde, wenn

ihre Richtung OR um den Winkel $NOR = \varrho$ von der Normale ON zu AE abweicht. Da der Winkel:

$$NOG = EAD = AEB = \alpha$$

ist, so hat man den Winkel ROG, um welchen die Seitenkraft R von den Verticalen abweicht entweder, wie in Fig. 4:

$$= NOG - NOR = \alpha - \varrho,$$

oder, wie in Fig. 5:

$$= NOG + NOR = \alpha + \varrho,$$

Fig. 4.

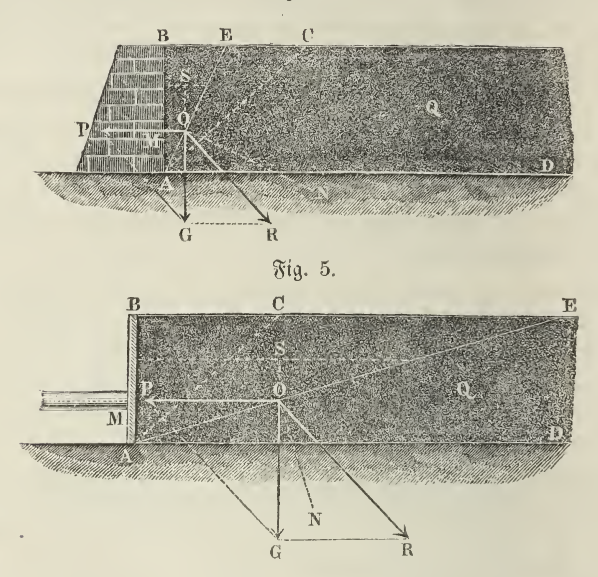


Fig. 5.

je nachdem man den Reibungswinkel ϱ auf der einen oder der anderen Seite von der Normale ON liegend annimmt, und es bestimmt sich hiernach der Druck gegen die verticale Wand AB,

$$P = G\ tang.\ OGP = G\ tang.\ ROG,$$

in dem einen Falle:

$$P = G\ tang.(\alpha - \varrho),$$

und im anderen:

$$P = G\ tang.(\alpha + \varrho),$$

also allgemein:

$$P = G\ tang.(\alpha \mp \varrho) = \frac{1}{2} h^2 \gamma\ cotang.\ \alpha\ .\ tang.(\alpha \mp \varrho).$$

(Vergl. Bd. I., §. 176.)

Es ist leicht zu ermessen, daß dieser Ausdruck sowohl den activen als den

passiven Erddruck angiebt, und zwar den ersteren bei Anwendung von $tang. (\alpha - \varrho)$, und den letzteren, wenn man $tang. (\alpha + \varrho)$ einführt.

Da bei Entwickelung dieser Formel von der Reibung des Druckkeiles ABC an einer Vorder- und Hinterfläche abgesehen worden ist, so giebt dieselbe auch nur den Druck des laufenden Fußes auf eine sehr lange Wand AB an.

Prisma des grössten und kleinsten Erddruckes. Der im vorstehenden Paragraphen gefundenen Formel zufolge ist der Erddruck noch von einem angenommenen Winkel α abhängig, und es muß daher dieser Winkel erst bestimmt werden, um mittels dieser Formel den Erddruck berechnen zu können. Da der Ausdruck §. 3

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, cotang. \, \alpha \, tang. (\alpha - \varrho)$$

nicht allein für $\alpha = 90$ Grad, sondern auch für $\alpha = \varrho$ Grad Null und für zwischenliegende Werthe von α positiv ausfällt, so giebt es jedenfalls für α einen Werth zwischen ϱ und 90 Grad, welcher auf ein Maximum von P führt, und da nun das Herabrollen der lockeren Masse durch die Wand in jedem Falle verhindert werden soll, so ist demnach auch die Größe des zu bestimmenden activen Erddruckes diesem Maximalwerthe gleichzusetzen. Jedenfalls kommt es bei Ermittelung dieses Maximalwerthes nur darauf an, daß man zusieht, für welches α, das Product $cotang. \, \alpha \, . \, tang. (\alpha - \varrho)$ ein Maximum wird.

Es ist $cotang. \, \alpha \, . \, tang. (\alpha - \varrho)$ auch

$$= \frac{sin. (2\alpha - \varrho) - sin. \varrho}{sin. (2\alpha - \varrho) + sin. \varrho} = 1 - \frac{2 \, sin. \varrho}{sin. (2\alpha - \varrho) + sin. \varrho},$$

und diese Größe um so größer, je größer $sin. (2\alpha - \varrho)$ wird; es fällt daher auch der Druck desjenigen Erdteiles ABE am größten aus, welcher durch das Maximum von $sin. (2\alpha - \varrho)$ bestimmt ist.

Nun ist aber der Maximalwerth eines Sinus = Eins, daher hat man auch:

$$sin. (2\alpha - \varrho) = 1, \text{ oder } 2\alpha - \varrho = 90 \text{ Grad},$$

also den gesuchten Winkel:

$$\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2},$$

sowie die Größe des activen Erddruckes:

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \, cotang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) . \, tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

zu setzen, oder einfacher, da noch $cotang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) = tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$ ist,

$$\text{I.} \quad P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2, \text{ wofür auch}$$

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \cdot \frac{1 - sin.\, \varrho}{1 + sin.\, \varrho}$$ gesetzt werden kann.

Der Winkel BAE, Fig. 4, welcher $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ zu 90^0 ergänzt, ist $= \frac{90^0 - \varrho}{2}$ = der halben Ergänzung des Reibungswinkels ϱ zu 90 Grad, und daher durch Halbiren des Winkels BAC leicht zu bestimmen.

Da hingegen der Ausdruck

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma\, cotang.\, \alpha \,.\, tang.\, (\alpha + \varrho)$$

für $\alpha = 0$ Grad, sowie für $\alpha = 90^0 - \varrho$ auf einen unendlich großen Werth und dagegen für Winkelwerthe zwischen 0 und $(90 - \varrho)$ Grad auf positive endliche Werthe führt, so giebt es auch innerhalb dieser Grenzen einen Minimalwerth von P, welchem also auch der passive Erddruck, bei welchem es nur darauf ankommt, ein Hinaufschieben oder Zurückweichen der lockeren Masse überhaupt zu bewirken, gleichzusetzen ist. Nun ist aber

$$cotang.\, \alpha \,.\, tang.\, (\alpha + \varrho)$$

auch

$$= \frac{sin.\, (2\alpha + \varrho) + sin.\, \varrho}{sin.\, (2\alpha + \varrho) - sin.\, \varrho} = 1 + \frac{2\, sin.\, \varrho}{sin.\, (2\alpha + \varrho) - sin.\, \varrho},$$

und der letztere Bruch um so kleiner, je größer $sin.\, (2\alpha + \varrho)$ ausfällt; es läßt sich daher für diesen Fall

$$sin.\, (2\alpha + \varrho) = 1, \text{ oder } 2\alpha + \varrho = 90 \text{ Grad},$$

d. i. $\alpha = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$ zu setzen.

Dieser Werth giebt die Größe des passiven Erddruckes:

$$P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma\, cotang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right),$$

d. i.:

$$\text{II. } P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Auch ist $P = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \cdot \frac{1 + sin.\, \varrho}{1 - sin.\, \varrho}$.

Wenn also der Horizontaldruck der Wand AB, Fig. 5, gegen die Erdmasse die durch diese Formel bestimmte Größe nicht erreicht, so weicht auch die lockere Masse noch nicht zurück; so wie aber derselbe dieser Größe gleich kommt, so schiebt sich ein Massenkeil ABE zurück, dessen Auflagerungsfläche AE den Winkel $EAD = \frac{90 - \varrho}{2} = \tfrac{1}{2}\, BAC$ mit der Basis AD bildet.

Beispiel. Wenn das specifische Gewicht einer 6 Fuß hoch aufgeschütteten Getreidemasse 0,776 ist (s. Band I., §. 372, Anmerk. 1), so übt dieselbe gegen eine verticale Seitenwand auf den laufenden Fuß Länge den (activen) Druck

$P = \frac{1}{2} . 6^2 . 0,776 . 61,75 [tang. (45^0 - 15^0)]^2 = 18 . 61,75 . 0,776 . (tang. 30^0)^2$
$= 862,5 . 0,57735^2 = 287,5$ Pfund

aus, und es ist dagegen die den passiven Druck zu überwindende Kraft:

$P = \frac{1}{2} . 6^2 . 0,776 . 61,75 [tang. (45^0 + 15^0)]^2 = 921,9 (tang. 60^0)^2$
$= 862,5 . 3 = 2587,5$ Pfund

nöthig, um diese Masse durch eine verticale Wand AB zurückzuschieben.

Erd- und Wasserdruck. Sowohl der active als auch der passive Druck lockerer Massen läßt sich leicht mit dem Druck des Wassers vergleichen. Der Druck des Wassers gegen eine senkrechte Fläche von der Breite = Eins und Höhe = h ist, wenn die Dichtigkeit des Wassers = γ_1 gesetzt wird, nach Bd. I., §. 356: §. 4

$$P_1 = \frac{1}{2} h^2 \gamma_1;$$

dagegen der Erddruck gegen diese Fläche:

$$P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} h^2 \varepsilon \gamma_1 \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

wenn ε noch das specifische Gewicht der lockeren oder Erdmasse bezeichnet; es ist folglich der Erddruck $\varepsilon \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ mal so groß als der des Wassers, oder es läßt sich dieser Druck $P = \frac{1}{2} h^2 \gamma_1$ gleichsetzen dem einer vollkommenen Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

oder deren Dichtigkeit

$$\gamma_1 = \gamma \left[tang. \left(45^0 \mp \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ ist.}$$

Es nimmt also auch der Druck lockerer Massen, wie der des Wassers, von oben nach unten gleichmäßig zu und ist überhaupt der Druckhöhe (s. Bd. I., §. 355), sowie der gedrückten Fläche proportional. Auch läßt sich hieraus folgern, daß für jede beliebige, dem Erddrucke ausgesetzte verticale Fläche die Druckhöhe von der Oberfläche der Masse senkrecht herab bis zum Schwerpunkte der gedrückten Fläche zu messen ist.

Endlich fällt, dem Vorstehenden zufolge, der Mittelpunkt des Erddruckes, d. i. der Angriffspunkt M des ganzen Erddruckes auf eine ebene Wand, mit dem Mittelpunkte des Wasserdruckes (s. Bd. I., §. 357) zusammen, steht also im vorliegenden Falle, wo die gedrückte Fläche ein Rechteck ist, um $AM = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} h$, d. i. um ein Drittel der Höhe von der Basis, oder um $BM = \frac{2}{3} h$, d. i. um zwei Drittel derselben von der Oberfläche der lockeren Masse ab.

Cohäsion lockerer Massen. Wir haben bei der obigen Entwickelung noch die Cohäsion, oder den mit der Berührungsfläche wachsenden §. 5

Zusammenhang der Massentheile unter einander außer Acht gelassen; da dieselbe aber bei weniger lockeren Massen, wie z. B. bei festgestampfter Erde, nicht unbedeutend ist, so wollen wir sie auch noch in die Formeln einführen. Setzen wir den Cohäsionsmodul, oder die Kraft des Zusammenhanges für die Berührungsfläche Eins, $= \varkappa$, so haben wir für den in Fig. 6 und 7 repräsentirten Fall die Kraft zum Trennen des Prismas ABE in der Fläche AE:

$$K = 1 . AE . \varkappa = \frac{\varkappa h}{sin.\, \alpha}.$$

Diese Kraft wirkt jeder Bewegung entgegen, und daher von unten nach oben, wenn das Herabgleiten zu verhindern ist (Fig. 6), dagegen aber von oben nach unten, wenn das Hinaufschieben des Keiles ABE hervorgebracht werden soll (Fig. 7); wenn es sich folglich um die Bestimmung des passiven Erddruckes handelt, so ist anzunehmen, daß der verticale Component $V = K\, sin.\, \alpha$

$$= \frac{\varkappa h}{sin.\, \alpha} \cdot sin.\, \alpha = \varkappa h$$

dem Gewichte, und der horizontale Component desselben,

Fig. 6.

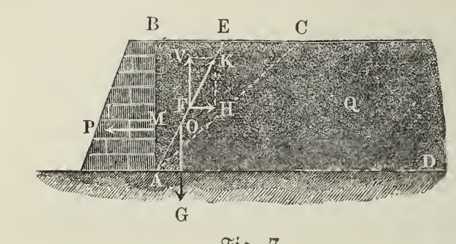
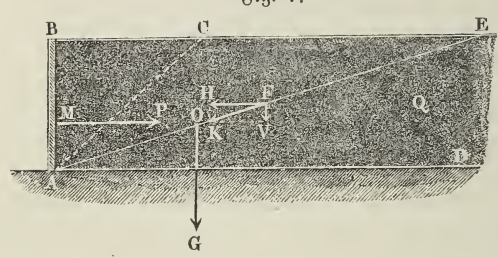


Fig. 7.



$$H = K\, cos.\, \alpha = \frac{\varkappa h}{sin.\, \alpha}\, cos.\, \alpha = \varkappa h\, cotang.\, \alpha$$

dem Drucke P entgegenwirkt.

Führen wir daher in der Formel $P = G\, tang.\, (\alpha - \varrho)$, statt P, $P + \varkappa h\, cotang.\, \alpha$ und statt G, $G - \varkappa h$ ein, so erhalten wir für den activen Erddruck die Bedingungsgleichung:

$$P = (G - \varkappa h)\, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa h\, cotang.\, \alpha.$$

Substituiren wir nun noch $G = {}^1/_2\, h^2 \gamma\, cotang.\, \alpha$, so ergiebt sich:

$$P = ({}^1/_2\, h^2 \gamma\, cotang.\, \alpha - \varkappa h)\, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa h\, cotang.\, \alpha.$$

Es ist aber zweckmäßig, an dieser Formel noch folgende Umformung vorzunehmen:

$$P = h\, [({}^1/_2\, h \gamma + \varkappa\, cotang.\, \varrho)\, cotang.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho)$$
$$- \varkappa\, cotang.\, \alpha - \varkappa\, (1 + cotang.\, \alpha\, cotang.\, \varrho)\, tang.\, (\alpha - \varrho)],$$

oder, da $tang. (\alpha - \varrho) = \frac{tang.\, \alpha - tang.\, \varrho}{1 + tang.\, \alpha\, tang.\, \varrho}$

$$= \frac{tang.\, \alpha - tang.\, \varrho}{1 + cotang.\, \alpha\; cotang.\, \varrho} \cdot cotang.\, \alpha\; cotang.\, \varrho$$ ist,

$$P = h\,[(\tfrac{1}{2}\,h\gamma + \varkappa\, cotang.\, \varrho)\, cotang.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa\,(cotang.\, \alpha + cotang.\, \varrho - cotang.\, \alpha)],$$

d. i.:

$$P = h\,[(\tfrac{1}{2}\,h\,\gamma + \varkappa\, cotang.\, \varrho)\; cotang.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho) - \varkappa\, cotang.\, \varrho].$$

Diese Kraft wird ein Maximum mit dem Producte $cotang.\, \alpha\, tang.\, (\alpha - \varrho)$. Das letztere aber ist nach dem Obigen ein solches für $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$; es ist daher der vollständige Horizontaldruck der Erdmasse gegen ihre verticale Bekleidung:

$$P = h\left((\tfrac{1}{2}h\gamma + \varkappa\, cotang.\, \varrho)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \varkappa\; cotang.\, \varrho\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \varkappa h\; cotang.\, \varrho\left(1 - \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2\right);$$

oder, da sich $cotang.\, \varrho = \frac{2}{tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) - tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}$, und

$$1 - tang.\left[\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) - tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right] tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$ setzen läßt,

$$P = \tfrac{1}{2}\,h^2\,\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - 2\,h\,\varkappa\; tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

$$= h\; tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\left[\frac{h\,\gamma}{2}\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) - 2\,\varkappa\right].$$

Diese Kraft ist Null für $\tfrac{1}{2}\,h\,\gamma\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) = 2\,\varkappa$, d. i. für

$$h = h_1 = \frac{4\,\varkappa}{\gamma\;\, tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}.$$

Auf diese Höhe h_1 läßt sich also eine cohärente Masse senkrecht abschneiden, ohne daß ein Nachrollen erfolgt. Umgekehrt, läßt sich aus der Höhe h_1, auf welche man eine solche Masse senkrecht abschneiden kann, der Cohäsionsmodul finden, indem man setzt:

$$\varkappa = {}^1/_4\, h_1\, \gamma\, tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right).$$

Es fällt also auch die Cohäsion einer Masse um so größer oder kleiner aus, je größer oder kleiner die Höhe h_1 ist, auf welche sie sich senkrecht abschneiden läßt.

Führen wir die Höhe h_1 in die Formel P ein, so erhalten wir die Größe des activen Erddruckes:

$$\text{I.}\quad P = \frac{h\gamma}{2}\,(h - h_1)\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Bei Sand, Getreide, Schrot, sowie bei aufgelöster und frisch gegrabener Erde ist h_1 ziemlich Null. Bei zusammengedrückter oder feucht gewesener Erde ist dieselbe oft beträchtlich, und zwar weniger bei Gartenerde und mehr bei thoniger oder lehmiger Erde. Bei lockerer etwas feuchter Dammerde fand z. B. Martony $h_1 = 0{,}9$ Fuß, dagegen bei ganz mit Wasser durchweichter Erde, $h_1 = 0$. Dichte Pflanzenerde läßt sich höchstens 3 bis 6 Fuß, thonige Erde aber höchstens 10 bis 12 Fuß hoch senkrecht abgraben.

In den meisten Fällen der Anwendung ist es rathsam, die Cohäsionskraft unbeachtet zu lassen.

Bei Bestimmung des passiven Erddruckes wirkt die Cohäsionskraft $K = \varkappa h$ entgegengesetzt; es ist daher auch in der letzten Formel für P, nicht allein statt ϱ, $-\varrho$, auch statt $\varkappa$, $-\varkappa$ einzuführen, um den negativen Druck oder den Widerstand der Erdmasse gegen das Fortschieben zu bestimmen. Hiernach ist also der letztere, d. i. die Größe des passiven Erddruckes:

$$P = h\ tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\left[\frac{h\gamma}{2}\,tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) + 2\varkappa\right] \text{ oder}$$

$$\text{II.}\quad P = \frac{h\gamma}{2}\,(h + h_2)\left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

wenn man noch

$$\frac{4\varkappa}{\gamma\ tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = \frac{h_1\ tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = h_1\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

durch h_2 bezeichnet.

§. 6 **Moment des Erddruckes.** Durch die Cohäsion der Erdmasse wird nicht allein die Größe, sondern auch der Angriffspunkt der Kraft verändert; um den letzteren angeben zu können, ist es noch nöthig, das Moment der Kraft zu bestimmen. Der Ausdruck

$$P = \frac{h\,(h - h_1)\,\gamma}{2}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

für den activen Erddruck besteht aus zwei Theilen, nämlich aus dem Theile

$$P_1 = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

dessen Angriffspunkt M um die senkrechte Höhe $BM = \frac{2}{3} h$ unter der Oberfläche BC der Masse liegt, welcher also in Hinsicht auf den Fuß A der Wand AB das Moment

$$P_1 \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} h^3 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

hat, und aus dem Theile:

$$P_2 = - \frac{1}{2} h h_1 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

welcher der in der Mitte F der Fläche AE angreifenden Cohäsionskraft der Masse entspricht, daher um $\frac{1}{2} h$ unter B angreift, und das Moment

$$P_2 \cdot \frac{1}{2} h = - \frac{1}{4} h^2 h_1 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ besitzt.}$$

Es ist folglich das Moment des ganzen Erddruckes hinsichtlich A:

$$Pa = \frac{1}{6} h^3 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{4} h^2 h_1 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{h^2 \gamma}{2} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{1}{3} h - \frac{1}{2} h_1\right),$$

und daher der Hebelarm desselben oder der Abstand AM seines Angriffspunktes M von dem Fuße A:

$$a = \frac{\frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{1}{3} h - \frac{1}{2} h_1\right)}{\frac{1}{2} h \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 (h - h_1)} = \frac{2h - 3h_1}{h - h_1} \cdot \frac{h}{6}$$

oder annähernd, wenn h_1 klein gegen h ist,

$$a = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h_1}{h}\right) \frac{h}{3}.$$

Für den Angriffspunkt M des passiven Erddruckes erhält man den Abstand $AM = a$, wenn man in den obigen Formeln $45^0 + \frac{\varrho}{2}$ statt $45^0 - \frac{\varrho}{2}$, sowie $(-\varkappa)$ statt $+\varkappa$ einführt, und

$$\frac{4 \varkappa}{\gamma \, tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = h_1 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

durch h_2 bezeichnet.

Es ist daher hier:

$$Pa = \frac{1}{6} h^3 \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{4} h^2 h_2 \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \left(\frac{1}{3} h + \frac{1}{2} h_2\right),$$

und

$$a = \frac{2h + 3h_2}{h + h_2} \cdot \frac{h}{6}, \quad \text{annähernd} = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h_2}{h}\right) \cdot \frac{h}{3}.$$

Beispiel. Man soll für eine Höhe von 16 Fuß die Größe und den Angriffspunkt des Druckes einer Erdmasse bestimmen, deren Reibungswinkel $\varrho = 40$ Grad, und Dichtigkeit $\gamma = 120$ Pfund beträgt, und welche sich, ohne nachzurollen, 4 Fuß hoch senkrecht abschneiden läßt.

Ohne Rücksicht auf die Cohäsion ist der active Erddruck:

$$P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} . 16^2 . 120 . [tang. (45^0 - 20^0)]^2$$

$$= 15360 \, (tang. 25^0)^2 = 3340 \text{ Pfund},$$

und der passive Erddruck:

$$P = \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 15360 \, (tang. 65^0)^2 = 70639 \text{ Pfund},$$

dagegen beträgt der erstere mit Rücksicht auf die Cohäsion, da $h_1 = 4$ ist,

$$P = \frac{1}{2} h (h - h_1) \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 8 . (16 - 4) . 120 \, (tang. 25^0)^2$$

$$= 11520 . (tang. 25^0)^2 = 2505 \text{ Pfund},$$

und der letztere, da $h_2 = h_1 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 4 \, (tang. 25^0)^2 = 0{,}87$ Fuß ist,

$$P = \frac{1}{2} h (h + h_2) \gamma \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = 8 (16 + 0{,}87) . 120 \, (tang. 65^0)^2$$

$$= 16195 \, (tang. 65^0)^2 = 74480 \text{ Pfund}.$$

Wenn man von der Cohäsion absieht, so kann man den Angriffspunkt des activen und passiven Erddruckes um $\frac{2}{3} h = \frac{2}{3} . 16 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$ Fuß unter der Oberfläche, oder $5\frac{1}{3}$ Fuß über der Grundfläche befindlich annehmen. Mit Rücksicht auf diesen Zusammenhang ist dagegen für den activen Erddruck

$$a = \frac{2h - 3h_1}{h - h_1} \cdot \frac{h}{6} = \frac{32 - 12}{16 - 4} \cdot \frac{16}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{3} = 4{,}44 \text{ Fuß},$$

und für den passiven Erddruck:

$$a = \frac{2h + 3h_2}{h + h_2} \cdot \frac{h}{6} = \frac{32 + 2{,}61}{16{,}87} \cdot \frac{8}{3} = \frac{34{,}61}{16{,}87} \cdot \frac{8}{3} = 5{,}47 \text{ Fuß}.$$

§. 7 **Belastete Erdmasse.** Wenn die Erdmasse M, Fig. 8, auf ihrer horizontalen Oberfläche noch belastet ist, z. B. durch ein Gebäude, durch ein Pflaster BLE u. s. w., so erleidet die Bekleidung einen größeren Druck, als wenn die Erdmasse oben ganz frei bleibt. Setzen wir, um denselben zu ermitteln, den Druck auf jede Einheit (auf den Quadratfuß) der horizontalen Oberfläche, $= q$, so erhalten wir denselben auf die Oberfläche des ganzen Druckkeiles BEA:

$$= q \,.\, BE = qh \; cotang.\, \alpha,$$

und daher die Horizontalkraft, ohne Rücksicht auf die Cohäsion:

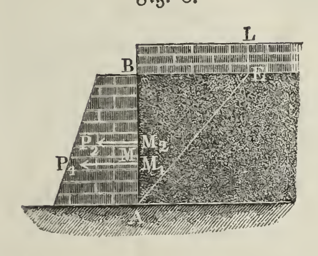
$$P = (G + qh \; cotang.\, \alpha) \; tang.\, (\alpha - \varrho)$$
$$= (\tfrac{1}{2} h^2 \gamma + qh) \; cotang.\, \alpha \; tang.\, (\alpha - \varrho),$$

oder, $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ substituirt,

$$P = (\tfrac{1}{2} h^2 \gamma + qh) \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Angriffspunkt dieses Druckes zu finden, zerlegen wir denselben wieder in seine zwei Theile

Fig. 8.



$$P_1 = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

und:

$$P_2 = qh \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Der erste Theil P_1 hat seinen Angriffspunkt M_1 um ein Drittel der Höhe h über dem Fußpunkte A, es ist also sein statisches Moment in Hinsicht auf diesen Punkt

$$P_1 \frac{h}{3} = \frac{h}{3} \cdot \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{h^3 \gamma}{6} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

wegen des zweiten Theiles P_2 aber werden gleiche Theile der verticalen Wand gleich stark gedrückt, es geht folglich auch die entsprechende Mittelkraft, d. i. dieser Theil des Druckes, durch den Schwerpunkt M_2 der Wand, steht also um die halbe Höhe $\left(\frac{h}{2}\right)$ von A ab, und es ist sonach das statische Moment dieser zweiten Kraft

$$P_2 \frac{h}{2} = \frac{h}{2} \cdot qh \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 = \frac{q h^2}{2} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right].$$

Nun folgt das Moment des vollständigen Druckes:

$$Pa = (\tfrac{1}{6} h^3 \gamma + \tfrac{1}{2} q h^2) \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

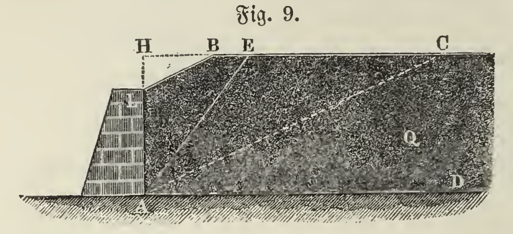
und daher der Hebelarm desselben oder der Abstand $AM = a$ seines Angriffspunktes M von der Basis:

$$a = \frac{(\tfrac{1}{6} h^3 \gamma + \tfrac{1}{2} h^2 q) \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2}{(\tfrac{1}{2} h^2 \gamma + hq) \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2} = \frac{\tfrac{1}{6} h^2 \gamma + \tfrac{1}{2} h q}{\tfrac{1}{2} h \gamma + q}$$

$$= \left(\frac{h\gamma + 3q}{h\gamma + 2q}\right) \cdot \tfrac{1}{3} h.$$

(§. 8) **Druck der überschütteten Erde.** Steht die Oberfläche BC der lockeren Masse Q, Fig. 9, über der Mauerkappe L und bildet sie in der Nähe der Mauer den natürlichen Anhang, so läßt sich der Druck dieser Masse gegen die senkrechte Bekleidung mit Hülfe des höheren Calcüls wie folgt ermitteln. Es sei h die Höhe AL der Bekleidung, und h_0 die Höhe LH der lockeren Masse über dem Kopfe L der Bekleidung; behalten dann die übrigen Bezeichnungen ihre früheren Bedeutungen, so ist das Volumen der drückenden Masse $ALBE$:

Fig. 9.



$$V = \tfrac{1}{2}\,(\overline{AH}^2 . cotang. AEH - \overline{LH}^2 . cotang. LBH)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,[(h + h_0)^2\, cotang.\, \alpha - h_0^2\, cotang.\, \varrho],$$

folglich das Gewicht derselben:

$$G = \tfrac{1}{2}\,[(h + h_0)^2\, cotang.\, \alpha - h_0^2\, cotang.\, \varrho]\,\gamma$$

und ihr activer Druck gegen AL:

$$P = \tfrac{1}{2}\,[(h + h_0)^2\, cotang.\, \alpha - h_0^2\, cotang.\, \varrho]\; tang.\,(\alpha - \varrho)\,\gamma$$

oder, da $tang.\,(\alpha - \varrho) = \dfrac{tang.\,\alpha - tang.\,\varrho}{1 + tang.\,\alpha\; tang.\,\varrho} = \dfrac{cotang.\,\varrho - cotang.\,\alpha}{cotang.\varrho\; cotang.\alpha + 1}$ ist,

$$P = \tfrac{1}{2}\,[(h + h_0)^2\, cotang.\alpha - h_0^2\, cotang.\,\varrho] \cdot \frac{cotang.\,\varrho - cotang.\,\alpha}{cotang.\,\varrho\; cotang.\,\alpha + 1}\,\gamma$$

$$= \tfrac{1}{2}(h + h_0)^2 \left[cotang.\alpha - \left(\frac{h_0}{h + h_0}\right)^2 cotang.\,\varrho\right] \cdot \frac{cotang.\varrho - cotang.\alpha}{cotang.\varrho cotang.\alpha + 1}\,\gamma.$$

Setzen wir nun:

$$cotang.\,\alpha = u, \quad cotang.\,\varrho = b \;\text{ und }\; \left(\frac{h_0}{h + h_0}\right)^2 cotang.\,\varrho = c,$$

so erhalten wir:

$$P = \tfrac{1}{2}\,(h + h_0)^2\, \frac{(u - c)\,(b - u)}{bu + 1}\,\gamma,$$

und es ist das Maximum von $\dfrac{(u - c)\,(b - u)}{bu + 1}$ auszumitteln, um den Druck der lockeren Masse gegen AL zu finden, und daher $(bu + 1)$mal Differenzial von $(u - c)\,(b - u)$ gleich $(u - c)\,(b - u)$mal Differenzial von $(bu + 1)$, d. i.:

$$(bu + 1)\,(b + c - 2u) = (bu - bc + cu - u^2)\,b$$

zu setzen. (S. Bd. I., Art. 8. V.)

Hiernach folgt die Bestimmungsgleichung:

$$bu^2 + 2u = (1 + b^2)\,c + b,$$

deren Auflösung:

$$u = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b}\right)^2 + 1 + \frac{(1+b^2)c}{b}}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{1+b^2}\sqrt{1+bc}}{b} \text{ giebt.}$$

Führen wir die ersten Bezeichnungen wieder ein, so folgt:

$$cotang.\, \alpha = -\, tang.\, \varrho + \sqrt{\frac{1}{cos.\, \varrho^2} + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 \frac{1}{sin.\, \varrho^2}}$$

$$= -\, tang.\, \varrho + \sqrt{(sec.\, \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2 (cosec.\, \varrho)^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{(u-c)(b-u)}{bu+1} = \frac{\partial (u-c)(b-u)}{\partial (bu+1)} = \frac{b+c-2u}{b}$$

$$= \frac{b^2+bc+2-2\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+bc}}{b^2}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1+b^2}-\sqrt{1+bc}}{b}\right)^2$$

$$= \left[\frac{1}{cos.\, \varrho} - \sqrt{(tang.\, \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2}\right]^2$$

es folgt daher der gesuchte active Erddruck:

$$P = \tfrac{1}{2}(h+h_0)^2 \gamma \cdot \left[\frac{1}{cos.\, \varrho} - \sqrt{(tang.\, \varrho)^2 + \left(\frac{h_0}{h+h_0}\right)^2}\right]^2,$$

oder:

$$P = \left[\frac{h+h_0}{cos.\, \varrho} - \sqrt{(h+h_0)^2\, tang.\, \varrho^2 + h_0^2}\right]^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Meist ist die Höhe h_0 der Ueberschüttung klein gegen die Höhe h der Bekleidung, und daher annähernd:

$$P = \left[\frac{h+h_0}{cos.\, \varrho} - \left((h+h_0)\, tang.\, \varrho + \frac{h_0^2}{2(h+h_0)\, tang.\, \varrho}\right)\right]^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$= \left(\frac{(h+h_0)^2 (1-sin.\, \varrho)^2}{cos.\, \varrho^2} - \frac{h_0^2 (1-sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{2}$$

$$= \left((h+h_0)^2 \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2(1-sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{2}.$$

In vielen Fällen kann man sogar das letzte Glied ganz vernachlässigen und, wie oben (§. 3),

$$P = \tfrac{1}{2}(h+h_0)^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \text{ setzen.}$$

Das **Moment** des activen Erddruckes:

$$P = \left((h + h_0)^2 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2 (1 - sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{2}$$

läßt sich wie diese Kraft selbst als die Differenz zweier Theile ansehen, und fällt, dem Obigen entsprechend, in Hinsicht auf den Fußpunkt A,

$$Pa = \left((h + h_0)^3 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2 (3h + h_0)(1 - sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{6}$$

aus.

Für den passiven Erddruck hat man:

$$Pa = \left((h + h_0)^3 \left[tang. \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2 (3h + h_0)(1 + sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{6}$$

zu setzen.

Beispiel. Wäre im obigen Beispiel (§. 6) die Bekleidung h nur 12 Fuß hoch, folglich die Höhe der Ueberschüttung $h_0 = 4$ Fuß, so hätte man, ohne Rücksicht auf Cohäsion, den activen Erddruck:

$$P = \left((h + h_0)^2 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2 (1 - sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{2}$$

$$= 3340 - \frac{(1 - sin.\, 40^0)\ 16 . 60}{sin.\, 40} = 3340 - \frac{0,3572}{0,6428} \cdot 960$$

$$= 3340 - 533 = 2807 \text{ Pfund},$$

und das Moment desselben:

$$Pa = \left((h + h_0)^3 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{h_0^2 (3h + h_0)(1 - sin.\, \varrho)}{sin.\, \varrho}\right) \frac{\gamma}{6}$$

$$= 3340 . \tfrac{1}{3} (h + h_0) - 533 . (h + \tfrac{1}{3} h_0) = 3340 . \tfrac{16}{3} - 533 . \tfrac{40}{3}$$

$$= 10707 \text{ Fußpfund},$$

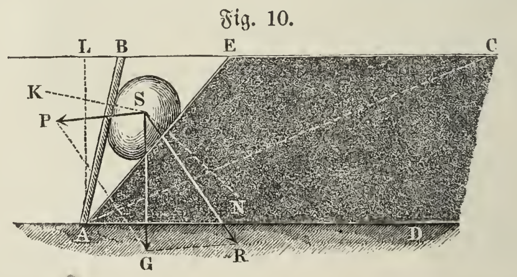
folglich den Hebelarm AM:

$$a = \frac{10707}{2807} = 3,81 \text{ Fuß},$$

also kleiner, als wenn die Masse vollständig bekleidet wäre.

§. 9 **Allgemeinere Theorie des Erddruckes.** Einer allgemeineren Theorie des Erddruckes läßt sich der Fall zu Grunde legen, wo das Gewicht G einer Masse S, Fig. 10, von zwei schiefen Ebenen AB und

Fig. 10.



AE unterstützt wird. Es ist dann dieses Gewicht G in zwei Seitenkräfte P und R zu zerlegen, deren Richtungen um die Reibungswinkel $PSK = \varrho_1$

und $RSN = \varrho$ von den Normalen SK und SN zu diesen schiefen Ebenen abweichen. Sind α_1 und α die Neigungswinkel BAD und EAD dieser Ebenen gegen den Horizont, so hat man:

$\angle\, RSG = \alpha - \varrho$, und $\angle\, PSG = 180^0 - (\alpha_1 + \varrho_1)$, daher:

$$\frac{P}{G} = \frac{sin. PGS}{sin. SPG} = \frac{sin. RSG}{sin. (PSG + PGS)} = \frac{sin. (\alpha - \varrho)}{sin. (\alpha_1 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)},$$

und den Druck gegen die erste Ebene:

$$P = \frac{G\, sin. (\alpha - \varrho)}{sin. (\alpha_1 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)}.$$

Um diese Formel auf den Erddruck anzuwenden, dürfen wir nur AB als die Bekleidungswand betrachten, und annehmen, daß dieselbe unter dem Winkel α_1 gegen den Horizont geneigt sei.

Sehen wir noch von der Reibung der Masse an dieser Fläche ab, so können wir, da der Querschnitt des drückenden Prismas ABE:

$$F = \triangle\, AEL - \triangle\, ABL = \frac{h^2}{2} (cotang. \alpha - cotang. \alpha_1),$$

folglich das Gewicht desselben, $G = \frac{h^2 \gamma}{2} (cotang. \alpha - cotang. \alpha_1)$ ist:

$$P = \frac{h^2 \gamma}{2} \cdot \frac{sin. (\alpha - \varrho)\; (cotang. \alpha - cotang. \alpha_1)}{[sin. \alpha_1 - (\alpha - \varrho)]} \text{ setzen.}$$

Nun ist aber:

$$\frac{sin. [\alpha_1 - (\alpha - \varrho)]}{sin. (\alpha - \varrho)} = \frac{sin. \alpha_1 \cos (\alpha - \varrho) - cos. \alpha_1\, sin. (\alpha - \varrho)}{sin. (\alpha - \varrho)}$$
$$= sin. \alpha_1\; cotang. (\alpha - \varrho) - cos. \alpha_1$$
$$= sin. \alpha_1\; [cotang. (\alpha - \varrho) - cotang. \alpha_1],$$

daher folgt:

$$P = \frac{h^2 \gamma}{2} \cdot \frac{cotang. \alpha - cotang. \alpha_1}{sin. \alpha_1 [cotang. (\alpha - \varrho) - cotang. \alpha_1]},$$

oder wenn man $\alpha - \varrho = \psi$ setzt,

$$P = \frac{h^2 \gamma}{2\, sin. \alpha_1} \cdot \frac{cotang. (\psi + \varrho) - cotang. \alpha_1}{cotang. \psi - cotang. \alpha_1}.$$

Dieser Ausdruck fällt nicht allein für $\psi = 0$, sondern auch für $\psi = \alpha_1 - \varrho$, Null aus, und ist für Werthe von ψ zwischen 0 und $\alpha_1 - \varrho$, positiv, daher giebt es auch zwischen diesen Grenzen ein Maximum desselben. Es ist auch:

$$P = \frac{h^2 \gamma}{2\, sin. \alpha_1} \cdot \frac{sin. (\psi + \varrho - \alpha_1)}{sin. (\psi + \varrho)} \cdot \frac{sin. \psi}{sin. (\psi - \alpha_1)}$$

$$P = \frac{h^2 \gamma}{2\, sin. \alpha_1} \cdot \frac{cos. (\psi + \varrho - \alpha_1 - \psi) - cos. (\psi + \varrho - \alpha_1 + \psi)}{cos. (\psi + \varrho - \psi + \alpha_1) - cos. (\psi + \varrho + \psi - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cos.(\varrho - \alpha_1) - cos.(2\,\psi + \varrho - \alpha_1)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\,\psi + \varrho - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\psi + \varrho - \alpha_1) + cos.(\varrho - \alpha_1) - cos.(\varrho + \alpha_1)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\,\psi + \varrho - \alpha_1)}$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1}\left(1 + \frac{cos.(\varrho - \alpha_1) - cos.(\varrho + \alpha)}{cos.(\varrho + \alpha_1) - cos.(2\,\psi + \varrho - \alpha_1)}\right),$$

und hieraus leicht zu ersehen, daß dieser Werth für $cos.(2\,\psi + \varrho - \alpha_1) = 1$, also für $2\,\psi + \varrho - \alpha_1 = 0$, d. i. für

$$\psi = \frac{\alpha_1 - \varrho}{2}$$

ein Maximum wird.

Es halbirt also hier die Basis $A\,E$ des Prismas vom größten Druck den Winkel $C\,A\,B$ zwischen der Ebene $A\,B$ der Bekleidung und der Ebene $A\,C$ des natürlichen Abhanges.

Setzen wir nun in der Formel für P,

$$\psi = \frac{\alpha_1 - \varrho}{2}$$

ein, so erhalten wir den gesuchten Druck gegen die schräge Wand $A\,B$:

$$P = \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2,$$

so daß für $\alpha_1 = 90^0$, wie oben, §. 3:

$$P = \frac{h^2\,\gamma}{2}\left(\frac{sin.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{sin.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)}\right)^2 = \frac{h^2\,\gamma}{2}\left(\frac{sin.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{cos.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}\right)^2$$

$$= \frac{h^2\gamma}{2}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$ folgt.

(§. 10) Nehmen wir wieder eine verticale Wand an, und berücksichtigen wir dagegen die **Reibung der Erdmasse** an derselben, so können wir:

$$P = \frac{G\,sin.(\alpha - \varrho)}{sin.(90 + \varrho_1 - \alpha + \varrho)} = \frac{G\,sin.(\alpha - \varrho)}{cos.[\alpha - (\varrho + \varrho_1)]}$$

$$= {}^1/_2\,h^2\,\gamma\,\frac{sin.(\alpha - \varrho)\;cotang.\,\alpha}{cos.[\alpha - (\varrho + \varrho_1)]}$$ setzen.

Formen wir weiter um, so erhalten wir:

$$\frac{\sin.(\alpha-\varrho)\;cotang.\,\alpha}{\cos.[\alpha-(\varrho+\varrho_1)]}=\frac{(\sin.\alpha\;\cos.\varrho-\cos.\alpha\;\sin.\varrho)\;cotang.\,\alpha}{\cos.\alpha\;\cos.(\varrho+\varrho_1)+\sin.\alpha\;\sin.(\varrho+\varrho_1)}$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\cdot\frac{cotang.\,\varrho-cotang.\,\alpha}{cotang.(\varrho+\varrho_1)+tang.\,\alpha}.$$

Der veränderliche Factor:

$$\frac{cotang.\,\varrho-cotang.\,\alpha}{cotang.(\varrho+\varrho_1)+tang.\,\alpha}$$

ist ein Maximum für:

$$\frac{cotang.(\varrho+\varrho_1)+tang.\,\alpha}{(\sin.\alpha)^2}=\frac{cotang.\,\varrho-cotang.\,\alpha}{(\cos.\alpha)^2}$$

oder:

$$cotang.(\varrho+\varrho_1)+tang.\,\alpha=cotang.\,\varrho\;(tang.\,\alpha)^2-tang.\,\alpha,$$

d. i.:

$$(tang.\,\alpha)^2-2\,tang.\,\varrho\;tang.\,\alpha=tang.\,\varrho\;cotang.(\varrho+\varrho_1).$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt:

$$tang.\,\alpha=tang.\,\varrho+\sqrt{(tang.\,\varrho)^2+tang.\,\varrho\;cotang.(\varrho+\varrho_1)}$$

$$=tang.\,\varrho\left(1+\sqrt{1+cotang.\,\varrho\;cotang.(\varrho+\varrho_1)}\right),$$

und daher:

$$cotang.\,\alpha=\frac{\sqrt{1+cotang.\,\varrho\;cotang.(\varrho+\varrho_1)}-1}{cotang.(\varrho+\varrho_1)}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{cotang.\,\varrho-cotang.\,\alpha}{cotang.(\varrho+\varrho_1)+tang.\,\alpha}=(cotang.\,\alpha)^2,$$

daher fällt:

$$\frac{\sin.(\alpha-\varrho)\,cotg.\,\alpha}{\cos.[\alpha-(\varrho+\varrho_1)]}=\frac{\sin.\varrho}{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+cotg.\varrho\;cotg.(\varrho+\varrho_1)}-1}{cotg.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sin.(\varrho+\varrho_1)\sin.\varrho+\cos.(\varrho+\varrho_1)\cos.\varrho}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

$$=\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\left(\sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2$$

aus, und es folgt der active Erddruck:

$$P=\tfrac{1}{2}h^2\gamma\,\frac{\sin.\varrho}{\cos.(\varrho+\varrho_1)^2}\left(\sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}-\sqrt{\sin.(\varrho+\varrho_1)}\right)^2.$$

Noch läßt sich wegen Kleinheit des Winkels ϱ_1,

$$\cos.\varrho_1=1,\text{ daher }\sqrt{\frac{\cos.\varrho_1}{\sin.\varrho}}=\frac{1}{\sqrt{\sin.\varrho}},$$

ferner:

$cos.(\varrho + \varrho_1)^2 = (cos.\varrho - sin.\varrho\, sin.\varrho_1)^2 = cos.\varrho^2 (1 - 2\,tang.\varrho\, sin.\varrho_1)$, also:

$$\frac{1}{cos.(\varrho + \varrho_1)^2} = \frac{1 + 2\,tang.\varrho\;sin.\varrho_1}{cos.\varrho^2}$$

setzen, sowie:

$$\sqrt{sin.(\varrho + \varrho_1)} = \sqrt{sin.\varrho + cos.\varrho\, sin.\varrho_1} = \sqrt{sin.\varrho} + \frac{1}{2}\frac{cos.\varrho\, sin.\varrho_1}{\sqrt{sin.\varrho}},$$

endlich:

$$\left(\sqrt{\frac{cos.\varrho_1}{sin.\varrho}} - \sqrt{sin.(\varrho + \varrho_1)}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{sin.\varrho}} - \sqrt{sin.\varrho} - \frac{1}{2}\frac{cos.\varrho\, sin.\varrho_1}{\sqrt{sin.\varrho}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - sin.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}}\right)^2 - \frac{1 - sin.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}} \cdot \frac{cos.\varrho}{\sqrt{sin.\varrho}} \cdot sin.\varrho_1$$

$$= \frac{(1 - sin.\varrho)^2}{sin.\varrho}\left(1 - \frac{cos.\varrho}{1 - sin.\varrho} \cdot sin.\varrho_1\right),$$

daher folgt annähernd:

$$P = \frac{1}{2}h^2\gamma\,\frac{(1 + 2\,tang.\varrho\, sin.\varrho_1)}{cos.\varrho^2} \cdot (1 - sin.\varrho)^2 \left(1 - \frac{cos.\varrho}{1 - sin.\varrho} \cdot sin.\varrho_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}h^2\gamma\,\frac{(1 - sin.\varrho)(1 - sin.\varrho)}{(1 - sin.\varrho)(1 + sin.\varrho)} \cdot \left(1 + 2\,tang.\varrho\, sin.\varrho_1 - \frac{cos.\varrho}{1 - sin.\varrho}\, sin.\varrho_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \left(1 - \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) - 2\,tang.\varrho\right] sin.\varrho_1\right).$$

Da ϱ zwischen 30 und 40 Grad schwankt und für $\varrho = 35^0$,

$$tang.\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) - 2\,tang.\varrho = tang.\,62\tfrac{1}{2}^0 - 2\,tang.\,30^0$$

$$= 1{,}921 - 1{,}155 = 0{,}766$$

ist, so kann man in den gewöhnlichen Fällen der Anwendung

$$P = \frac{1}{2}h^2\gamma\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 (1 - 0{,}766\, sin.\varrho_1)$$

setzen.

Diese Kraft wirkt aber nicht rechtwinkelig gegen die senkrechte Wand, sondern weicht von derselben um den Reibungswinkel ϱ_1 ab. Der horizontale Component derselben ist:

$$P_1 = P\, cos.\varrho_1, \text{ annähernd } = P,$$

und der verticale Component:

$$P_2 = P\, sin.\varrho_1.$$

Nach den Versuchen von Audé ist der Coefficient der Reibung zwischen Sand und einer hölzernen Bekleidungswand im Mittel:

$$\varphi_1 = tang.\, \varrho_1 = 0{,}6, \text{ daher } sin.\, \varrho_1 = 0{,}515$$

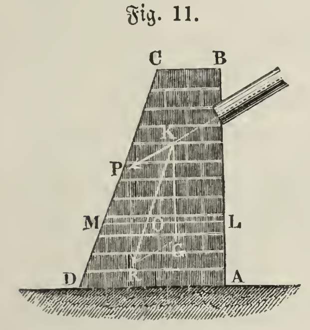
und der entsprechende Reibungswinkel:

$$\varrho_1 = 31 \text{ Grad.}$$

Anmerkung. Die Versuche Aubé's mit besonderen Instrumenten (Waagen) behandelt eine am Schluß des Capitels aufgeführte Schrift.

Futtermauern. Eine Futtermauer AC, Fig. 11, kann durch eine §. 11
Kraft $\overline{KP} = P$, fortgeschoben oder umgestürzt werden. Denken wir uns diese Mauer aus in horizontalen Schichten über einander liegenden Steinen bestehend, so können wir annehmen, daß sich beim Nachgeben der Mauer eine horizontale Fuge ML bilde, über welcher der darüber liegende Theil CL entweder fortgleitet oder umschlägt. Der Sicherheit wegen wollen wir auf das Bindemittel der Steine gar nicht Rücksicht nehmen, sondern nur die Reibung zwischen den letzteren in Betracht ziehen. Aus der Kraft P und dem Gewichte G des Mauertheiles CL bildet sich eine Mittelkraft $\overline{KR} = R$, von deren Größe und Richtung die Möglichkeit des Umstürzens und Fortgleitens dieses Mauerstückes abhängt. Ist der Winkel RKG, um welchen diese Mittelkraft von der Normale zur Trennungsfläche LM abweicht, kleiner als der Reibungswinkel ϱ, so kann ein Fortschieben der Mauer nicht eintreten, (I., §. 172), und geht die Kraftrichtung nicht außerhalb der Trennungsfläche LM vorbei, sondern durch dieselbe hindurch, so ist auch ein Umstürzen um die Kante M unmöglich (I., §. 141). In den meisten Fällen der Anwendung wird man finden, daß das Umstürzen eher erfolgt als das Fortschieben, weshalb bei der Anlage von Mauern vorzüglich auf das erstere Rücksicht zu nehmen ist. Das Umstürzen oder Kippen wird besonders noch dadurch erleichtert, daß es in der Regel nicht um die äußere Kante M, sondern um einen der Mittelkraft R näher liegenden Punkt vor sich geht, und zwar aus dem Grunde, weil der in M concentrirte Druck ein Nachgeben oder Zerbröckeln der Steine in der Nähe dieses Punktes zunächst herbeiführt.

Fig. 11.



Wenn man für eine ganze Reihe Bruchflächen die Durchschnittspunkte der Mittelkräfte R aufsucht, und diese durch eine Linie verbindet, so erhält man in dieser die sogenannte Widerstandslinie (franz. ligne de résistance; engl. line of resistance), und man sieht nun leicht ein, daß ein Umstürzen der Mauer nicht eintritt, so lange diese Linie nicht aus der Mauer herausfällt.

Die Art und Weise, wie die Widerstandslinie NO eines Pfeilers oder einer Mauer $ABCD$, Fig. 12 (a. f. S.), gefunden wird, ist folgende. Man

zerlege die Mauer durch Horizontalebenen LM, $L_1 M_1$ in Stücke, deren Gewichte G, G_1, G_2 sein mögen, und suche deren Schwerpunkte S, S_1 und S_2. Nun vereinige man das Gewicht G des ersten Stückes CL mit der Kraft P durch das Parallelogramm der Kräfte und bestimme dadurch die Mittelkraft $\overline{KR} = R$, deren Richtung die Ebene LM in einem Punkte O der gesuchten Widerstandslinie schneidet. Hierauf verlegt man den Angriffspunkt K dieser Kraft nach dem Punkte K_1, in welchem die verticale Schwerlinie durch den Schwerpunkt S_1 vom zweiten Körperstücke ML_1 die Richtung KR durchschneidet, und construirt aus P und der Summe $G + G_1$ der Gewichte von CL und ML_1 ein zweites Kräfteparallelogramm, wodurch sich die Mittelkraft $\overline{K_1 R_1} = R_1$ bestimmt, deren Richtung in $L_1 M_1$ einen zweiten Punkt O_1 der Widerstandslinie bestimmt. Verlegt man ebenso den Angriffspunkt K_1 nach dem Punkte K_2, in welchem die verticale Schwerlinie des dritten Körperstückes AM_1 die Richtung $K_1 R_1$ trifft, und construirt aus P und $G + G_1 + G_2$ eine dritte Mittelkraft $\overline{K_2 R_2} = R_2$, so durchschneidet deren Richtung die Basis AD in einem dritten Punkte N der Widerstandslinie, u. s. w.

Fig. 12.

§. 12 **Widerstandslinie.** Für eine parallelepipedische Mauer $ABCD$, Fig. 13 und Fig. 14, bestimmt sich die Widerstandslinie wie folgt.

1) Nehmen wir an, daß diese Mauer eine einfache Horizontalkraft P, Fig. 13, aufzunehmen habe. Es wird dadurch der Allgemeinheit nichts geschadet, da eine noch hinzutretende Verticalkraft als ein Gewicht angesehen werden kann. Nehmen wir an, daß die Richtung der Kraft P um $FK = a$ von dem Kopfe BC der Mauer abstehe, und denken uns eine horizontale Trennungsebene LM, welche um $KN = x$ unter K liegt. Aus der Kraft P, deren Angriffspunkt K nach der verticalen Schwerlinie FG der Mauer verlegt ist, und aus dem Gewichte G des Mauerstückes CL folgt die Mittelkraft R, welche LM in einem Punkte O der gesuchten Widerstandslinie schneidet, dessen Coordinaten in Hinsicht des Anfangspunktes K, $KN = x$

und $NO = y$ sein mögen. Der Aehnlichkeit der Dreiecke KNO und KGR zufolge ist

$$\frac{NO}{KN} = \frac{RG}{KG}, \text{ d. i.:}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{P}{G} \text{ und daher } y = \frac{P}{G}x.$$

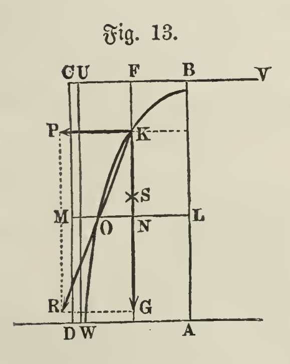


Fig. 13.

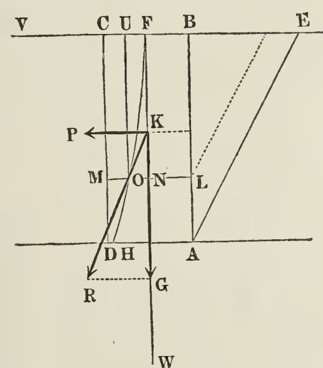


Fig. 14.

Bezeichnet nun b die Breite $AD = BC$ der Mauer, und γ_0 die Dichtigkeit derselben, und zieht man nur den laufenden Fuß Mauer in Betracht, so hat man das Gewicht:

$$G = BC.FN.\gamma_0 = b(a + x)\gamma_0,$$

und daher:

$$y = \frac{Px}{b(a + x)\gamma_0}.$$

Hiernach ist für $x = 0$, auch $y = 0$,

ferner für $x = \infty$: $y = \frac{P}{b\gamma_0}$,

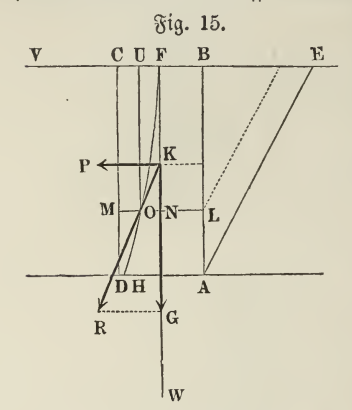
und für $x = -a$: $y = \infty$;

es geht folglich die Widerstandslinie KO, Fig. 13, durch den Punkt K und hat nicht allein die Horizontallinie UV durch den Mauerkopf F, sondern auch eine Verticallinie UW zur Asymptotenaxe, welche um $FU = \frac{P}{b\gamma_0}$ von der verticalen Schwerlinie FS (Fig. 13) der Mauer absteht. Es bildet folglich die Widerstandslinie eine Hyperbel mit den Asymptoten UV und UW.

2) Bei einer Mauer $ABCD$, Fig. 15 (a. f. S.), welche den Erd- oder Wasserdruck auszuhalten hat, ist die Tiefe FK des Angriffspunktes K der Kraft P unter der Mauerkrone F veränderlich und von der Tiefe $FN = x$

der angenommenen Trennungsebene LM unter F abhängig. Da der Mittelpunkt des Erd- und Wasserdruckes (nach §. 4) um $^2/_3$ der Höhe unter dem Kopfe B der Wand AB liegt, so hat man auch hier $FK = {}^2/_3\, FN = {}^2/_3\, x$ zu setzen. Nehmen wir hier F als Anfangspunkt der Coordinaten $FN = x$ und $NO = y$ an, so giebt die Proportion

Fig. 15.



$$\frac{ON}{KN} = \frac{RG}{KG},$$

und es folgt, da $KN = x - {}^2/_3\, x = {}^1/_3\, x$ ist, der Erddruck auf BL:

$$P = {}^1/_2\, x^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

und da das Gewicht von CL, $G = bx\gamma_0$ ist:

$$y = \frac{{}^1/_3\, x\,.\,P}{G} = {}^1/_6\, \frac{\gamma}{b\,\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 . x^2.$$

Diese Gleichung entspricht einer gemeinen Parabel mit dem Scheitel F, der horizontalen Abscisse $FU = NO = y$ und der verticalen Ordinate $UO = FN = x$.

Ist die Erdmasse noch um eine kleine Höhe h_0 über der Mauerkrone aufgeschüttet, so können wir nach §. 8 annähernd:

$$y = \frac{{}^1/_3\,(h_0 + x)\,P}{G} = \frac{\gamma}{6\,b\,\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \frac{(h_0 + x)^3}{x}$$

setzen.

§. 13 **Gleiten der Futtermauern.** Eine Futtermauer $ABCD$, Fig. 15, muß eine gewisse Dicke $AD = BC = b$ erhalten, damit sie durch den Erddruck P nicht zurückgeschoben werde. Ist φ der Coefficient der Reibung an der Grundfläche LM eines Mauerstückes CL von der Breite $BC = b$ und Höhe $LB = x$, so folgt die Reibung oder die Kraft zum Fortschieben dieses Stückes auf LM:

$$P = \varphi\, b\, x\, \gamma_0,$$

und da dieselbe dem Erddruck gegen BL widerstehen soll, so ist:

$$\varphi\, b x \gamma_0 = {}^1/_2\, x^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$

zu setzen, und es ergiebt sich hieraus die gesuchte Mauerdicke, wenn man noch für x seinen größten Werth $AB = h$ einführt:

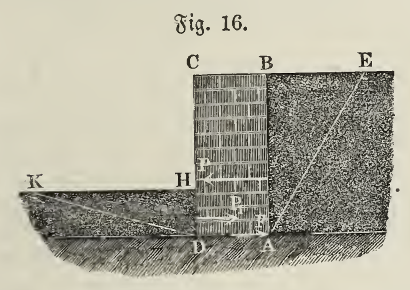
$$b = \frac{\gamma h}{2\,\varphi\,\gamma_0}\left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Der Sicherheit wegen führt man noch einen Stabilitätscoefficienten $\delta = 2$ ein, und setzt daher:

$$b = \frac{\gamma h}{\varphi \gamma_0} \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Widerstand gegen das Fortschieben auf dem Boden zu vergrößern, welches sich um so nöthiger macht, wenn der Boden, auf welchem die Futtermauer ruhen soll, lettig oder mit Wasser durchdrungen ist, wobei der Reibungscoefficient φ zwischen der Mauer und dem Grunde auf 0,3 herabgehen kann, gräbt man eine Vertiefung AH in den Grund und setzt die Mauer AC, Fig. 16, in dieselbe. Es widersteht dann dem activen Erddruck vor der Fläche AB nicht allein die Reibung der Grundfläche AD auf dem Boden, sondern auch noch der passive Druck der Erdmasse DHK vor der Mauerfläche CD.

Fig. 16.



Ist G das Gewicht der Stützmauer AC, also φG ihre Reibung auf dem Grunde AB, sowie h die Höhe der Erdmasse auf der inneren und h_1 die Höhe der Erdmasse auf der äußeren Seite, sind ferner ϱ und γ der Reibungswinkel und die Dichtigkeit für jene, und ϱ_1 und γ_1 der Reibungswinkel und die Dichtigkeit für diese Erdmasse, so hat man hiernach zu setzen:

$$\varphi G + \tfrac{1}{2} h_1^2 \gamma_1 \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho_1}{2}\right)\right]^2 = \tfrac{1}{2} h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

wonach, wenn man wieder $\delta = 2$ annimmt,

$$b = \frac{h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - h_1^2 \gamma_1 \left[tang.\left(45^0 + \frac{\varrho_1}{2}\right)\right]^2}{\varphi h \gamma_0} \text{ folgt.}$$

Fällt der hiernach berechnete Werth von b kleiner aus als die nöthige Dicke $b_1 = \frac{\gamma (h - h_1)}{\varphi \gamma_0} \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$ für das freie Mauerstück von der Höhe $h - h_1$, so ist natürlich die letztere in Anwendung zu bringen.

Die einer gegebenen Mauerdicke entsprechende Tiefe DH, Fig. 16, des Grundes für diese Mauer ist:

$$h_1 = tang.\left(45^0 - \frac{\varrho_1}{2}\right) \sqrt{\frac{h^2 \gamma \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - 2 \varphi G}{\gamma_1}}.$$

Um zweifache Sicherheit zu erhalten, wendet man die Tiefe

$$h_1 = 1{,}414\, tang. \left(45^0 - \frac{\varrho_1}{2}\right) \sqrt{\frac{h^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \varphi G}{\gamma_1}}$$

an.

Beispiel. Wie tief muß eine parallelepipedische Mauer von 8 Fuß Breite und 13 Fuß Höhe von außen im Grunde stehen, damit sie innen den Druck des vom Fuße bis zum Kopfe der Mauer stehenden Wassers auszuhalten vermag, ohne auszugleiten? Hier ist $\varrho = 0$, $\gamma = 61{,}75$ Pfund, $h = 13$ Fuß, ferner $\varphi = 0{,}3$, $\varrho_1 = 30^0$, $\gamma_1 = 1{,}6 \,.\, 61{,}75 = 98{,}8$ Pfund, und G, wenn man die Dichtigkeit der Mauer $\gamma_0 = 132$ Pfund annimmt, $= 8 \,.\, 13 \,.\, 132 = 13728$ Pfund, daher die gesuchte Grundtiefe:

$$h_1 = 1{,}414 \,.\, tang. (45^0 - 15^0) \sqrt{\frac{13^2 \,.\, 61{,}75 - 0{,}3 \,.\, 13728}{98{,}8}}$$

$$= 1{,}414\, tang.\, 30^0 \sqrt{\frac{10435 - 4119}{98{,}8}} = 1{,}414 \,.\, 0{,}57735 \sqrt{\frac{6316}{98{,}8}} = 6{,}53 \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Der Reibungscoefficient für Mauer- und Ziegelsteine ist (Bd. I., §. 174), wenn dieselben unmittelbar auf einander liegen, = 0,67 bis 0,75; und wenn frischer Mörtel zwischen beiden liegt, nur 0,60 bis 0,70. Der eingetrocknete Mörtel wirkt nun auch durch Cohäsion oder Adhärenz, und es ist nach Boistard der Zusammenhang durch Mörtel auf einen Quadratfuß Fläche, 800 bis 1500 Pfund; nach den neueren Versuchen von Morin aber 2000 bis 5000 Pfund.

§. 14 **Kippen der Futtermauern.** Die Stabilität einer Stütz- oder Futtermauer fordert nun, daß die Widerstandslinie nicht bloß innerhalb der Mauer bleibe, sondern auch der äußeren Mauerfläche nicht sehr nahe komme (II., §. 11). Der berühmte Marschall Vauban giebt die praktische Regel: es soll die Widerstandslinie die Basis der Mauer in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung von der verticalen Schwerlinie der Mauer höchstens $^4/_9$ der Entfernung der äußersten Mauerkante von eben dieser Schwerlinie ist. Dieser Regel zufolge ist die Dicke der Mauer $^3/_2$mal so groß als die einfache Formel angiebt, weil hiernach die Stabilität $^3/_2 \,.\, ^3/_2 = {}^9/_4$mal so groß ausfällt als das nach der einfachen Formel berechnete. Nennen wir nach Poncelet die Reciproke dieser Zahl, oder das Verhältniß zwischen der Entfernung der äußersten Mauerkante von der verticalen Schwerlinie und der Entfernung des Punktes der Widerstandslinie in der Mauerbasis von eben dieser Schwerlinie den Stabilitätscoefficienten und bezeichnen wir ihn allgemein durch δ, so erhalten wir für die Stabilität einer den Erddruck aufnehmenden parallelepipedischen Mauer, indem wir in der Formel des §. 12 statt x die Mauerhöhe h und statt y, $\frac{^1/_2 b}{\delta}$ einführen:

$$\frac{b}{2\delta} = \frac{\gamma}{6 b \gamma_0} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 \frac{(h + h_0)^3}{h},$$

und daher die erforderliche Mauerdicke:

$$b = (h + h_0)\ tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) \sqrt{\frac{\delta\,\gamma}{3\,\gamma_0} \cdot \frac{h + h_0}{h}}.$$

Setzt man für $\delta = \frac{9}{4}$ und für $\frac{\gamma}{\gamma_0}$ den Mittelwerth $\frac{2}{3}$ ein, so erhält man:

$$b = 0{,}707\ (h + h_0) \sqrt{\frac{h + h_0}{h}} \cdot tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right).$$

Nimmt man $\varrho = 30^0$ an, so folgt:

$$b = 0{,}4\ (h + h_0) \sqrt{\frac{h + h_0}{h}}.$$

Poncelet giebt für Fälle, wo h_0 zwischen 0 und $2\,h$ enthalten ist,

$$b = 0{,}865\ (h + h_0)\ tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_0}},$$ und annähernd:

$$b = 0{,}285\ (h + h_0)$$ an.

Beispiel. Welche Dicke muß eine parallelepipedische Mauer erhalten, welche bei 28 Fuß Höhe einen Haldensturz von 35 Fuß Höhe aufhalten soll, vorausgesetzt, daß die Dichtigkeit der Mauer $\gamma_0 = 2{,}4 \,.\, 61{,}75 = 148{,}2$ Pfund, die Dichtigkeit des Haldensturzes (grober Gesteinstücke) $\gamma = 1{,}3 \,.\, 61{,}75 = 80{,}275$ Pfund ist, und der Reibungswinkel $\varrho = 50^0$ beträgt? Nach der Formel von Poncelet ist

$$b = 0{,}865 \,.\, 35\ tang.\ (45^0 - 25^0) \sqrt{\frac{13}{24}} = 30{,}3 \,.\, \sqrt{\frac{13}{24}} \,.\, tang.\, 20^0$$
$$= 8{,}11 \text{ Fuß}.$$

Poncelet's Tabelle. Zur Erleichterung der Rechnung hat Poncelet eine besondere Tabelle berechnet, worin die Werthe von $\frac{b}{h}$ aufgeführt sind, welche gegebenen Werthen von $\frac{h_0}{h}$, $\frac{\gamma_0}{\gamma}$ und $tang.\,\varrho$ oder φ entsprechen. Von ihr ist folgende Tabelle nur ein Auszug. Uebrigens sind hierin zwei Fälle von einander unterschieden, nämlich der Fall, wenn die Masse so hoch steht, daß sie, wie Fig. 17 zeigt, die ganze Mauerkappe $B\,C$ bedeckt, und der Fall, wenn, wie in Fig. 18 zu sehen ist, die Masse um 0,2 der Höhe h von der §. 15

Fig. 17.

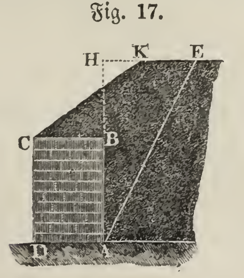
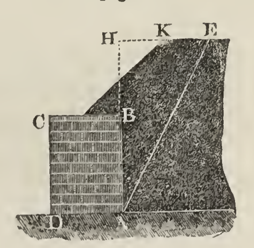


Fig. 18.



äußeren Mauerfläche zurücksteht, daß also ein $0{,}2 . h$ breiter Wallweg CL oder eine sogenannte Berme frei bleibt. Die Einrichtung und der Gebrauch dieser Tabelle sind aus den Ueberschriften erklärlich.

Fig. 19. Fig. 20.

Hat man in der ersten Verticalcolumne den gegebenen Werth von $\frac{h_0}{h}$ gefunden, so geht man von da so weit horizontal herüber, bis man unter die gegebenen Werthe von $\frac{\gamma_0}{\gamma}$ u. s. w. gelangt.

In dieser Tabelle sind vorzüglich die Grenzwerthe berücksichtigt; so entspricht z. B. $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1$ ziemlich der einen und $\frac{\gamma_0}{\gamma} = {}^5/_3$ der anderen Grenze, ferner kommt φ oder $tang. \varrho = 0{,}6$ bei der lockersten und $\varphi = 1{,}4$ bei der dichtesten Erde vor. In vielen Fällen der Anwendung ist es nöthig, das gesuchte Verhältniß durch Interpoliren zu ermitteln.

Die angegebenen Werthe beziehen sich auf parallelepipedische und mit Mörtel aufgeführte Mauern. Haben die Mauern eine äußere Böschung $= 0{,}2$, so gilt die gefundene Breite b nicht für die Sohle, sondern für den Querschnitt bei $^1/_9$ der Mauerhöhe über der Sohle; und ist die Mauer trocken aufgeführt, so muß man der Dicke ein Viertel berechneten Werthes zusetzen.

Beispiel. Es soll für eine 22 Fuß hohe Erdmasse, deren Reibungswinkel 45^0 beträgt, die Stärke einer 12 Fuß hohen Stützmauer gefunden werden, deren Dichtigkeit 1,5mal so groß als die der Erdmasse ist, unter der Voraussetzung, daß die Mauerkappe von der Erdmasse ganz bedeckt wird. Hier ist $h = 12$ und $h_0 = 22 - 12 = 10$, daher:

$$\frac{h_0}{h} = {}^5/_6 = 0{,}833\ldots;$$

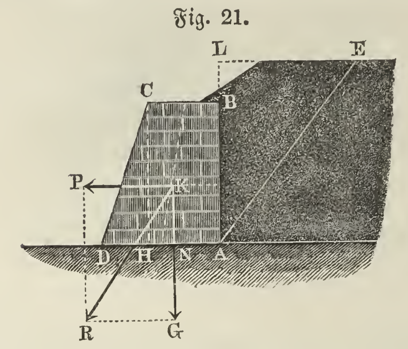
ferner $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1{,}5$ und $\varphi = 1$, daher findet man in der sechsten Zeile, $\frac{b}{h} = 0{,}391$ oder genauer $= 0{,}393$, und sonach die gesuchte Mauerdicke:

$$b = 0{,}393 . 12 = 4{,}72 \text{ Fuß}.$$

Werthe von $\frac{h_0}{h}$	Werthe von $\frac{b}{h}$ für $\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1;\ \varphi = 0{,}6.$ Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1;\ \varphi = 1{,}4.$ Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = 1{,}5;\ \varphi = 1.$ Berme:			$\frac{\gamma_0}{\gamma} = {}^5/_3;\ \varphi = 0{,}6.$ Berme:		$\frac{\gamma_0}{\gamma} = {}^5/_3;\ \varphi = 1{,}4.$ Berme:	
	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= b$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$	$= 0$	$= 0{,}2\,h$
0,0	0,452	0,452	0,258	0,258	0,270	0,270	0,270	0,350	0,350	0,198	0,198
0,1	0,498	0,507	0,282	0,290	0,303	0,306	0,303	0,393	0,398	0,222	0,229
0,2	0,548	0,563	0,309	0,326	0,336	0,342	0,326	0,439	0,445	0,249	0,262
0,3	0,604	0,618	0,338	0,361	0,368	0,375	0,343	0,485	0,489	0,274	0,283
0,4	0,665	0,670	0,369	0,394	0,399	0,405	0,357	0,532	0,522	0,303	0,299
0,5	0,726	0,717	0,402	0,423	0,436	0,431	0,368	0,579	0,549	0,332	0,314
0,6	0,778	0,754	0,436	0,450	0,477	0,457	0,377	0,617	0,572	0,360	0,328
0,7	0,824	0,790	0,472	0,476	0,512	0,481	0,385	0,645	0,593	0,387	0,343
0,8	0,867	0,820	0,510	0,501	0,544	0,504	0,391	0,668	0,610	0,413	0,357
0,9	0,903	0,848	0,541	0,524	0,575	0,523	0,398	0,690	0,624	0,437	0,371
1,0	0,930	0,873	0,571	0,546	0,605	0,540	0,405	0,707	0,636	0,457	0,384
1,4	1,023	0,945	0,684	0,624	0,696	0,602	0,416	0,762	0,672	0,537	0,428
2,0	1,107	1,004	0,812	0,714	0,795	0,655	0,425	0,811	0,705	0,622	0,475
3,0	1,180	1,060	0,981	0,835	0,892	0,717	0,435	0,852	0,731	0,726	0,531
5,0	1,247	1,101	1,206	0,994	1,002	0,779	0,445	0,883	0,751	0,862	0,596
10,0	1,283	1,137	1,508	1,182	1,109	0,839	0,452	0,909	0,771	1,013	0,667
20,0	1,309	1,156	1,757	1,327	1,171	0,878	0,456	0,922	0,780	1,129	0,712
30,0	1,316	1,162	1,866	1,389	1,194	0,894	0,458	0,926	0,783	1,174	0,730
∞	1,337	1,175	2,144	1,541	1,243	0,927	0,461	0,934	0,789	1,279	0,769

§. 16 **Geböschte Futtermauern.** Um an Material für die Futtermauer zu ersparen, giebt man derselben sehr gewöhnlich eine äußere Böschung, wie $ABCD$, Fig. 21. Ist für dieselbe die obere Breite $BC = b$, die Höhe $AB = h$, und die Böschung auf jeden Fuß Höhe, $= \nu$, also auf die ganze Höhe h, $DH = \nu h$, so hat sie das Gewicht:

Fig. 21.



$$G = \left(b + \frac{\nu h}{2}\right) h \gamma_0,$$

und es ist folglich bei dem Reibungscoefficienten φ für die Grundfläche AD, der Widerstand der Mauer gegen das Fortschieben:

$$F = \varphi G = \varphi \left(b + \frac{\nu h}{2}\right) h \gamma_0.$$

Bei einer kleinen Ueberschüttung von der Größe $BL = h_0$, ist der Erddruck:

$$P = \frac{1}{2} (h + h_0)^2 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

setzen wir folglich diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir die entsprechende obere Mauerbreite

$$b = \frac{1}{2} \frac{(h + h_0)^2}{\varphi h} \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \nu h,$$

oder, wenn man wieder der Sicherheit wegen den doppelten Werth annimmt,

$$1)\quad b = \frac{(h + h_0)^2}{\varphi h} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \nu h,$$

und folglich die untere Breite:

$$b_1 = b + \nu h = \frac{(h + h_0)^2}{\varphi h} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2.$$

Um den Widerstand der Mauer gegen das Umkippen zu finden, müssen wir das Moment des Erddruckes P in Hinsicht auf die äußere Mauerkante D dem Momente des Mauergewichtes G gleichsetzen. Der Hebelarm der Kraft P läßt sich $KN = \frac{h + h_0}{3}$ setzen, folglich ist das Moment des Erddruckes:

$$\frac{P(h + h_0)}{3} = \frac{1}{6} (h + h_0)^3 \gamma \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2;$$

das Moment des Gewichtes G besteht aus dem Momente des dreiseitigen

Prismas CDH und aus dem des Parallelepipedes AC, und ist der Lehre vom Schwerpunkte zufolge zu setzen:

$$\frac{1}{2} . CH . DH . \gamma_0 . \frac{2}{3} DH + AB . BC . \gamma_1 . (DH + \frac{1}{2} HA)$$
$$= \frac{1}{2} \nu h^2 \gamma_0 . \frac{2}{3} \nu h + b h \gamma_0 . (\nu h + \frac{1}{2} b)$$
$$= [\frac{1}{3} \nu^2 h^2 + (\nu h + \frac{1}{2} b) b] h \gamma_0.$$

Wenn man diese Ausdrücke einander gleich setzt, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$[2 \nu^2 h^2 + (6 \nu h + 3 b) b] h = \frac{\gamma}{\gamma_0} (h + h_0)^3 \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2,$$

oder:

$$b^2 + 2 \nu h b = \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{(h + h_0)^3}{3 h} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 - \frac{2}{3} \nu^2 h^2,$$

deren Auflösung:

$$b = - \nu h + \sqrt{\frac{\gamma}{3 \gamma_0} . \frac{(h + h_0)^3}{h} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3} \nu^2 h^2}$$

giebt.

Führen wir wieder den Stabilitätscoefficienten $\delta (= \frac{9}{4})$ ein, so erhalten wir die gesuchte Mauerdicke:

$$2)\; b = - \nu h + \sqrt{\frac{\delta \gamma}{3 \gamma_0} . \frac{(h + h_0)^3}{h} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3} \nu^2 h^2},$$

und folglich die untere Breite:

$$b_1 = b + \nu h = \sqrt{\frac{\delta \gamma}{3 \gamma_0} . \frac{(h + h_0)^3}{h} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3} \nu^2 h^2}.$$

Natürlich ist von den unter (1) und (2) gefundenen Werthen für b_1 der größere anzuwenden. Nach den Erfahrungen soll man diese Breite, um den zerstörenden Wirkungen des Wetter- und Temperaturwechsels so viel wie möglich entgegenzuwirken, nicht unter $2\frac{1}{2}$ Fuß machen.

Beispiel. Es ist für einen Haldensturz von 24 Fuß Höhe eine 20 Fuß hohe Futtermauer mit der äußeren Böschung $\nu = 0,2$ zu construiren. Man soll die Breite dieser Mauer unter der Voraussetzung bestimmen, daß $\varphi = 0,4$, $\varrho = 36$ Grad und $\frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{5}{3}$ ist. Die erste Formel giebt die untere Mauerbreite:

$$b_1 = b + \nu h = \frac{(h + h_0)^2}{\varphi h} . \frac{\gamma}{\gamma_0} \left[tang. \left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2$$
$$= \frac{24^2}{0,4 . 20} . \frac{3}{5} (tang. 27^0)^2 = \frac{216}{5} . (0,5095)^2 = 11,21 \text{ Fuß},$$

und folglich die Kronenbreite:

$$b = b_1 - \nu h = 11,21 - 0,2 . 20 = 7,21 \text{ Fuß}.$$

Nach der zweiten Formel erhält man hingegen:

$$b_1 = b + \nu h = \sqrt{\frac{\delta \gamma}{3\gamma_0} \cdot \frac{(h + h_0)^3}{h} \left[tang.\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)\right]^2 + \frac{1}{3} \nu^2 h^2}$$

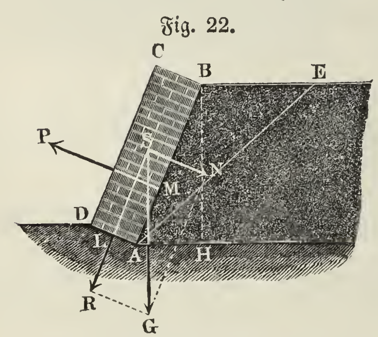
$$= \sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{24^3}{20} \cdot (0{,}5095)^2 + \frac{1}{3} . 0{,}04 . 400} = \sqrt{80{,}74 + 5{,}33}$$

$= \sqrt{86{,}07} = 9{,}27$ Fuß, und

$b = 9{,}27 - 4 = 5{,}27$ Fuß, also die kleineren Werthe.

§. 17 **Geneigte Futtermauern.** Futtermauern, welche nach der zu diesem Zwecke abgeböschten lockeren Masse hin geneigt sind, und daher theilweise auf dieser aufliegen, widerstehen dem Drucke dieser Masse noch mehr als aufrechtstehende Futtermauern. Ist h die senkrechte Höhe, α_1 der Neigungswinkel BAH einer parallelepipedischen Futtermauer AC, Fig. 22, so haben wir nach §. 9 den Druck der Erdmasse gegen die Wand AB zu setzen:

Fig. 22.



$$P = \frac{h^2 \gamma}{2 \sin. \alpha_1} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2.$$

Diesem Drucke wirkt das Gewicht G der Mauer mit dem Componenten $N = G \cos. \alpha_1$ direct und mit dem Componenten $R = G \sin. \alpha_1$ durch die Reibung $\varphi R = \varphi G \sin. \alpha_1$ entgegen; setzt man daher $N + \varphi R = P$, so erhält man die Bestimmungsgleichung:

$$G\,(\cos. \alpha_1 + \varphi \sin. \alpha_1) = \frac{h^2 \gamma}{2 \sin. \alpha_1} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2,$$

daher für das Gewicht:

$$G = \frac{h^2 \gamma}{2\,(\cos. \alpha_1 + \varphi \sin. \alpha_1) \sin. \alpha_1} \cdot \left(\frac{\sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{\sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2.$$

Ist noch b die Breite $AD = BC$ der Mauer und $l = \frac{h}{\sin. \alpha_1}$ die schräge Mauerhöhe $AB = CD$, so kann man

$$G = b\, l\, \gamma_0 = \frac{b\, h\, \gamma_0}{\sin. \alpha_1}$$

setzen, und erhält so, wenn man noch einen Stabilitätscoefficienten $\delta = 2$ einführt,

$$1)\ b = \frac{h}{cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

$$= \frac{l}{cotang.\,\alpha_1 + \varphi} \cdot \frac{\gamma_0}{\gamma} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2.$$

Damit die Mauer durch ihr Gewicht G dem Erddruck P in Hinsicht auf das Kippen um die äußere Kante D widerstehe, muß das Moment von G gleich dem von P sein. Nun ist aber das Moment von G gleich der Summe der Momente von N und R, d. i.:

$$N.\overline{LS} + R.\overline{DL} = \frac{N.l}{2} + \frac{R.b}{2} = (l\,cos.\,\alpha_1 + b\,sin.\,\alpha_1)\,\frac{G}{2},$$

und das Moment von P:

$= P.\overline{AM} = \frac{1}{3} P.l$; es läßt sich daher

$$(l\,cos.\,\alpha_1 + b\,sin.\,\alpha_1)\,\frac{G}{2} = \frac{1}{3} P.l, \text{ oder}$$

$$(l\,cos.\,\alpha_1 + b\,sin.\,\alpha_1)\,\frac{b\,l\,\gamma_0}{2} = \frac{l}{3} \cdot \frac{h^2\gamma}{2\,sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

setzen, so daß nun die Bestimmungsgleichung

$$(l\,cos.\,\alpha_1 + b\,sin.\,\alpha_1)\,b = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot \frac{h^2}{sin.\,\alpha_1} \cdot \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2$$

folgt, deren Auflösung die gesuchte Mauerbreite

$$b = \left[-\frac{1}{2} cotang.\alpha_1 + \sqrt{\frac{1}{3}\frac{\gamma}{\gamma_0} \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2 + \frac{1}{4}(cotang.\,\alpha_1)^2} \right] l,$$

oder, wenn man noch den Sicherheitscoefficienten $\delta = \frac{9}{4}$ einführt,

$$2)\ b = \left[-\frac{1}{2} cotang.\,\alpha_1 + \sqrt{\frac{\delta\gamma}{3\gamma_0} \left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)} \right)^2 + \frac{1}{4}(cotg.\alpha_1)^2} \right] l$$

giebt.

Natürlich ist auch hier der größere der beiden Werthe für b in der Praxis anzuwenden.

Beispiel. Wenn die Haldenmasse von 24 Fuß Höhe des Beispieles im vorigen Paragraphen durch eine Futtermauer von 70 Grad Neigung gestützt werden soll, so ist für dieselbe:

$$\left(\frac{sin.\left(\frac{\alpha_1 - \varrho}{2}\right)}{sin.\left(\frac{\alpha_1 + \varrho}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{sin.\left(\frac{70 - 36^0}{2}\right)}{sin.\left(\frac{70 + 36^0}{2}\right)}\right)^2 = \left(\frac{sin.\ 17^0}{sin.\ 53^0}\right)^2 = 0{,}1340,$$

ferner:

$$l = \frac{h}{sin.\ \alpha_1} = \frac{24}{sin.\ 70^0} = 25{,}54 \text{ und } cotang.\ \alpha = cotang.\ 70^0 = 0{,}3640,$$

daher folgt, wenn nun noch $\varphi = 0{,}4$ und $\frac{\gamma}{\gamma_0} = {}^3/_5$ ist, nach der ersteren Formel die nöthige Mauerdicke:

$$b = \frac{25{,}54}{0{,}3640 + 0{,}4} \cdot {}^3/_5 \cdot 0{,}1340 = \frac{25{,}54 \,.\, 0{,}0804}{0{,}7640} = 2{,}68 \text{ Fuß},$$

und dagegen nach der zweiten:

$$b = [- {}^1/_2 \,.\, 0{,}3640 + \sqrt{{}^3/_4 \,.\, {}^3/_5 \,.\, 0{,}1340 + (0{,}1820)^2}] \,.\, 25{,}54$$
$$= (- 0{,}1820 + \sqrt{0{,}0603 + 0{,}0331}) \,.\, 25{,}54 = 0{,}1236 \,.\, 25{,}54$$
$$= 3{,}157 \text{ Fuß};$$

also ist in beiden Fällen die nöthige Mauerdicke viel kleiner als im angeführten Beispiel mit einer senkrechten Mauer.

Anmerkung 1. Aus beiden Gleichungen ist zu ersehen, daß nicht allein die Breite b, sondern auch der Cosinus des Neigungswinkels α_1 mit der Höhe h der Futtermauer zu- und abnimmt, daß daher einer niederigen Futtermauer entweder eine kleinere Breite oder ein größerer Neigungswinkel entspricht als einer höheren. Deshalb giebt man auch oft, um an Material zu ersparen, den Futtermauern entweder eine Böschung, wobei ihre Breite von unten nach oben zu abnimmt, oder einen Zirkel, wobei der Neigungswinkel derselben gegen den Horizont von unten nach oben allmälig größer und größer wird.

Anmerkung 2. Der erste gründliche Schriftsteller über den Erddruck ist Coulomb. S. Théorie des machines simples par Coulomb. Weiter verfolgte diesen Gegenstand Prony in seinen Leçons sur la poussée des terres (1802); nächstdem findet man den Gegenstand gut und gedrängt bearbeitet in Navier's Leçons sur l'application de la mécanique etc. T. I., sowie in Persy's Cours de Stabilité des constructions. Ein besonderes Werk, in welchem auch die Beobachtungen und Theorien über den Erddruck aller seiner Vorgänger abgehandelt werden, lieferte Mayniel (1808) unter dem Titel: Traité expérimental etc. de la poussée des terres. Neue und in ziemlich großem Maßstabe ausgeführte Versuche sind von C. Martony de Köszegh angestellt und in folgendem Werke veröffentlicht worden: Versuche über den Seitendruck der Erde, ausgeführt auf höchsten Befehl u. s. w. und verbunden mit den theoretischen Abhandlungen von Coulomb und Français, Wien 1828. Das vollständigste Werk über den Erddruck u. s. w. hat aber Poncelet geliefert. Es ist dasselbe

aus dem Mémorial de l'officier du génie (1838) vom Herrn Lahmeyer übersetzt und unter folgendem Titel herausgegeben worden: Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, Braunschweig 1844. Gut und zum Theil eigenthümlich behandelt den Erddruck: Moseley in seinen Mechanical principles of Engineering and Architecture. Auch Hagen handelt dieses Capitel im zweiten Theile seiner Wasserbaukunst kurz ab; er verfolgt aber dabei eine besondere Ansicht. Ferner ist neu erschienen: Nouvelles Expériences sur la poussée des terres, par Audé. Paris 1849. Auch gehört hierher die Schrift: Recherches expérimentales sur les Glissemens spontanés des Terrains argileux, par Alex. Collin, Paris 1846, wovon ein deutscher Auszug in Bornemann's &c. „Ingenieur", Band I., zu finden ist. Endlich findet man einen Artikel über diesen Gegenstand in den Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol. IV., Part. II. von John Neville, unter dem Titel: An Investigation of some Formulae for Finding the Maximum Amount of Resistance acting in any direction required to sustain banks of earth or other materials etc. Ueber die Bedingnisse des Gleichgewichtes der Erdmassen bei Einschnitten und Dämmen ist ein Aufsatz von M. de Sazilly in den Annales des ponts et chaussées, 1851, enthalten, auch befindet sich hiervon ein Auszug von Herrn Löhr, in der Zeitschrift für den österr. Ingenieurverein, Jahrgang IV, 1852. Eine neue Theorie des Erddruckes entwickelt Rankine in seinem Manuel of applied Mechanics. Sec. Edition. London 1861.

Zweites Capitel.

Die Theorie der Gewölbe.

Gewölbe. Ein Gewölbe (franz. voûte; engl. arch, vault) ist ein §. 18
System von Körpern, welche mit ihren Seitenflächen so an einander anstoßen und sich zwischen zwei feste Hindernisse so stützen, daß sie nicht allein unter sich, sondern auch mit gewissen Kräften von außen im Gleichgewichte bleiben. Diese Körper sind in der Regel Steine, und heißen deshalb auch Gewölbsteine (franz. voussoirs; engl. voussoirs, arch-stones). Die Flächen, in welchen die Gewölbsteine an einander stoßen, heißen Gewölbfugen (franz. joints; engl. beds, joints). Die Stützen, worauf ein Gewölbe ruht, heißen gewöhnlich Widerlager (franz. pied-droits; engl. abutments), bei Brücken aber Pfeiler (franz. culées, piliers; engl. buttresses, piers). Von den Gewölbsteinen heißt der mittelste oder höchste Schlußstein (franz. clef; engl.

key-stone), und diejenigen, welche an die Widerlager anstoßen, **Kämpfer** (franz. coussinets; engl. imposts). Ein Gewölbe wird zum größten Theil von zwei mehr oder weniger gekrümmten Flächen, den sogenannten **Wölbflächen** oder **Wölbungen** begrenzt, und von ihnen ist die **äußere** (franz. und engl. extrados) und die **innere Wölbung** (franz. und engl. intrados, soffit) zu unterscheiden.

Es giebt in Hinsicht auf die Wölbflächen sehr verschiedene Gewölbe. Am häufigsten kommen die **cylindrischen** oder **Tonnen-Gewölbe** vor, bei denen die Wölbungen cylindrische Flächen bilden. Seltener sind die **Kegelgewölbe**, sowie die **Kloster-** und **Kuppelgewölbe**. Wir handeln hier hauptsächlich nur von den **Cylindergewölben**, und zwar nur von den **horizontalen**, d. h. von denjenigen, welche eine horizontale Axe haben, da verticale und geneigte, oder sogenannte **Kellerhalsgewölbe** nur bei der Ausmauerung von Schächten vorkommen. Solche Gewölbe sind außer den Wölb- und Widerlagsflächen auch noch von zwei parallelen Verticalflächen, den sogenannten **Stirnflächen** (franz. parements; engl. faces) begrenzt. Je nachdem nun die Stirnflächen eines cylindrischen Gewölbes recht- oder schiefwinklig gegen die geometrische Axe dieser Gewölbe stehen, heißen diese **gerade** oder **schiefe Gewölbe** (franz. arches droites oder biaisses; engl. direct, auch square arches, oder oblique, auch skew arches). Die geraden **Tonnengewölbe** (franz. voûtes en berceau; engl. waggon vaults) kommen am häufigsten vor; in neueren Zeiten, namentlich bei den Brücken für Eisenbahnen, sind aber auch nicht selten die schiefen Brücken in Anwendung.

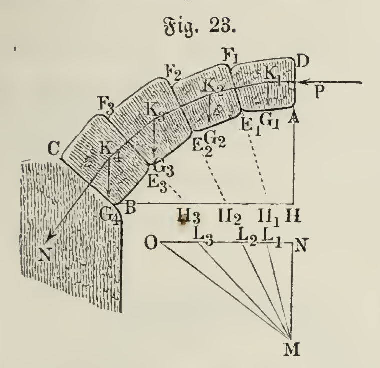
Kreuz- und **Klostergewölbe** (franz. voûtes d'arête; engl. cross-arched vaults) sind sich durchkreuzende Tonnengewölbe. **Kuppel-** oder **Kesselgewölbe** (franz. voûtes en dômes; engl. domes oder cupolas) sind Gewölbe, deren Innenfläche durch Umdrehung einer Curve um eine verticale Axe entsteht.

In Beziehung auf die Wölbung giebt es sehr verschiedene Tonnengewölbe. Der Querschnitt der Wölbflächen kann die Kreisform haben, er kann elliptisch sein, er kann eine Kettenlinie bilden, er kann aus Kreisbogen zusammengesetzt sein, und er kann sogar eine gerade Linie bilden. Man hat hiernach **Kreisgewölbe**, **elliptische**, **Ketten-**, **Korb-** und **scheidrechte Gewölbe**.

§. 19 **Gleichgewicht der Gewölbsteine ohne Reibung.** Untersuchen wir zunächst das Gleichgewicht einer Reihe an einander gestellten Körper, wie AF_1, E_1F_2, E_2F_3 u. s. w., Fig. 23,I., und lassen wir noch die Reibung und Adhäsion zwischen den Fugen oder Berührungsflächen E_1F_1, E_2F_2 u. s. w. außer Acht. Bezeichnen wir die Gewichte der Gewölbsteine

AF_1, E_1F_2, E_2F_3 u. s. w. durch G_1, G_2, G_3 u. s. w. und die Neigungswinkel der Gewölbfugen, d. i. E_1H_1B, E_2H_2B u. s. w. durch α_1, α_2 u. s. w.

Fig. 23.



Soll nun eine Horizontalkraft P den Gewölbstein auf der durch die Fuge E_1F_1 gebildeten schiefen Ebene F_1H_1 erhalten, so ist nach Bd. I., §. 147

$$P = G_1 \; tang. \alpha_1;$$

soll sie ebenso die Steinverbindung AF_2 auf der durch die zweite Fuge E_2F_2 gebildeten Ebene F_2H_2 erhalten, so muß sie

$$P = (G_1 + G_2) \; tang. \alpha$$

sein. Da sie ferner die Steinverbindung AF_3, deren Gewicht $G_1 + G_2 + G_3$ ist, auf der schiefen Ebene zu erhalten hat, so ist auch

$$P = (G_1 + G_2 + G_3) \; tang. \alpha_3;$$

auch hat man

$$P = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \; tang. \alpha_4 \text{ u. s. w.}$$

Hieraus finden wir nun

$$G_1 = P \; cotang. \alpha_1 = P(cotang. \alpha_1 - cotang. 90^0),$$
$$G_2 = P \; cotang. \alpha_2 - G_1 = P \; (cotang. \alpha_2 - cotang. \alpha_1),$$
$$G_3 = P \; cotang. \alpha_3 - (G_1 + G_2) = P(cotang. \alpha_3 - cotang. \alpha_2),$$
$$G_4 = P \; (cotang. \alpha_4 - cotang. \alpha_3) \text{ u. s. w.,}$$

und erhalten durch Vergleichung:

$$G_1 : G_2 : G_3 : G_4 \ldots = (cotang. \alpha_1 - cotang. 90^0)$$
$$: (cotang. \alpha_2 - cotang. \alpha_1) : (cotang. \alpha_3 - cotang. \alpha_2)$$
$$: (cotang. \alpha_4 - cotang. \alpha_3) \text{ u. s. w.;}$$

es verhalten sich also die Gewichte der Gewölbsteine zu einander wie die Differenzen der Cotangenten von den Neigungswinkeln der Gewölbfugen. Ziehen wir ML_1, ML_2 u. s. w. in Fig. 23, II., den Gewölbfugen in Fig. 23, I., E_1F_1, E_2F_2 u. s. w. parallel, und durchschneiden wir alle diese Linien durch eine Horizontale ON, so bekommen wir eine Reihe von Dreiecken, zwischen deren Seiten sich ähnliche Abhängigkeiten nachweisen lassen, wie zwischen den Gewölbsteingewichten. Es ist nämlich

$$NL_1 = MN \; cotang. \alpha_1, \; NL_2 = MN \; cotang. \alpha_2,$$
$$NL_3 = MN \; cotang. \alpha_3 \text{ u. s. w.;}$$

daher auch

$$L_1L_2 = MN \; (cotang. \alpha_2 - cotang. \alpha_1),$$
$$L_2L_3 = MN \; (cotang. \alpha_3 - cotang. \alpha_2) \text{ u. s. w.}$$

Es giebt folglich die Division:

$\overline{NL_1} : \overline{L_1 L_2} : \overline{L_2 L_3}$ u. s. w. $= (cotang.\, \alpha_1 - cotang.\, 90^0)$
$: (cotang.\, \alpha_2 - cotang.\, \alpha_1) : (cotang.\, \alpha_3 - cotang.\, \alpha_2)$ u. s. w.,
und daher die Vergleichung mit dem Obigen:

$$G_1 : G_2 : G_3 \text{ u. s. w.} = \overline{NL_1} : \overline{L_1 L_2} : \overline{L_2 L_3} \text{ u. s. w.}$$

Wenn MN den Horizontaldruck P repräsentirt, so werden folglich die Abschnitte NL_1, $L_1 L_2$, $L_2 L_3$ u. s. w. die Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. der Gewölbsteine vorstellen können.

Noch giebt die Statik die Normaldrücke in den Gewölbfugen:

$$N_1 = \frac{G_1}{cos.\, \alpha_1},\ N_2 = \frac{G_1 + G_2}{cos.\, \alpha_2},\ N_3 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{cos.\, \alpha_3} \text{ u. s. w.,}$$

und da nun

$$ML_1 = \frac{NL_1}{cos.\, \alpha_1} = \frac{G_1}{cos.\, \alpha_1},\ ML_2 = \frac{G_1 + G_2}{cos.\, \alpha_2},$$

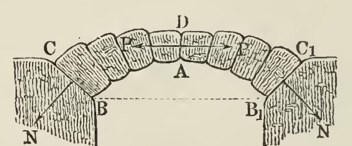
$$ML_3 = \frac{G_1 + G_2 + G_3}{cos.\, \alpha_3} \text{ u. s. w. ist, so folgt noch:}$$

$$N_1 : N_2 : N_3 \text{ u. s. w.} = \overline{ML_1} : \overline{ML_2} : \overline{ML_3} \text{ u. s. w.;}$$

es werden also die Normaldrücke zwischen den Steinen durch die Hypotenusen ML_1, ML_2, ML_3 u. s. w. repräsentirt.

Bei einem vollständigen Gewölbe $B C C_1 B_1$, Fig. 24, finden dieselben Verhältnisse statt, nur ist hier P der Horizontaldruck im Scheitel AD. Bezeichnet hier G das Gewicht des halben Gewölbes, und α den Neigungswinkel der Widerlagsfugen derselben, so hat man:

Fig. 24.



$$P = G\, tang.\, \alpha$$

und den Normaldruck in den Widerlagern:

$$N = \frac{G}{cos.\, \alpha} = \frac{P}{sin.\, \alpha}.$$

Es ist also der Druck (franz. poussée; engl. thrust) zwischen den Gewölbsteinen im Scheitel oder in der Nähe des Schlußsteines am kleinsten, es nimmt derselbe nach den Widerlagern hin immer mehr und mehr zu, und er ist in den Widerlagern am größten.

§. 20 **Gewölblinien.** Der Druck $N = \frac{P}{sin.\, \alpha}$ zwischen zwei Gewölbsteinen läßt sich in die Horizontalkraft

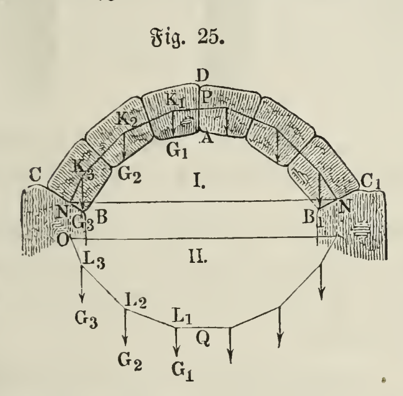
$$H = N\, sin.\, \alpha = P$$

und in eine Verticalkraft

$$V = N\, cos.\, \alpha = \frac{P\, cos.\, \alpha}{sin.\, \alpha} = P\, cotang.\, \alpha = G$$

zerlegen. Es ist also der Horizontaldruck an allen Stellen eines Gewölbes einer und derselbe, und es ist der Verticaldruck dem Gewichte des jedesmaligen Gewölbstückes zwischen der entsprechenden Gewölbfuge und dem Gewölbscheitel gleich. Genau dieselben Verhältnisse sind in Bd. I., §. 154, für ein durch Gewichte G_1, G_2 u. s. w. gespanntes Seilpolygon gefunden, und wir können daher behaupten, daß ein Gewölbe BDB_1, Fig. 25, im Gleichgewichte ist, wenn seine gegen die Gewölbfugen rechtwinkelig stehenden Drucklinien ein Polygon $PK_1K_2\dots N$ (I.) bilden, welches einem umgekehrten Seilpolygon $QL_1L_2\dots O$ (II.) congruent ist, das von Gewichten $G_1, G_2\dots$ gespannt wird, die den Gewichten der Gewölbsteine gleich sind.

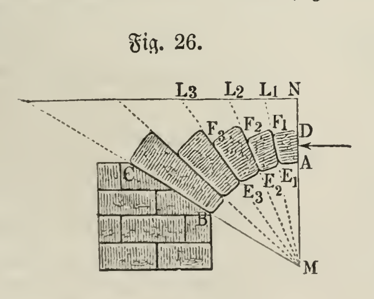
Fig. 25.



Bei einer unendlich großen Anzahl unendlich kleiner Gewichte geht das Seilpolygon in eine Kettenlinie über; ist daher die Zahl der Gewölbsteine unendlich groß, so bilden die Drucklinien derselben auch eine Kettenlinie. Da die gemeine Kettenlinie von einem Seile gebildet wird, wenn gleich lange Stücke desselben gleich belastet sind, so wird diese Curve auch der Drucklinie eines Gewölbes entsprechen, wenn die gleich dicken Steine desselben gleich schwer, also auch gleich hoch sind.

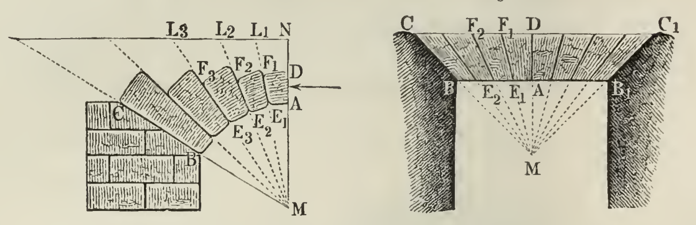
Besteht die innere Wölblinie in einem Kreisbogen AB, Fig. 26, und theilen die radiallaufenden Gewölbfugen dieselbe in lauter gleiche Theile $AE_1 = E_1E_2$ u. s. w., so findet man die dem Gleichgewicht des Gewölbes entsprechenden Höhen der Gewölbsteine, wenn man die erste Gewölbfuge E_1F_1 so weit verlängert, bis sie ein Perpendikel L_1N zur Scheitellinie AN abschneidet, welches der Höhe AD des ersten Gewölbsteines gleich ist; verlängert man nun dieses Perpendikel oder die Horizontale, so schneiden die übrigen ebenfalls verlängerten Fugenlinien hiervon die Höhen der übrigen Gewölbsteine ab, also

Fig. 26.



$$E_1F_1 = L_1L_2,\ E_2F_2 = L_2L_3 \text{ u. s. w.}$$

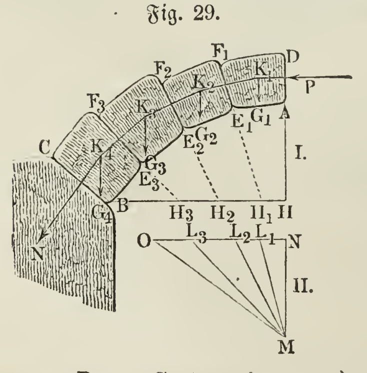
Die Richtigkeit dieser Construction gründet sich darauf, daß man annähernd annehmen kann, die wie die Abschnitte NL_1, $L_1 L_2$, $L_2 L_3$ u. s. w. wachsenden Gewichte der Gewölbsteine verhalten sich wie die Höhen AD, $E_1 F_1$, $E_2 F_2 \ldots$ der Gewölbsteine zu einander. Es ist hiernach auch leicht



einzusehen, daß bei dem scheidrechten Gewölbe (franz. und engl. plate bande) $C A C_1$, Fig. 28, die Gewölbfugen nach einem und demselben Punkte M gerichtet sein müssen.

Ist, wie gewöhnlich, das Gewölbe von oben belastet, so muß man natürlich zum Gewichte eines jeden Gewölbsteines noch den über ihm stehenden Theil der Belastung addiren, um die in den obigen Formeln eintretenden Gewichte G_1, G_2, G_3 u. s. w. zu erhalten.

§. 21 **Reibung zwischen den Gewölbsteinen.** Um für die Praxis brauchbare Formeln zu erhalten, ist es nöthig, noch die Reibung zwischen den Gewölbsteinen zu berücksichtigen. Eigentlich müßten wir auch noch auf die Cohäsion des Mörtels Rücksicht nehmen; da indessen auf diese nicht sehr zu rechnen ist und dieselbe sich sehr oft nach Wegnahme der Gerüste vernullt, so können wir diesen Zusammenhang außer Acht lassen. Bezeichnen wir wieder die Gewichte der Gewölbsteine AF_1, $E_1 F_2$ u. s. w., Fig. 29, durch G_1, G_2 u. s. w., sowie die Neigungswinkel der Gewölbfugen $E_1 F_1, E_2 F_2 \ldots$ gegen den Horizont, mit α_1, α_2 u. s. w. und setzen wir noch den Reibungswinkel $= \varrho$, so haben wir für die Horizontal- oder Normalkraft im Scheitel, welche das Herabgleiten in den Fugen verhindert (Bd. I., §. 176) die Werthe:



$$P_1 = G_1 \, tang. (\alpha_1 - \varrho),$$

$$P_2 = (G_1 + G_2) \, tang. (\alpha_2 - \varrho),$$

$$P_3 = (G_1 + G_2 + G_3) \, tang. (\alpha_3 - \varrho), \text{ u. s. w.}$$

Da die Winkel $\alpha - \varrho$, und also auch deren Tangenten, vom Scheitel des Gewölbes nach den Widerlagern zu abnehmen, die Gewichte

$$G_1,\ G_1 + G_2,\ G_1 + G_2 + G_3 \text{ u. s. w.}$$

aber zunehmen, so bilden die Kräfte P_1, P_2, P_3 nicht immer eine wachsende Reihe, sondern es tritt oft später wieder eine Abnahme ein, es ist also eine von ihnen eines Maximum fähig. Damit nun die Gewölbsteinschicht in jedem Falle vor dem Herabgleiten gesichert werde, ist nöthig, daß die Normalkraft im Scheitel diesem Maximalwerthe gleich sei. Bei einem vollständigen Gewölbe ist also hiernach auch der Druck in dem Schlußsteine oder in der Schlußfuge diesem Maximalwerthe

$$(G_1 + G_2 + \cdots G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho)$$

gleich.

Käme es darauf an, die Gewölbstücke G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. auf den Gewölbfugen hinaufzuschieben, so hätte man dagegen (nach Bd. I., §. 176) im Scheitel die Normalkräfte

$$Q_1 = G_1\ tang.(\alpha_1 + \varrho),$$
$$Q_2 = (G_1 + G_2)\ tang.(\alpha_2 + \varrho),$$
$$Q_3 = (G_1 + G_2 + G_3)\ tang.(\alpha_3 + \varrho) \text{ u. s. w.}$$

nöthig. Wenn nun der Maximalwerth

$$P_m = (G_1 + G_2 + \cdots + G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho)$$

den Minimalwerth

$$Q_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)\ tang.(\alpha_n + \varrho)$$

erreicht oder gar übertrifft, so folgt, daß das Gewölbstück

$$G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

über dem darunterstehenden auf der zwischenbefindlichen Fuge durch die Kraft im Schlußsteine hinaufgeschoben wird; und es läßt sich also behaupten, daß ein Gewölbe überhaupt nur dann Stabilität besitze, wenn der passive Gewölbschub oder Minimalwerth

$$Q_n = (G_1 + G_2 + \cdots + G_n)\ tang.(\alpha_n + \varrho)$$

größer ist als der active Gewölbschub oder Maximalwerth

$$P_m = (G_1 + G_2 + \cdots + G_m)\ tang.(\alpha_m - \varrho).$$

Was die Reihe der Werthe Q_1, Q_2, Q_3 u. s. w. betrifft, so sieht man leicht ein, daß für $\alpha + \varrho = 90^0$, oder $\alpha = 90^0 - \varrho$, wo $tang.(\alpha + \varrho) = \infty$ ist, der entsprechende Werth

$$Q = (G_1 + G_2 + \cdots)\ tang.(\alpha + \varrho)$$

ebenfalls unendlich groß wird, daß also in den Gewölbfugen, deren Neigung gleich oder größer als $90^0 - \varrho$ ist, ein Hinaufschieben nie eintreten kann. Für Neigungswinkel unter $90^0 - \varrho$ fallen dagegen die Tangenten wieder

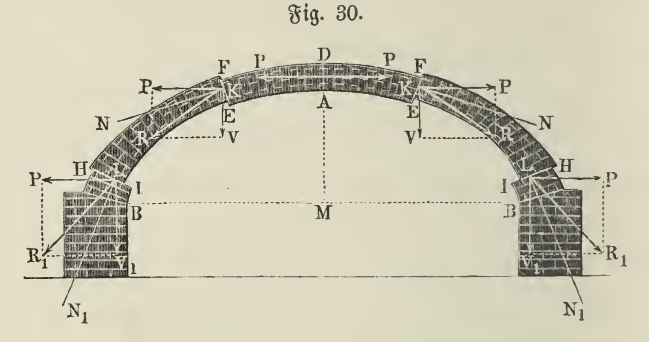
endlich, und zwar um so kleiner aus, je kleiner diese Winkel, je näher also die entsprechenden Gewölbfugen den Widerlagern sind; da aber die Gewichte der Gewölbstücke nach den Fugen zu immer größer und größer werden, so folgt allerdings, daß es für Fugenwinkel zwischen 0 und $90^0 - \varrho$ einen Werth von Q_n geben kann, welcher kleiner als jeder andere ist, und daher auch größer sein muß als der Maximalwerth P_m von P, wenn das Gewölbe im Gleichgewicht bleiben soll.

Da der Reibungswinkel selbst für glatt bearbeitete Gewölbsteine noch beträchtlich, nämlich nach Rondelet, $\varrho = 30^0$, also $tang.\ \varrho = 0{,}57735$ beträgt, so ist, zumal bei den gewöhnlichen Kreisgewölben, der Minimalwerth Q_n fast immer größer als der Maximalwerth P_m oder der Druck im Scheitel, und daher ein Auswärtsschieben der Steine nur selten möglich.

Die durch die Winkel α_m und α_n bestimmten Gewölbfugen heißen die Bruchfugen des Gewölbes, weil in ihnen das Ausgleiten erfolgt, wenn Q_n von P_m übertroffen wird.

§. 22 **Ausgleiten der Gewölbe.** In der Bruchfuge EF (Fig. 30 und 31) des activen Gewölbschubes weicht der Mitteldruck, d. i. die Mittelkraft,

Fig. 30.



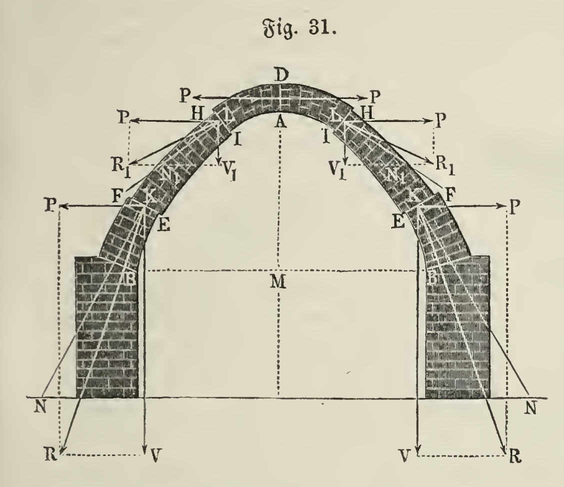
R aus dem (horizontalen) Gewölbschube P und der Verticalkraft

$$V = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$$

um den Reibungswinkel $RKN = \varrho$ von der Normale KN zur Gewölbfuge EF nach unten zu ab, wogegen in der Bruchfuge HI des passiven Gewölbschubes der Mitteldruck oder die Mittelkraft R_1 aus dem Gewölbschube P und der Verticalkraft $V_1 = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ um einen gewissen Winkel $R_1\,LN_1$ von der Normale LN_1 zur Bruchfuge HI nach oben zu abweicht. Erreicht der letztere Winkel die Größe des Reibungswinkels ϱ, so erfolgt das Einstürzen des Gewölbes, in dem das über HI befindliche Gewölbstück nach außen oder in der Richtung IH ausgleitet. Während dieses Ausgleitens vermindert sich natürlich auch die in der Gewölbspannung P_m bestehende Wirkung der beiden Gewölbhälften AB, AB

auf einander, und es erfolgt daher auch fast gleichzeitig ein Herabgleiten des über *EF* befindlichen Gewölbstückes, wobei das Gewölbstück über *HI*, *HI* in drei Stücke, *EH*, *EH* und *EFFE*, zerfällt. Dieses Einstürzen eines Gewölbes durch Ausgleiten kann auf zweierlei Weise erfolgen, je nachdem die Bruchfuge des Maximaldruckes über oder unter der Bruchfuge des Minimaldruckes liegt; im ersteren Falle (Fig. 30) gleiten die beiden Seitentheile *EH*, *EH* aus- und das Kopfstück *EDE* abwärts; im zweiten Falle (Fig. 31) gleiten dagegen die Seitentheile *HE* ein- und das Kopfstück *IDI* auswärts aus. Es ist leicht zu ermessen, daß der erstere Fall nur bei flachen Gewölben vorkommt, wo die Seiten *BE* des Gewölbes stark gekrümmt sind, und daß der andere Fall nur bei hohen Gewölben mit einem stark gekrümmten Scheitel *IAI* eintritt.

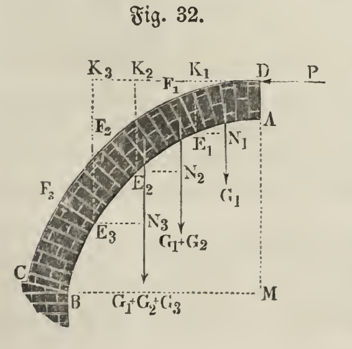
Fig. 31.



Kippen der Gewölbsteine. Ein Gewölbe kann nicht allein durch Gleiten, sondern auch durch Drehen oder Kippen um die äußere oder innere Kante einer Gewölbfuge einstürzen; ja es ist sogar dieser Fall der gewöhnlichere und das Einstürzen durch Gleiten der seltenere Fall. §. 23

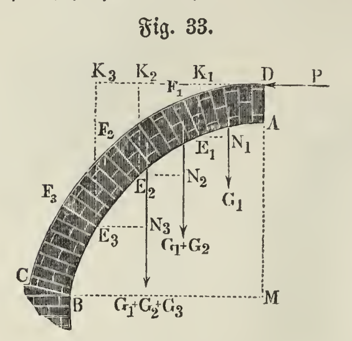
Die Stabilitätsverhältnisse in Beziehung auf Drehung kennen zu lernen, muß man zunächst die im Scheitelpunkte *D*, Fig. 32, nöthigen Kräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. ermitteln, welche eine Drehung der Gewölbsteine um die inneren Kanten E_1, E_2, E_3 u. s. w. der Gewölbfugen verhindern, und nun untersuchen, welche die größte von diesen Kräften ist. Bezeichnet man die Hebelarme $E_1 K_1$, $E_2 K_2$, $E_3 K_3 \cdots$ der Kraft *P* in Hinsicht auf die als Umdrehungsaxen anzu-

Fig. 32.



sehenden Punkte E_1, E_2, E_3 u. s. w. durch a_1, a_2, a_3 u. s. w. und die Hebelarme $E_1 N_1$, $E_2 N_2$, $E_3 N_3$ ... der Gewichte G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. in Hinsicht auf eben diese Axen durch b_1, b_2, b_1 u. s. w., so hat man für die Kraft P im Scheitelpunkte die Werthe:

Fig. 33.



$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} G_1,$$

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} (G_1 + G_2),$$

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. s. w.

Nun nehmen aber vom Scheitel nach den Widerlagern hin, nicht allein die Factoren b_1, b_2, b_3 u. s. w. und G_1, $G_1 + G_2$, $G_1 + G_2 + G_3$ u. s. w. des Zählers zu, sondern es wachsen auch die Nenner a_1, a_2, a_3 u. s. w.; es ist daher auch einer von den Werthen P_1, P_2, P_3 u. s. w. ein Maximum, und zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthig, daß die effective Kraft diesem Maximalwerthe P_m im Scheitel gleich sei. Man nennt diejenige Fuge, welcher die größte oder die Kraft in dem Scheitel überhaupt entspricht, die Bruchfuge (franz. joint de rupture; engl. joint of rupture), weil in ihr eine Trennung durch Drehung um die untere Kante zuerst erfolgt, wenn die Kraft P_m im Scheitel nachläßt. Sie ist durch den Bruchwinkel (franz. angle de rupture; engl. angle of rupture) bestimmt, den die Ebene derselben mit dem Horizonte (oder mit der Verticalen) einschließt. Es ist übrigens leicht zu ermessen, daß der Bruchwinkel diejenige Stelle im Gewölbe angiebt, wo die im Scheitelpunkte D anfangende Widerstandslinie die innere Gewölblinie berührt.

Die auf die angegebene Weise zu findende Maximalkraft P_m im Scheitel ist nun noch mit der nach §. 21 zu bestimmenden, das Gleiten des Gewölbes nach innen verhindernden Maximalkraft zu vergleichen, und dann der größere von diesen beiden Maximalwerthen als der active oder wirkliche Gewölbschub (franz. la poussée; engl. the thrust) anzunehmen. Aus der auf diese Weise gefundenen Spannung im Gewölbscheitel läßt sich leicht auch die Spannung oder der Gewölbschub in jeder beliebigen Gewölbfuge finden, indem man jene Kraft mit dem Gewichte des oberhalb der gedachten Fuge befindlichen Gewölbstückes durch das Parallelogramm der Kräfte vereinigt.

Hat man nun die Größe (P_m) des Gewölbschubes gefunden, so bleibt nur noch zu untersuchen, ob das Gewölbe AC, Fig. 34, an allen Stellen, dem Umkippen um F_1, F_2 u. s. w. nach außen widerstehe. Bezeichnen wir

die Abstände $F_1 L_1$, $F_2 L_2$, $F_3 L_3$ u. s. w. der äußeren Enden F_1, F_2, F_3 u. s. w. der Gewölbfugen von der Horizontalen durch den Gewölbscheitel D mit c_1, c_2, c_3 u. s. w., sowie die Abstände $F_1 O_1$, $F_2 O_2$, $F_3 O_3$ u. s. w. dieser Punkte von den verticalen Schwerlinien der Gewölbstücke AF_1, AF_2, AF_3 u. s. w. mit d_1, d_2, d_3 u. s. w., so lassen sich die Kräfte zum Umkippen dieser Stücke um F_1, F_2, F_3 u. s. w. durch die Formeln

Fig. 34.

$$Q_1 = \frac{d_1}{c_1} G_1,$$

$$Q_2 = \frac{d_2}{c_2} (G_1 + G_2),$$

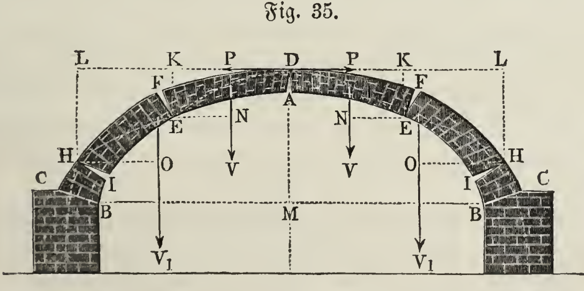
$$Q_3 = \frac{d_3}{c_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. s. w.

ausdrücken, und ist nun die kleinste dieser Kräfte noch größer als der Gewölbschub P_m, so vermag der letztere auch nicht das Gewölbe an irgend einer Stelle nach außen zum Kippen zu bringen. Wird dagegen dieser Minimaldruck Q_n von der Kraft P_m erreicht oder gar übertroffen, so schlägt das Gewölbe nach außen um, ist also ganz ohne Stabilität.

Einstürzen durch Kippen. Die Art und Weise, wie ein Gewölbe §. 24
durch Kippen gewöhnlich einstürzt, ist aus Fig. 35 zu ersehen; es öffnen

Fig. 35.



sich hierbei äußerlich die beiden Bruchfugen EF, EF, und innerlich die beiden Fugen HI, HI, welchen der kleinste passive Gewölbschub entspricht, sowie auch die Scheitelfuge DA, oder, da in der Regel das Gewölbe durch einen Schlußstein gebildet wird, die Fugen zu beiden Seiten des Schlußsteins. Ausnahmsweise und nur bei hohen Gewölben findet auch ein Kippen des Gewölbes in umgekehrter Richtung statt, wie Fig. 37 (a. f. S.) vor Augen führt. Hier öffnet sich das Gewölbe im Scheitel und näher den Widerlagern äußerlich und weiter oben, näher dem Scheitel, nach innen; es schla-

gen also hierbei die oberen Gewölbstücke DI, DI durch Drehung um H, H nach außen und die unteren Gewölbstücke EH, EH durch Drehung um E, E nach innen um. Im ersteren Falle, Fig. 36, befindet sich die Bruchfuge

Fig. 36.

Fig. 37.

EF des Maximal- oder activen Gewölbschubes über der Bruchfuge IH des Minimal- oder passiven Gewölbschubes, und im zweiten Falle, Fig. 37, findet das Umgekehrte statt, es liegt hier EF unter HI; während ferner dort die beiden Gewölbhälften im oberen Ende D des Gewölbscheitels auf einander wirken, findet hier diese Gegenwirkung im unteren Ende A des Scheitels statt.

Um die Stabilität des Gewölbes in Hinsicht auf diesen zweiten Fall des Kippens kennen zu lernen, muß man die in §. 23 angegebenen Rechnungen mit der Abänderung noch ein Mal durchführen, daß man sowohl die Hebelarme a_1, a_2, a_3 u. s. w. in Hinsicht auf die inneren Fugenkanten E_1, E_2, E_3 u. s. w., Fig. 34, als auch die Hebelarme c_1, c_2, c_3 u. s. w. in Hinsicht auf die äußeren Fugenkanten F_1, F_2, F_3 u. s. w. um die Gewölbstärke $AD = e$ im Scheitel vermindert. Während man oben aus dem Gewichte

$$V = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$$

des Gewölbstückes DE den Gewölbschub durch den Maximalwerth

$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

bestimmt, wird er hier durch das Maximum

$$P_m = \frac{b_m}{a_m - e}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

angegeben, und während im ersteren Falle das dem Gewichte

$$V_1 = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

des Gewölbstückes AH entsprechende Minimum des passiven Gewölbschubes

$$Q_n = \frac{d_n}{c_n}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n)$$

zu setzen ist, hat man hier

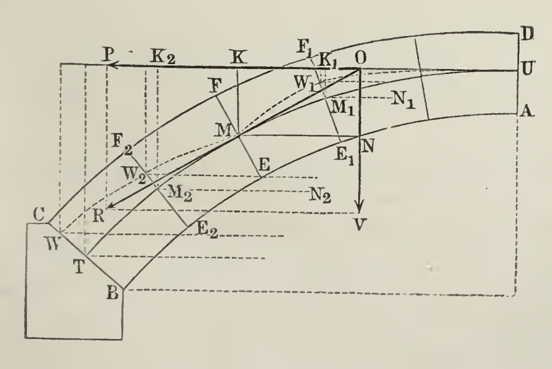
$$Q_n = \frac{d_n}{c_n - e}(G_1 + G_2 + \cdots + G_n)$$

anzunehmen.

Ist im zweiten Falle $Q_n < P_m$ und befindet sich die Bruchfuge von Q_n über der Bruchfuge von P_m, so ist ein Umstürzen des Gewölbes, wie Fig. 37 zeigt, zu erwarten. Da das Maximum P_m oder der active Gewölbschub nicht allein das Minimum Q_n, sondern auch noch größere Werthe des passiven Gewölbschubes übertreffen kann, so ist auch möglich, daß die Gewölbe BAB, Fig. 36 und Fig. 37, durch Kippen in mehr als fünf Punkten einstürzen. Endlich kann auch der Fall vorkommen, daß ein Gewölbe durch Gleiten und Kippen zugleich zusammenstürzt.

Angriffspunkte des Gewölbschubes. Die im Vorstehenden enthaltene Bestimmung des activen Gewölbschubes P_m ist nur eine approximative, da sie sich auf die Annahme gründet, daß der Angriffspunkt dieser Kraft in einem der beiden Enden D oder A der Scheitelfuge liege und daß die Richtung der Kraft, mit welcher das eine Gewölbstück DE, Fig. 38, auf §. 25

Fig. 38.



das andere Gewölbstück BF wirkt, durch den unteren Endpunkt E der Gewölbfuge EF gehe. Jedenfalls vertheilt sich aber in Folge der Zusammendrückbarkeit der Gewölbsteine sowohl der Druck P_m auf die ganze Scheitelfläche AD, als auch die Kraft, mit welcher

die Gewölbstücke DE und BF auf einander wirken, auf die ganze Fugenebene EF, und es ist daher anzunehmen, daß im Gleichgewichtszustande des Gewölbes die Angriffspunkte U, M dieser Kräfte innerhalb der Flächen AD und EF zu liegen kommen, und daß dieselben erst dann an die Enden D und E, oder nach Befinden A und F rücken, wenn der Gleichgewichtszustand des Gewölbes aufhört und das Kippen desselben u. s. w. eintritt.

Nehmen wir an, daß die Mittel- oder Angriffspunkte der Kräfte, womit die Gewölbsteine in den Gewölbfugen gegen einander drücken, die Mittelpunkte U, M, T u. s. w. der Fugenhöhen AD, EF, BC u. s. w. einnehmen, so können wir die innere Gewölblinie AEB durch diese Mittellinie UMT ersetzen, und mit Hülfe derselben die Größe des Gewölbschubes nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Regel finden.

Fig. 39.

Bezeichnen wir die Fugenbreiten $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ . . . durch $e_1, e_2 \ldots$, sowie die Neigungswinkel der Fugen durch α_1, α_2 u. s. w., so können wir hiernach die zum Gleichgewichte in den Fugen $E_1 F_1, E_2 F_2 \ldots$ nöthigen Gewölbschube:

$$P_1 = \frac{b_1 + \frac{1}{2} e_1 \cos. \alpha_1}{a_1 - \frac{1}{2} e_1 \sin. \alpha_1} G_1,$$

$$P_2 = \frac{b_2 + \frac{1}{2} e_2 \cos. \alpha_2}{a_2 - \frac{1}{2} e_2 \sin. \alpha_2} (G_1 + G_2),$$

$$P_3 = \frac{b_3 + \frac{1}{2} e_3 \cos. \alpha_3}{a_3 - \frac{1}{2} e_3 \sin. \alpha_3} (G_1 + G_2 + G_3) \text{ u. s. w.}$$

und den größten,

$$P_m = \frac{b_m + \frac{1}{2} e_m \cos. \alpha_m}{a_m - \frac{1}{2} e_m \sin. \alpha_m} (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_m),$$

aller dieser Kraftwerthe, dem wirklichen Gewölbschub gleich setzen.

Die Mittelkraft R aus P_m und $V_m = G_1 + G_2 + \cdots + G_m$, womit das Gewölbstück DE auf das Gewölbstück CE wirkt, geht durch den Mittelpunkt M der entsprechenden Fuge (Bruchfuge) EF, wogegen die Richtungen der Mittelkräfte der übrigen Gewölbfugen die letzteren oberhalb der Mittellinie UMT durchschneiden; denn damit die obigen Kraftwerthe

P_1, P_2, P_3 ... den größeren Werth P_m annehmen können, ist nöthig, daß die Hebelarme a_1, a_2, a_3 u. s. w. kleinere, und die Hebelarme b_1, b_2, b_3 u. s. w. entsprechend größere Werthe annehmen, daß folglich die Stützpunkte W_1, W_2 u. s. w. in den Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. von der Mittellinie UMT aus etwas aufwärts rücken. Wenn einer der Zwischenpunkte W_1, W_2 u. s. w. der äußeren Gewölblinie DFC sehr nahe zu liegen kommt, so concentrirt sich der Druck zwischen den benachbarten Gewölbsteinen auf eine zu kleine Fläche, um denselben aushalten zu können; es erfolgt daher ein Abbrechen der äußeren Ecken dieser Steine, womit nun aus bekannten Gründen ein Zusammenstürzen des Gewölbes durch Kippen nach außen verbunden ist. Noch viel weniger darf natürlich einer der Angriffspunkte W_1, W_2 u. s. w. in die äußere Gewölblinie DFC oder gar über dieselbe hinausfallen. Es ist dagegen ein Gewölbe um so solider und stabiler, je näher die Angriffspunkte W_1, W_2 u. s. w. in den Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. der Mittellinie UMT liegen, je mehr also die Horizontalkräfte P_1, P_2, P_3 u. s. w. zur Verhinderung des Niederkippens der einzelnen Gewölbstücke der Gleichheit kommen.

Bezeichnen f_1, f_2 ... die Abstände $E_1 W_1$, $E_2 W_2$ ... der dem Gewölbschub P_m entsprechenden Druckpunkte W_1, W_2 ... von den inneren Enden E_1, E_2 ... der Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w., so läßt sich nun

$$P_m = \frac{b_1 + f_1 \cos. \alpha_1}{a_1 - f_1 \sin. \alpha_1} G_1 = \frac{b_2 + f_2 \cos. \alpha_2}{a_2 - f_2 \sin. \alpha_2} (G_1 + G_2)$$
$$= \frac{b_3 + f_3 \cos. \alpha_3}{a_3 - f_3 \sin. \alpha_3} (G_1 + G_2 + G_3)$$

u. s. w. setzen, so daß schließlich

$$f_1 = \frac{P_m a_1 - G_1 b_1}{P_m \sin. \alpha_1 + G_1 \cos. \alpha_1},$$

$$f_2 = \frac{P_m a_2 - (G_1 + G_2) b_2}{P_m \sin. \alpha_2 + (G_1 + G_2) \cos. \alpha_2},$$

$$f_3 = \frac{P_m a_3 - (G_1 + G_2 + G_3) b_3}{P_m \sin. \alpha_3 + (G_1 + G_2 + G_3) \cos. \alpha_3} \text{ u. s. w. folgt.}$$

Die Stabilität des Gewölbes fordert, daß keiner dieser Werthe f_1, f_2, f_3 ... die entsprechende Gewölbdicke oder Fugenbreite e_1, e_2, e_3 ... erreiche.

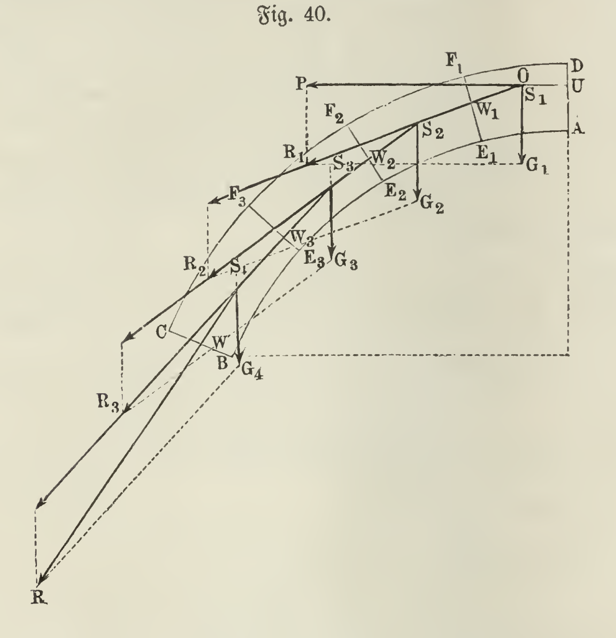
Um sicher zu gehen, macht man die Bedingung, daß die Druckpunkte W_1, W_2 ... in den Fugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ ... um mindestens ein Drittel der Fugenbreiten e_1, e_2 ... von der inneren resp. äußeren Wölbfläche abstehen, legt hiernach die Drucklinie OP im Scheitel um $DU = \frac{1}{3} e$ unter den Gewölbscheitel, sowie den Druckpunkt M in der Bruchfuge um $EM = \frac{1}{3} EF = \frac{1}{3} e_m$ über die innere Wölbfläche, wobei

$$P_m = \frac{b_m + \frac{1}{3} e_m \cos. \alpha_m}{a_m - \frac{1}{3} e_m \sin. \alpha_m}(G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_m)$$

zu setzen ist, und gefordert wird, daß $f_1 < \frac{2}{3} e_1$, sowie $f_2 < \frac{2}{3} e_2$, $f_3 < \frac{2}{3} e_3$ ausfalle u. s. w.

§. 26 **Widerstandslinie der Gewölbe.** Wenn sowohl der Angriffspunkt U als auch die Größe P der Kraft gegeben ist, durch welche ein Gewölbstück $ABCD$, Fig. 40, im Gleichgewichte erhalten wird, so kann man die Stabilitätsverhältnisse mittelst der Widerstandslinie wie die einer Futter-

Fig. 40.



mauer beurtheilen. Aus der Kraft P und aus dem im Schwerpunkte S_1 des ersten Gewölbstückes AF_1 angreifenden Gewichte G_1 dieses Stückes ergiebt sich zunächst die Kraft R_1 in der ersten Gewölbfuge $E_1 F_1$, sowie der Punkt W_1, in welchem die Richtung dieser Kraft diese Gewölbfuge schneidet; ferner aus dem Drucke R_1 und dem im Schwerpunkte S_2 des zweiten Gewölbstückes angreifenden Gewichte G_2 dieses Stückes folgt der Druck R_2 in der zweiten Gewölbfuge, sowie der Durchschnitt W_2 der Richtung dieser Kraft mit der Ebene dieser Fuge; und wenn man auf diese Weise fortfährt, so erhält man nach und nach die übrigen Drücke R_3, R_4 . . ., sowie die Durchschnitte W_3, W_4 . . . ihrer Richtungen mit den folgenden Gewölbfugen. Die Linie $U W_1 W_2 W_3 \ldots W$, welche die Durchschnitte W_1, W_2,

W_3, ... oder Angriffspunkte der Kräfte P, R_1, R_2, R_3 ... in den Gewölbfugen mit einander verbindet, ist die Widerstandslinie des Gewölbes (franz. ligne de résistance; engl. line of resistance [vergl. II., §. 11]). Das Gewölbe ist nun im Gleichgewichte:

1) wenn die Richtungen der Kräfte R_1, R_2, R_3 ... von den Normalen der Gewölbfugen nirgends um mehr als den Reibungswinkel ϱ abweichen, und
2) wenn die Widerstandslinie weder die innere, noch die äußere Wölblinie erreicht oder durchschneidet, und sich überhaupt den Wölblinien nicht sehr nähert.

Wäre an einer Stelle des Gewölbes die Abweichung der Druckrichtung von der Normale der Gewölbfuge größer als der Reibungswinkel, so würde ein Verschieben wie in Fig. 30 oder 31 eintreten, und träte diese Linie aus einer der Wölblinien AB oder CD heraus, so würde ein Kippen der Gewölbsteine, wie z. B. Fig. 41 und Fig. 42 vor Augen führt, eintreten. Bei

Fig. 41.

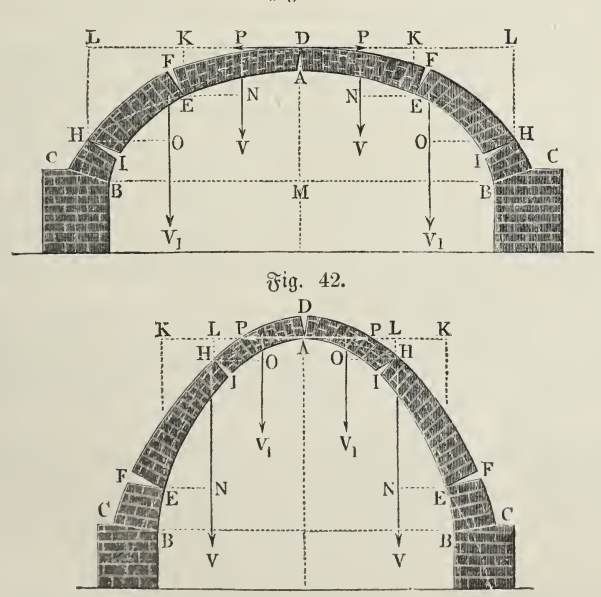
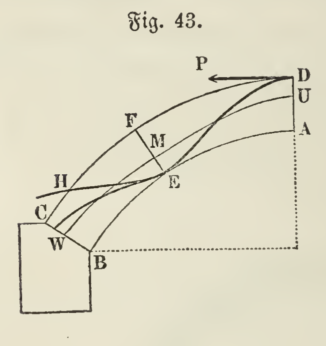


Fig. 42.

den gewöhnlichen auf Widerlagern aufstehenden Gewölben ist allerdings weder der Angriffspunkt noch die Größe der Kraft P bekannt, mit welcher die beiden Hälften eines Gewölbes auf einander wirken, und deshalb müssen auch der Construction der Widerstandslinie gewisse Annahmen vorausgehen. Nehmen wir, wie in §. 23, an, daß sich die beiden Gewölbhälften im

Scheitel D der äußeren Gewölblinie CDC, Fig. 41, gegen einander stützen und daß jede Gewölbhälfte wieder in zwei Stücke DE und CE zerfällt, welche sich in einem Punkte E der inneren Wölblinie gegen einander stemmen, so können wir die Kraft P, mit welcher die beiden Gewölbhälften in D gegen einander drücken, gleichsetzen der größten aller Kräfte, wodurch sowohl ein Kippen um irgend einen Punkt der inneren Wölblinie AB als auch ein Herabgleiten in irgend einer Gewölbfuge verhindert wird. Mit Hülfe dieser Kraft P lassen sich noch andere Punkte der durch D und E gehenden Widerstandslinie finden. Wenn diese Linie, wie z. B. DEW, Fig. 43, der äußeren Wölblinie CD nirgends nahe kommt, so besitzt das Gewölbe Stabilität, wenn sich dagegen diese Linie, wie z. B. DEH, der äußeren Wölblinie sehr nähert, oder sie wohl gar durchschneidet, so muß das Gewölbe durch Kippen um H nach außen umstürzen. Bei dem in Fig. 42 abgebildeten Falle drücken die beiden Gewölbhälften im Scheitel A der inneren Gewölbhälfte gegen einander, es geht daher auch hier die Widerstandslinie durch A; dagegen in dem Falle, welchen Fig. 39 vor Augen führt, wo die Widerstandslinie durch die Mittelpunkte U und W zweier Gewölbfugen gelegt ist, biegt die Widerstandslinie bei W_1, W_2 u. s. w. nach außen von der Mittellinie des Gewölbes ab. Bei dem vollkommensten Gewölbe fällt die Widerstandslinie mit der Mittellinie UMT des Gewölbes zusammen.

Fig. 43.

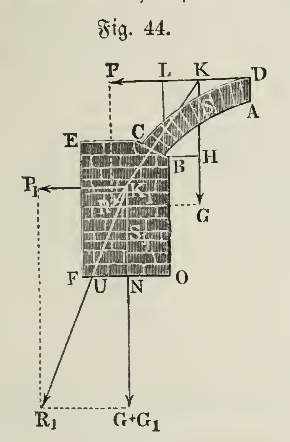


Sicherer ist es, die Widerstandslinie UMW durch zwei Punkte U und M zu legen, wovon der erste um $DU = \frac{1}{3} DA$ unter dem Gewölbscheitel D, und der andere um $EM = \frac{1}{3} EF$ über der inneren Wölbfläche liegt.

§. 27 **Stabilität der Widerlager.** Hat man sich durch die in den vorstehenden Paragraphen angegebenen Rechnungen von der Stabilität eines Gewölbes überzeugt, und dabei den Druck im Schlußstein oder in der Schlußfuge bestimmt, so kommt es noch darauf an, die Stabilität der Widerlagsmauern zu untersuchen, und vorzüglich die Stärke der einem Ausweichen oder Umstürzen hinreichenden Widerstand leistenden Widerlagsmauern zu berechnen. Diese Untersuchung ist um so wichtiger, da gerade wegen Mangel an hinreichendem Widerstande dieser Stützen das Einfallen oder Zerspringen der an und für sich vollkommen stabilen Gewölbe, zumal wenn sie sehr flach sind und deshalb einen großen Horizontaldruck ausüben, sehr oft herbeigeführt wird. Man sieht leicht ein, daß eine Widerlagsmauer FB,

Fig. 44, Stabilität besitzt, wenn die Richtung der Mittelkraft $\overline{K_1 R_1} = R_1$ aus dem im Schwerpunkte S angreifenden Gewichte G der einen Gewölbhälfte, aus dem im Gewölbscheitel angreifenden Horizontaldrucke P und aus dem in seinem Schwerpunkte S_1 angreifenden Gewichte G_1 der Widerlagsmauer selbst durch die Basis FO der Widerlagsmauer oder des Gewölbpfeilers hindurchgeht, und um einen Winkel von der Verticalen $K_1 N$ abweicht, der den Reibungswinkel ϱ nicht übertrifft.

Fig. 44.



Für den Winkel $UK_1N = \beta$, welchen die Mittelkraft R_1 aus $G + G_1$ und $K_1 P_1 = P$ mit der Verticalen einschließt, hat man:

$$tang.\,\beta = \frac{P}{G + G_1};$$

da aber $tang.\,\varrho$ gleich dem Reibungscoefficienten φ ist, so fordert die Stabilität der Widerlager in Hinsicht auf das Ausgleiten, daß

$$\frac{P}{G + G_1} < \varphi, \text{ also das Gewicht der Widerlagsmauer}$$

$$G_1 > \frac{P}{\varphi} - G \text{ sei.}$$

Damit ferner die Mittelkraft durch die äußerste Kante F des Widerlagpfeilers gehe, setzen wir das Moment von P in Hinsicht auf diese Kante der Summe der Momente von den Gewichten G und G_1 gleich. Ist a die Gewölbhöhe BL und h die Höhe BO des Widerlagspfeilers, so hat man das Moment der Kraft P in Hinsicht auf die als Axe anzusehende Kante F, $= P(a + h)$; ist ferner b der Horizontalabstand BH der verticalen Schwerlinie der Gewölbhälfte AC von der inneren Kante B, wo das Gewölbe an das Widerlager anstößt, d die Stärke FO der Widerlagsmauer und s der Abstand FN der verticalen Schwerlinie der Widerlagsmauer von der Kante F, so hat man das Moment der Gewichte G und G_1:

$$= G(b + d) + G_1 s$$

und es giebt nun das Gleichsetzen beider Momente folgende Bestimmungsgleichung für die Stärke der Widerlagsmauer,

$$P(a + h) = G(b + d) + G_1 s,$$

oder, wenn man den Sicherheitscoefficienten δ einführt,

$$\delta P(a + h) = G(b + d) + G_1 s.$$

Bezeichnet h_1 die mittlere Pfeilerhöhe, und γ die Dichtigkeit der Pfeilermasse, so

hat man für jeden Fuß Länge des Pfeilers das Gewicht $G_1 = h_1 d \gamma$, und setzt man noch $s = \frac{1}{2} d$, das Moment $G_1 s = \frac{1}{2} h_1 d^2 \gamma$.

Hiernach folgt

$$\frac{1}{2} h_1 d^2 \gamma + G d = \delta P (a + h) - G b, \text{ oder}$$

$$d^2 + \frac{2 G d}{h_1 \gamma} = \frac{\delta P (a + h) - G b}{\frac{1}{2} h_1 \gamma},$$

daher die in Frage stehende Dicke der Widerlager:

$$1) \quad d = - \frac{G}{h_1 \gamma} + \sqrt{\frac{\delta P (a + h) - G b}{\frac{1}{2} h_1 \gamma} + \left(\frac{G}{h_1 \gamma}\right)^2}.$$

Um diese Mauer gegen das Gleiten zu sichern, müßte

$$G_1 > \frac{P}{\varphi} - G, \text{ d. i.}$$

$$2) \quad d > \frac{P - \varphi G}{\varphi h_1 \gamma} \text{ sein.}$$

In der Regel wird man finden, daß der erste Werth von d größer ist als der letzte, daß also die Widerlagsstärke dem ersten gleich zu machen ist.

Für sehr hohe Pfeiler giebt die erste Bedingung, da dann $G d$, $\delta P a$ und $G b$, gegen $\delta P h$ und $\frac{1}{2} h_1 d^2 \gamma$, welches $\frac{1}{2} h d^2 \gamma$ gesetzt werden kann, verschwinden:

$$\frac{1}{2} h d^2 \gamma = \delta P h, \text{ d. i. } \frac{1}{2} d^2 \gamma = \delta P,$$

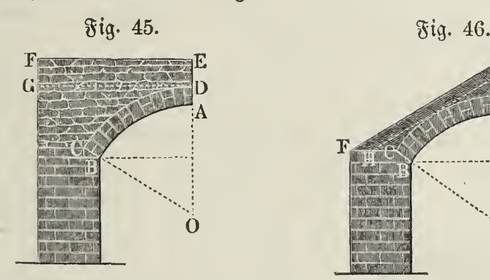
daher die Maximal- oder Grenzstärke

$$d = \sqrt{\frac{2 \delta P}{\gamma}}.$$

Nach Audoy ist $\delta = 1{,}9$ zu setzen, sicherer ist es aber, wie bei Futtermauern, $\delta = \frac{9}{4}$, oder, wie beim Gewölbbogen, $\delta = 3$ anzunehmen. Auch ist es rathsam, den Angriffspunkt des Gewölbschubes nicht im Scheitel D, sondern um ein Drittel der Gewölbstärke tiefer liegend, anzunehmen.

§. 28 **Belastetes Gewölbe.** Wir haben seither noch nicht auf die Belastung der Gewölbe Rücksicht genommen; da es aber gerade zu den Ausnahmen gehört, wenn ein Gewölbe unbelastet ist, so haben wir den Einfluß der Belastung auf die Stabilität der Gewölbe noch besonders zu untersuchen. Die Belastung ist entweder veränderlich oder unveränderlich. Veränderliche oder zufällige Belastungen kommen vorzüglich bei Brücken vor. Damit die Stabilität durch zufällige Belastungen nicht zu sehr alterirt oder gar aufgehoben werde, ist es nöthig, die Gewölbe schon an und für sich so schwer herzustellen oder ihnen eine derartige constante Belastung aufzulegen, daß die zufällige Belastung, z. B. die von Lastwagen oder Eisenbahnzügen, welche über die Brücke wegfahren, nur eine kleine Veränderung in der ganzen Last oder Spannung herbeiführt.

Was die constante Belastung anlangt, so besteht diese meist in einer Uebermauerung, und zwar entweder mit horizontaler oder mit geneigter Oberfläche EF, wie Fig. 45 und Fig. 46 vor Augen führen. In vielen Fällen besteht die Uebermauerung mit dem Gewölbe aus einerlei Material,

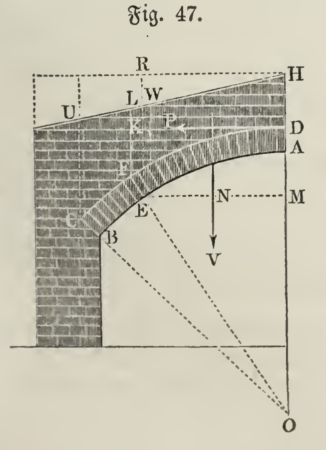


und ist nun dieselbe dicht zusammengefügt, so kann man für das Ganze eine gemeinschaftliche Dichtigkeit annehmen, und dadurch die Rechnung bedeutend erleichtern. Nimmt man nach I., §. 61 das specifische Gewicht des Mauerwerkes = 1,6 bis 2,4 an, so erhält man für die Dichtigkeit die Grenzwerthe

$$\gamma = 100 \text{ bis } 148 \text{ Pfund},$$

und zwar erstere für Ziegelmauern und letztere für Bruchsteinmauern.

Man kann annehmen, daß von der ganzen Uebermauerung $CDHU$ eines Gewölbes AC, Fig. 47, je ein Bogenstück DE desselben das Mauerstück $DHLF$ trage, welches über DF liegt, also von den Senkrechten DH und FL begrenzt wird; es ist daher auch das Moment, mit welchem sich das Gewölbstück DE um E nach innen zu drehen sucht, aus dem Momente dieses Gewölbstückes DE und aus dem Momente des Mauerstückes FH zusammengesetzt. Wenn wir daher den Gewölbschub durch den Ausdruck



$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

bestimmen wollen (s. §. 23), so müssen wir in demselben entweder statt

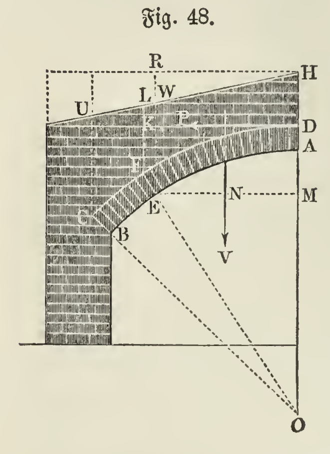
$$b_m(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

die Summe der Momente von DE und FH einführen, oder für $G_1 + G_2 + \cdots + G_m$ die Summe V der Gewichte von DE und FH und für b_m den Horizontalabstand EN des Schwerpunktes dieser Gewichtssumme von der inneren Kante E der Bruchfuge EF einsetzen.

Es ist hiernach zu ersehen, daß durch die Uebermauerung oder Belastung die Spannung P_m eines Gewölbes vergrößert wird. Da das Moment des Gewichtes von FH in Hinsicht auf die äußere Kante F größer ist als in Hinsicht auf die innere Kante E, so verliert hiernach das Gewölbe durch diese Vergrößerung der Spannung nichts an Stabilität, sondern es wird dieselbe hierdurch in der Regel noch etwas größer.

(§. 29) **Gewölbschub.** Um allgemeine Formeln zur Bestimmung der Größe der Spannung P_m verschieden geformter und verschieden belasteter Gewölbe BH, Fig. 48, zu erhalten, muß man die Momente von DE und FH, sowie den Hebelarm $EK = a_m$ entweder durch die Bogenhöhe $MA = h$ oder durch den Winkel $FOD = \beta$ ausdrücken, welchen die Gewölbfuge EF mit der Verticalen DO einschließt, und nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Formel

Fig. 48.



$$P_m = \frac{b_m}{a_m}(G_1 + G_2 + \cdots + G_m)$$

denjenigen Werth von h oder von β ermitteln, welcher P_m zum Maximo macht; führt man endlich diesen Werth von β in die letzte Formel ein, so giebt dieselbe die gesuchte Gewölbspannung an. In verschiedenen Schriften über die Theorie der Gewölbe werden diese Entwickelungen vollständig durchgeführt; hier möge jedoch nur folgende angenäherte Bestimmung vorgenommen werden.

Sehen wir von dem Gewichte der Uebermauerung über EF ganz ab, so können wir das Moment des Gewölbstückes EH in Hinsicht auf die Kante E setzen:

Moment des Rechteckes $EMHR$ minus Moment des Dreieckes WHR minus Moment des Segmentes AEM.

Bezeichnet nun s die Sehne EM, h die Bogenhöhe AM, a die ganze Mauerhöhe AH im Scheitel und δ den Neigungswinkel LHR der äußeren Begrenzung der Uebermauerung, so haben wir das Moment von $EMHR$:

$$= s\,(h + a) \cdot \frac{s}{2} = (h + a)\,\frac{s^2}{2},$$

das Moment von WHR:

$$= s \,.\, {}^1\!/_2\, s \;tang.\, \delta \cdot \frac{s}{3} = \frac{s^3}{6}\,tang.\, \delta,$$

und, wenn wir annähernd die Fläche $AEM = {}^2\!/_3\, sh$ und (nach Band I.,

§. 115) den Abstand des Schwerpunktes derselben von E, $= {}^3/_5\, s$ setzen, das Moment von AEM

$$= {}^2/_3\, s h \,.\, {}^3/_5\, s = {}^2/_5\, s^2 h.$$

Es ist also hiernach das Moment des ganzen Mauerstückes EH:

$$\left(\frac{h+a}{2} - \frac{s}{6} tang.\,\delta - {}^2/_5\, h\right) s^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{h}{10} - \frac{s}{6}\, tang.\,\delta\right) s^2.$$

Da nun der Hebelarm des Gewölbschubes P, $EK = MD = h + e$ ist, so folgt diese Kraft:

$$P = \frac{({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h - {}^1/_6\, s\; tang.\,\delta)\, s^2 \gamma}{h + e},$$

oder, wenn man noch $s^2 = h\,(2\,r - h)$ einführt:

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h - {}^1/_6\, s\; tang.\,\delta)\, \frac{(2\,r - h)\, h\, \gamma}{h + e}.$$

Ist das Gewölbe horizontal übermauert, so hat man $\delta = 0$, und daher einfacher:

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, \frac{(2\,r - h)\, h\, \gamma}{h + e}.$$

Um denjenigen Werth von h zu finden, welcher P zum Maximo macht, differenziiren wir diesen Ausdruck in Hinsicht auf h, und setzen das erhaltene Differenzialverhältniß = Null (siehe Band I., analyt. Hülfslehren, Art. 13).

Es ist hiernach:

$$(h + e)\,[(2\,r - h)\,({}^1/_2\, a + {}^1/_5\, h) - ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, h]$$
$$= ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\,(2\,r - h)\, h, \text{ d. i.:}$$
$$(h + e)\,(r a - h a + {}^2/_5\, r h - {}^3/_{10}\, h^2)$$
$$= (r a + {}^1/_5\, r h - {}^1/_2\, a h - {}^1/_{10}\, h^2)\, h, \text{ oder:}$$
$$h\,({}^1/_5\, r h - {}^1/_2\, a h - {}^1/_5\, h^2) + e\,(r a - h a + {}^2/_5\, r h - {}^3/_{10}\, h^2) = 0,$$

nach den Potenzen von h geordnet, folgt die Bestimmungsgleichung:

I.) $h^3 - (r - {}^5/_2\, a - {}^3/_2\, e)\, h^2 - e\,(2\,r - 5\,a)\, h - 5\,e\,r\,a = 0.$

Setzt man den durch Auflösung dieser cubischen Gleichung erhaltenen Werth von h in die Gleichung

$$P = ({}^1/_2\, a + {}^1/_{10}\, h)\, \frac{(2\,r - h)\, h\, \gamma}{h + e},$$

oder einfacher in

II.) $P = (r a - h a + {}^2/_5\, r h - {}^3/_{10}\, h^2)\, \gamma,$

so erhält man dadurch den gesuchten Gewölbschub P (oder P_m).

Natürlich kann h höchstens die Höhe h_1 der inneren Wölbfläche erreichen. Giebt die Formel I. einen größeren Werth für h, so hat man die letztere Höhe h_1 statt h in die Formel II. einzusetzen.

Beispiel. Für einen kreisförmigen Brückenbogen, bei welchem die Höhe des Schlußsteines, $e = \frac{r}{20}$, und die ganze Mauerhöhe im Scheitel, $a = 2\,e = \frac{r}{10}$

ist, bestimmt sich die senkrechte Tiefe h der Bruchfuge unter dem Scheitel durch die Gleichung:

$$h^3 - (1 - 0{,}25 - 0{,}075)\, r\, h^2 - 0{,}05\, (2 - 0{,}5)\, r^2 h - \frac{r^3}{40} = 0,$$

oder

$$h^3 - 0{,}675\, r\, h^2 + 0{,}075\, r^2 h - 0{,}025\, r^3 = 0.$$

Es ist hiernach ziemlich genau $h = \frac{2}{3} r$, und folglich der Gewölbschub:

$$P = (0{,}1000 - 0{,}0667 + 0{,}2667 - 0{,}1333)\, r^2 \gamma = 0{,}1667\, r^2 \gamma.$$

Ist der innere Gewölbhalbmesser $r = 40$ Fuß, und die Dichtigkeit der Gewölbmauer, $\gamma = 150$ Pfund, so erhält man:

$$P = 0{,}1667 \,.\, 1600 \,.\, 150 = 40000 \text{ Pfund},$$

und folglich den Druck pr. Quadratzoll der Scheitelfuge:

$$\frac{P}{e} = \frac{40000}{2 \,.\, 144} = 139 \text{ Pfund}.$$

Anmerkung. Das Gewicht des Gewölbstückes $AEWH$, Fig. 49, ist annähernd:

$$G = \left(h + a - \frac{2}{3} h - \frac{s}{2} \, tang.\, \delta\right) s \gamma = \left(\frac{1}{3} h + a - \frac{s}{2}\, tang.\, \delta\right) s \gamma,$$

und folglich die Horizontalkraft im Gewölbscheitel D, wodurch das Herabgleiten dieses Körpers auf der Gewölbfuge EF verhindert wird (s. §. 21):

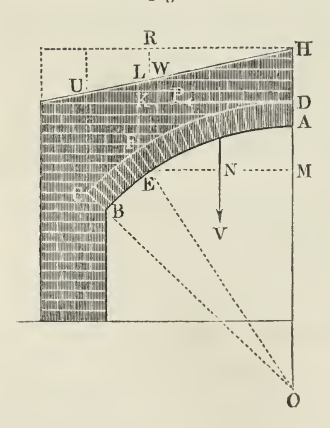
$$P = G\, tang.\, (\alpha - \varrho) = \left(\frac{1}{3} h + a - \frac{s}{2}\, tang.\, \delta\right) tang.\, (\alpha - \varrho) \,.\, s \gamma.$$

Setzt man in diesem Ausdrucke noch

$h = r\, (1 - sin.\, \alpha)$ und $s = r\, cos.\, \alpha$, so erhält man:

$$P = \left(\frac{a}{r} + \frac{1 - sin.\, \alpha}{3} - \frac{1}{2}\, cos.\, \alpha\; tang.\, \delta\right) tang.\, (\alpha - \varrho)\; cos.\, \alpha \,.\, r^2 \gamma,$$

Fig. 49.



und es ist nun, um den dem Ausgleiten des Gewölbes entsprechenden Gewölbschub zu bestimmen, derjenige Werth für α einzuführen, welcher diesen Ausdruck zum Maximo macht.

Ist die Uebermauerung horizontal begrenzt, und dabei sehr hoch, so kann man einfacher

$$P = a r \gamma\; cos.\, \alpha\; tang.\, (\alpha - \varrho)$$

setzen.

Da dieser Ausdruck sowohl für $\alpha = \varrho$ als auch für $\alpha = 90$ Grad Null ausfällt, und für Werthe von α zwischen ϱ und 90 Grad eine positive Größe giebt, so ist er für einen gewissen Werth von α innerhalb dieser Grenzen ein Maximum. Durch Differenziren u. s. w. findet man die Gleichung

$$2\, cotang.\, \alpha = sin.\, 2\, (\alpha - \varrho),$$

deren Auflösung den gesuchten Werth von α giebt.

Für $\varrho = 30$ Grad ist z. B. $\alpha = 64^0\, 52'$, und es folgt hiernach der Gewölbschub:

$$P = a r \gamma\; cos.\, 64^0\, 52'\; tang.\, 34^0\, 52' = 0{,}4247 \,.\, 0{,}6967\; a r \gamma = 0{,}2965\, a r \gamma.$$

Ist z. B. $r = 40$, $a = \frac{r}{10} = 4$ und $\gamma = 150$ Pfund, so folgt:

$$P = 0{,}2965 \,.\, 160 \,.\, 150 = 7116 \text{ Pfund},$$

also ein viel kleinerer Werth, als aus der Annahme des Kippens hervorgeht.

Gewölbstärke. Damit die Gewölbsteine dem Zerdrücken hinreichenden Widerstand entgegensetzen, müssen die Gewölbsteine eine gewisse, der Spannung entsprechende Höhe oder Länge haben, und da dieselbe im Scheitel am kleinsten ist und nach dem Widerlager hin zunimmt, so sollte eigentlich auch die Gewölbstärke vom Scheitel nach den Widerlagern hin zunehmen. Perronet giebt für die Stärke eines Gewölbes im Scheitel die empirische Formel $e = 0{,}0694\, r + 0{,}325$ Meter, in welcher r den größten Erzeugungshalbmesser der inneren Gewölblinie bezeichnet. Für das Fußmaß ist hiernach $e = 0{,}0694\, r + 1$ Fuß. §. 30

Für Gewölbe mit Halbmessern über 15 Meter oder 48 Fuß giebt diese Formel erfahrungsmäßig zu große Dicken. Nach Rankine ist für Kreisbogengewölbe $e = 0{,}346 \sqrt{r}$, und für gedrückte Korbbögen $e = 0{,}412 \sqrt{r}$ Fuß zu setzen, wo r den Krümmungshalbmesser im Scheitel der inneren Wölbfläche bezeichnet.

Eigentlich ist die Gewölbstärke nach der rückwirkenden Festigkeit der Gewölbsteine oder des Mörtels zu bestimmen. Nehmen wir für den Festigkeitsmodul des Sandsteines (nach Band I., §. 212), $K = 4000$ Pfund an, und setzen wir eine zehnfache Sicherheit voraus, so erhalten wir für gewöhnliche Mauern aus Sandstein den zulässigen Druck auf jeden Quadratzoll Fugenfläche, $T = 400$ Pfund; da aber die Gewölbsteine nicht gleichmäßig auf einander drücken, so gestattet man denselben nur einen halb so großen Druck, d. i. $T = 200$ Pfund. Die mittleren Festigkeitsmodel von Gneiß, Granit und Kalkstein fallen nach Befinden doppelt so groß aus, deshalb kann man hier den zulässigen Druck bis auf $T = 300$ Pfund steigern. Bei der berühmten Brücke zu Neuilly unweit Paris, welche in den Jahren 1768 bis 1774 von Perronet erbaut wurde, berechnet sich dieser Druck auf 280 Pfund.

Mit Hülfe der Formel des vorigen Paragraphen läßt sich die Stärke e des Gewölbes wie folgt ermitteln.

Die Formel I. giebt

$$e = \frac{h^3 - r h^2 + \frac{5}{2}\, a h^2}{5 r a - \frac{3}{2}\, h^2 + 2 r h - 5 a h},$$

und aus der Formel II. folgt, wenn man $P = Te$ einführt:

$$e = \left(r a - h a + \tfrac{2}{5}\, r h - \tfrac{3}{10}\, h^2\right) \frac{\gamma}{T}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für e einander gleich, so erhält man nach gehöriger Umformung folgende Gleichung zur Bestimmung von h:

$$h^4 - {}^{20}/_9\left(\frac{T}{\gamma} + {}^6/_5\, r - 3\,a\right)h^3$$
$$+ {}^{20}/_9\left(\frac{T}{\gamma}r - {}^5/_2\frac{T}{\gamma}\,a + {}^4/_5\, r^2 - 7\,a\,r + 5\,a^2\right)h^2$$
$$+ {}^{20}/_9\, 2\,r\,a\,(2\,r - 5\,a)\,h + {}^{20}/_9 \,.\, 5\,r^2 a^2 = 0.$$

Hat man hiernach h bestimmt, so kann man mit Hülfe der letzten Formel die Gewölbstärke e berechnen.

Beispiel. Man soll für das Verhältniß $\frac{T}{\gamma} = 250$ Pfund die Stärke eines Kreisgewölbes von 40 Fuß Halbmesser finden, welches eine oben horizontal begrenzte Uebermauerung trägt, deren Höhe a über dem inneren Gewölbstücke 5 Fuß mißt. Es ist hier für die Tiefe h der Bruchfuge unter dem Gewölbscheitel:

$$h^4 - {}^{20}/_9\,(250 + 1{,}2 \,.\, 40 - 15)\,h^3$$
$$+ {}^{20}/_9\,(250 \,.\, 40 - 2{,}5 \,.\, 250 \,.\, 5 + 0{,}8 \,.\, 1600 - 7 \,.\, 5 \,.\, 40 + 5 \,.\, 25)\,h^2$$
$$+ {}^{20}/_9 \,.\, 80 \,.\, 5\,(80 - 25)\,h + {}^{20}/_9 \,.\, 5 \,.\, 40000 = 0, \text{ d. i.}$$
$$h^4 - 629\,h^3 + 15289\,h^2 + 48889\,h + 444444 = 0.$$

Hiernach läßt sich annähernd

$$629\,h^3 = 15289\,h^2, \text{ d. i.}$$
$$h = {}^{15289}/_{629} = 25 \text{ Fuß}$$

setzen, und es ist nun schärfer

$$h = \frac{h^2 + 15289 + \frac{1}{h}\cdot 48889 + \left(\frac{1}{h}\right)^2\cdot 444444}{629} = \frac{625 + 15289 + 1956 + 711}{629}$$
$$= \frac{18581}{629} = 30 \text{ Fuß}.$$

Hieraus bestimmt sich nun die gesuchte Gewölbstärke im Scheitel:

$$e = (r\,a - h\,a + 0{,}4\,r\,h - 0{,}3\,h^2)\,\frac{\gamma}{T}$$
$$= (200 - 150 + 480 - 270) \,.\, {}^1/_{250} = \frac{260}{250} = 1{,}04 \text{ Fuß}$$
$$= 12^1/_2 \text{ Zoll}.$$

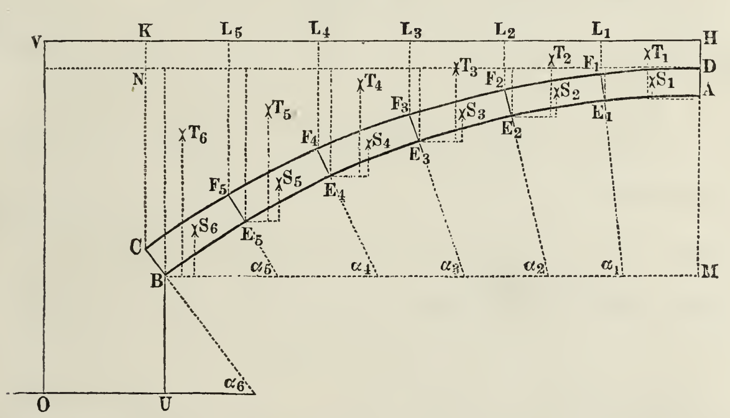
Der Sicherheit wegen ist vielleicht $e = 13$ bis 14 Zoll in Anwendung zu bringen.

Anmerkung. Wenn wir, wie im Folgenden allemal geschieht, den Gewölbschub oder die Spannung für den höchsten Punkt im Scheitel angeben und ebenso nur eine Drehung um den untersten Punkt der Bruchfuge berücksichtigen, so ist es um so mehr nöthig, diese hohe Sicherheit anzunehmen und dem Gewölbe eine entsprechende Stärke zu geben, da wir in diesem Falle nur den kleinsten Werth des Druckes erhalten. Ohne dies sind es vorzüglich die oberen Ecken der Steine am Scheitel und die unteren Ecken der Steine in der Nähe der Bruchfuge, welche den größten Druck auszuhalten haben, und daher am leichtesten abbrechen; es würde daher ein Einstürzen des ganzen Gewölbes herbeigeführt werden, wenn die Gewölbstärke nicht hinreichend groß wäre.

§. 31 **Prüfung der Gewölbe.** Die Untersuchung über die Stabilität eines Gewölbes läßt sich auf folgende Weise anstellen. Es sei $ABCD$, Fig. 50, die eine Hälfte des zu untersuchenden Gewölbes, und

CDHK die von ihr getragene Mauer, welche wir der Einfachheit wegen mit dem Gewölbe von gleicher Dichtigkeit annehmen wollen. Zunächst theilen wir das Gewölbe durch Linie $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3$ u. s. w. in der Richtung der Gewölbfugen, oder was in der Regel einerlei ist, rechtwinkelig gegen die innere Gewölblinie in mehrere (hier in 6) gleiche oder ungleiche Theile, und bestimmen nun nicht nur die Inhalte und die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3 dieser Theile, sondern auch die Inhalte und Schwerpunkte T_1, T_2, T_3 der darüber liegenden Theile $F_1 H$, $F_2 L_1$, $F_3 L_2$ .... Nun nimmt man die statischen Momente der ersten Theile AF_1 und $F_1 H$ hinsichtlich des ersten Theilpunktes E_1, und dividirt deren Summe durch den

Fig. 50.



Verticalabstand dieses Theilpunktes von der Horizontalen *DN* durch den Gewölbscheitel; ebenso nimmt man die Momente von AF_1, $E_1 F_2$, $F_1 H$ und $F_2 L_1$ in Hinsicht auf den zweiten Theilpunkt E_2 und dividirt die Summe dieser Momente durch den Verticalabstand dieses zweiten Punktes von der Horizontalen *DN*; ferner bestimmt man die Momente der Gewölbtheile AF_1, $E_1 F_2$, $E_2 F_3$ und diejenigen der Mauertheile $F_1 H$, $F_2 L_1$, $F_3 L_2$ in Hinsicht auf die Kante E_3 und dividirt deren Summe durch den Abstand des Punktes E_3 von der Horizontalen *DN*, u. s. f. Indem man so die Rechnung für alle Theile zwischen *A* und *B* fortführt, gelangt man zu den Kräften, welche in *D* nöthig sind, um Drehungen um die Punkte E_1, E_2, E_3 u. s. w. zu verhindern, und es ist nun die größte unter diesen Kräften als die im Gewölbscheitel wirklich vorhandene Spannung anzunehmen.

Außerdem multiplicire man noch die Flächensumme

$$AF_1 + F_1 H \text{ mit } tang. (\alpha_1 - \varrho), \text{ ferner}$$

$$AF_1 + E_1 F_2 + F_1 H + F_2 L_1 \text{ mit } tang. (\alpha_2 - \varrho) \text{ u. s. w.,}$$

wofern $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die Neigungswinkel der Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$ u. s. w. gegen den Horizont bezeichnen, und suche auch unter diesen Resultaten den größten Werth aus. Ist nun der größte dieser Werthe kleiner als der zur Verhinderung der Drehungen um $E_1, E_2, E_3 \ldots$ nöthige Maximalwerth, so hat man auf diese Kräfte nicht weiter Rücksicht zu nehmen; ist er aber größer, so muß man ihn als Spannung im Gewölbscheitel und nicht den erstgefundenen als solche einführen.

Endlich hat man noch zu untersuchen, ob die so gefundene Horizontalkraft nicht im Stande ist, ein Gewölbstück nach außen zu schieben oder nach außen zu drehen.

Mit Hülfe des so gefundenen Horizontalschubes sind nun noch nach §. 27 die Stabilitätsverhältnisse der Widerlager zu untersuchen.

Beispiel. Die Stabilitätsverhältnisse des Gewölbes in Fig. 50 ergeben sich durch folgende Untersuchung.

Inhalt des Gewölbstückes $A F_1$ . . . . = 6,89 Quadratfuß,
Inhalt des darüberliegenden Stückes $F_1 H$ = 8,48 „
Hebelarm des ersten in Hinsicht auf E_1. . = 2,50 „
„ „ zweiten . . . . = 2,45 „

folglich Moment beider:

$$= 6{,}89 . 2{,}5 + 8{,}48 . 2{,}45 = 38{,}001;$$

Abstand des Punktes E_1 von DN oder Hebelarm der Horizontalkraft in D:

$$= 1{,}50;$$

daher der erste Werth dieser Kraft:

$$P_1 = \frac{38{,}00 . \gamma}{1{,}50} = 25{,}33 . \gamma \text{ Pfund.}$$

Inhalt des zweiten Gewölbstückes $E_1 F_2$ . . . . = 7,15 Quadratfuß,
Inhalt des darüber befindlichen Mauerstückes $F_2 L_1$ = 11,02 „

Moment beider in Hinsicht auf E_2:

$$= 17{,}52 + 23{,}69 = 41{,}21,$$

hierzu das Moment von $A L_1$:

$$= 38{,}00 + 15{,}37 . 5{,}10 = 38{,}00 + 78{,}39 = 116{,}39,$$

folglich das Moment des ganzen Stückes $A L_2$:

$$= 157{,}60;$$

der Abstand des Punktes E_2 von DN:

$$= 2{,}35,$$

daher der zweite Werth der Horizontalkraft in D:

$$P_2 = \frac{157{,}60 . \gamma}{2{,}35} = 67{,}05 . \gamma \text{ Pfund.}$$

Ferner:

Inhalt des dritten Gewölbstückes $E_2 F_3$ . . . = 7,68 Quadratfuß,
Inhalt des darüberliegenden Mauerstückes $F_2 L_3$ = 16,51 „
Moment beider . . . . = 46,61 „

hierzu das Moment des Stückes $E_2 H$:

$$= 157{,}60 + 166{,}02 = 323{,}62,$$

folgt das Moment des Ganzen:

$$= 370{,}23,$$

und da der Abstand des Punktes E_3 von DN, $= 3{,}90$ ist, ergiebt sich der dritte Werth der Kraft in D:

$$P_3 = \frac{370{,}23 \, . \, \gamma}{3{,}90} = 94{,}93 \, . \, \gamma \text{ Pfund.}$$

Auf diese Weise fortfahrend, findet man einen Werth dieser Kraft, welcher die Drehung um E_4 zu verhindern hat:

$$P_4 = \frac{701{,}92 \, . \, \gamma}{5{,}9} = 118{,}97 \, . \, \gamma \text{ Pfund;}$$

ferner einen fünften in Hinsicht auf Drehung um E_5:

$$P_5 = \frac{1163{,}43 \, . \, \gamma}{8{,}45} = 137{,}68 \, . \, \gamma \text{ Pfund;}$$

und endlich einen letzten Werth in Hinsicht auf eine Drehung um B:

$$P_6 = \frac{1760{,}21 \, . \, \gamma}{11{,}6} = 151{,}74 \, . \, \gamma \text{ Pfund.}$$

Da dieser Werth unter allen gefundenen der größte ist, so läßt sich der Druck im Gewölbscheitel ihm gleich, also

$$P = 151{,}74 \, . \, \gamma,$$

oder, die Dichtigkeit der Mauer $= 150$ Pfund angenommen,

$$P = 151{,}74 \, . \, 150 = 22761 \text{ Pfund}$$

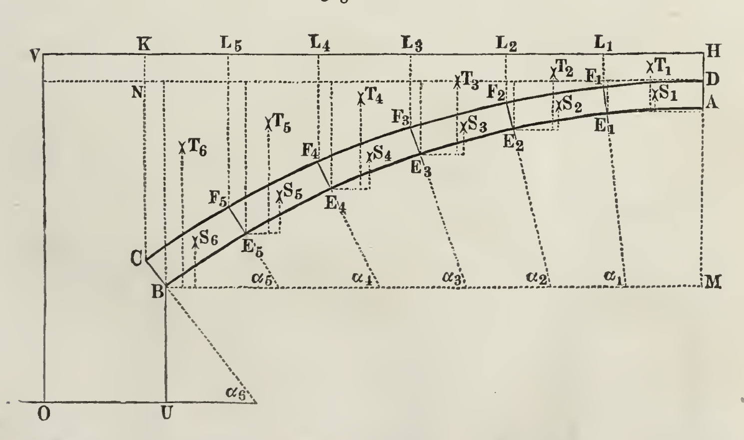
setzen. Die Dicke des Gewölbes im Scheitel ist $e = 1{,}3$ Fuß, also der Querschnitt für jeden Fuß Gewölblänge:

$$= 144 \, . \, 1{,}3 = 187{,}2 \text{ Quadratzoll,}$$

und sonach der Druck auf jeden Quadratzoll nur $\frac{22761}{187{,}2} = 122$ Pfund.

Nimmt man mit Petit den Reibungswinkel zu 30^0 an, so erhält man noch

Fig. 51.



für die Kraft zur Verhinderung des Herabgleitens der Gewölbsteine, da die Gewölbfugen $E_1 F_1$, $E_2 F_2$, $E_3 F_3 \ldots$, unter den Winkeln $83^0\,40'$; $70^0\,20'$; $71^0\,0'$; $64^0\,40'$; $58^0\,20'$; $52^0\,0'$ gegen den Horizont geneigt sind die Werthe

$P_1 = (6,89 + 8,48)\ tang.\ (83^0\,40' - 30^0) . \gamma = 15,37 . tang.\ 53^0\,40' . \gamma$
$= 20,9 . \gamma$ Pfund;
$P_2 = (15,37 + 18,17)\ tang.\ (77^0\,20' - 30^0) . \gamma = 33,54 . tang.\ 47^0\,20' . \gamma$
$= 36,4 . \gamma$ Pfund;
$P_3 = 57,73 . tang.\ 41^0 . \gamma = 50,1 . \gamma$ Pfund;
$P_4 = 90,56 . tang.\ 34^0\,40' . \gamma = 62,6 . \gamma$ Pfund;
$P_5 = 134,13 . tang.\ 28^0\,20' . \gamma = 72,3 . \gamma$ Pfund;
$P_6 = 188,53 . tang.\ 22^0 . \gamma = 76,2 . \gamma$ Pfund;

es ist also der größte Horizontaldruck zur Verhinderung des Gleitens $= 76,2 . \gamma$ Pfund. Da der Scheiteldruck $(151,74\,\gamma)$, welcher aus dem Bestreben zum Umdrehen entspringt, größer ist, so wird durch denselben auch das Herabgleiten der Gewölbsteine verhindert. Ebenso kann man sich auch leicht überzeugen, daß weder ein Gleiten noch ein Drehen nach oben möglich ist.

Was endlich noch die Stabilität des Widerlagers OUK anlangt, ist das Moment der Kraft P zum Umstürzen um O

$= 151,74 . \gamma . (\overline{OV} - \overline{DH}) = 151,74 . 18 . \gamma = 2731 . \gamma$ Pfund;

das Moment des belasteten Gewölbes $ABKH$ berechnet sich aber

$= 1760,21 . \gamma + 188,53 . \overline{OU} . \gamma = (1760,21 + 188,53 . 6,8) \gamma = 3042 . \gamma$

und das des Pfeilers

$= 343 . \gamma$ Pfund;

es ist demnach das Moment, welches dem Umstürzen um O entgegensteht,

$= (3042 + 343) . \gamma = 3385 . \gamma$ Pfund,

und daher ein Umstürzen nicht möglich. Will man indessen hinreichende Sicherheit haben, so muß man nach Obigem statt P, $1,9\,P$, also das Moment zum Umstürzen $= 5189 . \gamma$ setzen, und dann wäre allerdings das Widerlager zu schwach; es müßte ihm vielmehr statt 6,8 Fuß eine Dicke von 11 bis 12 Fuß gegeben werden. Für 11 Fuß Dicke erhält man das Stabilitätsmoment

$$S = 1760,21 . \gamma + 188,53 . 11\,\gamma + 1281 . \gamma = 5115 . \gamma,$$

also entspricht diese Dicke den Forderungen der Stabilität hinreichend.

§. 32 **Gewölbschubtabellen.** Um bei den am häufigsten vorkommenden Kreisgewölben die Untersuchung zu erleichtern, sind von Petit besondere Tabellen über die Stabilität dieser Gewölbe berechnet worden, von denen wir hier nur kurze Auszüge mittheilen können. Die erste dieser Tabellen bezieht sich auf halbkreisförmige Gewölbe mit parallelen Wölb-

Fig. 52.

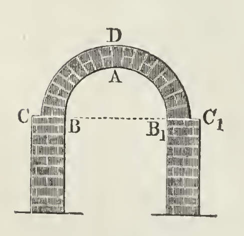


Fig. 53.

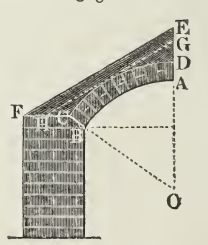
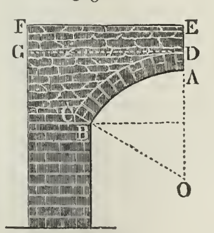


Fig. 54.



flächen, Fig. 52, die zweite auf ein halbkreisförmiges Gewölbe mit Hintermauerungen von 45° Neigung, wie die punktirte Linie GH in

Fig. 53 andeutet; die dritte Tabelle entspricht einem Halbkreisgewölbe mit horizontaler Aufmauerung, wie die punktirte Linie DG in Fig. 54 angiebt, und die vierte Tabelle entspricht bloßen Kreisbogengewölben mit parallelen Wölbungen. Bei den ersten drei Tabellen findet man in den ersten beiden Verticalcolumnen die Dimensionsverhältnisse der Gewölbe angegeben, in der dritten die Bruchwinkel, in der vierten und fünften aber die Coefficienten des Horizontalschubes und in der sechsten die Coefficienten für die größten Widerlagsstärken. Um mit Hülfe dieser Tabellen den einem gegebenen Gewölbe entsprechenden Schub zu finden, suchen wir das Verhältniß $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$ der Gewölbhalbmesser in der ersten Columne auf, gehen von da horizontal herüber bis in die vierte und fünfte Columne, und nehmen die größte von den beiden an diesen Orten stehenden Zahlen; diese Zahl p wird endlich mit dem Quadrate des Gewölbhalbmessers (r_1) und mit der Dichtigkeit (γ) der Gewölbmasse multiplicirt, um den in Frage stehenden Schub oder Horizontaldruck $p r_1^2 \gamma$ zu erhalten. Was endlich noch die sechste Columne anlangt, so giebt diese die Stärke der unendlich hoch zu denkenden Widerlager an, wenn man die Werthe derselben durch den Halbmesser der inneren Wölbung multiplicirt. Bei niedrigen Widerlagern ist diese Stärke kleiner und nach der Formel §. 27 zu berechnen. Die vierte Tabelle enthält in der ersten Verticalcolumne die Verhältnißzahlen $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$, in den übrigen Columnen aber die Coefficienten des Gewölbschubes bei sehr verschiedenen Verhältnissen zwischen der Sehne oder Weite s und der Höhe h der Gewölbe. Uebrigens kommt diese Tabelle nur dann in Anwendung, wenn der Bruchwinkel, welchen die erste Tabelle angiebt, den halben Centriwinkel

$$\beta = 90^0 - \alpha$$

des Gewölbbogens übertrifft.

Anmerkung. Damit der Theil des Widerlagers, an welchem der Gewölbbogen unmittelbar aufsitzt, nicht fortgeschoben werde, ist nöthig, daß der Horizontalschub $P = p r_1^2 \gamma$ von der Reibung $\frac{1}{2} \varphi \beta (r_2^2 - r_1^2) \gamma$ übertroffen werde. Ist dieses nicht der Fall, wie z. B. bei sehr gedrückten Bögen, so muß man dieses Ausgleiten des Obertheiles vom Widerlager durch eiserne Anker verhindern. Uebrigens läßt sich hier der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}76$, also $\frac{1}{2}\varphi = 0{,}38$ setzen, weshalb die Kraft, welche die Verankerung auszuhalten hat,

$$P = [p - 0{,}38 \beta (\varkappa^2 - 1)] r_1^2 \gamma$$

anzunehmen ist. Dieser Fall tritt ein, wenn $s = 4h$ und $\varkappa$ unter 1,06; wenn $s = 5h$ bis $10h$ und $\varkappa$ unter 1,15 ist. Wenn endlich $s = 16h$, so findet dieses Gleiten jedenfalls statt.

Tabelle I.

Halbkreisgewölbe mit parallelen Wölbflächen.

Verhältniß der Halbmesser $x = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmessers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbschubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,732	1,154	0° 00′	0,00000	0,98923	
2,70	1,176	13° 42′	0,00211	0,96262	
2,60	1,250	27° 30′	0,00809	0,88151	
2,50	1,333	35° 52′	0,02283	0,80346	
2,20	1,666	51° 4′	0,08648	0,58767	
2,00	2,000	57° 17′	0,13017	0,45912	1,3223
1,80	2,500	61° 24′	0,16373	0,34281	1,1414
1,70	2,857	62° 53′	0,17180	0,28924	1,0484
1,60	3,333	63° 49′	0,17517	0,23874	0,9525
1,55	3,636	64° 3′	0,17478	0,21464	0,9031
1,50	4,000	64° 9′	0,17254	0,19130	0,8527
1,45	4,444	64° 5′	0,16798	0,16872	0,8007
1,40	5,000	63° 48′	0,16167	0,14691	0,7838
1,35	5,714	63° 19′	0,15287	0,12587	0,7622
1,30	6,666	62° 14′	0,14330	0,10559	0,7379
1,25	8,000	61° 15′	0,12847	0,08608	0,6987
1,20	10,000	59° 41′	0,11140	0,06733	0,6504
1,15	13,333	57° 1′	0,09176	0,04935	0,5905
1,12	16,666	54° 48′	0,07789	0,03984	0,5444
1,10	20,000	53° 15′	0,06754	0,03213	0,5066
1,08	25,000	51° 7′	0,05649	0,02546	
1,06	33,333	48° 18′	0,04455	0,01891	
1,05	40,000	46° 32′	0,03813	0,01568	
1,04	50,000	44° 4′	0,03139	0,01249	
1,03	66,666	41° 4′	0,02459	0,00932	
1,02	100,000	38° 12′	0,01691	0,00618	
1,01	200,000	32° 36′	0,00889	0,00308	
1,00	∞	0° 00′	0,00000	0,00000	

Tabelle II.

Halbkreisgewölbe mit Hintermauerung von 45° Neigung.

Verhältniß der Halbmesser $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmessers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbschubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,00	2,000	60°	0,26424	0,74361	1,7246
1,80	2,500	60°	0,29907	0,57383	1,5147
1,60	3,333	60°	0,31245	0,42191	1,2990
1,55	3,636	61°	0,31222	0,38673	1,2437
1,50	4,000	61°	0,30996	0,35266	1,1877
1,45	4,444	60°	0,30587	0,31971	1,1308
1,40	5,000	59°	0,30001	0,28787	1,0954
1,35	5,714	58°	0,29285		1,0823
1,30	6,666	57°	0,28231	0,22756	1,0626
1,25	8,000	54°	0,27102		1,0412
1,20	10,000	50°	0,25806	0,17171	1,0160
1,15	13,333	47°	0,24477		0,9894
1,10	20,000	42°	0,23292	0,12032	0,9652
1,05	40,000	36°	0,22902		0,9571

Tabelle III.

Halbkreisgewölbe mit horizontaler Uebermauerung.

Verhältniß der Halbmesser $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$.	Verhältniß des inneren Durchmessers $2r_1$ zur Dicke.	Bruchwinkel, Neigung der Bruchfuge gegen die Verticale.	Coefficient p des Gewölbschubes		Coefficient für die Grenzen der Widerlagsdicken.
			für Drehung.	für Gleitung.	
2,00	2,000	36°	0,05486	0,50358	1,3834
1,80	2,500	44°	0,08508	0,37901	1,2001
1,60	3,333	52°	0,12300	0,26755	1,0082
1,55	3,636	54°	0,13027	0,24173	0,9584
1,50	4,000	56°	0,13648	0,21673	0,9075
1,45	4,444	57°	0,14122	0,19256	0,8554
1,40	5,000	59°	0,14421	0,16920	0,8018
1,35	5,714	60°	0,14504	0,14666	0,7465
1,30	6,666	61°	0,14332	0,12495	0,7379
1,25	8,000	62°	0,13872	0,10405	0,7260
1,20	10,000	63°	0,13073	0,08397	0,7048
1,15	13,333	64°	0,11895	0,06471	0,6723
1,10	20,000	65°	0,10279	0,04627	0,6249
1,05	40,000	69°	0,081755	0,02865	0,5573
1,00	∞	75°	0,055472	0,01185	

Tabelle IV.

Bogengewölbe mit parallelen Wölbflächen.

Verhältniß der Halbmesser $\varkappa = \frac{r_2}{r_1}$.	Coefficienten p des Gewölbschubes.						
	$s=4h$	$s=5h$	$s=6h$	$s=7h$	$s=8h$	$s=10h$	$s=16h$
1,40	0,15445	0,14691	0,14691	0,14691	0,14691	0,14478	
1,35	0,14717	0,13030	0,12587	0,12587	0,12587	0,12405	
1,30	0,13764	0,12331	0,10682	0,10559	0,10559	0,10406	
1,25	0,12547	0,11402	0,10009	0,08668	0,08608	0,08483	0,07180
1,20	0,11023	0,10196	0,09102	0,07999	0,06981	0,06636	0,05616
1,15	0,09123	0,08634	0,07866	0,07050	0,06259	0,04904	0,04116
1,10	0,06737	0,06563	0,06158	0,05666	0,05160	0,04214	0,02681
1,05	0,03776	0,03804	0,03709	0,03550	0,03357	0,02944	0,01882
1,01	0,00834	0,00871	0,00886	0,00889	0,00885	0,00862	0,00747

Tabelle V.

Kurze Uebersicht der Dimensionsverhältnisse von Bogengewölben.

Verhältniß der Weite zur Höhe $\frac{s}{h}$.	Halber Centriwinkel β.	$\sin.\ \beta$.	Verhältniß des inneren Halbmessers r_1 zur Höhe, $\frac{r_1}{h}$.	Verhältniß des inneren Halbmessers r_1 zur Weite, $\frac{r_1}{s}$.
3	67° 22′ 49″	0,9231	1,625	0,5417
4	53° 7′ 48″	0,8000	2,500	0,6250
5	43° 36′ 10″	0,6897	3,625	0,7250
6	36° 52′ 11″	0,6000	5,000	0,8333
7	31° 53′ 26″	0,5283	6,625	0,9464
8	28° 4′ 20″	0,4706	8,500	1,0625
9	25° 3′ 27″	0,4235	10,625	1,1806
10	22° 37′ 10″	0,3846	13,000	1,3000
12	18° 55′ 29″	0,3243	18,5	1,5417
16	14° 15′ 0″	0,2462	32,500	2,0312

Beispiele. 1. Bei einem Halbkreisgewölbe mit horizontaler Uebermauerung ist der innere Halbmesser $r_1 = 10$ Fuß; man sucht die Gewölbstärke, den Gewölbschub u. s. w. Es ist nach Perronet die Gewölbstärke $e = 0{,}0694 . 10 + 1 = 1{,}694$ Fuß, wofür ich 1,7 Fuß annehmen will. Ferner ist $r_2 = 11{,}7$ und $\varkappa = \frac{r_2}{r_1} = 1{,}17$, daher giebt die Tabelle III. den Bruchwinkel $\beta = 63^3/_5{}^0$, und den Coefficienten der Horizontalspannung, $p = 0{,}1190 + {}^2/_5 . 0{,}0118 = 0{,}1237$. Nimmt man nun den Cubikfuß Mauer zu 150 Pfund Gewicht an, so erhält man die Gewölbspannung im Scheitel:

$$P = 0{,}1237 . 150 . 10^2 = 1855 \text{ Pfund.}$$

Für die Grenze der Widerlagsstärke giebt dieselbe Tabelle den Coefficienten $0{,}6723 + {}^2/_5 . 0{,}0325 = 0{,}6853$, daher diese Stärke selbst

$$d = 0{,}6853 . 10 = 6{,}85 \text{ Fuß.}$$

Bei niedrigen Widerlagern fällt die nach der Formel des §. 27 zu berechnende Stärke kleiner aus.

2. Welche Dimensionen und Kräfte entsprechen einem Bogengewölbe von 10 Fuß Weite und 2 Fuß Bogenhöhe ohne Belastung? Hier ist $\frac{h}{s} = {}^1/_5$, daher der halbe Centriwinkel $\beta = 43^0\ 36''\ 10'$, $sin.\ \beta = 0{,}6897$ und der Halbmesser $r_1 = 3{,}625 . 2 = 7{,}25$ Fuß; ferner giebt die Tabelle IV. den Coefficienten des Horizontalschubes, da $s = 5\,h$ und nach der Formel von Perronet

$$e = 0{,}0694 . 7{,}25 + 1 = 1{,}5, \text{ also } \varkappa = \frac{r_2}{r_1} = \frac{8{,}75}{7{,}25} = 1{,}2 \text{ ist,}$$

$$p = 0{,}10196,$$

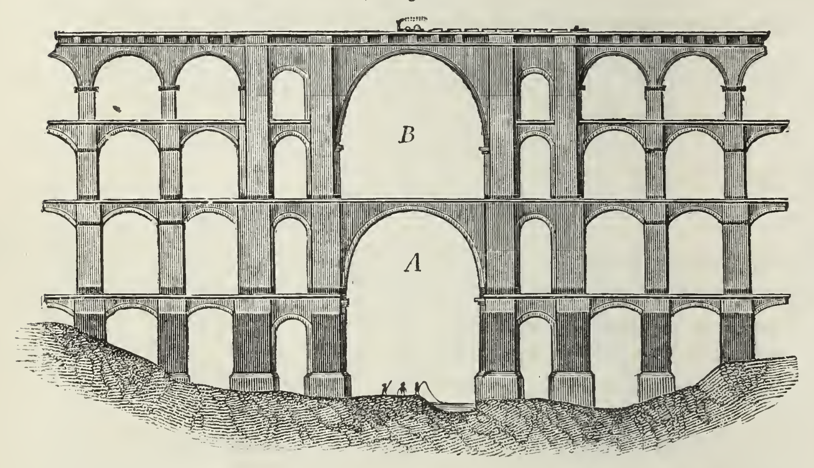
folglich beträgt der Gewölbschub:

$$P = 0{,}102 . 150 . 7{,}25^2 = 804 \text{ Pfund.}$$

Steinerne Brücken. Die Theorie der Gewölbe findet in dem Ingenieurwesen vorzüglich bei den steinernen Brücken (franz. ponts en pierres; engl. stone-bridges) ihre Anwendung. Die steinernen Brücken sowie auch die Viaducte und Aquaducte, werden in der Regel aus Bögen (franz. und engl. arches) zusammengesetzt, welche die Formen von Tonnengewölben (franz. voûtes cylindriques; engl. cylindrical arches) haben. Die Weite (franz. ouverture; engl. span) der Brückenbögen richtet sich vorzüglich nach dem fließenden Wasser, über welches die Brücke gespannt ist. Hat dasselbe eine große Geschwindigkeit und ist es starken Anschwellungen unterworfen, so wendet man Bögen mit großer Spannweite an, um das Wasserbett möglichst wenig zu verengen und dadurch das Austreten des Hochwassers aus dem Bette einzuschränken, sowie die zerstörenden Wirkungen des Hochwassers und der von demselben zugeführten Körper, z. B. Eisschollen, auf die Brückenpfeiler zu schwächen; fließt hingegen der Fluß langsam und hat derselbe keine bedeutenden Hochwasser, so kann man aus den entgegengesetzten Gründen die Brücke über demselben aus einer größeren Anzahl engerer Bögen zusammensetzen. Die Spannweite der gewöhnlichen Brückenbögen beträgt 50 bis 150 Fuß; am größten ist sie bei der Gros- §. 33

venor-Brücke über dem Dee in England, wo sie sogar 195 Fuß mißt. Die Brückenhöhe richtet sich ebenfalls nach dem Hochwasser; jedenfalls müssen selbst bei dem höchsten Wasserstande die Scheitel der Brückenbögen noch um eine ansehnliche Höhe über, und die Seiten derselben nicht oder nur wenige Fuß unter der Oberfläche des Wassers stehen, damit fremde Körper, welche auf dem Wasser schwimmen, wie z. B. Eisschollen, ungehindert durch die Brücke hindurch schwimmen können, und auch die Stauung des Wassers nicht zu groß ausfällt. In vielen Fällen, namentlich bei Eisenbahnen und Canälen, liegen die Punkte, welche durch eine Brücke (Viaduct, Aquaduct) zu verbinden sind, so hoch über der Thalsohle, daß die Brückenbögen schon ohnedies viel über das Hochwasser zu stehen kommen. Die gewöhnlichen Fahrbrücken über Flüsse haben eine Höhe von 30 bis 100 Fuß; die Eisenbahnbrücken und Aquaducte erreichen aber Höhen von 150 Fuß und mehr. Z. B. die Göltzschthalbrücke (Fig. 55) bei der sächsisch-bayerischen Eisenbahn

Fig. 55.



hat in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 250 Fuß, und der römische Aquaduct zu Nismes in Frankreich (Pont du Gard) hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 150 Fuß. Die Bogenhöhe (franz. montée; engl. hight) der Brücke richtet sich natürlich nach der Spannweite und Höhe der Brücke überhaupt; bei den gewöhnlichen Fahrbrücken beträgt diese Höhe $^1/_9$ bis $^1/_3$ der Spannweite; bei hohen Eisenbahnbrücken und Wasserleitungen nimmt man diese Höhe $^1/_2$ oder gar $^5/_8$ der Spannweite. Was die Breite der Brücken anlangt, so beträgt dieselbe bei gewöhnlichen Fahrbrücken 20 bis 40 Fuß; die neue Brücke über die Elbe bei Dresden, welche für Fuhrwerke, Fußgänger und eine Eisenbahn zugleich dient, besitzt sogar eine Breite von 55 Fuß.

Anmerkung. In Fig. 55 ist das Mittelstück der Göltzschthalbrücke abgebildet. Die Länge dieser Brücke beträgt 1840 Fuß, die obere Breite 32 und die untere 72 Fuß. Von den mittleren großen Bögen hat A eine Spannweite von 90 Fuß und eine Höhe von 58 Fuß, B aber eine Spannweite von 98 Fuß und eine Höhe von 64 Fuß. Nimmt man die Höhe eines Ziegelpfeilers $h = 200$ Fuß, und die Dichtigkeit der Ziegelmauer = 100 Pfund an, so erhält man den größten Druck dieses Pfeilers auf den Quadratzoll, abgesehen von der zufälligen Belastung und von der Belastung durch die Gewölbbögen:

$$P = h\gamma = \frac{200 \, . \, 100}{144} = 139 \text{ Pfund.}$$

Wäre der Festigkeitsmodul der Ziegel $K = 1000$ Pfund, so hätte man hiernach nur siebenfache Sicherheit bei dieser Brücke.

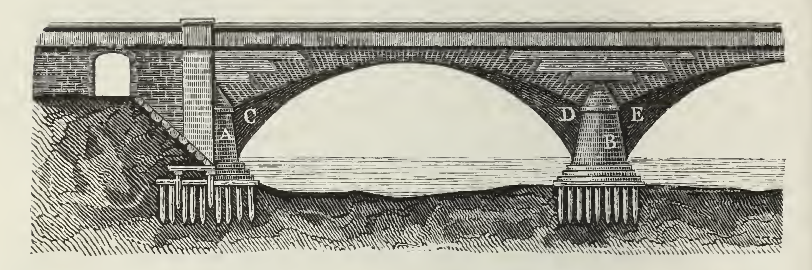
Brückenpfeiler. Die Pfeiler (franz. piles; engl. piers) und die §. 34
Widerlager (franz. culées; engl. abutments) der Brücken müssen nicht nur auf einem ganz festen Grunde stehen, sondern auch eine hinreichende Dicke haben, um dem Drucke der darauf ruhenden Bögen sammt ihrer Belastung widerstehen zu können. Der Grund besteht entweder aus festem Felsen, oder aus unzusammendrückbarem Sand, oder aus zusammendrückbarer Erde. Um auf Felsen zu gründen, ist nicht allein die Herstellung ebener Flächen zur Aufnahme des Druckes, sondern auch die Entfernung alles verwitterten und losen Gesteines nöthig. Die Gründung auf Sand, Thon und Erde erfordert hingegen die Herstellung eines Rostes oder eines Bettes aus Beton. Der aus einer Reihe Längenschwellen und einer Reihe aufgekämmter Querschwellen zusammengesetzte Rost ruht entweder unmittelbar auf dem Stein- oder Sandbette, oder er wird von eingerammten Pfählen (franz. piles; engl. pieux) getragen (s. I., §. 347), und heißt im ersten Falle ein Schwellen-, im letzteren aber ein Pfahlrost. Bei der Gründung im Wasser ist es nöthig, die Baustelle der Pfeiler durch einen Fangdamm vor dem Eindringen des Wassers zu sichern. Ist die Tiefe des Wassers über 4 Fuß, so sind sogenannte Kastendämme (franz. batardeaux; engl. coffer-dams) nöthig, welche aus zwei Reihen Bohlen oder Spundwänden und zwischengestampftem Letten zusammengesetzt werden.

Die Fundamente der Pfeiler werden aus gehauenen Steinen treppenförmig aufgemauert, so daß die untere Breite derselben dem sechsten bis neunten Theile der Spannweite gleichkommt. Um die Brückenpfeiler gegen den Stoß des Eises und anderer schwimmenden Körper zu schützen, und um die auf das Flußbett nachtheilig wirkende wirbelnde Bewegung des Wassers möglichst zu verhindern, werden die Pfeiler stromauf- und stromabwärts mit prismatischen Ansätzen, den sogenannten Pfeilerköpfen (franz. becs; engl. starlings) versehen, welchen eine halbkreisförmige oder halbelliptische Basis und eine kegelförmige oder sphäroidische Haube (franz. bonnet; engl. hood) zu geben ist. Die Landfesten oder Widerlagspfeiler sind in der Regel noch

mit Flügelmauern (franz. murs en aile; engl. wingwalls) versehen, welche zur Unterstützung der Auffahrt dienen. Die Stärke der Pfeiler und Widerlager ist nach der vorausgeschickten Theorie unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß diese Stützmauern nicht allein den constanten Gewölbschub, sondern auch die zufällige und bewegliche Belastung aufzunehmen haben.

Anmerkung. Fig. 56 führt einen Theil der Brücke von Neuilly über die Seine vor Augen. Sie besteht aus fünf Bögen von 120 Pariser Fuß Weite und

Fig. 56.



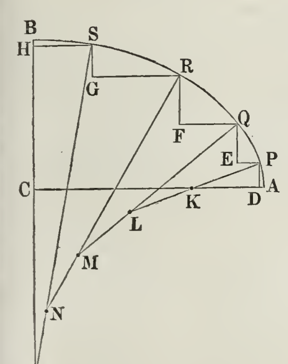
40 Fuß Höhe. Die Curve, wonach die Bögen construirt sind, ist eine Korblinie mit 11 Mittelpunkten. Die Höhe der Schlußsteine dieser Brücke beträgt 5 Fuß. Die Pfeilerköpfe (A und B) sind halbkreisförmig abgerundet und die Kanten zwischen den Stirn- und den inneren Wölbflächen der Bögen sind durch krumme Flächen C, D, E oder sogenannte Kuhhörner (fr. cornes de vache) abgestumpft.

§. 35 **Korbbögen.** Die Brückenbögen werden entweder nach einem Halbkreise oder nach einem Kreisbogen (Stichbogen), oder nach einer Ellipse, oder nach einem sogenannten Korbbogen (franz. arche en anse de panier; engl. basket-handle arch) construirt. Die Halbkreisgewölbe geben den kleinsten Horizontalschub, und besitzen daher bei hinreichender Belastung eine große Stabilität; sie lassen sich aber bei niedrigen Flußbrücken nicht anwenden, weil sie eine große Anzahl von Pfeilern erfordern, wodurch das Flußbett sehr eingeengt wird. Sie finden daher vorzüglich nur bei Viaducten und Aquaducten ihre Anwendung. Die Stichbögen geben, namentlich wenn sie sehr flach sind, einen bedeutenden Horizontalschub, und erfordern daher zu ihrer Stabilität sehr starke und solide Pfeiler und Widerlager. Da sie sich sehr weit spannen lassen, so setzen sie dem Wasser am wenigsten Widerstand entgegen, weshalb man sie auch vorzüglich bei größeren Flüssen anwendet. Die elliptischen Bögen stehen zwischen dem Halbkreise und den Stichbögen inne; man ersetzt sie aber gewöhnlich durch Korbbögen, weil diese leichter und auch so zu construiren sind, daß die Krümmung am Fußpunkte kleiner ausfällt als bei der Ellipse.

Um aus der halben Spannweite $CA = \frac{s}{2}$ und der Bogenhöhe

$CB = h$, Fig. 57, die Mittelpunkte K, L, M, N, O der Kreisbögen AP, PQ, QR, RS, SB zu finden, aus welchen ein Korbbogen AQB zusammenzusetzen ist, hat man vielerlei Regeln angegeben; folgende Bestimmungsweise möchte jedoch die vorzüglichere sein. Die halbe Spannweite $CA = \frac{s}{2}$ läßt sich als die Summe der Stücke AD, PE, QF, RG, SH und die Bogenhöhe CB als die Summe der Stücke DP, EQ, FR, GS und HB ansehen. Bezeichnen wir den Halbmesser:

Fig. 57.



$$\begin{aligned} KA &= KP \text{ durch } r_1, \\ LP &= LQ \quad \text{„} \quad r_2, \\ MQ &= MR \quad \text{„} \quad r_3, \\ NR &= NS \quad \text{„} \quad r_4, \text{ und} \\ OS &= OB \quad \text{„} \quad r_5, \end{aligned}$$

sowie die Winkel, unter welchen die Horizontale AC von den Halbmessern KP, LQ, MR, NS geschnitten wird, durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, so haben wir:

$$\begin{aligned} AD &= r_1 (1 - cos.\, \alpha_1), & DP &= r_1 \, sin.\, \alpha_1, \\ PE &= r_2 (cos.\, \alpha_1 - cos.\, \alpha_2), & EQ &= r_2 (sin.\, \alpha_2 - sin.\, \alpha_1), \\ QF &= r_3 (cos.\, \alpha_2 - cos.\, \alpha_3), & FR &= r_3 (sin.\, \alpha_3 - sin.\, \alpha_2), \\ RG &= r_4 (cos.\, \alpha_3 - cos.\, \alpha_4), & GS &= r_4 (sin.\, \alpha_4 - sin.\, \alpha_3), \\ SH &= r_5 \, cos.\, \alpha_4, & HB &= r_5 (1 - sin.\, \alpha_4), \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} {}^1\!/_2\, s &= r_1 (1 - cos.\, \alpha_1) + r_2 (cos.\, \alpha_1 - cos.\, \alpha_2) + r_3 (cos.\, \alpha_2 - cos.\, \alpha_3) + \cdots \\ &= r_1 + (r_2 - r_1) \, cos.\, \alpha_1 + (r_3 - r_2) \, cos.\, \alpha_2 + (r_4 - r_3) \, cos.\, \alpha_3 \\ &\quad + (r_5 - r_4) \, cos.\, \alpha_4, \text{ sowie:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= r_1 \, sin.\, \alpha_1 + r_2 (sin.\, \alpha_2 - sin.\, \alpha_1) + r_3 (sin.\, \alpha_3 - sin.\, \alpha_2) + \cdots \\ &= r_5 - [(r_2 - r_1) \, sin.\, \alpha_1 + (r_3 - r_2) \, sin.\, \alpha_2 + (r_4 - r_3) \, sin.\, \alpha_3 \\ &\quad + (r_5 - r_4) \, sin.\, \alpha_4]. \end{aligned}$$

Lassen wir nun die Halbmesser $r_1, r_2, r_3 \ldots$ eine steigende arithmetische Reihe bilden, setzen wir also:

$$r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = r_4 - r_3 = r_5 - r_4 = d,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} {}^1\!/_2\, s &= r_1 + d \, (cos.\, \alpha_1 + cos.\, \alpha_2 + cos.\, \alpha_3 + cos.\, \alpha_4) \text{ und} \\ h &= r_1 + d \, [4 - (sin.\, \alpha_1 + sin.\, \alpha_2 + sin.\, \alpha_3 + sin.\, \alpha_4)], \end{aligned}$$

oder allgemeiner, wenn wir n Krümmungshalbmesser annehmen,

$$cos.\, \alpha_1 + cos.\, \alpha_2 + \cdots + cos.\, \alpha_n = \Sigma (cos.\, \alpha), \text{ sowie}$$
$$sin.\, \alpha_1 + sin.\, \alpha_2 + \cdots + sin.\, \alpha_n = \Sigma (sin.\, \alpha)$$

setzen und beachten, daß $sin.\, \alpha_n = 1$ und $cos.\, \alpha_n = 0$ ist,

$$\tfrac{1}{2} s = r_1 + d \,.\, \Sigma (cos.\,\alpha) \text{ und}$$
$$h = r_1 + d\,[n - \Sigma\,(sin.\,\alpha)], \text{ woraus nun:}$$
$$1)\ d = \frac{\tfrac{1}{2} s - h}{\Sigma\,(cos.\,\alpha) + \Sigma\,(sin.\,\alpha) - n}, \text{ sowie}$$
$$2)\ r_1 = \tfrac{1}{2} s - d\,\Sigma\,(cos.\,\alpha) \text{ folgt.}$$

Macht man den am Gewölbscheitel S anliegenden Centriwinkel BOS halb so groß als jeden der übrigen Winkel $AKP = PLQ = QMR = RNS = \alpha$, so erhält man:
$\alpha_2 = 2\,\alpha_1$, $\alpha_3 = 3\,\alpha_1$, $\alpha_4 = 4\,\alpha_1$ und $\alpha_5 = 4{,}5\,\alpha_1 = 90^0$, folglich: $\alpha_1 = 20^0$, $\alpha_2 = 40^0$, $\alpha_3 = 60^0$, und $\alpha_4 = 80^0$; und $\alpha_5 = 90^0$, es ist hiernach:

$sin.\,\alpha_1 = 0{,}3420$, $cos.\,\alpha_1 = 0{,}9397$,
$sin.\,\alpha_2 = 0{,}6428$, $cos.\,\alpha_2 = 0{,}7660$,
$sin.\,\alpha_3 = 0{,}8660$, $cos.\,\alpha_3 = 0{,}5000$,
$sin.\,\alpha_4 = 0{,}9848$, $cos.\,\alpha_4 = 0{,}1736$,
$sin.\,\alpha_5 = 1{,}0000$, $cos.\,\alpha_5 = 0{,}0000$,

daher: $\Sigma\,(sin.\,\alpha) = 3{,}8356$, und $\Sigma\,(cos.\,\alpha) = 2{,}3793$,
so daß

$$d = \frac{\tfrac{1}{2} s - h}{3{,}8356 + 2{,}3793 - 5} = \frac{\tfrac{1}{2} s - h}{1{,}2149} = 0{,}8231\,(\tfrac{1}{2} s - h) \text{ und}$$
$$r_1 = \tfrac{1}{2} s - 2{,}3793\,d = 1{,}9584\,h - 0{,}9584\,\frac{s}{2}, \text{ ferner}$$
$$r_2 = 1{,}1353\,h - 0{,}1353\,\frac{s}{2},$$
$$r_3 = 0{,}3122\,h + 0{,}6878\,\frac{s}{2},$$
$$r_4 = -\,0{,}5109\,h + 1{,}5109\,\frac{s}{2} \text{ und}$$
$$r_5 = -\,1{,}3340\,h + 2{,}3340\,\frac{s}{2} \text{ folgt.}$$

Für $n = 2$ Halbmesser r_1 und r_2, ist $\alpha_1 = 60^0$ und $\alpha_2 = 90^0$, daher:

$$d = \frac{\tfrac{1}{2} s - h}{0{,}3660} = 2{,}7322\,(\tfrac{1}{2} s - h),$$
$$r_1 = \tfrac{1}{2} s - 0{,}5\,.\,2{,}7322\,(\tfrac{1}{2} s - h) = 1{,}3661\,h - 0{,}3661\,\frac{s}{2}, \text{ und}$$
$$r_2 = -\,1{,}3661\,h + 2{,}3661\,\frac{s}{2}.$$

Für $n = 3$ Halbmesser hat man $\alpha_1 = 36^0$, $\alpha_2 = 72^0$, und $\alpha_3 = 90^0$, wonach

$$d = \frac{\tfrac{1}{2} s - h}{0{,}6569} = 1{,}5223\,(\tfrac{1}{2} s - h),$$

$$r_1 = \frac{1}{2}s - 1,1180 \,.\, 1,5223\,(\tfrac{1}{2}s - h) = 1,7019\,h - 0,7019\,\frac{s}{2},$$

$$r_2 = 0,1796\,h + 0,8204\,\frac{s}{2}, \text{ und}$$

$$r_3 = -\,1,3427\,h + 2,3427\,\frac{s}{2} \text{ ist.}$$

Giebt man der Wölbfläche AQB, Fig. 58, in A und B dieselben Krümmungen wie einer Ellipse, so erhält man die Halbmesser:

Fig. 58.

$$KA = KP = r_1 = \frac{2h^2}{s},$$

$$LP = LQ = r_2 = h, \text{ und}$$

$$OQ = OB = r_3 = \frac{s^2}{4h},$$

welche sich wie folgt auch leicht durch Construction finden lassen. Man ziehe die Sehne AB und errichte auf derselben die Perpendikel BE und AF; diese schneiden von den Axen die Halbmesser $CE = r_1$ und $CF = r_3$ ab, deren Mittelpunkte K und O in diesen Axen selbst liegen. Um den Mittelpunkt L für den mittleren Halbmesser $LP = r_2 = h$ zu finden, beschreibe man aus K mit dem Halbmesser $h - r_1$, und aus O mit dem Radius $r_3 - h$ Kreisbögen. Der Durchschnitt dieser Bögen ist das gesuchte Centrum L.

Läßt man, Fig. 57, die Centriwinkel: BOS, SNR, RMQ u. s. w. vom Scheitel nach dem Widerlager zu in einer arithmetischen Progression φ, 2φ, 3φ u. s. w. steigen, so hat man:

$$\varphi + 2\varphi + 3\varphi + \cdots + n\varphi = \frac{(n+1)n}{2}\varphi = 90^0, \text{ daher:}$$

$$\varphi = \frac{180^0}{n(n+1)}, \text{ und } \alpha_1 = n\varphi = \frac{180}{n+1}, \; \alpha_2 = 2\alpha_1 - \varphi,$$

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 - 3\varphi \text{ u. s. w.}$$

Beispiel. Wenn bei dem Korbbogen ARB in Fig. 57, die Höhe $BC = h = \frac{2}{3}\,CA = \frac{1}{3}\,s$ ist, so erhält derselbe nach Obigem folgende Halbmesser:

$$r_1 = 0,1735\,s, \; r_2 = 0,3107\,s, \; r_3 = 0,4479\,s,$$
$$r_4 = 0,5851\,s \text{ und } r_5 = 0,7223\,s.$$

Läßt man die Centriwinkel von B bis A in einer arithmetischen Progression steigen, macht man hiernach $\varphi = \frac{180}{5 \cdot 6} = 6^0$, so erhält man:

$$\alpha_1 = n\varphi = 30^0,$$
$$\alpha_2 = 30^0 + 30^0 - 6^0 = 30^0 + 24^0 = 54^0,$$
$$\alpha_3 = 54^0 + 24^0 - 6^0 = 54^0 + 18^0 = 72^0,$$
$$\alpha_4 = 72^0 + 18^0 - 6^0 = 72^0 + 12^0 = 84^0,$$
$$\alpha_5 = 84^0 + 12^0 - 6^0 = 84^0 + 6^0 = 90^0.$$

Nun ist:

$cos.\ 30^0 = 0{,}8660,$	$sin.\ 30^0 = 0{,}5000,$
$cos.\ 54^0 = 0{,}5878,$	$sin.\ 54^0 = 0{,}8090,$
$cos.\ 72^0 = 0{,}3090,$	$sin.\ 72^0 = 0{,}9510,$
$cos.\ 84^0 = 0{,}1045,$	$sin.\ 84^0 = 0{,}9945,$
$cos.\ 90^0 = 0{,}0000,$	$sin.\ 90^0 = 1{,}0000,$

also $\Sigma\,(cos.\,\alpha) = 1{,}8673$ und $\Sigma\,(sin.\,\alpha) = 4{,}2545$,
daher folgt hier:

$$d = \frac{\frac{1}{2}s - h}{1{,}1218} = 0{,}8914\,(\tfrac{1}{2}s - h) \text{ und}$$

$$r_1 = \tfrac{1}{2}s - 1{,}8673 \,.\, 0{,}8914\,(\tfrac{1}{2}s - h) = 1{,}6646\,h - 0{,}3323\,s.$$

Hätte man $h = \frac{1}{3}s$ angenommen, wie in Fig. 57, so würden:

$$d = 0{,}8914 \cdot \frac{s}{6} = 0{,}1486 \,.\, s \text{ und}$$

$$r_1 = 0{,}5549\,s - 0{,}3323\,s = 0{,}2226\,s,\ r_2 = 0{,}3712\,s,\ r_3 = 0{,}5198\,s,$$
$$r_4 = 0{,}6684\,s \text{ und } r_5 = 0{,}8170\,s$$

sich ergeben.

Bei einem Korbbogen mit elliptischen Wölbungen in A und B, Fig. 58, wäre:

$$r_1 = \frac{2h^2}{s} = \tfrac{2}{9}s = 0{,}2222\,s,\ r_2 = h = 0{,}3333\,s \text{ und}$$

$$r_3 = \frac{s^2}{4h} = \tfrac{3}{4}s = 0{,}7500\,s.$$

§. 36 **Unsymmetrische Gewölbe.** Ist ein Gewölbe unsymmetrisch, oder auf einer Seite mehr belastet als auf der andern, so muß man den Maximaldruck P_m (nach §. 23 bis §. 25) für jede Seite besonders ermitteln, den größeren dieser Maximalwerthe als den Druck P im Gewölbscheitel D ansehen, und mit Hülfe dieser Horizontalkraft die Gleichgewichtsverhältnisse auf jeder Seite der Scheitelfuge besonders untersuchen. Wird durch diese Fuge das Gewölbe in zwei ungleich lange Theile getheilt, wie z. B. bei der Ausmauerung unterirdischer Räume oft vorkommt, so fällt die Bruchfuge $E_1 F_1$ des kürzeren Gewölbstückes $A C_1$ entweder, wie in Fig. 59 dargestellt wird, noch in dieses Gewölbstück, oder es kommt dieselbe, wie Fig. 60 zeigt, gar nicht zu Stande, weil die Widerstandslinie $E D E_1$ die innere Wölbfläche $A B_1$ gar nicht erreicht und die Widerlagsfläche $B_1 C_1$ in einem Zwischenpunkte O durchschneidet. Die Berechnung von $P = P_m$, sowie die weitere Untersuchung des Gewichtes ist übrigens in beiden Fällen genau dieselbe als wenn das Gewölbe vollständig symmetrisch

wäre. Bei einem Gewölbe BDB_1, Fig. 61, welches auf einer Seite stärker belastet ist als auf der anderen, hat man den Gewölbschub P gleich zu setzen

Fig. 59.

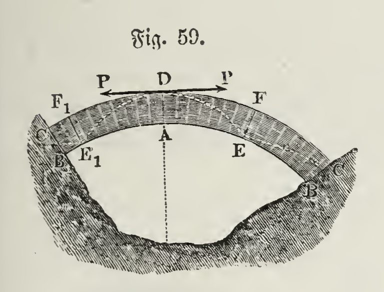
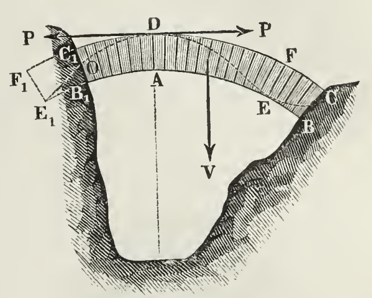
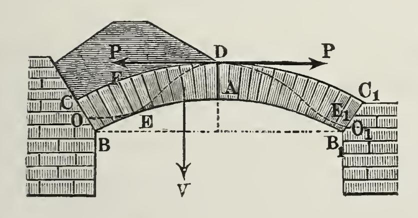


Fig. 60.



der Maximalkraft P_m, der stärker belasteten Gewölbhälfte BD, jedoch für beide Hälften besonders zu untersuchen, ob diese Kraft weder ein Schieben noch ein Kippen nach außen hervorzubringen im Stande ist. Es fallen hier die Widerstandslinien AEO und AE_1O_1 von beiden Gewölbhälften von einander verschieden aus, und es ist möglich, daß die Widerstandslinie der schwächer belasteten Hälfte DB_1 die innere Wölbung gar nicht erreicht; dagegen kann aber auch vorkommen, daß sie die äußere Wölbfläche DC_1 durchschneidet, während die Widerstandslinie DEO der stärker belasteten Hälfte von der äußeren Wölbfläche DC entfernt bleibt. In diesem Falle erfolgt natürlich ein Zusammenstürzen des ganzen Gewölbes durch Kippen desselben um die Kante, in welcher die Wölbfläche DC_1 von der Widerstandslinie DE_1O_1 durchschnitten wird. Um eine größere Sicherheit zu erlangen, legt man auch hier die Widerstandslinie um ein Drittel der Gewölbdicke unter den äußeren Gewölbscheitel u. s. w.

Fig. 61.

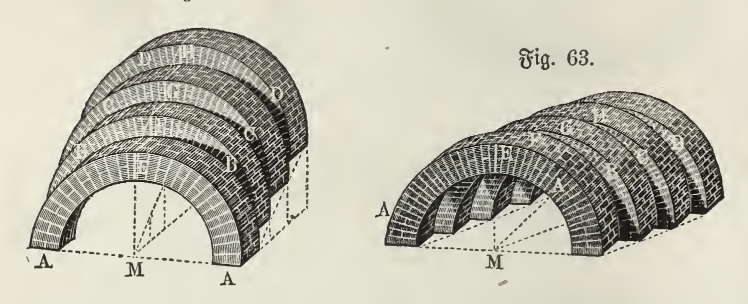


Schiefe Gewölbe. Die im Vorstehenden entwickelte Theorie der Stabilität gerader Tonnengewölbe läßt sich auch auf schiefe Tonnengewölbe anwenden, da sich diese als eine Zusammensetzung von unendlich vielen unendlich kurzen geraden Tonnengewölben ansehen lassen. §. 37

Kommt es darauf an, einen schräg aufsteigenden Raum, wie z. B. den Eingang zu einem Keller, oder einem sogenannten flachen Schacht zu über-

wölben, so kann man dazu eine Reihe von kurzen Gewölben oder Bögen *AA*, *BB*, *CC*, *DD*, Fig. 62, anwenden, deren Axe oder Scheitellinie in einer schrägen Richtung *EFGH* aufsteigt. Eine derartige Zusammensetzung aus unendlich vielen unendlich kurzen Gewölbbögen bildet ein einziges schräg aufsteigendes oder sogenanntes Kellerhalsgewölbe. Da jeder der bogenförmigen Bestandtheile eines solchen Gewölbes für sich allein im Gleichgewicht sein muß, so hängt natürlich auch die Stabilität eines solchen Gewölbes nur von der Stabilität eines beliebig kurzen Stückes desselben ab.

Fig. 62. Fig. 63.

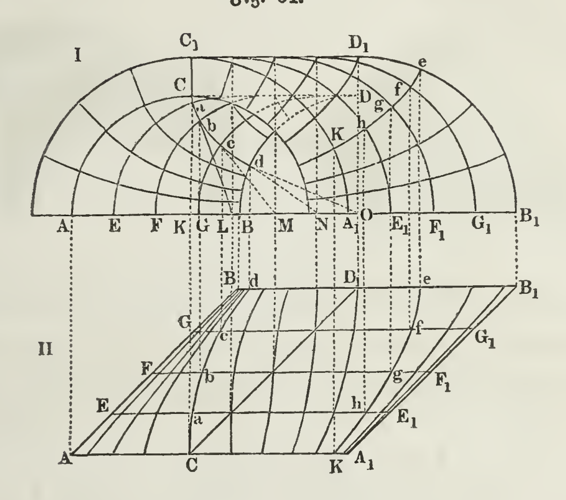


Um sich einen schrägen Uebergang über ein fließendes Wasser oder über eine Straße u. s. w. zu verschaffen, wie z. B. bei Eisenbahnanlagen häufig nöthig ist, kann man eine Reihe von Bögen *AA*, *B*, *C*, *D*, Fig. 63, anwenden, welche schräg an einander angesetzt sind, so daß deren Scheitel *E*, *F*, *G*, *H* eine gegen die Stirnfläche dieser Bögen schräg stehende Linie *EH* bildet. Bei den gewöhnlichen Ausführungen sind die Bögen *AA*, *B*, *C*, u. s. w. unendlich kurz und bilden daher ein einziges schiefes Gewölbe.

Was die Zusammensetzung der schiefen Gewölbe aus einzelnen Gewölbsteinen anlangt, so gilt auch hier die Regel, daß die Wölbfugen rechtwinkelig gegen die inneren Wölblinien zu legen sind; deshalb müssen auch die Wölbflächen von den Wölbfugen nicht in geraden, sondern in gewissen krummen Linien geschnitten werden. Die Art und Weise, wie diese Curven zu construiren sind, wird aus Folgendem hervorgehen. In Fig. 64, I. und II., seien *ACA* und *BDB* die Auf- und Grundrisse von den inneren und äußeren Bögen der beiden Stirnflächen eines schiefen Gewölbes, und zwar *CD* die Scheitellinien, sowie *K* und *O* die Mittelpunkte derselben. Ferner seien noch *EE*, *FF* und *GG* in gleichen Abständen von einander und parallel zu den Stirnflächen *AA*, *BB* geführte Schnitte der Gewölbflächen. Um nun vom Scheitel *C* aus eine Fugenlinie zu legen, führt man im Aufriß (I.) einen Zug *Cabcd* so, daß derselbe die Schnittlinien *EE*, *FF*, *GG* rechtwinkelig durchschneidet, daß also z. B. seine

Tangenten in C, a, b, c, d nach den Mittelpunkten K, L, M, N, O der Kreise AA_1, EE_1, FF_1, GG_1, BB gehen, wenn man es mit einem

Fig. 64.



Kreisgewölbe zu thun hat. Die auf diese Weise gefundene Curve ist der Aufriß der gesuchten Fugenlinie durch C, und wenn man von den Punkten $a, b, c \ldots$ nach dem Grundrisse herablothet bis zu den Schnitten EE, FF, $GG \ldots$, so erhält man auch noch die Punkte $a, b, c \ldots$ im Grundrisse (II.) der gesuchten Curve. Auf gleiche Weise kann man auch andere Fugencurven, z. B. die Fugencurve $efghk$ der äußeren Wölbfläche construiren.

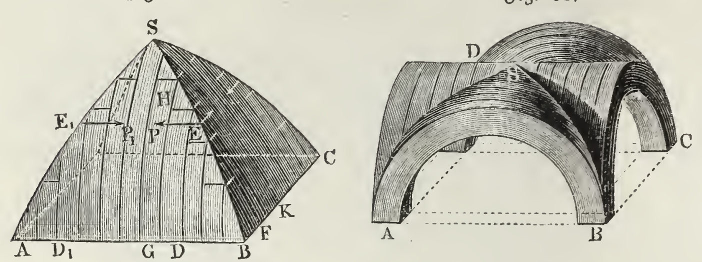
Kloster- und Kreuzgewölbe. Auch die Stabilität der Kloster-, §. 38
Kreuz- und Kuppelgewölbe ist in der Hauptsache wie die der Tonnengewölbe zu beurtheilen.

Ein über einen rectangulären oder polygonalen Raum gespanntes Gurt-, Kappen- oder Klostergewölbe $ABCS$, Fig. 65 (a. f. S.), besteht aus lauter kurzen Bögen von verschiedenen Spannweiten, wie DE, FE, ferner GH, KH u. s. w., welche sich in Bögen BS, CS u. s. w. an einander anlegen. Da hier je zwei dieser Bögen FE, F_1E_1 einander gegenüber stehen, so wird auch der Horizontalschub P des einen durch den Horizontalschub P_1 des anderen aufgenommen, und das zwischen E und E_1 befindliche Gewölbstück in der Richtung rechtwinkelig gegen seine Stirnflächen zusammengedrückt.

Ein Kreuzgewölbe geht aus der gegenseitigen Durchdringung zweier über einen rectangulären Raum ABC, Fig. 66, gespannten Tonnengewölbe

hervor, und besteht zunächst aus vier Hauptbögen *AS*, *BS*, *CS* und *DS*, welche sich an einen gemeinschaftlichen Schlußstein *S* anlegen, und dann noch

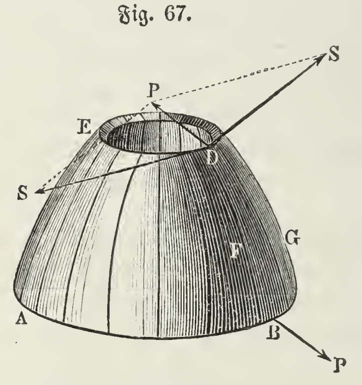
Fig. 65. Fig. 66.



aus vier, sich zwischen je zwei dieser Kreuzbögen stemmenden Bogensystemen, wie z. B. *ABS*, *BCS*. Es bilden also die Kreuzbögen *ASC* und *BSD* die Widerlager der übrigen, von außen nach innen allmälig an Spannweite abnehmenden Gewölbbögen, und es hängt daher die Stabilität dieses Gewölbes vorzüglich von der Stärke und Stabilität seiner Kreuzbögen *ASC* und *BSD* ab.

Ein **Kuppelgewölbe** *ABDE*, Fig. 67, ist über eine kreisförmige Basis *AB* gespannt und umschließt einen Raum, welcher die Form eines aufrechtstehenden **Rotationskörpers** (s. Band I., §. 125) hat; es läßt sich dasselbe durch die sogenannten Meridianebenen in lauter congruente Segmente, wie *AE*, *BD* u. s. w. zerlegen, welche kurze Tonnengewölbe mit allmälig von unten nach oben abnehmender Länge bilden. Diese Gewölbsegmente können entweder den Scheitel der Kuppel vollkommen schließen, oder sie können, wie in Fig. 67, oben eine kreisrunde Oeffnung *DE* übrig lassen. Da sich hier ein Segment *BD* nur auf die benachbarten Segmente *F* und *G* stützt, so muß also auch die Spannung oder der Horizontalschub *P* desselben von diesen benachbarten Segmenten aufgenommen werden.

Fig. 67.



Denkt man sich ein Kuppelgewölbe aus *n* congruenten Segmenten, wie *AE*, *BD*... zusammengesetzt, so hat man für den Centriwinkel, unter welchen die beiden Fugen eines Segmentes convergiren:

$$\beta = \frac{2\pi}{n} \text{ oder } \beta^0 = \frac{360^0}{n}.$$

Die aus dem Gewölbschub P resultirenden Seitenkräfte S und S, mit welchen ein Segment BD auf das übrige Gewölbe wirkt, stoßen unter dem Winkel $SDS = 180^0 - \beta$ zusammen, und es ist daher

$$P = 2\,S\,cos.\,PDS = 2\,S\,cos.\,{}^1/_2\,SDS = 2\,S\,cos.\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$= 2\,S\,sin.\,\frac{\beta}{2},$$

daher wenn n sehr groß, also β sehr klein angenommen wird,

$$P = S\beta = \frac{2\,\pi}{n}\,S, \text{ sowie umgekehrt,}$$

$$S = \frac{P}{\beta} = \frac{n}{2\,\pi}\,P.$$

Der Gewölbschub P ist natürlich nach den in den Paragraphen 21 und 23 gegebenen Regeln zu bestimmen, und läßt sich $= \mu\,\frac{G}{n}$ setzen, wenn G das Gewicht des ganzen Gewölbes und μ eine bestimmte Zahl bezeichnet. Es ist folglich:

$$S = \frac{n}{2\,\pi}\,P = \frac{n}{2\,\pi}\,\mu\,\frac{G}{n} = \frac{\mu}{2\,\pi}\,G.$$

Damit die Gewölbsteine diesen Druck auszuhalten vermögen, muß ihnen eine hinreichende Dicke gegeben werden.

In der Regel wird der Druck noch durch das Gewicht einer aufsitzenden Laterne vergrößert. Sind die Gewölbsteine hinreichend dick, um die Spannung S aushalten zu können, so kann natürlich auch kein Einstürzen nach innen, sondern nur ein Ausweichen nach außen stattfinden. Um dies zu verhindern, umgiebt man wohl noch die Kuppel mit eisernen Reifen.

Anmerkung. Ueber die Gewölbe ist die Literatur sehr ausgedehnt, jedoch sind die in verschiedenen Schriften abgehandelten Theorien nicht immer richtig, oder wenigstens nicht immer praktisch genug, weil ihnen nicht die der Praxis entsprechenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. Es mögen daher hier nur die vorzüglichsten Schriften angeführt werden. Coulomb legte zuerst den Grund zur Theorie, wie sie im Wesentlichen hier vorgetragen wurde. Man sehe: Théorie de machines simples, par Coulomb. Die Theorie weiter ausgebildet findet man in Navier: Résumé des Leçons sur l'application de la mecanique, T. I. Eine deutsche Bearbeitung ist hiervon erschienen, unter dem Titel: Die Mechanik der Baukunst, von Westphal. Ebenso: Cours de Stabilité des Constructions etc. par Persy. Abhandlungen von Audoy, Garidel, Poncelet und Petit finden sich im Mémorial de l'officier du genie. Die Petit'sche Abhandlung ist deutsch bearbeitet und unter dem Titel „Theorie der Kreisgewölbe" besonders im Buchhandel sowie in Crelle's Journal der Baukunst erschienen, von W. Lahmeyer. Tabellen zur Berechnung des Gewölbschubes giebt die Schrift: Tables des poussées des voûtes en plein ceintre, par Garidel, Paris 1837 u. 1842. Uebrigens findet man die Gewölbe abge-

handelt in den Werken über Mechanik von Bossut, Prony, Robinson (Mechanical Philosophy), Whewell, Moseley, Eytelwein, Gerstner u. s. w. Besondere Abhandlungen über Gewölbe sind von Maillard (Mechanik der Gewölbe, Pesth 1817), von Knochenhauer (Statik der Gewölbe, Berlin 1842), Hagen (über Form und Stärke gewölbter Bogen, Berlin 1844), u. s. w. erschienen. Hieran schließt sich die Schrift Ligowski's: „Die Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bögen mit Hülfe der hyperbol. Functionen, aus der Zeitschrift für Bauwesen, 1854." Ferner über schiefe Gewölbe: Heider, Theorie der schiefen Gewölbe, Wien 1846. Hart, Construction schiefer Gewölbe, in Romberg's Zeitschrift 1847. Sowie Francis Bashforth, Praktische Anweisung zur Construction schiefer Gewölbe, deutsch von Härtel. Ueber steinerne Brücken ist noch zu lesen: Gauthey, Traité de la construction des ponts, und Perronet's Werke, die Beschreibung der Entwürfe und der Bauarten der Brücken bei Neuilly, Mantes u. s. w., aus dem Französischen von Dietlein, Halle 1820. Von neueren Werken sind zu empfehlen: Scheffler, „Zur Theorie der Gewölbe", in Crelle's Journal für die Baukunst, Band 29 und 30. Tellkampf, „Beiträge zur Gewölbtheorie, frei bearbeitet nach Carvallo, Hannover 1855." Yvon Villarceau, „Sur l'établissement des Arches de Pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. Paris 1853." Siehe auch „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes, par Poncelet. Paris 1852." Ferner ist zum Studium zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie dessen Manual of Civil-Engineering.

Drittes Capitel.

Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

§. 39 **Holz- und Eisenconstructionen.** Die Holz- und Eisenconstructionen unterscheiden sich besonders dadurch von den Steinconstructionen (Mauern und Gewölben), daß sie aus längeren Stücken bestehen als diese, und daß diese Stücke (franz. pièces; engl. pieces) nicht bloß über oder neben einander gelegt, sondern durch Verzapfen, Aufplatten, Aufkämmen u. s. w. fest mit einander verbunden werden. Die Hauptaxen der Hauptstücke einer Construction können eine horizontale, eine geneigte oder eine verticale Lage haben; im ersten Falle heißen sie Balken, Schwellen u. s. w. (franz. poutres, solives; engl. beams, joists), im zweiten heißen sie Sparren (franz. chevrons; engl. rafters), im dritten aber Säulen (franz. poteaux, piliers; engl. posts). Die kleineren Stücke einer Construction sind

entweder **Bänder** (franz. liens; engl. ties), oder **Streben, Spreizen** (franz. contre-fiches; engl. struts), oder **Arme** (franz. bras; engl. braces), je nachdem sie einer Ausdehnungs- oder einer Zusammendrückungskraft oder beiden zugleich widerstehen sollen.

Um die Stabilität einer Construction zu untersuchen, kommt es zunächst darauf an, daß man die Kräfte und Gewichte kenne, welche die Construction aufzunehmen hat. Aus ihnen bestimmen sich nun nicht nur die Kräfte, welche einzelne Stücke auszuhalten haben, sondern auch die Kräfte in den Verbindungsstellen und die Wirkungen gegen die Unterstützung. Man hat nun allen Theilen diejenigen Formen, Lagen und Dimensionen zu geben, bei welchen sie den auf sie wirkenden Kräften vollkommenen Widerstand entgegensetzen. Bei diesen Untersuchungen kommen allerdings auch wieder, wie bei den Gewölben, gewisse allgemeine Regeln über Stabilität, Festigkeit u. s. w. zur Anwendung, doch werden wir bei den folgenden Untersuchungen die Reibung außer Acht lassen, nicht allein, weil sie in der Regel viel kleiner ist, als bei den Steinen, sondern auch besonders deshalb, weil sie durch Erschütterungen und Schwankungen, welche bei den Holzconstructionen nicht zu vermeiden sind, momentan aufgehoben wird, und daher auf ihre Wirkung nicht sehr zu rechnen ist.

Was die Befestigung der Stücke unter einander betrifft, so haben wir vorzüglich zu unterscheiden, ob diese in einem **Bolzen, Pflock** (franz. boulon; engl. pin) oder in einem **Zapfen** und **Zapfenloch** (franz. tenon et mortaise; engl. tenon and mortise) oder in einem bloßen **Vorsprunge** oder sogenannten **Vorsatze** (franz. saillie; engl. shoulder) besteht. Ein Bolzen nimmt alle Kräfte auf, deren Richtungen durch seine Axe gehen, ein Zapfen nimmt nur nach gewissen Richtungen wirkende Kräfte auf, und ein Vorsprung nimmt nur Kräfte nach einer bestimmten Richtung, nämlich rechtwinkelig gegen die Vorderfläche des Vorsprunges, auf.

Bei der Zusammensetzung der Holz- und Eisenconstructionen hat man §. 40 sein Hauptaugenmerk darauf zu richten, daß man die Stücke derselben so **wenig wie möglich der Biegung aussetze** und folglich die Lasten derselben mehr durch die Druck- und Zug-, als durch die **Biegungsfestigkeit** aufnehmen lasse.

Ist die Breite einer Säule $= b$ und die Dicke derselben $= h$, also ihr Querschnitt $F = bh$, und der Tragmodul derselben $= T$, so hat man das Tragvermögen dieser Säule:

$$P = FT = bhT \text{ (s. Band I., §. 205),}$$

bezeichnet ferner l die Länge dieser Säule, sowie E ihren Elasticitätsmodul, so beträgt die entsprechende Verkürzung oder Verlängerung derselben:

$$\lambda = \frac{P}{FE} l = \frac{T}{E} l$$ (s. Band I., §. 204).

Ein Balken von gleichen Dimensionen und gleicher Beschaffenheit wie diese Säule, trägt dagegen, wenn er an **beiden Enden unterstützt** ist, in seiner Mitte die Last:

$$P_1 = \frac{4 b h^2}{6 l} \cdot T$$ (s. Band I., §. 240),

und erleidet daselbst eine Durchbiegung:

$$\lambda_1 = a = \frac{P_1 l^3}{4 b h^3 E} = \frac{l}{6 h} \cdot \frac{T}{E} l$$ (s. Band I., §. 227),

und es ist daher:

$$\frac{P_1}{P} = {}^2/_3 \left(\frac{h}{l}\right),$$ sowie:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = {}^1/_6 \left(\frac{l}{h}\right).$$

Es fällt also hiernach die Tragkraft P_1 eines Balkens oder eines prismatischen Körpers, welcher eine gegen seine Axe rechtwinkelig gerichtete Last aufnimmt, im Vergleich zu der einer Säule oder eines Körpers, welcher eine nach seiner Axe gerichtete Last unterstützt, um so kleiner, und dagegen die Durchbiegung oder das Nachgeben λ_1 des ersteren in Hinsicht auf die Zusammendrückung oder Ausdehnung λ des letzteren um so größer aus, je größer die Länge (l) dieses Körpers in Hinsicht auf seine Dicke oder Höhe (h) ist. Wenn z. B. die letztere Dimension 6 mal in der ersteren enthalten, also $\frac{l}{h} = 6$ ist, so vermag der Körper als Balken nur $\frac{P_1}{P} = {}^2/_3 \,.\, {}^1/_6$ $= {}^1/_9$ mal soviel zu tragen, als wenn derselbe als Säule dient, und es ist gleichwohl im ersteren Falle seine Durchbiegung $\lambda_1 = {}^1/_6 \,.\, 6\,\lambda = \lambda$, also eben so groß als seine Zusammendrückung im letzteren Falle. Bei gleicher Belastung sind daher den Körpern, wenn sie als Balken dienen sollen, viel größere Querdimensionen zu geben, als wenn sie zu Säulen benutzt werden. Um daher so viel wie möglich an Material zu ersparen, und um die mit der Größe der Durchbiegung wachsenden Schwankungen eines **Balkens** oder **Trägers** so viel wie möglich zu vermindern, ist erforderlich, dieselben soviel wie möglich durch Säulen, Streben oder andere Hülfsmittel, welche ganz oder zum Theil wirken oder durch ihre Zug- oder durch ihre Druckfestigkeit widerstehen, zu unterstützen.

Eine Säule, welche einen Balken von unten unterstützt und folglich durch ihre Druckfestigkeit widersteht, heißt eine **stehende** oder **Standsäule**, und eine Säule, welche einen Balken von oben unterstützt, und daher durch ihre Zugfestigkeit widersteht, wird eine **Hängesäule** genannt. Statt der aufrecht

stehenden Säulen werden aber auch die Säulen sehr häufig durch geneigte Säulen, oder sogenannte Streben, Bänder u. s. w. unterstützt. Zwischen den Hängesäulen und Standsäulen findet insofern ein großer Unterschied statt, als sich jene in einem stabilen, und diese nur in einem labilen Gleichgewichtszustande befinden. Während bei einer Hängesäule das von den Zugkräften derselben gebildete Kräftepaar die zufällige Abweichung der Axe der ersteren von der Richtung der letzteren aufzuheben sucht, hat bei einer Standsäule das von den Druckkräften derselben erzeugte Kräftepaar ein Bestreben, diese Abweichung noch zu vergrößern. Deshalb ist es oft nöthig, letztere durch Streben, Zangen u. s. w. seitlich zu unterstützen. Derselbe Unterschied findet auch zwischen den Bändern und Streben statt. Im Allgemeinen wird jede Construction, welche zur Unterstützung eines Balkens von unten dient, ein Sprengwerk, und jede einen Balken oder ein Balkensystem von oben unterstützende Holz- oder Eisenconstruction ein Hängewerk genannt. Zu diesen Constructionen gehören die verschiedenen Holz- und Eisenbrücken, sowie die sogenannten Dachstühle bei Dachconstructionen (franz. fermes; engl. roofs).

Unterstützung durch eine Säule. Der einfachste Fall der Unter- §. 41
stützung eines Balkens AA, Fig. 68, I., besteht in der Anwendung einer Säule CD. In der Regel wird der Unterstützungspunkt C in der Mitte des Balkens liegen, und die Belastung auf den ganzen Balken gleichförmig vertheilt anzunehmen sein. Sind nun die Enden A und A des Balkens so befestigt, daß sie keine Neigung annehmen können, so wird die neutrale Axe des Balkens eine Curve $AMCMA$, Fig. 68, II., bilden, welche nicht allein in A, C und A, sondern auch in den Mittelpunkten M und M zwischen A, C und A horizontal läuft, und daselbst die stärksten Krümmungen besitzt. Man hat es hierbei mit einem schon in Bd. I., §. 246 behandelten Falle zu thun, und kann diesem zufolge annehmen, daß der Balken 3mal soviel trägt, als wenn die Last in der Mitte des in den Endpunkten unterstützten Balkens ruht.

Fig. 68.

Ist Q die ganze Last des Balkens, l die Länge desselben, b die Breite und h die Höhe seines rectangulären Querschnittes, sowie T der Tragmodul desselben, so hat man hiernach für einen Balken ohne Säule:

$$Q = 3 \cdot 4 \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = \frac{2 b h^2}{l} T \text{ (s. Band I., §. 240).}$$

Nun wird aber der Balken durch die Säule gewissermaßen in zwei gleiche Theile getheilt, wovon jeder halb so lang ist und halb so viel trägt, als der ganze Balken, während die andere Hälfte $\left(\frac{Q}{2}\right)$ von der Säule aufgenommen wird; daher ist für den Balken mit Säule:

$$\frac{1}{2} Q = \frac{2 b h^2}{\frac{1}{2} l} \cdot T, \text{ oder } Q = \frac{8 b h^2}{l} \cdot T;$$

es trägt also der so gestützte Balken viermal so viel als der ungestützte Balken, oder es ist bei gleicher Belastung, die erforderliche Breite und Höhe des gestützten Balkens nur $= \sqrt[3]{1/4} = \sqrt[3]{0,250} = 0,63$ und das Gewicht desselben nur $(0,63)^2 = 0,397$mal so groß als bei dem frei aufliegenden Balken.

Liegt der in der Mitte C unterstützte Balken AB, Fig. 69, I., an seinen Enden A und A frei auf, so daß sich dieselben neigen können, so nimmt die neutrale Axe desselben die Gestalt der Curve $AMCMA$, Fig. 69, II., an, welche an den Enden nicht horizontal ist, sondern daselbst emporsteigt. Man hat es hier mit einem in Band I., §. 247 behandelten Falle zu thun, wo drei Achtel der Last $\frac{Q}{2}$ einer Balkenhälfte von der Unterstützung des freien Endes getragen werden. Es beträgt also hier die Kraft in jedem der freien Enden A, A:

Fig. 69.

$$R = \frac{3}{8} \cdot \frac{Q}{2} = \frac{3}{16} Q,$$

während die Säule in der Mitte C die Last

$$P = Q - 2R = Q - \frac{3}{8} Q = \frac{5}{8} Q$$

aufnimmt.

Das Kraftmoment zum Biegen um C ist hier:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - \frac{3}{16} Q \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{32} Q l,$$

und folglich die Tragkraft:

$$Q = 32 \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{16}/_3 \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot T.$$

Wenn der Balken unter diesen Umständen nicht durch eine Säule unterstützt wäre, so würde seine Tragkraft:

$$Q = 8 \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^4/_3 \frac{b h^2}{l} T \text{ sein.}$$

Es trägt folglich auch hier der unterstützte Balken viermal so viel als der ununterstützte, oder es können bei gleicher Tragkraft die Querschnittsdimensionen b und h des ersteren $\sqrt[3]{1/4} = 0{,}63$mal so groß sein als die des letzteren.

Wenn die Last Q des Balkens nicht gleichförmig, sondern in zwei Hälften, und zwar so vertheilt ist, daß jede Hälfte mitten zwischen der Säule und je einer Stütze wirkt, so hat man im ersteren Falle, wo die Enden A und A des Balkens festgehalten werden, nach Band I., §. 246, die Tragkraft:

$$Q = 4 \,.\, 8 \,\frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{16}/_3 \,\frac{b h^2}{l}\, T = {}^2/_3 \,\frac{8 b h^2}{l}\, T,$$

also zwei Drittel so groß als wenn die Last gleichförmig vertheilt ist.

Im zweiten Falle, wo die Enden A und A des Balkens frei aufliegen, trägt (nach Band I., §. 247) jedes Widerlager daselbst nur $^5/_{16}$ der Last, $= {}^5/_{32}\, Q$, während die Säule die Last

$$P = Q - 2 \,.\, {}^5/_{32}\, Q = {}^{11}/_{16}\, Q$$

aufnimmt; es ist deshalb hier das Moment zum Biegen um C:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - {}^5/_{32}\, Q \cdot \frac{l}{2} = {}^3/_{64}\, Q l,$$

und daher die Tragkraft:

$$Q = {}^{64}/_3 \cdot \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = {}^{32}/_9 \frac{b h^2}{l}\, T,$$

also ebenfalls $^{32}/_9 \,.\, {}^3/_{16} = {}^2/_3$mal so groß, als wenn die Last gleichmäßig auf den Balken vertheilt wäre.

Beispiel. Ein an beiden Enden frei aufliegender hölzerner Balken von 40 Fuß Länge soll auf den laufenden Fuß seiner Länge eine Last von 500 Pfund tragen, und hierbei in der Mitte von einer hölzernen Säule unterstützt werden, welche Querschnittsdimensionen sind demselben zu geben und welche Stärke muß die Säule erhalten? Es ist hier:

$Q = 40.500 = 20000$ Pfund und $T = 1000$ Pfund (s. I., §. 240), daher

$$b h^2 = {}^3/_{16} \,\frac{Q l}{T} = {}^3/_{16} \cdot \frac{20000 \,.\, 40 \,.\, 12}{1000} = 1800.$$

Nimmt man nun $h = b \sqrt{2}$ an, so erhält man $2 b^3 = 1800$, und die erforderliche Balkenbreite:

$$b = \sqrt[3]{900} = 9{,}655 \text{ Zoll},$$

sowie die Balkenhöhe:

$$h = 1{,}414\, b = 13{,}68 \text{ Zoll}.$$

Der Druck auf die Säule ist $P = {}^5/_8\, Q = {}^5/_8 \,.\, 20000 = 12500$ Pfund. Nimmt man den Tragmodul derselben $= {}^1/_6 \,.\, 6500 = 1083$ Pfund an (s. I., §. 212), so erhält man den erforderlichen Querschnitt der Säule, $F = \frac{P}{T} = \frac{12500}{1083} = 11{,}6$ Quadratzoll, und hiernach die Stärke derselben $d = 3{,}9$ Zoll. Bei einer größeren Länge muß diese Säule entweder eine größere Stärke (s. Band I., §. 268 und 269), oder eine Unterstützung durch Streben u. s. w. erhalten.

§. 42 **Unterstützung durch zwei Säulen.** Wird ein gleichmäßig belasteter Balken AA, Fig. 70, von zwei Säulen BD, BD unterstützt und hierbei das Aufbiegen an den Enden verhindert, so trägt jedes Balkendrittel ein Drittel der Last Q, und daher jede der Stützen am Ende, $\frac{Q}{6}$, sowie jede der Säulen,

Fig. 70.

$$2 \cdot \frac{Q}{6} = \frac{Q}{3}.$$

Es ist folglich hier:

$$\frac{Q}{3} \cdot \frac{l}{3} = 2 \,.\, b h^2 T,$$

und daher die Tragkraft:

$$Q = 9 \,.\, 2\, \frac{b h^2}{l}\, T = 18\, \frac{b h^2}{l}\, T,$$

d. i. 9mal so groß als ohne Säulen, oder umgekehrt, bei gleicher Tragkraft sind in diesem Falle die Querschnittsdimensionen

$$b = h = \sqrt[3]{{}^1/_9} = 0{,}48 \text{mal}$$

so groß zu machen als bei dem nicht unterstützten Balken.

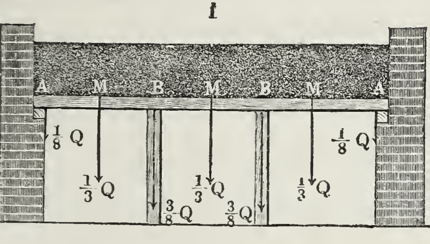
Wären die Enden des Balkens AA, Fig. 71, nur aufgelegt, könnten sich also dieselben nach oben biegen, so würde, wenigstens sehr annähernd, jede der Stützen A, A, ${}^3/_8 \cdot \frac{Q}{3} = \frac{Q}{8}$, und folglich jede der Säulen, $\frac{Q}{2} - \frac{Q}{8} = {}^3/_8\, Q$ tragen, und es wäre nun das Kraftmoment in Hinsicht auf die Stützen:

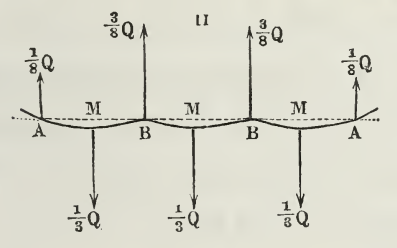
$$\frac{Q}{3} \cdot \frac{l}{6} - \frac{Q}{8} \cdot \frac{l}{3} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) Ql = \frac{1}{72} Ql,$$

folglich die Tragkraft:

$$Q = 72 \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = 12 \frac{bh^2}{l}\, T = 9 \cdot \frac{4}{3} \frac{bh^2}{l}\, T,$$

Fig. 71.





also ebenfalls 9mal so groß als bei den ununterstützten Balken.

Die Tragkraft für das mittlere Balkenstück zwischen den beiden Säulen ist, da dessen Belastung $= \frac{Q}{3}$ von beiden Säulen gleichmäßig getragen wird:

$$Q = 9 \cdot 2 \frac{bh^2}{l}\, T$$
$$= 18 \frac{bh^2}{l}\, T,$$

also dreihalbmal so groß als die der Endstücke.

Die in den letzten beiden Fällen von den Axen der Balken gebildeten Curven sind in Fig. 70 und 71, unter II., vor Augen geführt.

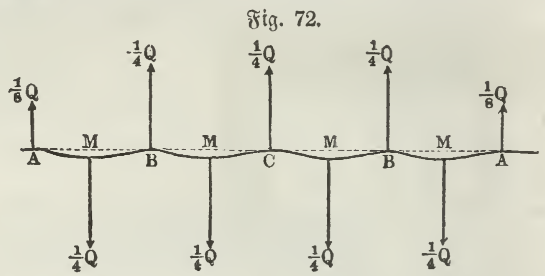
Wenn die Last auf die drei Mittelpunkte M gleichvertheilt ist, so werden in dem Falle, wenn die Balkenaxe nicht bloß an den Enden, sondern auch an den übrigen Stützpunkten in horizontaler Lage erhalten wird, die Drücke zwar dieselben sein, wie unter denselben Umständen bei dem gleichförmig belasteten Balken, aber es fällt dann für die Tragkraft Q, $\frac{Q}{3} \cdot \frac{l}{3} = 8\, bh^2 \frac{T}{6}$, und daher diese Kraft selbst: $Q = 9 \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{bh^2}{l} T = 12 \frac{bh^2}{l} T$ aus.

Wenn dagegen die Enden A, A frei aufliegen und die Balkenaxen nur über den mittleren Stützpunkten horizontal erhalten werden, so hat man die Drücke in den Endpunkten $\frac{5}{16} \cdot \frac{Q}{3}$, und folglich die in den mittleren Stützpunkten $P = \frac{Q}{2} - \frac{5}{16} \frac{Q}{3} = \frac{19}{16} \cdot \frac{Q}{3}$, und es fällt das größte Biegungsmoment $\frac{Q}{3} \cdot \frac{l}{6} - \frac{5}{16} \frac{Q}{3} \frac{l}{3} = \frac{Ql}{48}$ aus, so daß die Tragkraft des Balkens

$Q = 48 \frac{b h^2}{l} \frac{T}{6} = 8 \frac{b h^2}{l} T$, also wieder $^2/_3$ mal so groß anzunehmen ist, als wenn die Enden festliegen.

§. 43 **Unterstützung durch mehrere Säulen.** Wird der Balken ACA, Fig. 72, von drei Zwischensäulen unterstützt, und dadurch gewissermaßen in vier gleiche Stücke AB, BC, CB und BA zer-

Fig. 72.



theilt, so trägt in dem Falle, daß die Balkenenden am Aufbiegen verhindert werden, jede Säule $\frac{Q}{4}$ und jede der beiden Widerlager oder Stützen am Ende, $\frac{Q}{8}$, und es ist folglich die Tragkraft dieses Balkens:

$$Q = 4 . 4 . \frac{2 b h^2}{l} T = 16 . \frac{2 b h^2}{l} T,$$

d. i. 16mal so groß, als wenn der Balken ununterstützt wäre. Bei gleicher Tragkraft sind daher die erforderlichen Querschnittsdimensionen des so unterstützten Balkens $\sqrt[3]{^1/_{16}} = 0{,}4$mal so groß als die des Balkens ohne Säulen.

Wird ferner unter denselben Umständen der Balken oder Träger durch vier Zwischensäulen unterstützt, so trägt seine Tragkraft:

$$Q = 25 . \frac{2 b h^2}{l} T.$$

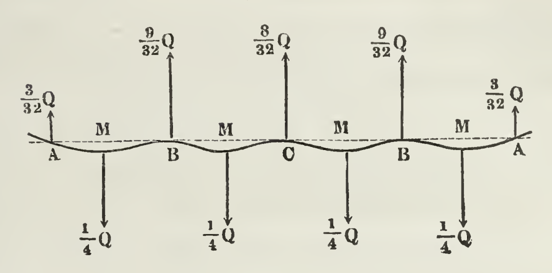
Hat der Balken außer den zwei Endpfeilern noch n Stützen, so trägt jeder Endpfeiler $^1/_2 . \frac{Q}{n+1}$, dagegen jede Stütze $\frac{Q}{n+1}$, und es ist die ganze Tragkraft:

$$Q = (n + 1)^2 \frac{2 b h^2}{l} T,$$

also $(n + 1)^2$ mal so groß als ohne Stützen, und es sind folglich bei ähnlichen Querschnitten die erforderlichen Querschnittsdimensionen b und h in diesem Falle $\sqrt[3]{\frac{1}{(n+1)^3}}$ mal so groß als bei dem gleich belasteten Balken ohne Säulen zu machen.

Liegen bei dem in B, C und B durch drei Säulen unterstützten Balken $ABCBA$, Fig. 73, die Enden A und A frei auf, so können wir wieder

Fig. 73.



annehmen, daß jeder Endpfeiler die Last $^3/_8 \cdot \frac{Q}{4} = {^3/_{32}}\, Q$, daß ferner jede der Säulen in B, B die Last $^5/_8\, \frac{Q}{4} + {^1/_2} \cdot \frac{Q}{4} = {^9/_{32}}\, Q$, und daß endlich die mittlere Säule die Last $\frac{Q}{4} = {^8/_{32}}\, Q$ aufnimmt.

Das Kraftmoment des Balkenstückes AB in Hinsicht auf seinen Stützpunkt B ist:

$$^1/_4\, Q . \overline{MB} - {^3/_{32}}\, Q . \overline{AB} = {^1/_4}\, Q . \frac{l}{8} - {^3/_{32}}\, Q . \frac{l}{4}$$
$$= \frac{Ql}{32} - \frac{3\, Ql}{128} = \frac{Ql}{128};$$

folglich ist die Tragkraft dieses Balkenstückes:

$$Q = 128 . \frac{bh^2}{l} . \frac{T}{6} = {^{64}/_3}\, \frac{bh^2}{l}\, T = 16 . {^4/_3}\, \frac{bh^2}{l}\, T,$$

d. i. 16mal so groß als bei einem solchen Balken ohne Stützen oder Säulen.

Für ein Mittelstück BC ist unter der Voraussetzung, daß dessen Enden B und C horizontal laufen, wie oben, die Tragkraft:

$$Q = 16 . \frac{2\, bh^2}{l}\, T,$$

d. i. $^3/_2$mal so groß als für ein Endstück AB.

Ist die Anzahl der Zwischenpfeiler $= n$, so trägt jeder Endpfeiler die Last $^3/_8\, \frac{Q}{n+1}$, ferner jede den Endpfeilern zunächst befindliche Säule die Last

$$(^5/_8 + {^1/_2})\, \frac{Q}{n+1} = {^9/_8}\, \frac{Q}{n+1},$$

und jede der übrigen Säulen, $= \frac{Q}{n+1}$; es ist hiernach das Moment der Tragkraft der Endstücke des Balkens:

$$\frac{Q}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{2} l}{n+1} - \frac{3}{8} \frac{Q}{n+1} \cdot \frac{l}{n+1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{Ql}{(n+1)^2},$$

folglich die Tragkraft selbst:

$$Q = 8\,(n+1)^2 \cdot \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = (n+1)^2 \cdot \frac{4}{3} \frac{bh^2}{l} \cdot T,$$

d. i. $(n+1)^2$ mal so groß als für einen solchen Balken ohne Säulen.

Die Tragkraft der Mittelstücke bleibt wie oben:

$$Q = (n+1)^2 \cdot \frac{2bh^2}{l} T.$$

Wäre die Last Q nicht auf den ganzen Balken vertheilt, sondern nur in den Mittelpunkten M zwischen je zwei Stützpunkten wirksam, so würden im ersten Falle (Fig. 72) sich zwar die Drücke auf die Stützpunkte nicht ändern, allein es wäre die Tragkraft des Balkens (s. Band I., §. 246) nur $\frac{2}{3}$ mal so groß als bei gleichmäßiger Vertheilung der Last, d. i.

$$Q = \frac{2}{3}\,(n+1)^2 \cdot \frac{2bh^2}{l} T.$$

Im zweiten Falle (Fig. 73) wäre auch der Druck auf die Stützpunkte ein anderer, nämlich (Band I., §. 221 und §. 247) der Druck auf je ein Widerlager

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{Q}{n+1},$$

ferner der auf je eine Säule zunächst eines Widerlagers:

$$\frac{11}{16} \frac{Q}{n+1} + \frac{8}{16} \cdot \frac{Q}{n+1} = \frac{19}{16} \cdot \frac{Q}{n+1},$$

und dagegen der auf je eine der übrigen Säulen, wie oben, $= \frac{Q}{n+1}$.

Hiernach wäre nun auch das Moment der Tragkraft der äußersten Balkenstücke AB:

$$\frac{Q}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{2} l}{n+1} - \frac{5}{16} \cdot \frac{Q}{n+1} \cdot \frac{l}{n+1} = \frac{3}{16} \frac{Ql}{(n+1)^2},$$

und daher die Tragkraft selbst:

$$Q = \frac{16}{3}\,(n+1)^2 \frac{bh^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = \frac{8}{9}\,(n+1)^2 \frac{bh^2}{l} T.$$

Die Tragkraft der Zwischenstücke bliebe:

$$Q = \frac{4}{3}\,(n+1)^2 \cdot \frac{bh^2}{l} \cdot T.$$

Aus den im Vorstehenden gefundenen Ergebnissen ist folgende Tabelle hervorgegangen, welche voraussetzt, daß die Anzahl n der Zwischensäulen mindestens zwei beträgt.

	Eine auf den ganzen Balken gleichmäßig vertheilte Last Q		Eine auf die Mittelpunkte zwischen je zwei Stützpunkten gleich vertheilte Last Q	
	mit festen Enden.	mit frei aufliegenden Enden.	mit festen Enden.	mit frei aufliegenden Enden.
Druck auf ein Widerlager.	$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{3}{8}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{1}{2}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{5}{16}\,\frac{Q}{n+1}$
Druck auf eine Säule, zunächst einem Widerlager.	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{9}{8}\,\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{19}{16}\,\frac{Q}{n+1}$
Druck auf eine der inneren Säulen.	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$	$\frac{Q}{n+1}$
Product $b h^2$ für die Balkenenden.	$\frac{1}{2}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{9}{8}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$
Product $b h^2$ für die mittleren Balkenstücke.	$\frac{1}{2}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{1}{2}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$	$\frac{3}{4}\,\frac{Q l}{(n+1)^2 T}$

In dieser Tabelle bedeutet l die ganze Länge, b die Breite, h die Dicke oder Höhe des Balkens, Q die Belastung desselben, n die Anzahl der stützenden Säulen, und T den Tragmodul (Band I., §. 205 und 240) des Balkenmaterials.

Beispiel. Wenn der Balken von 40 Fuß = 480 Zoll Länge aus dem Beispiel von §. 41 von $n = 3$ Säulen unterstützt wird, so ist:

$$b h^2 = \frac{3}{4}\,\frac{Q l}{n^2 T} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q l}{16\, T} = \frac{3}{64}\,\frac{Q l}{T} = \frac{3}{64} \cdot \frac{500 \,.\, 40 \,.\, 480}{1000}$$
$$= 15 \,.\, 30 = 450,$$

daher die erforderliche Balkenbreite:

$$b = \sqrt[3]{450/2} = \sqrt[3]{225} = 6{,}08 \text{ Zoll},$$

und die Balkenhöhe:

$$h = 1{,}414 \,.\, 6{,}08 = 8{,}60 \text{ Zoll}.$$

Von der gegebenen Last $Q = 20000$ Pfund trägt jede der äußeren Säulen:

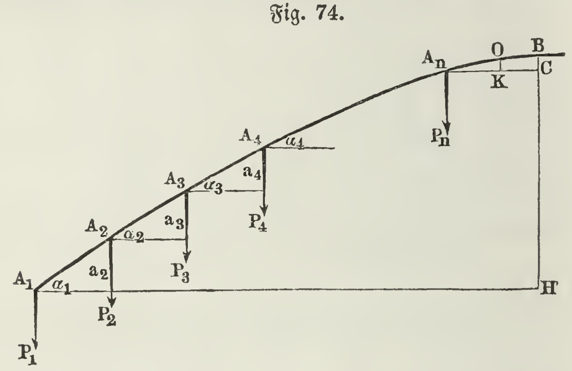
$$P = \frac{9}{8}\,\frac{Q}{n} = \frac{9}{8} \cdot \frac{20000}{4} = \frac{45000}{8} = 5625 \text{ Pfund},$$

und es ist daher der erforderliche Querschnitt einer solchen Säule, wenn man hier $T = 250$ Pfund annimmt:

$$F = \frac{P}{T} = \frac{5625}{250} = 22{,}5 \text{ Quadratzoll}.$$

(§. 44) **Allgemeine Theorie der Biegung durch mehrere Kräfte.** Im Vorstehenden ist angenommen worden, daß die Balken auf den Säulen platt aufliegen, und daher die Balkenaxe an den durch die Säulen unterstützten Stellen eine horizontale Lage annehmen; in Folgendem wollen wir aber voraussetzen, daß die Balken nur in Punkten auf den Säulen aufruhen, wobei die Balkenaxen an diesen Stellen geneigte Lagen annehmen können. Um allgemeine Formeln für die Gleichgewichtsverhältnisse eines solchen Balkens zu finden, legen wir den allgemeinen Fall zu Grunde, wo ein an einem Ende B, Fig. 74, festgehaltener Balken in gleichen Abständen

Fig. 74.



von einander durch Gewichte P_1, P_2, P_3, ... P_n gebogen wird. Bezeichnet c die Abstände $A_1 A_2 = A_2 A_3 = A_3 A_4 \ldots = A_n B$ der Aufhängepunkte von einander, so ist für einen Punkt O in der neutralen Axe des letzten Balkenstückes, welcher um die variable Abscisse $A_n K = x$ vom letzten Aufhängepunkte A_n absteht, das Biegungsmoment:

$$M = P_n\, x + P_{n-1}\,(x + c) + P_{n-2}\,(x + 2c) + P_{n-3}\,(x + 3c) + \cdots + P_1\,(x + (n-1)c).$$

Nun ist aber auch $M = \frac{WE}{r} = -\, WE\, \frac{d\alpha}{dx}$, wenn α den Neigungswinkel der Balkenaxe in O bezeichnet (s. Band I., §. 216 u. s. w.), daher hat man

$$WE d\alpha = -\,[P_n x + P_{n-1}(x + c) + \cdots + P_1\,(x + (n-1)c)]\, dx$$
$$= -(P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots + P_1) x dx$$
$$-(P_{n-1} + 2 P_{n-2} + 3 P_{n-3} + \cdots + (n-1) P_1) c dx,$$

und es folgt durch Integriren

$$WE\alpha = -\,(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\,\frac{x^2}{2}$$
$$-\,(P_{n-1} + 2 P_{n-2} + \cdots + (n-1)\, P_1)\; cx + Const.$$

Ist nun im Fixpunkte B d. i. für $x = c$, der Neigungswinkel der Balkenaxe $\alpha = \alpha_{n+1}$, so folgt

1.) $WE(\alpha - \alpha_{n+1}) = (P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots + P_1)\left(\frac{c^2 - x^2}{2}\right)$
$+ (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3} + \cdots + (n-1)P_1)\,[(c-x)\,c]$.

Da noch $\alpha = \frac{dy}{dx}$ ist, wenn dx und dy die Elemente der Coordinaten $A_n K = x$ und $KO = y$ des Punktes O bezeichnen, so hat man

$$WE\,(dy - \alpha_{n+1}\,dx) = (P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\frac{c^2 - x^2}{2}\,dx$$
$$+ (P_{n-1} + 2P_{n-2} + \cdots + (n-1)P_1)\,(c-x)\,c\,dx,$$

und es folgt durch Integration die Gleichung des Axenstückes $A_n B$:

2.) $WE\,(y - \alpha_{n+1}\,x) = (P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \cdots$
$+ P_1)\left(\frac{c^2 x - \frac{1}{3}x^3}{2}\right) + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3}$
$+ \cdots + (n-1)P_1)\,(c - \frac{1}{2}x)\,c\,x.$

Setzt man endlich in der ersten Hauptgleichung $x = 0$, so erhält man den Neigungswinkel in A_n:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + \frac{(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\,.\,\frac{1}{2}c^2 + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + \cdots + (n-1)P_1)c^2}{WE}$$

d. i.

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + (P_n + 3P_{n-1} + 5P_{n-2} + 7P_{n-3} + \cdots + (2n-1)P_1)\,\frac{c^2}{2\,WE},$$

und führt man in der zweiten Hauptgleichung $x = c$ ein, so giebt diese die Bogenhöhe CB in B,

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1}\,c + \frac{(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1)\,.\,\frac{1}{3}c^3 + (P_{n-1} + 2P_{n-2} + 3P_{n-3} + \cdots + (n-1)P_1)\,.\,\frac{1}{2}c^3}{WE}$$

d. i.

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1}\,c + (2P_n + 5P_{n-1} + 8P_{n-2} + 11P_{n-3} + \cdots + (3n-1)P_1)\,\frac{c^3}{6\,WE}.$$

Wenn der Balken außer den Kräften noch eine gleichmäßig vertheilte Last aufnimmt, welche pr. Längeneinheit des Balkens q, also für jedes Balkenstück von der Länge c, qc beträgt, so fällt das Moment M_1 noch um $[(n-1)\,c + x]\,q\,.\,\frac{(n-1)\,c + x}{2} = \frac{[(n-1)\,c + x]^2\,q}{2}$ größer als das Moment M ohne diese Belastung q aus, und es ist diesem entsprechend auch $WE\,(\alpha - \alpha_{n+1})$ um

$$\int_x^c \tfrac{1}{2} q\, [(n-1)c + x]^2\, dx = \frac{q}{6}\, [n^3 c^3 - ((n-1)c + x)^3],$$

sowie $WE\,(y - \alpha^{n+1} x)$ um

$$\int_0^x \frac{q}{6}\, [n^3 c^3 - ((n-1)c + x)^3]\, dx$$

$$= \frac{q}{6} \left(n^3 c^3 x - \frac{[(n-1)c + x]^4 - (n-1)^4 c^4}{4} \right)$$

größer.

Setzt man für diesen allgemeinen Fall, $x = o$, so folgt der Neigungswinkel in A_n:

$$\alpha_n = \alpha_{n+1} + [P_n + 3 P_{n-1} + 5 P_{n-2} + \cdots + (2n-1) P_1] \frac{c^2}{2\,WE} + \frac{q c^3 [n^3 - (n-1)^3]}{6\,WE};$$

und führt man $x = c$ ein, so ergiebt sich die Bogenhöhe des letzten Balkenstückes:

$$a_{n+1} = \alpha_{n+1} c + [2 P_n + 5 P_{n-1} + 8 P_{n-2} + \cdots + (3n-1) P_1] \frac{c^3}{6\,WE} + \frac{q c^4}{6\,WE} \left(n^3 - \frac{n^4 - (n-1)^4}{4} \right).$$

Haben die Kräfte q, P_1, P_2, $P_3 \cdots$, wie z. B. angehangene Gewichte, eine und dieselbe Richtung, so ist das Biegungsmoment im Befestigungspunkte B,

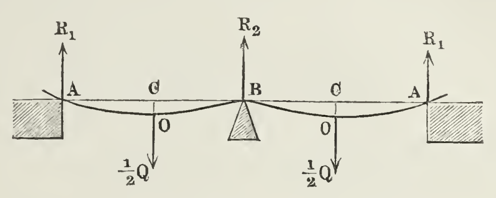
$$M = (P_1 + 2 P_2 + 3 P_3 + \cdots + n P_n)\, c + (n+1)^2 \frac{q c^2}{2}$$ am

größten, und daher $= \frac{WT}{e}$ zu setzen, wenn es darauf ankommt, die Tragfähigkeit des Balkens zu ermitteln oder die erforderliche Stärke desselben zu bestimmen. Wirken dagegen die Kräfte q, P_1, P_2, P_3 ... zum Theil einander entgegengesetzt, so kann das größte Biegungsmoment des Balkens auch an einer anderen Stelle stattfinden, und es erfordert deshalb die Ermittelung der Tragfähigkeit desselben eine specielle Untersuchung.

Mit Hülfe der vorstehenden Formeln lassen sich natürlich auch die Neigungswinkel und Bogenhöhen aller übrigen Balkenstücke, $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ ... bestimmen, wenn man in denselben $n = 1, 2, 3$ ... einsetzt. Sind einige dieser Größen bekannt, so kann man mittels dieser Formeln auch die Drücke R_1, R_2, ... in den Stützpunkten ermitteln, wie in Folgendem zur Ausführnng kommt.

Balken mit Zwischensäulen. Für jede Balkenhälfte des mit einer Zwischensäule unterstützten Balkens AA, Fig. 75, ist, wenn die Last Q in der Mitte zwischen den Stützpunkten wirkt, §. 45

Fig. 75.



$$\alpha_3 = o,\ a_2 + a_3 = o,\ c = \frac{l}{4},\ P_1 = -R_1 \text{ und } P_2 = \frac{Q}{2}$$

zu setzen, daher man hier

$$\alpha_2 = \alpha_3 + (P_2 + 3\,P_1)\frac{c^2}{2\,WE} = o + \left(\frac{Q}{2} - 3\,R_1\right)\frac{c^2}{2\,WE};$$

ferner $a_2 = \alpha_2\,c - \dfrac{2\,R_1 c^3}{6\,WE} = \left(\dfrac{Q}{2} - 3\,R_1\right)\dfrac{c^3}{2\,WE} - \dfrac{R_1\,c^3}{3\,WE}$

$$= ({}^3/_2\,Q - 11\,R_1)\frac{c^3}{6\,WE}, \text{ und}$$

$$a_3 = \alpha_3\,c + \left(2\,\frac{Q}{2} - 5\,R_1\right)\frac{c^3}{6\,WE} = (Q - 5\,R_1)\frac{c^3}{6\,WE},$$

daher ist zu setzen: $a_2 + a_3 = o, = ({}^5/_2\,Q - 16\,R_1)\dfrac{c^3}{6\,WE}$, und es folgt der Druck auf einen Endpfeiler:

$R_1 = {}^5/_{32}\,Q$, so wie der Druck auf die Mittelsäule:

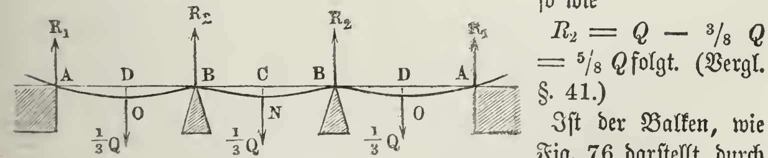
$R_2 = Q - 2\,R_1 = {}^{22}/_{32}\,Q = {}^{11}/_{16}\,Q.$

Bei gleichmäßiger Belastung ist $\alpha_2 = o$, $a_2 = o$, $P_1 = -R_1$ und $P_2 = o$, daher

$$a_2 = o = -\frac{2\,R_1 c^3}{6\,WE} + (1 - {}^1/_4)\frac{q\,c^4}{6\,WE}, \text{ woraus nun}$$

$R_1 = {}^3/_8\,qc = {}^3/_{16}\,Q$, so wie $R_2 = Q - {}^3/_8\,Q = {}^5/_8\,Q$ folgt. (Vergl. §. 41.)

Fig. 76.



Ist der Balken, wie Fig. 76 darstellt, durch zwei Zwischensäulen unterstützt, so hat man

im ersteren Falle, wo in jedem der Mittelpunkte zwischen den Stützpunkten die Last $\frac{Q}{3}$ aufruht,

$$P_1 = -R_1,\ P_2 = \frac{Q}{3},\ P_3 = -R_2 = -\left(\frac{Q}{2} - R_1\right) = R_1 - \frac{Q}{2},$$

ferner $\alpha_4 = o$, und $a_2 + a_3 = o$. Hiernach folgt

$$a_2 = \alpha_2 c - 2 R_1 \frac{c^3}{6 WE},\ a_3 = \alpha_3 c + \left(2\frac{Q}{3} - 5 R_1\right) \frac{c^3}{6 WE},$$

und es ist daher

$$o = (\alpha_2 + \alpha_3) c + (2/3\, Q - 7 R_1) \frac{c^3}{6 WE}.$$

Ferner ist $\alpha_3 = \alpha_4 + \left(-R_2 + 3\frac{Q}{3} - 5 R_1\right) \frac{c^2}{2 WE}$

$$= \left(\frac{Q}{2} - 4 R_1\right) \frac{c^2}{2 WE},$$

sowie $\alpha_2 = \alpha_3 + \left(\frac{Q}{3} - 3 R_1\right) \frac{c^2}{2 WE} = (5/6\, Q - 7 R_1) \frac{c^2}{2 WE}$,

daher läßt sich setzen,

$$o = (8/6\, Q - 11 R_1) \frac{c^3}{2 WE} + (2/3\, Q - 7 R_1) \frac{c^3}{6 WE},\text{ oder}$$

$o = 4 Q - 33 R_1 + 2/3\, Q - 7 R_1$, und es folgt der Druck auf je einen Endpfeiler:

$R_1 = \frac{7 Q}{60}$; dagegen der auf je einen Zwischenpfeiler: $R_2 = \frac{Q}{2} - R_1$

$$= \left(\frac{30 - 7}{60}\right) Q = 23/60\, Q.$$

Schließlich ergiebt sich das Biegungsmoment in Hinsicht auf D,

$M_1 = -R_1 c = -7/60\, Q c$, das in Hinsicht auf B,

$M_2 = \frac{Q}{3} c - 2 R_1 c = (1/3 - 7/30) Q c = 1/10\, Q c$, und das in Hinsicht auf C,

$$M_3 = -R_2 c + 2/3\, Q c - 3 R_1 c = -(23/60 - 40/60 + 21/60) Q c$$
$$= -1/15\, Q c.$$

Da das Moment M_1 das größere ist, so hat man für die zulässige Belastung Q die Bestimmungsgleichung:

$$7/60\, Q c = 7/60 \frac{Q l}{6} = \frac{WT}{e} = \frac{b h^2}{6} T,$$

und daher diese Belastung selbst:

$$Q = 60/7 \frac{b h^2}{l} T,\text{ wogegen wir §. 42, annähernd,}$$

$Q = 8 \frac{bh^2}{l} T$ gefunden haben.

Ist hingegen die Last $Q = 6\,qc$ auf den ganzen Balken gleichförmig vertheilt, so hat man $P_1 = -R_1$, $P_2 = o$, $P_3 = -R_2$, $\alpha_4 = o$, und $a_2 + a_3 = o$, wonach folgt:

$$a_2 = \alpha_2\, c - 2 \frac{R_1\, c^3}{6\, WE} + {}^3/_4 \frac{q\, c^4}{6\, WE}, \text{ und}$$

$$a_3 = \alpha_3\, c - 5 \frac{R_1\, c^3}{6\, WE} + {}^{17}/_4 \frac{q\, c^4}{6\, WE}, \text{ daher}$$

$$a_2 + a_3 = (\alpha_2 + \alpha_3)\, c - 7 \frac{R_1\, c^3}{6\, WE} + 5 \frac{q\, c^4}{6\, WE}.$$

Ferner $\alpha_2 = \alpha_3 - 3 \frac{R_1\, c^2}{2\, WE} + 7 \frac{q\, c^3}{6\, WE}$,

$$\alpha_3 = -(R_2 + 5\, R_1) \frac{c^2}{2\, WE} + 19 \frac{q\, c^3}{6\, WE}, \text{ daher}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = -(3\, qc + 4\, R_1) \frac{c^2}{WE} + \frac{38\, qc^3}{6\, WE} - \frac{3\, R_1\, c^2}{2\, WE} + \frac{7\, q\, c^3}{6\, WE}$$

$$= \frac{27\, qc^3}{6\, WE} - \frac{33\, R_1\, c^3}{6\, WE}, \text{ daher}$$

$(\alpha_2 + \alpha_3)\, c = 27 \frac{q\, c^4}{6\, WE} - 33 \frac{R_1\, c^3}{6\, WE}$; und es ergiebt sich nun die Bestimmungsgleichung

$$o = 27 qc - 33\, R_1 - 7\, R_1 + 5\, q\, c, \text{ woraus}$$

$$R_1 = {}^{32}/_{40}\, qc = {}^4/_5 \frac{Q}{6} = {}^4/_{30}\, Q, \text{ sowie}$$

$$R_2 = ({}^{15}/_{30} - {}^4/_{30})\, Q = {}^{11}/_{30}\, Q \text{ folgt.}$$

Nun ergiebt sich das Biegungsmoment im Stützpunkt B.

$$M_1 = R_1 \,.\, 2\, c - 2 qc^2 = {}^4/_{15}\, Q\, c - \frac{Q}{3} c = -\frac{Qc}{15} = -\frac{Ql}{90},$$

und das in einem Zwischenpunkte

$M_2 = R_1\, x - \frac{q\, x^2}{2}$. Letzteres ist für $x = \frac{R_1}{q} = {}^4/_5\, c$ im Maximum, und zwar

$$M_2 = {}^{16}/_{25}\, q\, c^2 - {}^{16}/_{25} \,.\, \frac{qc^2}{2} = {}^8/_{25}\, qc^2 = {}^8/_{25} \frac{Ql}{36} = {}^2/_{225}\, Ql,$$

also kleiner als M_1. Endlich folgt nun die zulässige Belastung

$$Q = 90 \frac{WT}{el} = 90 \frac{bh^2 T}{6\, l} = 15 \frac{bh^2 T}{l}$$

Wird der Balken von drei Zwischensäulen unterstützt, so findet man auf demselben Wege

	P_1	P_2	P_3	P_2	P_1
bei concentrirter Belastung .	$^{19}/_{224}\,Q$	$^{68}/_{224}\,Q$	$^{50}/_{224}\,Q$	$^{68}/_{224}\,Q$	$^{19}/_{224}\,Q$
bei gleichmäßiger Belastung .	$^{11}/_{112}\,Q$	$^{32}/_{112}\,Q$	$^{26}/_{112}\,Q$	$^{32}/_{112}\,Q$	$^{11}/_{112}\,Q$

und es ist im ersten Falle die zulässige Tragkraft

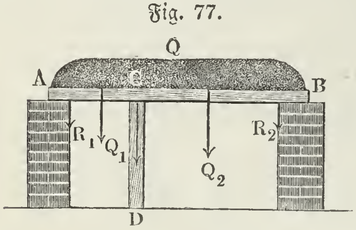
$$Q = \frac{1792}{19} \cdot \frac{W T}{l e} = \frac{1792}{19} \cdot \frac{b h^2 T}{6 l} = \frac{896}{57} \cdot \frac{b h^2 T}{l},$$

dagegen im zweiten:

$$Q = \frac{986}{17} \cdot \frac{W T}{l e} = \frac{986}{17} \cdot \frac{b h^2 T}{6 l} = \frac{493}{51} \cdot \frac{b h^2 T}{l}.$$

§. 46 **Ungleichmässige Unterstützung durch Säulen.** Wenn ein belasteter Balken AB, Fig. 77, nicht in der Mitte, sondern an einer anderen Stelle C von einer Säule CD unterstützt wird, so läßt sich der Druck auf seine Stützpunkte u. s. w. wie folgt ermitteln.

Fig. 77.



Es sei die ganze Belastung des Balkens $= Q$, die ganze Länge desselben $= l$, der Abstand der Säule von einem Endpfeiler A, $AC = l_1$ und der vom anderen Endpfeiler B, $BC = l_2$, also $l_1 + l_2 = l$. Setzen wir wieder voraus, daß der Balken die ganze Kopffläche der Säule berührt, und folglich seine neutrale Axe an dieser Stelle horizontal ist, so können wir auch jedes Balkenstück AC und BC für sich allein betrachten und daher annehmen, daß es bei einer gleichmäßigen Belastung auf die ganze Balkenlänge einen seiner Länge proportionalen Theil von Q trägt, daß also AC die Last $Q_1 = \frac{l_1}{l} Q$ und BC die Last $Q_2 = \frac{l_2}{l} Q$ aufnimmt.

Werden auch die Balkenenden A und C horizontal gehalten, so trägt folglich das Lager A die Last:

$$R_1 = {}^1/_2\, Q_1 = {}^1/_2\, \frac{l_1}{l}\, Q,$$

ebenso das Lager B die Last:

$$R_2 = {}^1/_2\, Q_2 = {}^1/_2\, \frac{l_2}{l}\, Q;$$

und es bleibt für die Säule CD der aufzunehmende Druck

$$P = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2} Q \text{ übrig.}$$

Sind nun wieder b und h die Querschnittsdimensionen des Trägers, so hat man für das Balkenstück $A\,C$:

$$Q_1 = \frac{l_1}{l} Q = 2 \frac{b h^2}{l_1} T, \text{ sowie für das Balkenstück } B\,C:$$

$$Q_2 = \frac{l_2}{l} Q = 2 \frac{b h^2}{l_2} T, \text{ und daher:}$$

$$b h^2 = \frac{1}{2} \frac{Q l_1^2}{T l}, \text{ sowie } b h^2 = \frac{1}{2} \frac{Q l_2^2}{T l}.$$

Wenn folglich die Abstände l_1 und l_2 von einander verschieden sind, so fallen bei gleicher Sicherheit auch die Querschnittsdimensionen b und h der beiden Balkenstücke ungleich aus. Liegt der Balken mit seinen Enden frei auf, so können wir dagegen den Druck in A:

$$R_1 = \frac{3}{8} Q_1 = \frac{3}{8} \frac{l_1}{l} Q, \text{ sowie den in } B:$$

$$R_2 = \frac{3}{8} Q_2 = \frac{3}{8} \frac{l_2}{l} Q,$$

und daher den auf die Säule:

$$P = \frac{5}{8} (Q_1 + Q_2) = \frac{5}{8} Q$$

setzen, und es ist nun die Tragkraft für $A\,C$:

$$Q_1 = \frac{l_1}{l} Q = \frac{4}{3} \frac{b h^2}{l_1} T, \text{ und für } B\,C:$$

$$Q_2 = \frac{l_2}{l} Q = \frac{4}{3} \frac{b h^2}{l_2} T, \text{ wonach für } A\,C:$$

$$b h^2 = \frac{3}{4} \frac{Q l_1^2}{T l}, \text{ sowie für } B\,C:$$

$$b h^2 = \frac{3}{4} \frac{Q l_2^2}{T l} \text{ folgt.}$$

Wäre die Last $Q = Q_1 + Q_2$ auf die Mitten M_1 und M_2 beider Theile $A\,C$ und $B\,C$ vertheilt, so hätte man im ersten Falle den Druck auf die Endpfeiler A und B:

$$R_1 = \frac{1}{2} Q_1 \text{ und } R_2 = \frac{1}{2} Q_2, \text{ sowie auf die Säule:}$$

$$P = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) = \frac{1}{2} Q, \text{ und es wäre:}$$

$$Q_1 = \frac{4}{3} \frac{b h^2}{l_1} T, \text{ sowie } Q_2 = \frac{4}{3} \frac{b h^2}{l_2} T, \text{ folglich für } A\,C:$$

$$b h^2 = \frac{3}{4} \frac{Q_1 l_1}{T}, \text{ sowie für } B\,C:$$

$$b h^2 = \frac{3}{4} \frac{Q_2 l_2}{T} \text{ zu setzen.}$$

Im zweiten Falle, wenn der Balken bloß in A und C aufliegt, ist der Druck:

in A, $R_1 = {}^5/_{16}\, Q_1$, und in B, $R_2 = {}^5/_{16}\, Q_2$,
folglich der Druck auf die Säule:

$$P = {}^{11}/_{16}\,(Q_1 + Q_2) = {}^{11}/_{16}\, Q.$$

Es ist hiernach die Tragkraft des Stückes AC:

$$Q_1 = {}^8/_9 \cdot \frac{b h^2}{l_1}\, T,$$ sowie die des Stückes BC:

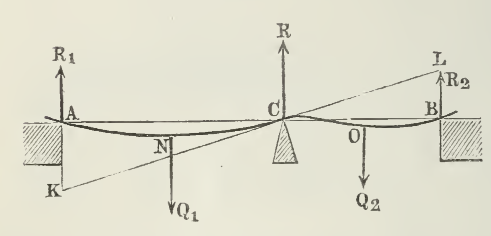
$$Q_2 = {}^8/_9 \cdot \frac{b h^2}{l_2}\, T,$$ also ein Mal:

$$b h^2 = {}^9/_8\, \frac{Q_1 l_1}{T},$$ und das andere Mal:

$$b h^2 = {}^9/_8\, \frac{Q_2 l_2}{T}.$$

§. 47 Wenn der Balken AB, Fig. 78, nicht platt auf dem Kopf C der Säule CD, sondern nur in einem Punkte desselben aufliegt, so nimmt durch die Wirkung der in den Mittelpunkten N und O der Balkenstücke AC und BC niederziehenden Gewichte Q_1 und Q_2 die Balkenaxe die Gestalt einer in Fig. 78 dargestellten Curve $ANCOB$ an. Die Drücke R_1, R_2 und R, welche in diesem Falle die Stützpunkte A, B und C auszuhalten haben, sind wie folgt zu bestimmen. Es ist

Fig. 78.



1) $R_1 + R_2 + R = Q_1 + Q_2$, ferner, wenn l_1 und l_2 die Längen der Balkenstücke CA und CB bezeichnen,

2) $R_1 l_1 - {}^1/_2\, Q_1 l_1 = R_2 l_2 - {}^1/_2\, Q_2 l_2$, und, wenn a_1 und a_2 die Bogenhöhen AK und BL in Hinsicht auf die Tangente KL durch den Stützpunkt bezeichnen:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Ferner hat man noch nach §. 44,

$$AK = a_1 = (5\, Q_1 - 16\, R_1)\, \frac{l_1^3}{48\, WE},$$ und

$$BL = a_2 = (16\, R_2 - 5\, Q_2)\, \frac{l_2^3}{48\, WE},$$

daher geht die letzte Proportion in folgende über

$$\frac{5\,Q_1 - 16\,R_1}{16\,R_2 - 5\,Q_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2},$$

und giebt folgende Bestimmungsgleichung.

3) $16\,(R_1\,l_1^2 + R_2\,l_2^2) = 5\,(Q_1\,l_1^2 + Q_2\,l_2^2)$.

Nun läßt sich Gleichung 2) auch schreiben:

$$2\,(R_1\,l_1 - R_2\,l_2) = Q_1\,l_1 - Q_2\,l_2, \text{ oder}$$
$$16\,(R_1\,l_1\,l_2 - R_2\,l_2^2) = 8\,l_2\,(Q_1\,l_1 - Q_2\,l_2),$$

daher ergiebt sich durch Addition

$$16\,R_1\,l_1\,(l_1 + l_2) = Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2,$$

und es folgen die Drücke

$$R_1 = \frac{Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2}{16\,l_1\,(l_1 + l_2)},$$

$$R_2 = \frac{Q_2\,l_2\,(5\,l_2 + 8\,l_1) - 3\,Q_1\,l_1^2}{16\,l_2\,(l_1 + l_2)} \text{ und}$$

$$R = Q_1 + Q_2 - (R_1 + R_2)$$
$$= \frac{Q_1 l_1\,(11\,l_1 l_2 + 8\,l_2^2 + 3\,l_1^2) + Q_2 l_2\,(11\,l_1\,l_2 + 8\,l_1^2 + 3\,l_2^2)}{16\,l_1\,l_2\,(l_1 + l_2)}$$
$$= \frac{Q_1\,l_1\,(8\,l_2 + 3\,l_1) + Q_2\,l_2\,(8\,l_1 + 3\,l_2)}{16\,l_1\,l_2}.$$

Noch hat man das Biegungsmoment im Punkte N:

$$\tfrac{1}{2}\,R_1\,l_1 = \frac{Q_1\,l_1\,(5\,l_1 + 8\,l_2) - 3\,Q_2\,l_2^2}{32\,(l_1 + l_2)}, \text{ das im Punkte } O:$$

$$\tfrac{1}{2}\,R_2\,l_2 = \frac{Q_2\,l_2\,(5\,l_2 + 8\,l_1) - 3\,Q_1\,l_1^2}{32\,(l_1 + l_2)}, \text{ und das in } C:$$

$$(Q_1 - 2\,R_1)\,\frac{l_1}{2} = \frac{3\,(Q_1\,l_1^2 + Q_2\,l_2^2)}{16\,(l_1 + l_2)}.$$

Setzt man den größten dieser drei Werthe $= \frac{WT}{e}$, so erhält man die Gleichung zur Berechnung der nöthigen Stärke des Balkens.

Für $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$ ist $R_1 = \frac{13\,Q_1 - 3\,Q_2}{32}$, $R_2 = \frac{13\,Q_2 - 3\,Q_1}{32}$,

$$R = \frac{11\,(Q_1 + Q_2)}{16},\ \tfrac{1}{2}\,R_1\,l_1 = \left(\frac{13\,Q_1 - 3\,Q_2}{128}\right) l,$$

$$\tfrac{1}{2}\,R_2\,l_2 = \left(\frac{13\,Q_2 - 3\,Q_1}{128}\right) l \text{ und } (Q_1 - 2\,R_1)\,\frac{l_1}{2} = \frac{3\,(Q_1 + Q_2)\,l}{64}.$$

Ist der Balken gleichmäßig, und zwar jede Längeneinheit desselben mit q belastet, so hat man die ganze Last $Q = q\,l$, und es ist zu setzen.

1) $R_1 + R_2 + R = q\,l$.

Ferner ist, da die Momente auf beiden Seiten von C einander gleich sind,

$$R_1\,l_1 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_1^2 = R_2\,l_2 - \tfrac{1}{2}\,q\,l_2^2, \text{ oder}$$

2) $R_1 l_1 - R_2 l_2 = \frac{1}{2} q (l_1^2 - l_2^2)$.

Nun sind die Bogenhöhen

$$AK = a_1 = \left(\frac{R_1}{3} - \frac{q l_1}{8}\right) \frac{l_1^3}{WE} \text{ und}$$

$$BL = a_2 = \left(\frac{q l_2}{8} - \frac{R_2}{3}\right) \frac{l_2^3}{WE}; \text{ daher hat man hier}$$

$$\frac{\frac{R_1}{3} - \frac{q l_1}{8}}{\frac{q l_2}{8} - \frac{R_2}{3}} = \frac{l_2^2}{l_1^2}, \text{ oder}$$

3) $8 (R_1 l_1^2 + R_2 l_2^2) = 3 q (l_1^3 + l_2^3)$.

Aendert man die Gleichung Nr. 2 in folgende um:

$$8 R_1 l_1 l_2 - 8 R_2 l_2^2 = 4 q (l_1^2 - l_2^2) l_2,$$

und addirt dieselbe nun zu Nr. 3, so erhält man

$$8 R_1 l_1 (l_1 + l_2) = q (3 l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 - l_2^3),$$

und hiernach folgende Formeln für die Drücke auf die Stützpunkte

$$R_1 = \frac{q (3 l_1^3 + 4 l_1^2 l_2 - l_2^3)}{8 l_1 (l_1 + l_2)},$$

$$R_2 = \frac{q (3 l_2^3 + 4 l_2^2 l_1 - l_1^3)}{8 l_2 (l_1 + l_2)} \text{ und}$$

$$R = q l - (R_1 + R_2)$$

$$= \frac{q (l_1^4 + 5 l_1^3 l_2 + 8 l_1^2 l_2^2 + 5 l_2^3 l_1 + l_2^4)}{8 l_1 l_2 (l_1 + l_2)}$$

$$= \frac{q (l_1^3 + 4 l_1 l_2 (l_1 + l_2) + l_2^3)}{8 l_1 l_2}.$$

Die Biegungsmomente für die Stellen, welche um x_1 und x_2 von den Stützpunkten A und B abstehen, sind

$M_1 = R_1 x_1 - \frac{q x_1^2}{2}$ und $M_2 = R_2 x_2 - \frac{q x_2^2}{2}$, und haben sowohl für $x_1 = \frac{R_1}{q}$ und $x_2 = \frac{R_2}{q}$, als auch für $x_1 = l_1$ und $x_2 = l_2$ ihre Maximalwerthe, nämlich im ersten Falle

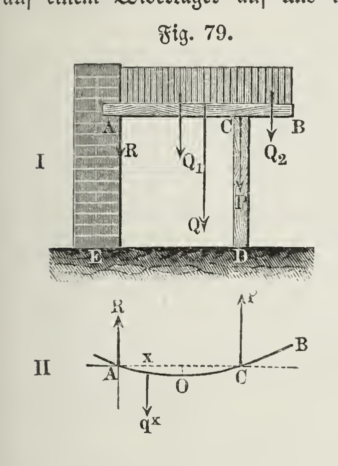
$M_1 = \frac{R_1^2}{2q}$ und $M_2 = \frac{R_2^2}{2q}$, und im zweiten Falle

$M_1 = R_1 l_1 - \frac{q l_1^2}{2}$ und $M_2 = R_2 l_2 - \frac{q l_2^2}{2}$.

Um die nöthige Stärke des Balkens zu finden, ist, wie bekannt, der größte dieser Maximalwerthe $= \frac{WT}{e}$, z. B. $= \frac{b h^2 T}{6}$ zu setzen.

Unterstützung durch eine Aussensäule. Zuweilen ruht ein §. 48
Balken oder Träger AB, Fig. 79 I., nur mit einem Endpunkte A auf einem Widerlager auf und ist außerdem noch von einer Säule CD unterstützt. Ist dann wieder der Balken auf seiner ganzen Länge durch das Gewicht Q gleichmäßig belastet, und die Säule im Abstande $AC = l_1$ von Widerlager A angebracht, so kann man, unter der Voraussetzung, daß der Druck P auf die Säule den im Schwerpunkte, also am Hebelarm $\frac{l}{2}$ wirkenden Gewichte Q der Last in Hinsicht auf A als Drehungspunkt, das Gleichgewicht hält, setzen: $Pl_1 = Q\frac{l}{2}$, und daher den Druck auf die Säule:

Fig. 79.



$$P = \frac{1}{2}\,\frac{Ql}{l_1},$$

sowie den Druck im Stützpunkte A:

$$R = Q - P = \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{l}{l_1}\right) Q.$$

Ferner trägt das Balkenstück AC von der Länge l_1 die Last: $Q_1 = \frac{l_1}{l}\,Q$,

und dagegen das freie Endstück BC von der Länge l_2 die Last: $Q_2 = \frac{l_2}{l}\,Q$.

Das Biegungsmoment des Balkens in Hinsicht auf einen Punkt O, Fig. 79, II., welcher um $AO = x$ vom Stützpunkte A absteht, ist $M = \pm\left(Rx - \frac{qx^2}{2}\right)$, und zwar ein Maximum für $x = \frac{R}{q}$ und für $x = l_1$. Die entsprechenden Maximalwerthe sind

$$\frac{R^2}{2q} = \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{l}{l_1}\right)^2 \frac{Ql}{2} \text{ und } Rl_1 - \frac{ql_1^2}{2} = (l - l_1)^2\,\frac{Q}{2l}.$$

Setzt man das eine oder andere dieser Momente dem Tragmomente $\frac{bh^2T}{6}$ gleich, so erhält man zur Bestimmung der Balkenstärke bh^2 entweder

$$= 3\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{l}{l_1}\right)^2 \frac{Ql}{T} \text{ oder } = 3\,(l - l_1)^2\,\frac{Q}{lT}.$$

Z. B. für $l_1 = l$ ist nach der ersten Formel, so wie für $l_1 = \frac{1}{2} l$, nach der zweiten Formel:

$$b h^2 = \frac{3}{4} \frac{Q l}{T}.$$

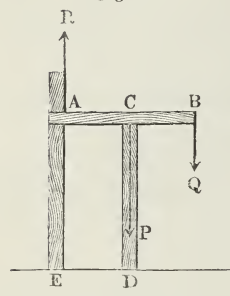
Für das zweite Balkenstück BC hat man dagegen (s. Band I., §. 240):

$$Q_2 = \frac{2 b h^2}{l_2} \cdot \frac{T}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{b h^2}{l_2} T, \text{ und daher:}$$

$$b h^2 = 3 \cdot \frac{Q_2 l_2}{T} = 3 \cdot \frac{Q l_2^2}{T l}.$$

In vielen Fällen der Anwendung hängt die Last Q am Ende B, Fig. 80, eines Trägers AB, wobei sich der Druck auf die Säule A

Fig. 80.



$$P = \frac{l}{l_1} Q,$$

und daher der auf das Widerlager AE

$$R = P - Q = \left(\frac{l}{l_1} - 1\right) Q$$

$$= \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) Q = \frac{l_2}{l_1} Q$$

setzen läßt. Es wirkt natürlich die letztere Kraft negativ, d. i. von unten nach oben.

Das Balkenstück AC wird durch die Kraft R gebogen, es ist daher für dasselbe:

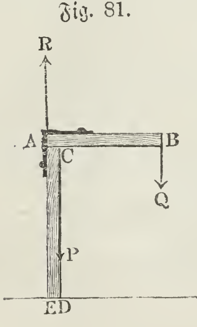
$$R = \frac{b h^2}{l_1} \cdot \frac{T}{6}, \text{ und } b h^2 = 6 \frac{R l_1}{T} = 6 \frac{Q l_2}{T},$$

und das Stück BC wird durch die Kraft Q gebogen, folglich ist für dasselbe,

$$Q = \frac{b h^2}{l_2} \cdot \frac{T}{6}, \text{ und } b h^2 = 6 \frac{Q l_2}{T}.$$

Ist der Balken AB in dem einen oder dem anderen Falle bei A fest eingemauert, so läßt sich die Tragfähigkeit desselben nach Band I., §. 247 beurtheilen.

Fig. 81.



Hat endlich der Balken AB, Fig. 81, nur eine Stütze oder Säule AD, so wirkt er auf den Kopf AC derselben genau so wie im letzten Falle auf das Widerlager A und die Säule CD zusammen. Ist dann l_1 die Breite AC des Säulenkopfes, und l_2 die Länge BC des freiliegenden Balkenstückes, so hat man den Druck längs der inneren Seite CD der Säule:

$$P = \frac{l}{l_1} Q,$$

und den Zug längs der äußeren Seite AE, welche durch eine besondere Befestigung, z. B. durch ein Band oder eine Klammer vom Balken auf die Säule überzutragen ist:

$$R = \frac{l_2}{l} Q = \frac{l - l_1}{l_1} Q.$$

Die Säule AD wird nicht allein durch die Kraft Q zusammengedrückt, sondern auch mit dem Momente Ql gebogen, und es ist daher der Querschnitt derselben nach einer Formel (s. Band I., §. 271) der zusammengesetzten Festigkeit zu berechnen.

Beispiel. Wenn der 20 Fuß lange gußeiserne Träger AB, Fig. 80, an seinem Ende B eine Last $Q = 5000$ Pfund tragen und hierbei in seiner Mitte von einer Säule CD unterstützt werden soll, so läßt sich unter der Voraussetzung, daß derselbe in A nicht festgehalten wird, sondern nur oben anliegt, der Druck auf die Säule: $P = 2\,Q = 10000$ Pfund, und folglich der im Stützpunkte A, $R = P - Q = 5000$ Pfund setzen, und es ist für die Querschnittsdimensionen dieses Trägers:

$$b h^2 = 6 \,.\, \frac{Ql}{2\,T} = 3 \,.\, \frac{5000 \,.\, 240}{T} = \frac{3600000}{T},$$

folglich, wenn man $h = 3\,b$ und $T = 9000$ setzt:

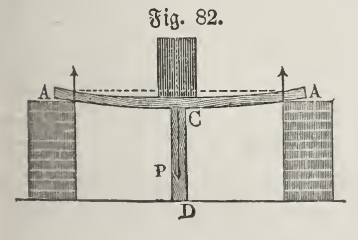
$$9\,b^3 = \frac{3600000}{9000} = 400,$$

woraus nun die Trägerbreite: $b = \sqrt[3]{400/9} = \sqrt[3]{44,4} = 3,55$ Zoll, und die Trägerdicke: $h = 3\,b = 10,65$ Zoll folgt.

Zusammendrückung der Säulen. Die im Vorstehenden entwickelte Theorie der Vertheilung des Druckes eines Trägers oder Balkens auf die ihn unterstützenden Säulen ist nur unter der Voraussetzung streng begründet, daß man es mit vollkommen starren Säulen zu thun habe, welche sich durch die von ihnen aufgenommenen Kräfte in ihrer Länge nicht verändern. Da dies aber nicht der Fall ist, so müssen wir noch untersuchen, welchen Einfluß noch die Zusammendrückung und die Ausdehnung der Trag- und Hängesäulen auf die Vertheilung des Druckes eines Trägers hat. §. 49

Trägt der an beiden Enden aufliegende Balken in seiner Mitte C, Fig. 82, eine Last P und ist er auch daselbst von einer Säule CD unterstützt, so nimmt ein Theil P_1 dieser Kraft die Druckelasticität der Säule, und ein Theil P_2 derselben die Biegungselasticität des Balkens in sich auf. Es ist, wenn F_1 den Querschnitt, E_1 den Elasticitätsmodul, l_1 die Länge und λ die Größe der Zusammendrückung dieser Säule bezeichnen:

Fig. 82.



$$P_1 = \frac{\lambda}{l_1} F_1 E_1 \text{ (s. Band I., §. 204).}$$

Da λ zugleich die Pfeilhöhe oder Durchbiegung a der vom Balken gebildeten elastischen Linie ACA ist, so ist die Kraft zum Biegen des Balkens:

$$P_2 = 48 \frac{a W E}{l^3} = 4 \lambda \frac{b h^3}{l^3} E \text{ (s. Band I., §. 217),}$$

und es folgt nun durch Division der letzten Ausdrücke in einander:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4 b h^3}{l^3} \cdot \frac{l_1}{F_1} \frac{E}{E_1}.$$

Da $P_1 + P_2 = P$ ist, so hat man auch:

$$P_1 \left(1 + \frac{4 b h^3}{l^3} \cdot \frac{l_1 E}{F_1 E_1}\right) = P, \text{ und es folgt:}$$

$$P_1 = \frac{l^3 F_1 E_1 . P}{l^3 F_1 E_1 + 4 l_1 b h^3 E}, \text{ sowie:}$$

$$P_2 = \frac{4 b h^3 l_1 E}{l^3 F_1 E_1 + 4 l_1 b h^3 E} \cdot P.$$

In der Regel ist $l^3 F_1 E_1$ viel größer als $4 l_1 b h^3 E$, so daß der letztere Werth gegen den ersten vernachlässigt werden kann; deshalb ist auch meistens $P_1 = P$, dagegen aber $P_2 = 0$ zu setzen.

Sollten beide Körper, der Balken und die Säule, gleichmäßig, und zwar bis zur Elasticitätsgrenze gespannt werden, so hätte man, wenn T und T_1 die Tragmodul für dieselben bezeichnen:

$$P_1 = F_1 T_1 \quad \text{und } P_2 = {}^2/_3 \frac{b h^2}{l} T$$

zu setzen, und es wäre folglich auch:

$$\frac{P_2}{P_1} = {}^2/_3 \frac{b h^2}{F_1 l} \frac{T}{T_1}.$$

Setzt man dieses Verhältniß dem obigen Werthe für $\frac{P_2}{P_1}$ gleich, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{4 b h^3}{l^3} \frac{l_1}{F_1} \frac{E}{E_1} = {}^2/_3 \frac{b h^2}{F_1 l} \cdot \frac{T}{T_1},$$

woraus die Balkenhöhe $h = {}^1/_6 \cdot \frac{l^2 T E_1}{l_1 T_1 E}$ folgt.

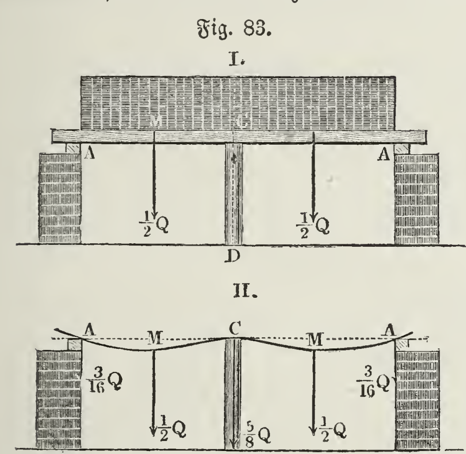
Wäre noch $T_1 = T$, sowie $E_1 = E$, so hätte man einfach $h = {}^1/_6 \frac{l^2}{l_1}$, und daher z. B. für $l_1 = l$, $h = {}^1/_6 l$ zu nehmen.

In der Praxis wird man immer von der Säule den größten Theil der Last tragen lassen, und daher den Querschnitt der Säule durch den Aus-

druck $F_1 = \frac{P}{T_1}$ bestimmen können, wobei die Querschnittsdimensionen des Balkens ganz außer Betracht kommen.

§. 50 Sehr gewöhnlich besteht die Kraft P, welche mittels jenes Balkens auf eine Säule wirkt, in der Summe zweier anderen Kräfte, welche aus einer zu beiden Seiten der Säule auf dem Balken ruhenden Last hervorgehen. Hat man es z. B. mit dem aus §. 41 bekannten Falle in Figur 83 zu thun, wo die Last Q zu beiden Seiten der Säule CD auf den Balken gleichmäßig vertheilt ist, und letzterer mit seinen Enden auf Widerlagern aufruht, so trägt die Säule, wenn sie vollkommen starr ist, den Theil $^5/_8\ Q$.

Fig. 83.



Da aber in Wirklichkeit die Säule elastisch ist, und sich um die Größe $\lambda = \frac{P l_1}{F_1 E_1}$ zusammendrückt, so bleibt auch die Balkenmitte C mit den Enden A, A nicht in einerlei Niveau und es ist also die Bogenhöhe des Balkenstückes MC, Fig. 83, II., nicht mehr so groß als die des Balkenstückes MA, sondern die eine um λ größer als die andere.

Setzen wir deshalb im Ausdrucke

$$y = \frac{P_1 (l^2 x - {}^1/_3\, x^3)}{2\, WE} - \frac{q\, (l^3 x - {}^1/_4\, x^4)}{6\, WE}$$ des §. 217 u. §. 223 Bd. I.,

$$y = \lambda,\ x = l,\ \ P_1 = R \text{ und } q\, l = Q,$$

so erhalten wir folgende Bestimmungsgleichung:

$$\lambda = \frac{R\, l^3}{3\, WE} - \frac{Q\, l^3}{8\, WE},$$

woraus sich der Druck auf ein Widerlager

$$R = {}^3/_8\, Q + \frac{3\, \lambda\, WE}{l^3}$$ ergiebt.

Wenn wir diese Formel auf unseren Fall, wo der Balken statt an einem Ende mit beiden Enden aufruht, anwenden wollen, so müssen wir

$$\frac{Q}{2} \text{ statt } Q \text{ und } \frac{l}{2} \text{ statt } l$$

setzen, so daß nun

$$R = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{\lambda\, W E}{l^3} = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{P l_1}{F_1 E_1} \cdot \frac{W E}{l^3} \text{ folgt.}$$

Hieraus ergiebt sich nun für den Druck P auf die Säule in der Mitte des Balkens:

$$P = Q - 2\, R = {}^5/_8\, Q - 48\, \frac{P l_1}{F_1 E_1}\, \frac{W E}{l^3}, \text{ oder}$$

$$P \left(1 + 48\, \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}\right) = {}^5/_8\, Q.$$

Daher ist dieser Druck selbst:

$$P = \frac{{}^5/_8\, Q}{1 + 48\, \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}},$$

und der Druck auf ein Widerlager:

$$R = {}^3/_{16}\, Q + 24\, \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3} \cdot \frac{{}^5/_8\, Q}{1 + 48\, \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}}$$

$$= {}^3/_{16}\, Q \left(1 + \frac{80\, W E l_1}{F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1}\right).$$

Hat man es mit einem parallelepipedischen Balken zu thun, so ist

$W = \frac{b h^3}{12}$ (s. Band I., §. 226) zu setzen.

In den meisten Fällen der Anwendung ist die Länge l des Balkens so groß, daß $\frac{48\, W E l_1}{F_1 E l^3}$ gegen 1 vernachlässigt, und daher

$$P = {}^5/_8\, Q \text{ und } R = {}^3/_{16}\, Q$$

gesetzt werden kann (s. §. 41).

Um die Querschnittsdimensionen b und h des Balkens, sowie den Querschnitt F_1 der Säule zu ermitteln, setzen wir wieder das Biegungsmoment einer Balkenhälfte in Hinsicht auf die Mitte:

$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} - R\, \frac{l}{2} = b h^2\, \frac{T}{6}, \text{ so daß wir}$$

$$Q - 4\, R = {}^4/_3\, \frac{b h^2}{l}\, T, \text{ oder}$$

$$Q - {}^3/_4\, Q \left(1 + \frac{80\, W E l_1}{F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1}\right) = {}^4/_3\, \frac{b h^2}{l}\, T \text{ erhalten.}$$

Setzen wir dann noch in

$$P = \frac{5/8\, Q}{1 + 48 \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}} = \frac{5/8\, Q F_1 E_1 l^3}{F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1},$$

$P = F_1 T_1$, so ergiebt sich

$$F_1 E_1 l^3 + 48\, W E l_1 = 5/8 \frac{Q E_1 l^3}{T_1}, \text{ daher:}$$

$$\frac{Q}{4}\left(1 - \frac{384\, W E T_1 l_1}{Q E_1 l^3}\right) = 4/3 \frac{b h^2}{l}\, T, \text{ und}$$

$$b h^2 = 3/16 \frac{Q l}{T}\left(1 - \frac{32\, b h^3 l_1 E T_1}{l^3 Q E_1}\right).$$

Hat man mittels dieser Formel die Querschnittsdimensionen des Balkens gefunden, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß das Verhältniß $\frac{h}{b}$ zwischen denselben gegeben ist, so kann man dann auch leicht den Querschnitt der Säule mittels der Formel:

$$F_1 = \frac{P}{T_1} = \frac{5/8 \frac{Q}{T_1}}{1 + \frac{4\, b h^3 l_1 E}{F_1 E_1 l^3}} \text{ berechnen.}$$

Wäre die Last Q nicht gleichmäßig auf den ganzen Balken, sondern nur auf die Mittelpunkte M und M zwischen je zwei Stützpunkten vertheilt, so hätte man (s. Band I., §. 247).

$$P_1 = 5/32\, Q + 24\, \lambda \frac{W E}{l^3}, \text{ folglich:}$$

$$P = Q - 2 P_1 = 11/16\, Q - 48 \frac{P l_1}{F_1 l^3} \cdot \frac{W E}{E_1},$$

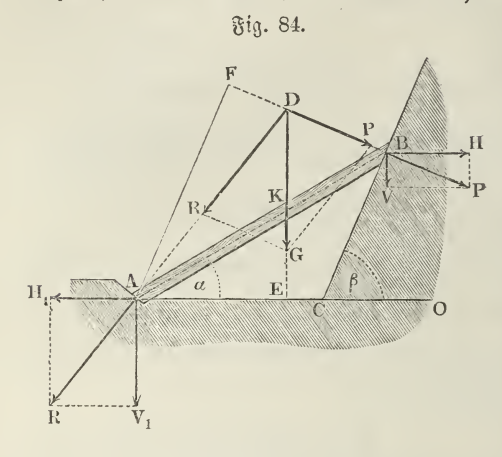
so daß nun der Druck auf die Säule

$$P = \frac{11/16\, Q}{1 + 48 \frac{W E l_1}{F_1 E_1 l^3}} \text{ folgen würde.}$$

Grundformeln für Sparren und Streben. Wenn ein Sparren oder eine Strebe AB, Fig. 84 (a. f. S.), in einem Endpunkte A unterstützt ist und sich mit dem anderen Endpunkte B gegen eine schräge Wand BC anlehnt, so lassen sich die Kräfte, mit welchen er in diesen Punkten gegen seine Unterstützungen drückt, wie folgt bestimmen. Da wir von der Reibung absehen wollen, so ist die Kraft P, mit welcher er gegen die Ebene BC drückt, rechtwinkelig gegen BC gerichtet anzunehmen. Ist nun G das Gewicht des Körpers AB sammt seiner Belastung und K der Schwerpunkt desselben, so kann man dasselbe in dem Durchschnitte D der verticalen Schwerlinie DE mit der Normalen DB zu BC angreifen las- §. 51

sen und hier in zwei Seitenkräfte P und R zerlegen, wovon P die von BC aufzunehmende Normalkraft und R eine nach dem Stützpunkte A gerichtete und von diesem Punkte aufzunehmende Seitenkraft ist. Um die Kraft P zu finden, denken wir uns G und P als die Kräfte eines Winkelhebels mit dem Stützpunkte A und den gegen DK und DB winkelrecht gelegten Hebelarmen AE und AF. Da die Momente $G . \overline{AE}$ und $P . \overline{AF}$ dieser Kräfte einander gleich sind, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die gesuchte Seitenkraft, mit welcher der Hebel in B gegen die Unterstützungsebene drückt:

Fig. 84.



$$P = \frac{G . \overline{AE}}{AF}.$$

Ist noch l die Länge AB des Körpers, s der Abstand AK seines Schwerpunktes K vom Stützpunkte A, in der Axenrichtung des Körpers gemessen, ferner α der Neigungswinkel BAO des Körpers AB und β der Neigungswinkel BCO der Stützebene BC gegen den Horizont AO, so hat man:

$$AE = AK \cos. BAO = s \cos. \alpha \text{ und}$$
$$AF = AB \cos. BAF = AB \cos. ABC = l \cos. (\beta - \alpha),$$

und daher die gesuchte Kraft:

$$\text{I.)} \quad P = \frac{G s \cos. \alpha}{l \cos. (\beta - \alpha)}.$$

Der horizontale Component dieser Kraft ist:

$$H = P \sin. GDP = P \sin. BCO = P \sin. \beta, \text{ d. i.}$$
$$H = \frac{G s \cos. \alpha \sin. \beta}{l \cos. (\beta - \alpha)},$$

und dagegen der verticale Component:

$$V = P \cos. BCO = P \cos. \beta, \text{ d. i.}$$
$$V = \frac{G s \cos. \alpha \cos. \beta}{l \cos. (\beta - \alpha)} = H \operatorname{cotang}. \beta.$$

Für den Druck R im Stützpunkte A hat man den horizontalen Componenten ebenfalls:

$$H = \frac{G s \cos.\alpha \sin.\beta}{l \cos.(\beta - \alpha)};$$

dagegen ist der verticale Component:

$$V_1 = G - V = G\left(1 - \frac{s \cos.\alpha \cos.\beta}{l \cos.(\beta - \alpha)}\right) = G - H \, cotang.\beta.$$

Dieser Druck selbst ist:

II.) $$R = \sqrt{H^2 + V_1^2} = \sqrt{H^2 + (G - H \, cotang.\beta)^2},$$

und für den Neigungswinkel $DAC = \delta$ seiner Richtung gegen den Horizont ist:

$$tang.\delta = \frac{V_1}{H} = \frac{G}{H} - cotang.\beta = \frac{l}{s}\,\frac{\cos.(\beta - \alpha)}{\cos.\alpha \sin.\beta} - cotang.\beta.$$

Wenn sich der Körper AB, Fig. 85, in B an eine verticale Wand

Fig. 85.

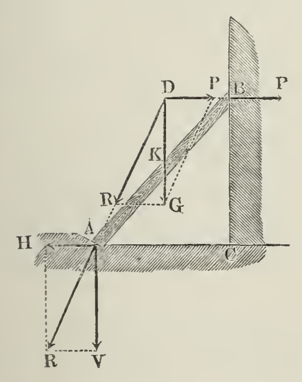
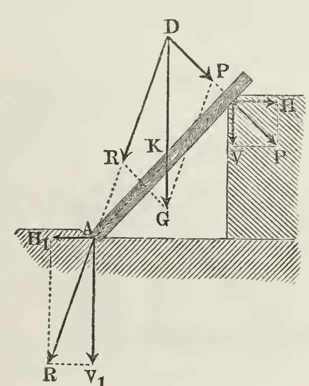


Fig. 86.



BC anlehnt, so ist $\beta = 90^0$, und daher:

$$P = H = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.(90 - \alpha)} = \frac{G s \cos.\alpha}{l \sin.\alpha} = \frac{G s}{l} \, cotang.\alpha,$$

ferner:

$$V = P \cos.\beta = P \cos.90^0 = 0, \text{ wogegen:}$$
$$V_1 = G - V = G,$$

folglich:

$$R = \sqrt{\left(G\,\frac{s}{l}\,cotang.\alpha\right)^2 + G^2} = G\sqrt{\left(\frac{s}{l}\,cotang.\alpha\right)^2 + 1} \text{ und}$$

$$tang.\delta = \frac{l}{s}\,tang.\alpha$$

sich herausstellen.

Fällt die Neigung β der Ebene BC, Fig. 86, mit der des Balkens AB zusammen, ist also $\beta = \alpha$, so ist:

$$P = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.0} = G \frac{s}{l} \cos.\alpha,$$

$$H = G \frac{s}{l} \sin.\alpha \cos.\alpha = \tfrac{1}{2} G \frac{s}{l} \sin.2\alpha,$$

$$V = G \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2,$$

$$V_1 = G \left(1 - \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2\right), \text{ daher:}$$

$$R = G \sqrt{\left(\frac{s}{l} \sin.\alpha \cos.\alpha\right)^2 + \left(1 - \frac{s}{l} (\cos.\alpha)^2\right)^2} \text{ und}$$

$$tang.\delta = \frac{2l}{s \sin.2\alpha} - cotang.\alpha.$$

Liegt dagegen das zu diesem Zwecke besonders geformte Ende B des Balkens AB, Fig. 87, auf einer horizontalen Ebene, ist also $\beta = 0^0$, so hat man:

$$P = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.(0 - \alpha)} = \frac{G s \cos.\alpha}{l \cos.\alpha} = G \frac{s}{l},$$

ferner:

Fig. 87.

$$H = P \sin.\beta = 0,$$

$$V = P \cos.\beta = P = G \frac{s}{l},$$

$$V_1 = G - V = G \left(1 - \frac{s}{l}\right),$$

ferner

$$R = V_1 = G \left(1 - \frac{s}{l}\right) \text{ und}$$

$$tang.\delta = \infty, \text{ also}$$

$$\delta = 90^0.$$

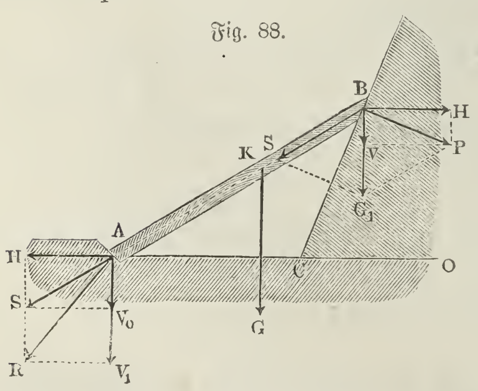


Fig. 88.

Anmerkung. Man kann die Bedingungen des Gleichgewichtes eines unterstützten Sparrens oder anderen Holzkörpers auch leicht dadurch finden, daß man sich das Gewicht G, Fig. 88, desselben vom Schwerpunkte K weg, und auf die beiden End- oder Stützpunkte verlegt denkt. Es ist dann der Theil des Gewichtes G, welcher in B niederzieht:

$$G_1 = G \frac{AK}{AB} = \frac{Gs}{l},$$

und der andere Theil desselben, welcher in A wirksam ist:

$$G_2 = G - G_1 = G\left(1 - \frac{s}{l}\right).$$

Das Gewicht G_1 läßt sich in die Seitenkraft P, welche rechtwinkelig gegen die Stützebene BC wirkt, und in die Seitenkraft S, welche in der Axe des Sparrens wirkt, und daher die Spannung des letzteren ausdrückt, zerlegen, und es ist:

$$\frac{P}{G_1} = \frac{sin. B\,G_1 P}{sin. B P G_1} = \frac{sin.(90^0 - \alpha)}{sin.(\alpha + 90^0 - \beta)} = \frac{cos.\,\alpha}{cos.(\beta - \alpha)}, \text{ daher}$$

$$P = \frac{G_1\ cos.\,\alpha}{cos.(\beta - \alpha)} = \frac{G s\ cos.\,\alpha}{l\ cos.(\beta - \alpha)}, \text{ und}$$

$$H = P\ sin.\,\beta = \frac{G s\ cos.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.(\beta - \alpha)}, \text{ sowie:}$$

$$V = P\ cos.\,\beta = \frac{G s\ cos.\,\alpha\ cos.\,\beta}{l\ cos.(\beta - \alpha)}.$$

Für die Spannung S ist:

$$\frac{S}{G_1} = \frac{sin. P B\,G_1}{sin. B P G_1} = \frac{sin.\,\beta}{cos.(\beta - \alpha)}, \text{ folglich:}$$

$$S = \frac{G_1\ sin.\,\beta}{cos.(\beta - \alpha)} = \frac{G s\ sin.\,\beta}{l\ cos.(\beta - \alpha)},$$

deren Componenten

$$H = S\ cos.\,\alpha = \frac{G s\ cos.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.(\beta - \alpha)} \text{ und}$$

$$V_0 = S\ sin.\,\alpha = \frac{G s\ sin.\,\alpha\ sin.\,\beta}{l\ cos.(\beta - \alpha)} \text{ sind.}$$

Vereinigt man die letztere Kraft mit dem Gewichtstheile $G_2 = G - \frac{s}{l}\,G$, durch Addition, so erhält man ebenfalls, wie oben, den gesammten Verticaldruck im Stützpunkte A:

$$V_1 = G - \frac{s}{l}\ G + V_0 = G\left[1 - \frac{s}{l}\left(1 - \frac{sin.\,\alpha\ sin.\,\beta}{cos.(\beta - \alpha)}\right)\right]$$

$$= G\left(1 - \frac{s}{l} \cdot \frac{cos.\,\alpha\ cos.\,\beta}{cos.(\beta - \alpha)}\right).$$

Sparrenschub. Die im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln finden nun ihre Anwendung bei der Theorie der Dach- oder Sparrenconstructionen. Es ist hiernach bei den Dächern ohne Säule, Fig. 89 u. Fig. 90, der horizontale Sparrenschub sowohl im unteren als im oberen Ende: §. 52

Fig. 89.

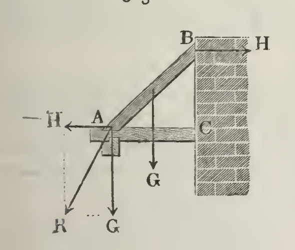
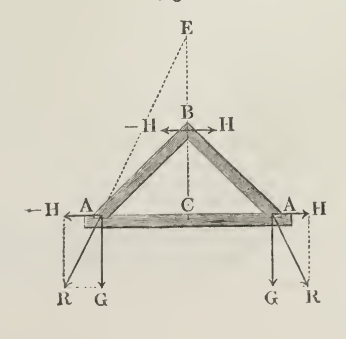


Fig. 90.



$$H = \frac{G s}{l} \; cotang.\, \alpha,$$

oder, da hier $s = \frac{1}{2} l$ gesetzt werden kann:

$$H = \frac{1}{2} G \; cotang.\, \alpha;$$

ferner der Verticaldruck im oberen Ende, = Null, und im unteren, gleich dem Gewichte G des belasteten Sparrens. Setzt man die Dachhöhe $BC = h$ und die (halbe) Breite $AC = b$, so hat man $cotang.\, \alpha = \frac{b}{h}$, daher den Sparrenschub:

$$H = \frac{1}{2} G \frac{b}{h}.$$

Es wächst also der (horizontale) Sparrenschub direct wie die Breite oder Tiefe des Hauses und umgekehrt wie die Dachhöhe. Gewöhnlich liegt h zwischen den Grenzen $2b$ und $\frac{1}{2} b$. Ersteres Verhältniß findet bei den hohen Kirchdächern, letzteres bei den flachen italienischen Hausdächern statt; dort ist $\alpha = 63^0 26'$, hier aber $\alpha = 26^0 34'$. Der Sparrenschub ist bei flachen Dächern sehr groß, er ist z. B. für die letzte Sparrenlage gleich der ganzen, dagegen bei der ersten Sparrenneigung nur ein Viertel der Belastung des Sparrens. Um den, zumal bei flachen Dächern Gefahr drohenden Sparrenschub aufzuheben, werden die Sparrenfüße in die Balkenenden eingezapft, oder wohl auch noch durch andere Mittel, z. B. durch besondere Sparrenschuhe, vor dem Ausgleiten geschützt.

Der vollständige Druck des Sparrens in seinem Fußpunkte A ist:

$$R = \sqrt{H^2 + V^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(cotang.\, \alpha)^2} \,.\, G = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2h}\right)^2} \,.\, G,$$

und für den Winkel $RAH = \delta$, welchen die Drucklinie mit dem Horizonte einschließt, hat man:

$$tang.\, \delta = \frac{G}{H} = \frac{G}{\frac{1}{2} G \frac{b}{h}} = \frac{2h}{b} = 2\, tang.\, \alpha.$$

Man findet also hiernach die Richtung des ganzen Sparrenschubes im Fußpunkte, wenn man die Sparrenhöhe CB verdoppelt (Fig. 90), also $CE = 2 \,.\, CB$ macht, und eine Linie ER durch den Fußpunkt A und durch den Endpunkt E der Verlängerung zieht.

Beispiel. Das Dach ABA, Fig. 90, ist 40 Fuß tief und 30 Fuß hoch und besteht aus je 4 Fuß von einander abstehenden Sparren von 6 Zoll Breite und 8 Zoll Höhe; man sucht den Sparrenschub. Nimmt man an, daß jeder Quadratfuß Bedachung 15 Pfund wiegt, so erhält man für die Belastung eines Sparrens:

$$= 15 \,.\, 4 \sqrt{20^2 + 30^2} = 600 \,.\, \sqrt{13} = 2163 \text{ Pfund};$$

nun wiegt aber der Sparren selbst, wenn man das Gewicht eines Cubikfußes Holz $= \frac{2}{3} \,.\, 61{,}75 = 41{,}17$ Pfund annimmt:

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 41{,}17 \sqrt{20^2 + 30^2} = \frac{411{,}7}{3} \sqrt{13} = 494{,}8 \text{ Pfund},$$

es folgt daher der Verticaldruck eines Sparrens

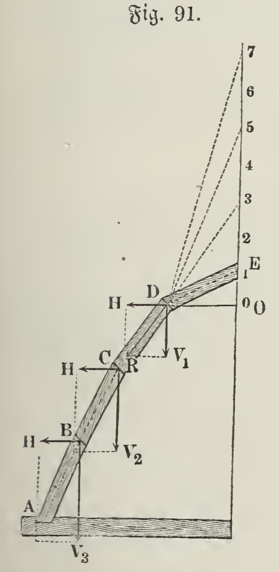
$$V = G = 2163 + 494{,}8 = 2657{,}8 \text{ Pfund},$$

und der Horizontalschub

$$H = \frac{1}{2}\, G\, \frac{b}{h} = \frac{1}{2} \cdot 2692 \cdot \frac{20}{30} = 897 \text{ Pfund}.$$

Bei manchen Constructionen, zumal bei den sogenannten Mansard- §. 53 dächern ruht der Sparren DE, Fig. 91, nicht auf einem Balken oder Bundtramen, sondern auf einem zweiten Sparren CD, dieser nach Befinden, wieder auf einem dritten BC u.s.w. Damit nun in diesem Falle die Kraft von einem Sparren auf den anderen vollkommen übertragen werde, ist es nöthig, daß diese Balken gewisse Stellungen gegen einander einnehmen.

Fig. 91.



Diese Stellungen lassen sich mit Hülfe der obigen Theorie wie folgt ermitteln.

Ist G das Gewicht und α der Neigungswinkel EDO des ersten Sparrens, so hat man die Horizontalspannung desselben

$$H = \frac{1}{2}\, G \,.\, cotang.\, \alpha.$$

und den Verticaldruck desselben in E:

$$V = \frac{1}{2}\, G.$$

Da sich nun aber in D zu V noch die Hälften der Gewichte beider Sparren DE und CD gesellen, so ist, wenn G_1 das Gewicht und α_1 den Neigungswinkel des Sparrens CD bezeichnen, der Verticaldruck in D:

$$V_1 = V + \frac{G + G_1}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2},$$

und daher für den Neigungswinkel α_1 der Richtung der Mittelkraft R aus H und V_1, welche zugleich die erforderliche Neigung des Sparrens CD ist:

$$tang.\, \alpha_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{G}{2H} + \frac{G + G_1}{2H} = tang.\, \alpha + \frac{\frac{1}{2}(G + G_1)}{H}.$$

Denkt man sich wieder die Componenten H und V_1 im Eckpunkte C angreifend und zu V_1 die halbe Summe $\frac{G_1 + G_2}{2}$ der Gewichte G_1 und G_2 der Sparren CD und BC addirt, so erhält man für diesen Punkt die Horizontalkraft wieder $= H$, und dagegen die Verticalkraft:

$$V_2 = V_1 + \frac{G_1 + G_2}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2} + \frac{G_1 + G_2}{2},$$

und daher für den Neigungswinkel α_2 des folgenden Sparrens BC:

$$tang.\, \alpha_2 = \frac{V_2}{H} = tang.\, \alpha + \frac{\frac{1}{2}(G + G_1) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2)}{H}.$$

Ebenso folgt für den Eckpunkt B die Horizontalkraft $= H$ und die Verticalkraft:

$$V_3 = V_2 + \frac{G_2 + G_3}{2} = \frac{G}{2} + \frac{G + G_1}{2} + \frac{G_1 + G_2}{2} + \frac{G_2 + G_3}{2},$$

und daher die Tangente des Neigungswinkels α_3 für den Sparren AB:

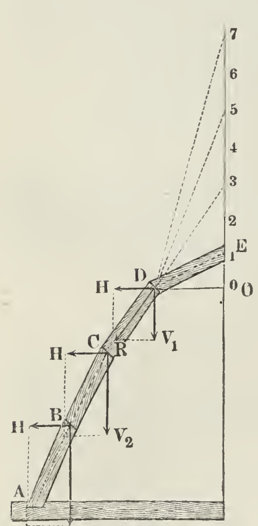
$$tg.\, \alpha_3 = \frac{V_3}{H} = tg.\, \alpha + \frac{\frac{1}{2}(G + G_1) + \frac{1}{2}(G_1 + G_2) + \frac{1}{2}(G_2 + G_3)}{H},$$

u. s. w.

Haben die sämmtlichen Sparren einerlei Gewicht G, so ist
$tang.\, \alpha_1 = 3\, tang.\, \alpha$, $tang.\, \alpha_2 = 5\, tang.\, \alpha$, $tang.\, \alpha_3 = 7\, tang.\, \alpha$, $tang.\, \alpha_4 = 9\, tang.\, \alpha$ u. s. w.

Wenn man daher in diesem Falle die Dachhöhe EO, Fig. 92, welche dem ersten Sparren DE entspricht, wiederholt nach obenzu aufträgt, und durch die Theilpunkte 1, 3, 5, 7 u. s. w. Linien $D1, D3, D5, D7$ u. s. w. zieht, so geben diese die Neigungen der Sparren DE, CD, BC, AB u. s. w. an. Man sieht übrigens sogleich ein, daß die Gestalt dieser Sparrenverbindung mit einem den Gewichten G_1, G_2, G_3 u. s. w. entsprechenden Seilpolygone vollkommen übereinstimmt (vergl. Band I., §. 154), und es ist diese Uebereinstimmung auch vollkommen erklärlich, wenn man sich die beiden Hälften von dem Gewichte G eines jeden Sparrens in den End- oder Eckpunkten D, C, B, A u. s. w. niederziehend denkt, also annimmt, daß in jedem dieser Punkte das Gewicht G wirkt.

Fig. 92.

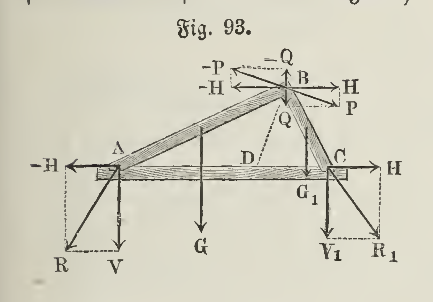


Denkt man sich die Sparren sehr kurz und in sehr großer Anzahl vorhanden, so erhält man in der Axe dieser Construction eine Kettenlinie.

Die hier nachgewiesene Unveränderlichkeit des Horizontalschubes H längs einer ganzen Sparrenverbindung haben wir auch schon im zweiten Capitel (§. 20) bei den Gewölben gefunden, als wir die Reibung zwischen den Gewölbsteinen außer Acht ließen.

Bei dem Dachgespärre in Fig. 90 mit gleichlangen Sparren wirken §. 54
die Sparren im Scheitel B nur durch den Horizontalschub auf einander; sind aber die Sparren von ungleicher Länge, wie in Fig. 93, so weicht die Kraft P, womit ein Sparren gegen den anderen drückt, von der Horizontallinie um einen gewissen Winkel ab. Es sei G das Gewicht des einen Sparrens AB, G_1 das Gewicht des anderen Sparrens CB, es seien ferner α und α_1 die Neigungswinkel BAC und BCA dieser Sparren gegen den Horizont und es bezeichne β den Neigungswinkel HBP der Kräfte P, $-P$, womit diese Sparren in B gegen einander drücken. Denken wir uns diese Kräfte in ihre horizontalen und verticalen Componenten H, $-H$, und Q, $-Q$ zerlegt, und setzen wir wieder voraus, daß die halben Sparrengewichte $\frac{1}{2}G$ und $\frac{1}{2}G_1$ in den Endpunkten B, B von AB und CB angreifen. Dann läßt sich die ganze Verticalkraft des Balkenendes B von AB:

Fig. 93.



$$H\,tang.\alpha = \frac{1}{2}G - Q,$$

und dagegen die ganze Verticalkraft des Balkenendes B von CB:

$$H\,tang.\alpha_1 = \frac{1}{2}G_1 + Q$$

setzen, so daß sich nun durch Addition dieser Ausdrücke

$$H\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1) = \frac{1}{2}(G + G_1),$$

also der Horizontalschub:

$$H = \frac{\frac{1}{2}(G + G_1)}{tang.\,\alpha + tang.\,\alpha_1}$$

ergiebt, woraus wieder der verticale Component:

$$Q = \frac{1}{2}G - H\,tang.\,\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{(G\,tang.\alpha_1 - G_1\,tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

folgt.

Der Neigungswinkel β ist bestimmt durch den Ausdruck

$$tang.\beta = \frac{Q}{H} = \frac{G\,tang.\alpha_1 - G_1\,tang.\alpha}{G + G_1}.$$

Damit sich die Kräfte P und $-P$ das Gleichgewicht halten, ist nöthig, daß die Ebene, in welcher sich die beiden Sparrenenden in B berühren, rechtwinkelig auf der Richtung dieser Kräfte steht, daß also der Neigungswinkel dieser Ebene:

$$\angle BDC = \beta_1 = 90^0 - \beta \text{ ist.}$$

Die Sparrenschübe an den Sparrenfüßen sind die Mittelkräfte R und R_1

aus den unveränderlichen Horizontalschuben H und $-H$, und aus den Verticalkräften:

$$V = G - Q = G - \frac{1}{2}\,\frac{(G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

und

$$V_1 = G_1 + Q = G_1 + \frac{1}{2}\,\frac{(G\ tang.\alpha_1 - G_1\ tang.\alpha)}{tang.\alpha + tang.\alpha_1}$$

Die Neigungen δ und δ_1 derselben gegen den Horizont lassen sich durch die Ausdrücke:

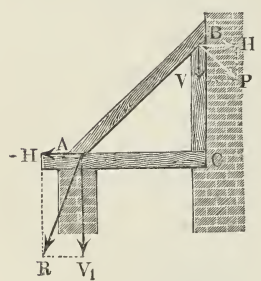
$$tang.\delta = \frac{V}{H} = \frac{(2\,G + G_1)\ tang.\alpha + G\ tang.\alpha_1}{2\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)}$$

und $tang.\delta_1 = \dfrac{V_1}{H} = \dfrac{G_1\ tang.\alpha + (2\,G_1 + G)\ tang.\alpha_1}{2\,(tang.\alpha + tang.\alpha_1)}$

bestimmen.

§. 55 **Gestützte Sparren.** Ruht der Sparrenkopf B, Fig. 94, auf einer Säule $B\,C$, so fällt der Sparrenschub kleiner aus, als wenn er sich an eine verticale Wand oder Säule anlehnt. Es ist hier nach §. 51 der Druck gegen den Kopf dieser Säule:

Fig. 94.



$$P = G\,\frac{s}{l}\,cos.\alpha = \frac{1}{2}\,G\,cos.\alpha,$$

und der Horizontalschub:

$$H = P\,sin.\alpha = \frac{1}{2}\,G\,cos.\alpha\,sin.\alpha$$
$$= \frac{1}{4}\,G\,sin.2\,\alpha.$$

Da die Säule von dem Gewichte G den Theil

$$V = P\,cos.\alpha = \frac{1}{2}\,G\,(cos.\alpha)^2$$

trägt, so drückt allerdings der Balken nicht mit seinem ganzen Gewichte G, sondern nur mit der Kraft:

$$V_1 = G - \frac{1}{2}\,G\,(cos.\alpha)^2 = G\,[1 - \frac{1}{2}\,(cos.\alpha)^2]$$
$$= \frac{1}{2}\,G\,[1 + (sin.\alpha)^2]$$

im Fuß A vertical abwärts. Aus dieser Verticalkraft und aus dem Horizontalschube H folgt nun für den Winkel δ, welchen die Mittelkraft R mit dem Horizonte einschließt:

$$tang.\delta = \frac{H}{V_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{sin.2\,\alpha}{1 + (sin.\alpha)^2}.$$

Führen wir die Tiefe $A\,C = b$ und die Höhe $B\,C = h$ ein, so erhalten wir:

$$H = \frac{b\,h}{b^2 + h^2}\cdot\frac{G}{2},$$

während wir beim Anlehnen des Sparrens, $H = \dfrac{b}{h}\cdot\dfrac{G}{2}$ gefunden haben.

Trägt jede Längeneinheit des Sparrens das Gewicht q, so hat man:

$$G = \sqrt{b^2 + h^2} . q$$

zu setzen, weshalb für den einen Fall:

$$H = \frac{bh}{2\sqrt{b^2 + h^2}} \cdot q$$

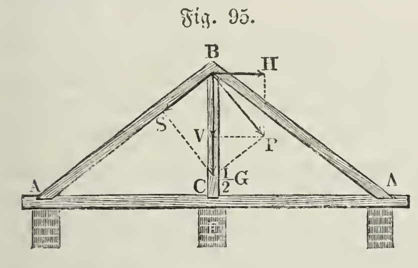
und für den anderen:

$$H = \frac{b\sqrt{b^2 + h^2}}{2h} \cdot q$$

folgt, und nun zu ersehen ist, daß bei dem Sparren mit Säule der Horizontalschub um so kleiner und dagegen bei Sparren ohne Säule, derselbe um so größer ausfällt, je niedriger das Dach oder Gespärre ist.

Damit die Säule BC von der Horizontalkraft H nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von hinten, z. B. durch eine Mauer, noch besonders zu unterstützen.

Fig. 95.



Dieselben Kraftverhältnisse kommen übrigens auch bei dem Lehrgespärre ABA, Figur 95, vor, wo zwei gegen einander gestellte Sparren durch eine Säule gemeinschaftlich unterstützt sind. Es nimmt auch hier die Säule die Normalkräfte P und $P = \frac{G}{2} \cos. \alpha$ auf, aus welchen die Verticalkraft:

$$V = 2P \cos. \alpha = G (\cos. \alpha)^2$$

resultirt, während in den Sparren die Schube S und $S = \frac{G}{2} \sin. \alpha$ zurückbleiben, aus welchen wieder die Horizontalschube

$$H \text{ und } H = S \cos. \alpha = \frac{G}{2} \sin. \alpha \cos. \alpha = \frac{G}{4} \sin. 2\alpha$$

hervorgehen.

Uebrigens braucht hier die Säule keine Seitenunterstützung, weil sich die Horizontalkräfte im Scheitel aufheben.

Beispiel. Bei dem Dache im Beispiele zu §. 52 war die Belastung eines Sparrens: $G = 2657{,}8$ Pfund, $b = 20$ und $h = 30$ Fuß, also $tang. \alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = 56^0 18' 36''$; es ist daher bei Anwendung einer Säule, der Horizontalschub:

$H = {}^{2657,8}/_4 \; \sin. 112^0 37' 12'' = 664{,}4 \; \sin. 67^0 22' 48'' = 613{,}3$ Pfund,

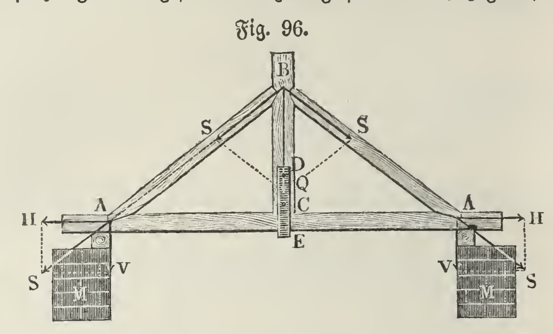
und der Verticaldruck, welchen die Säule aufnimmt:

$V = {}^{2657,8}/_2 \; (\cos. 56^0 18' 36'')^2 = 408{,}9$ Pfund.

Es trägt daher der Balken nur die Last $2657{,}8 - 408{,}9 = 2248{,}9$ Pfund.

§. 56 **Hängewerke.** Während in dem seither betrachteten Falle die Standsäule oder Stütze BC einen Theil des Sparrendruckes in sich aufnimmt und auf ihre eigene Unterstützung überträgt, wirkt die Hängesäule BC, Fig. 96, auf umge-

Fig. 96.



kehrte Weise; sie nimmt nämlich einen Theil der Belastung eines Balkens AA oder Tramens auf und trägt denselben vermittels der Sparren oder Streben AB und AB auf die Seitenmauern M und M über. Die Kraft Q, welche die Hängesäule mittels des Hängeeisens DE aufnimmt, ergiebt sich aus der Größe und Art der Belastung des Balkens AA. Ist die Last auf den Balken gleichmäßig vertheilt, so läßt sich annehmen, daß drei Achtel der Last von den Umfangsmauern unmittelbar, und die übrigen fünf Achtel von der Hängesäule aufgenommen werden; ist sie aber in der Mitte oder über dem Unterzugbalken concentrirt, so hat man auch anzunehmen, daß sie vollständig von der Hängesäule getragen werde. Die Kraft Q in der Hängesäule zerlegt sich in zwei nach den Sparrenrichtungen wirkende Seitenkräfte, wovon jede den Werth:

$$S = \frac{Q}{2 \sin. \alpha}$$

hat, und giebt den Horizontalschub:

$$H = S \cos. \alpha = \frac{Q}{2} \operatorname{cotang.} \alpha,$$

sowie den Verticalschub:

$$V = S \sin. \alpha = \frac{Q}{2}.$$

Mit Berücksichtigung der Sparrengewichte G, G erhält man:

$$S = \frac{Q + G}{2 \sin. \alpha}, \text{ daher:}$$

$$H = \left(\frac{Q + G}{2}\right) \operatorname{cotang.} \alpha, \text{ sowie:}$$

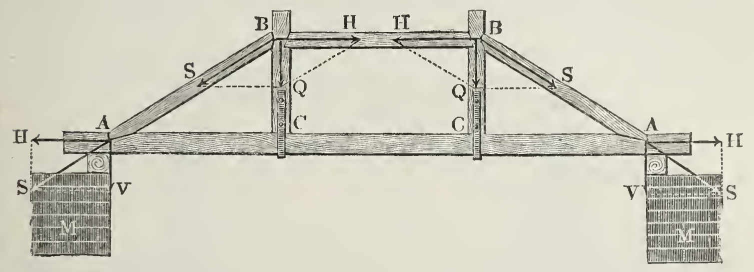
$$V = \frac{Q + G}{2},$$

und folglich die Verticalkraft im Stützpunkt A:

$$V_1 = V + \frac{G}{2} = \frac{1}{2} Q + G.$$

Bei langen Brücken und tiefen Gebäuden kommen zusammengesetzte Hängewerke mit zwei oder mehreren Hängesäulen vor. Fig. 97 repräsen-

Fig. 97.



tirt ein solches Hängewerk mit zwei Hängesäulen $B\,C$ und $B\,C$, und einem zwischen beiden befindlichen Spannriegel $B\,B$. Die Berechnung dieser Construction ist übrigens vollkommen in Uebereinstimmung mit der des einfachen Hängewerkes. Aus der Belastung Q einer Hängesäule folgt die Horizontalkraft im Spannriegel und in den Balkenenden A und A, $H = Q\, cotang.\, \alpha$, wenn α die Neigung der Streben $A\,B$ und $A\,B$ gegen den Horizont bezeichnet. Da dieser Winkel oft ziemlich klein ist, so hat man es dann mit einem bedeutenden Horizontalschube zu thun und daher Sorge zu tragen, daß den Streben an den Fußpunkten ein hinreichender Widerstand entgegengesetzt werde (vergl. §. 52). Uebrigens hat man den Streben und Spannriegeln Stärken zu geben, welche ein Biegen oder Zerbrechen derselben durch die Kräfte:

$$S = \frac{Q}{sin.\, \alpha} \text{ und } H = Q\, cotang.\, \alpha$$

nicht zulassen, und nach der Lehre von der rückwirkenden Festigkeit (Band I., §. 268 und 269) zu berechnen sind.

Die Kraft Q ist von der Belastung der Brücke abhängig. Ist die Last gleichförmig auf der Brücke vertheilt, so rechnen wir ziemlich sicher, wenn wir annehmen, jede Hängesäule trägt drei Achtel, und jede der beiden Seitenmauern ein Achtel der Belastung (s. §. 43).

Beispiel. Wenn das doppelte Hängewerk in Fig. 97 eine 60 Fuß lange und 12 Fuß breite Brücke zu tragen bestimmt ist, und angenommen wird, daß jeder Quadratfuß dieser Brücke sammt Belastung 50 Pfund wiegt, so ergiebt sich das Gewicht der Brücke

$$= 60 . 12 . 50 = 36000 \text{ Pfund},$$

und die Belastung der Hängesäulen

$$Q = \frac{3}{8} . 36000 = 13500;$$

daher bei $22^1/_2{}^0$ Neigung der Streben, der Horizontalschub

$$H = 13500 \; cotang. \; 22^1/_2{}^0 = 13500 . 2,4142 = 32592 \text{ Pfund},$$

und der Schub in einer Strebe

$$S = \frac{13500}{sin. \; 22^1/_2{}^0} = 35277 \text{ Pfund}.$$

Jedenfalls vertheilen sich diese Spannungen auf zwei Riegel und auf zwei Streben, die sich auf beiden Seiten der Brücke befinden; es ist also die von einem Spannriegel aufzunehmende Kraft 16296 Pfund, und die von einer Strebe 17638 Pfund. Nehmen wir nun (nach Band I., §. 212) den Festigkeitsmodul des Holzes = 6500 Pfund an und geben wir zwanzigfache Sicherheit, so erhalten wir für den nöthigen Querschnitt eines Spannriegels:

$$F = \frac{16296 . 20}{6500} = \frac{3259,2}{65} = 50 \text{ Quadratzoll},$$

und für eine Strebe:

$$F_1 = \frac{17638 . 20}{6500} = \frac{3527,7}{65} = 54,3 \text{ Quadratzoll}.$$

Zusammengesetztere Hängewerke, wie die Figuren 98 und 99 vor Augen führen, lassen sich leicht nach dem Obigen berechnen. In beiden Fällen läßt sich nach §. 43 annehmen, daß jede der äußeren Hängesäulen B, B, neun, und jede der inneren Säulen C, C, acht Vierzigstel der ganzen Belastung tragen und die übrigen sechs Vierzigstel zu gleichen Theilen von den Seitenmauern unmittelbar aufgenommen werden. Bei der letzteren Construction ist die Neigung der einen Strebe nicht willkürlich, sondern von der Neigung der anderen abhängig. Ist Q die Kraft und α die Neigung der Strebe BC, so wie Q_1 die Kraft und α_1 die Neigung der Strebe AB, so hat man die Horizontalspannung:

Fig. 98.

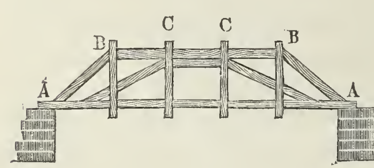
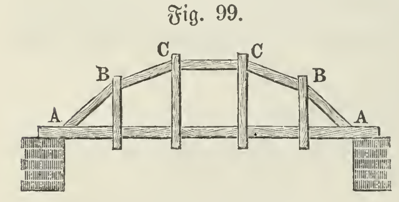


Fig. 99.



$$H = Q . \; cotang. \; \alpha = (Q + Q_1) \; cotang. \; \alpha_1$$

daher:

$$tang. \; \alpha_1 = \frac{Q + Q_1}{Q} \; tang. \; \alpha.$$

§. 57. **Sprengwerke.** Während die Hängewerke einen Boden oder eine Brücke von oben unterstützen, dienen die sogenannten Sprengwerke dazu, eine Unterstützung von unten zu bewirken. Die Vertheilung des Druckes erfolgt übrigens bei den Sprengwerken genau so wie bei den Hängewerken. Bei dem ein=

fachen Sprengwerk in Fig. 100 ergiebt sich aus der Verticalkraft Q in der Mitte C der Brücke $A A$ der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2}\, Q\; cotang.\, \alpha$$

und die Spannung der Strebe $B C$:

$$S = \frac{1}{2}\, \frac{Q}{sin.\, \alpha},$$

wenn α die Neigung der Strebe gegen den Horizont bezeichnet.

Fig. 100.

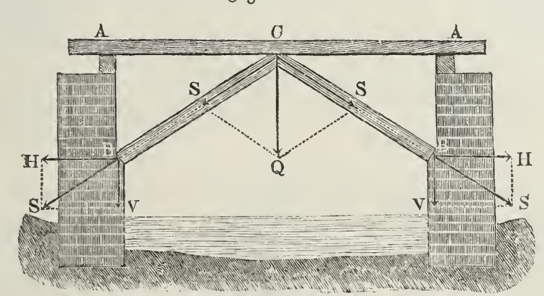
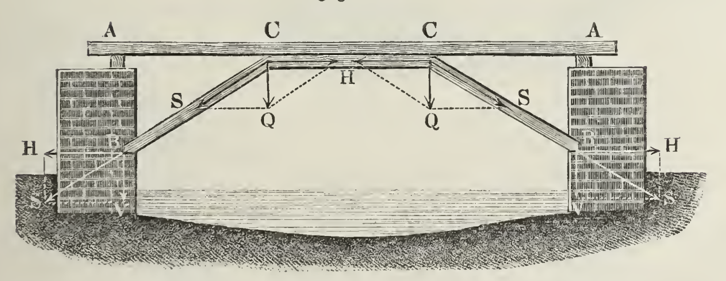


Fig. 101.



Bei dem Sprengwerke mit Spannriegel, Fig. 101, sind die Kräfte dieselben, nur läßt sich hier $Q = \frac{3}{8}$ der ganzen Belastung setzen, während dort für Q, $\frac{5}{8}$ derselben anzunehmen ist. Ist das Sprengwerk doppelt, wie Fig. 102 vor Augen führt, so hat man vier Streben und es läßt sich nun setzen, daß jede reichlich ein Fünftel der ganzen Belastung G trägt, also

Fig. 102.



$$Q = \frac{1}{5}\; G \text{ ist.}$$

Um das Biegen der längeren Streben zu verhüten, bringt man noch sogenannte Zangen AD, AD an, zumal wenn die Zahl der Streben noch größer ist.

Die Vertheilung des Druckes bei einer aus ungleichschenkeligen Spreng-

werken bestehenden Construction, Fig. 103, ist genau so wie bei dem Sprengwerke Fig. 102 anzunehmen, nur sind hier die Bänder oder Zangen CD, $C_1 D_1 \ldots$ um so nöthiger, da die Streben zum Theil sehr lang ausfallen. Uebrigens ist es sicherer, wenn man die Gewichte der sämmtlichen Constructionstheile mit in Rechnung zieht, indem man die Hälfte eines jeden Theiles an seinen Enden niederziehend annimmt.

Fig. 103.

Haben je zwei gegen einander gestellte Streben BC und $B_1 C$, Fig. 104, verschiedene Neigungswinkel α und α_1 gegen den Horizont, so lassen sich die aus dem Verticaldrucke Q erwachsenden Spannungen S und S_1 der Streben durch die bekannten Proportionen:

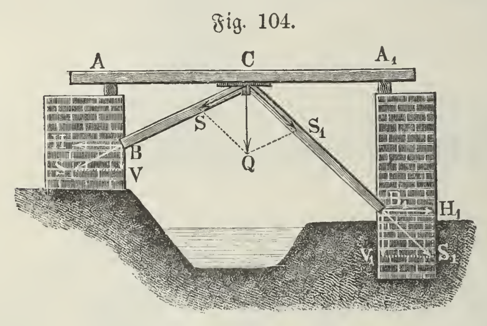


Fig. 104.

$$\frac{S}{Q} = \frac{sin. SQC}{sin. CSQ}$$

und

$$\frac{S_1}{Q} = \frac{sin. S_1 QC}{sin. CS_1 Q}$$

finden; es ist hiernach:

$$S = \frac{Q\ cos.\ \alpha_1}{sin.\ (\alpha + \alpha_1)} \text{ und } S_1 = \frac{Q\ cos.\ \alpha}{sin.(\alpha + \alpha_1)},$$

und die Horizontalspannung beider Streben:

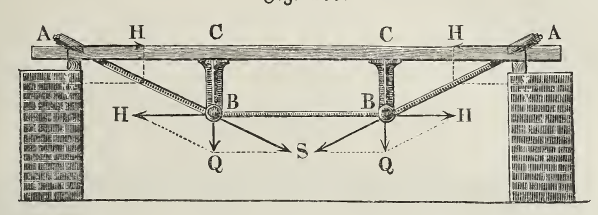
$$H = S\ cos.\ \alpha = S_1\ cos.\ \alpha_1 = \frac{Q\ cos.\ \alpha\ cos.\ \alpha_1}{sin.\ (\alpha + \alpha_1)} = \frac{Q}{tang.\ \alpha + tang.\ \alpha_1}$$

(vergl. §. 54).

§. 58 **Häng- und Sprengwerke.** Bei den im Vorstehenden abgehandelten Häng- und Sprengwerken erfolgt die Uebertragung einer Balkenlast auf die Enden der Balken oder auf die Unterstützungsmauern derselben durch Druck, so daß auch die diesen Druck aufzunehmenden Sparren oder Streben durch ihre Druckfestigkeit widerstehen müssen. Man kann aber auch die umgekehrte Anordnung treffen, nämlich den Druck durch einen Zug ersetzen, wenn man diese Uebertragung einer Kraft statt der hölzernen oder gußeisernen Streben, durch schmiedeeiserne Zugstangen oder Spannschienen ersetzt, welche dann durch ihre absolute Festigkeit widerstehen müssen. Es entstehen dadurch gewissermaßen umgekehrte Häng- und Sprengwerke. In Fig. 105 ist z. B. $ABBA$ ein solches umgekehrtes Hängewerk, welches seiner Stellung nach zu den

Sprengwerken gehört, da es den Balken AA von unten unterstützt. Ist auch hier α der Neigungswinkel CAB der Zugstangen AB, AB gegen

Fig. 105.



den Horizont, und Q die Kraft, mit welcher jede gußeiserne Säule BC, BC den Balken unterstützt, so hat man die durch Q bewirkte Zugkraft einer solchen Zugstange:

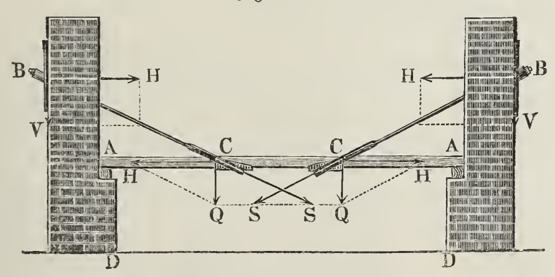
$$S = \frac{Q}{sin.\, \alpha},$$

und dagegen die Horizontalkraft, mit welcher die Spannschiene BB zwischen den Säulen BC, BC ausgedehnt, und folglich der Balken selbst comprimirt wird:

$$H = Q\; cotang.\, \alpha.$$

Bei dem Hängewerke $BCCB$, Fig, 106, welches aus zwei einfachen Zugbändern BC, BC besteht, wodurch der Träger AA in zwei Zwischen-

Fig. 106.

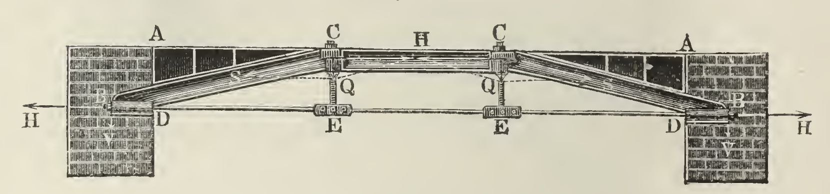


punkten C, C unterstützt wird, kommen genau dieselben Kraftzerlegungen vor, wobei das die Spannschiene ersetzende Balkenstück CC mit der Kraft $H = Q\, cotang.\, \alpha$ ausgedehnt wird. Der Zug $S = \frac{Q}{sin.\, \alpha}$ der Zugbänder ist aber hier nicht auf die Balkenenden, sondern auf die Unterstützungsmauern BD, BD übergetragen, welches allerdings auch bei der ersteren Construction geschehen kann. In diesem Falle ist natürlich die Mauer so dick zu machen, daß sie durch ihr Gewicht sowohl dem Ausgleiten als dem Kippen widerstehen kann. Die Wirkungen der Spannkräfte H, H auf einen belasteten Balken sind nach Band I., §. 272 u. s. w. zu beurtheilen, und

die Wirkungen dieser Kräfte auf die Unterstützungen sind dieselben wie die eines Gewölbes auf seine Widerlager; es lassen sich folglich auch die Stärken dieser Mauern wie die der Widerlagsmauern bei Gewölben (s. §. 27) ermitteln.

Ein gänzlich eisernes Sprengwerk ist in Fig. 107 abgebildet. Es sind hier BC, BC die beiden gußeisernen Streben, zwischen welchen der

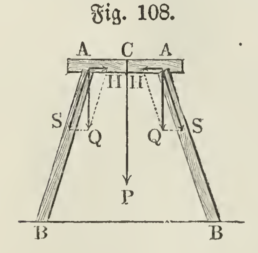
Fig. 107.



gußeiserne Spannriegel CC gespannt ist, und es ist BB eine lange schmiedeeiserne Zugstange, welche den Horizontalschub $H = Q\, cotang.\, \alpha$ in sich aufnimmt, der außerdem von den Widerlagsmauern aufgenommen werden müßte. Die Zugstange geht durch die Muffen BD, BD, welche die Enden der Streben ausmachen, und lassen sich durch die Schraubenmuttern B, B anspannen. Um dem Biegen dieser Stangen durch ihre eigene Schwere entgegenzuwirken, setzt man dieselben aus mehreren Theilen DE, EE, DE zusammen und hängt sie mittels schmiedeeiserner Hängestäbe CE, CE an den Enden des Spannriegels CC auf.

§. 59 **Säulen und Streben.** Da die Tragkraft eines Balkens der Länge desselben umgekehrt proportional ist, so muß man die letztere so viel wie möglich herabzuziehen suchen. Dies kann z. B. geschehen, wenn man den Balken AA, Fig. 108, auf schiefstehende Säulen AB, AB legt. Die

Fig. 108.



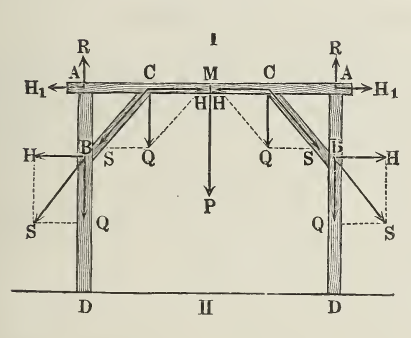
Kraft $Q = \frac{P}{2}$, mit welcher die Last P des ganzen Balkens unmittelbar über einer solchen Säule vertical abwärts wirkt, zerlegt sich in eine Kraft S, welche als Axenschub auf die Säule übergeht, und in einen Horizontalschub, welchen der Balken aufnimmt, indem er von derselben zusammengedrückt wird. Ist α der Neigungswinkel der Säule gegen den Horizont, so folgt wie bei einer Strebe:

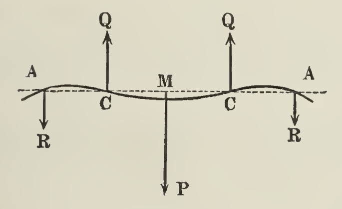
$$S = \frac{Q}{sin.\, \alpha} = \frac{P}{2\, sin.\, \alpha} \text{ und } H = Q\, cotang.\, \alpha = \frac{P}{2}\, cotang.\, \alpha.$$

Sind, wie in Fig. 109, I., die beiden Säulen AD, AD zwar vertical, ist aber der Balken außerdem noch durch zwei Streben BC, BC unter-

stützt, so können wir annehmen, daß die neutrale Axe desselben die in Figur 109, II., dargestellte Curve $ACMCA$ bilde.

Fig. 109.





Wir können uns hier vorstellen, daß der Balken AA aus zwei Hälften AM, AM bestehe, welche in der Mitte M festgehalten und durch zwei Kräfte R und Q nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. Da hierbei die Angriffspunkte A und C unverändert bleiben, so ist die Bogenhöhe des Balkenstückes AC, $=0$, und folglich nach Band I., §. 220, wenn man dort $l_1 = l$, sowie statt P_1, $-Q$ und statt P, R einsetzt:

$$R + \tfrac{1}{2}(R - Q) + \frac{R}{3} = 0,$$

so daß nun $\tfrac{11}{6} R = \frac{Q}{2}$, sowie $Q = \tfrac{11}{3} R$ folgt.

Nun ist aber $P + 2R - 2Q = 0$, daher auch $P + 2R - \tfrac{22}{3} R = 0$, und es ergiebt sich:

$$R = \tfrac{3}{16} P, \text{ sowie } Q = \tfrac{11}{3} \cdot \tfrac{3}{16} P = \tfrac{11}{16} P.$$

Es wirkt also in jeder Strebe die Kraft $\tfrac{11}{16} P$ abwärts, so daß der entsprechende Axenschub:

$$S = \tfrac{11}{16} \frac{P}{sin.\,\alpha},$$

und die Horizontalspannung:

$$H = \tfrac{11}{16} P\, cotang.\,\alpha$$

folgt, wofern α den Neigungswinkel einer Strebe gegen den Horizont bezeichnet.

Die Kraft S zerlegt sich in der Säule AD wieder in eine Verticalkraft

$$Q = \tfrac{11}{16} P,$$

und in die Horizontalkraft:

$$H = \tfrac{11}{16} P\; cotang.\,\alpha.$$

Da die Kraft $R = \tfrac{3}{16} P$ des Balkens auf die Säule von unten nach oben wirkt, so muß natürlich das Balkenende mit dem Säulenkopfe z. B.

durch ein eisernes Band fest verbunden werden. Das Stück AB der Säule AD wird hiernach durch die Kraft $R = {}^3/_{16}\, P$ ausgedehnt, wogegen das Stück BD desselben die Compressionskraft $Q - R = \frac{P}{2}$ auszuhalten hat. Außerdem muß natürlich auch die Säule die Biegungskraft

$$H = {}^{11}/_{16}\, P \, cotang.\, \alpha \text{ aushalten.}$$

Ist noch l die Länge AD der ganzen Säule und l_1 die Länge BD des Säulenstückes unterhalb der Streben, so folgt die Horizontalkraft, mit welcher die Säule auf den Balken wirkt,

$$H_1 = \frac{l_1}{l} H = {}^{11}/_{16} \cdot \frac{l_1}{l} \, P \, cotang.\, \alpha.$$

Es wird also das Balkenstück AC durch diese Kraft H_1 ausgedehnt, und dagegen das mittlere Balkenstück CC durch die Kraft

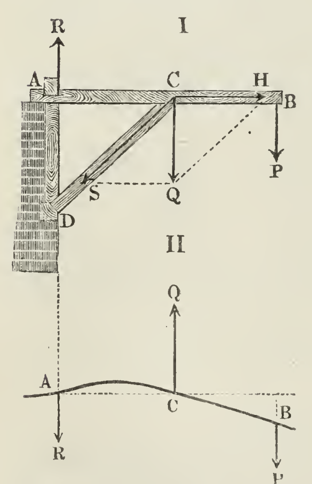
$$H - H_1 = {}^{11}/_{16} \left(\frac{l - l_1}{l}\right) P \, cotang.\, \alpha$$

comprimirt, übrigens aber auch noch durch die in M angreifende Kraft P gebogen. Man hat daher nicht allein die Stärke einer Säule, sondern auch die des Balkens in Hinsicht auf zusammengesetzte Festigkeit zu berechnen.

§. 60 **Einseitig unterstützte Träger.** Man hat die Balken oder Träger besonders dann durch Streben und Bänder zu unterstützen, wenn sie nur an einem Ende befestigt sind.

Der mit einem Ende A, Fig. 110, von oben unterstützte Balken AB trage eine am anderen Ende B angreifende Last P und sei darin durch eine Strebe CD unterstützt. Es sei l die ganze Länge AB, l_1 die Länge AC des Balkenstückes zwischen den beiden Stützpunkten A und C, und α der Neigungswinkel ACD der Strebe gegen den Horizont. Sehen wir den Stützpunkt A als Drehungspunkt eines Hebels an, dessen Kräfte P und Q an den Hebelarmen l und l_1 sich das Gleichgewicht halten, so ist $Ql_1 = Pl$ zu setzen, und es folgt der Verticaldruck im Stützpunkte C:

Fig. 110.



$$Q = \frac{l}{l_1} P,$$

und dagegen der Druck im Stützpunkte A:

$$R = Q - P = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) P.$$

Der Druck Q zerlegt sich in die Kraft

$$S = \frac{Q}{sin.\,\alpha} = \frac{l\,P}{l_1\;sin.\,\alpha},$$

welche die Strebe nach der Mauer führt, und in den Balkenschub:

$$H = Q\;cotang.\,\alpha = \frac{l}{l_1}\;P\;cotang.\,\alpha,$$

welcher den Balken ausdehnt und aus der Mauer herauszuziehen sucht.

Ist dagegen der Balken am Ende A fest eingemauert, so können wir nach Band I., §. 220, wenn wir dort statt l, $l - l_1$, und statt P_1, Q einführen, da hier die Bogenhöhe a_1 des Balkenstückes $A\,C$, Fig. 110, II., Null ist, setzen:

$$\tfrac{1}{2} P\,(l - l_1)\,l_1^2 + \tfrac{1}{3}\,(P - Q)\,l_1^3 = 0,$$

oder

$$P\,(3\,l - l_1) = 2\,Q l_1, \text{ woraus}$$

$$Q = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P, \text{ und}$$

$$R = Q - P = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P - P = 3\left(\frac{l - l_1}{2\,l_1}\right) P \text{ folgt.}$$

Wenn z. B. die Strebe in der Mitte des Balkens angreift, also $l_1 = \tfrac{1}{2}\,l$ ist, so ergiebt sich:

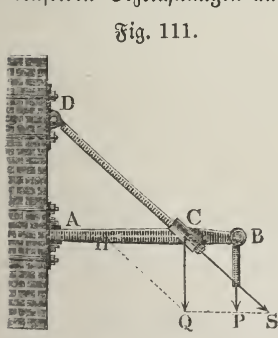
$$Q = \tfrac{5}{2}\;P \text{ und } R = \tfrac{3}{2}\;P,$$

während sich nach der obigen Voraussetzung

$$Q = \frac{l}{l_1}\;P = 2\,P \text{ und } R = P \text{ setzen läßt.}$$

Ganz auf dieselbe Weise ist auch der Fall zu behandeln, wenn der Balken AB, Fig. 111, durch eine Hängestange CD unterstützt wird. Es ist bei denselben Bezeichnungen auch hier die Spannung der Hängestange:

Fig. 111.



$$S = \frac{Q}{sin.\,\alpha} = \frac{l\,P}{l_1\,sin.\,\alpha},$$

und die Kraft, mit welcher der Balken zusammengedrückt und gegen die Mauer gepreßt wird:

$$H = Q\,cotang.\,\alpha = \frac{l}{l_1}\;P\,cotang.\,\alpha.$$

Nach der zweiten Annahme ist:

$$S = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right)\frac{P}{sin.\,\alpha}$$

und

$$H = \left(\frac{3\,l - l_1}{2\,l_1}\right) P\,cotang.\,\alpha.$$

Während das Balkenstück BC der Kraft durch seine Biegungsfestigkeit der Kraft P widerstehen muß, hat das Balkenstück AC die Kraft:

$$R = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) P,$$

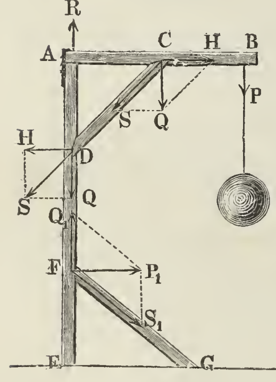
oder, nach der letzteren Annahme, die Kraft:

$$R = \frac{3(l - l_1)}{2 l_1} P,$$

durch seine Biegungs- sowie die Kraft H durch seine Druckfestigkeit aufzunehmen.

Ist der Balken AB, Fig. 112, auf dem Kopfe einer Säule AE befestigt, so hat diese in dem Theile AD der Ausdehnungskraft

Fig. 112.



$$R = \frac{l - l_1}{l_1} P$$

und in dem Theile DE der Compressionskraft P, in beiden aber überdies noch dem Biegungsmomente Pl zu widerstehen.

Ist endlich die Säule am Fuße mit einer Strebe FG ausgerüstet, so nimmt diese eine Kraft S_1 auf, welche sich aus dem Neigungswinkel $EGF = \beta$ und der Höhe $EF = a$ des Angriffspunktes F über der Sohle wie folgt bestimmen läßt. Dem Umdrehungsmoment Pl der Kraft P in Hinsicht auf E wird durch ein Umdrehungsmoment $P_1 . \overline{EF} = P_1 a$ das Gleichgewicht gehalten; es ist folglich die Horizontal- oder Normalkraft in F:

$$P_1 = \frac{Pl}{a},$$

und es sind daher die Componenten derselben, nach der Axe der Säule und der der Fußstrebe gerichtet:

$$Q_1 = P_1 \; tang. \beta = \frac{Pl}{a} \; tang. \beta$$

und

$$S_1 = \frac{P_1}{cosin. \beta} = \frac{Pl}{a \; cosin. \beta}.$$

Hiernach wird also das Stück EF der Säule entweder durch die Kraft $P - Q_1 = P\left(1 - \frac{l}{a} \; tang. \beta\right)$ comprimirt, oder mit der Kraft $Q_1 - P = P\left(\frac{l}{a} \; tang. \beta - 1\right)$ ausgedehnt, und zwar ersteres, wenn $a \; cotang. \beta > l$ ist, also der Fußpunkt G der Fußstrebe über dem Auf-

hängepunkte B hinausliegt, und letzteres, wenn $a\ cotang.\ \beta < l$, also $EG < AB$ ist.

Beispiel. Bei einem hölzernen Galgengerüste, Fig. 112, betrage die Last $P = 1500$ Pfund, die Armlänge $AB = l = 12$ Fuß, die Neigung beider Streben $\alpha = \beta = 45^0$, und die Länge einer jeden $8^1/_2$ Fuß; man sucht die nöthigen Stärken dieser Construction. Die Horizontal- und Verticalprojectionen der Streben sind $l_1 = a = 8{,}5\ sin.\ 45^0 = 6$ Fuß, folglich ist die Spannkraft der Strebe CD:

$$S = \frac{l P}{l_1\ sin.\ \alpha} = \frac{12 . 1500}{6\, sin. 45^0} = \frac{3000}{0{,}7071} = 4243 \text{ Pfund};$$

und daher der nöthige Querschnitt, wenn man den Tragmodul $T = 250$ Pfund annimmt:

$$F = \frac{S}{T} = \frac{4243}{250} = 17 \text{ Quadratzoll.}$$

Für den Arm oder Balken haben wir nach Band I., §. 272, wenn wir hier $T = 500$ Pfund annehmen,

$$b h = \left(\frac{l}{l_1}\ cotang.\, \alpha + \frac{6\,(l - l_1)}{h}\right) \frac{P}{T} = \left(2 + \frac{6 . 72}{h}\right) \cdot \frac{1500}{500},$$

d. i.
$$b h = 6 + \frac{1296}{h},$$

und wenn wir die Höhe h der doppelten Breite $2\,b$ des Balkens gleich nehmen:

$$2 b^2 = 6 + \frac{648}{b} \text{ oder } b^3 - 3 b = 324, \text{ woraus nun}$$

$$b = \sqrt[3]{324 + 3\,b}, \text{ zunächst annähernd } b = 7, \text{ und dann genauer}$$

$$b = \sqrt[3]{374 + 21} = \sqrt[3]{345} = 7{,}01 \text{ Zoll, und } h = 14{,}02 \text{ Zoll folgt.}$$

Für die Säule, namentlich für deren Mittelstück DF derselben hat man nach §. 271 des ersten Bandes, wenn man $T = 500$ Pfund annimmt:

$$b_1 h_1 = \left(1 + \frac{6\,l}{h_1}\right) \frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6 . 144}{h_1}\right) \cdot \frac{1500}{500} = 3 + \frac{2592}{h_1},$$

und macht man hier die Dicke oder Dimension h_1 in der Ebene durch den Balken um die Hälfte größer als die Breite b_1, so ist

$$^3/_2\, b_1^2 = 3 + \frac{1728}{b_1} \text{ oder } b_1^3 = 2\,b_1 + 1152,$$

weshalb $b_1 = \sqrt[3]{1152 + 2\,b_1}$, annähernd $= 10{,}5$, dann genauer

$$b_1 = \sqrt[3]{1152 + 21} = \sqrt[3]{1173} = 10{,}55 \text{ Zoll},$$

und daher $h_1 = {}^3/_2\, b_1 = 15{,}83$ Zoll sich ergiebt.

Für den oberen Theil AD der Säule, welcher statt der Compressionskraft P eine Ausdehnungskraft $R = \left(\frac{l - l_1}{l_1}\right) P$ auszuhalten hat, ist der Querschnitt:

$$b_1 h_1 = \left(\frac{l - l_1}{l_1} + \frac{6\,l}{h_1}\right) \frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6 . 144}{h_1}\right) . 3 = 3 + \frac{2592}{h_1},$$

genau der vorige, und für den Theil EF, welcher die Ausdehnungskraft

$$Q_1 - P = P\left(\frac{l}{a}\ tang.\, \beta - 1\right) = 1500\ (2 - 1) = 1500 \text{ Pfund, und}$$

das Moment $P_1\, a = P l$ aufzunehmen hat, ergiebt sich gleichfalls

$$b_1 h_1 = \frac{Q_1 - P}{T} + \frac{6\,l}{h} \cdot \frac{P}{T} = \left(1 + \frac{6 \,.\, 144}{h_1}\right) \frac{P}{T} = 3 + \frac{2592}{h_1}.$$

Es ist also der erforderliche Querschnitt der ganzen Säule AE:

$$F = b_1 h_1 = 10{,}55 \,.\, 15{,}83 = 167 \text{ Quadratzoll.}$$

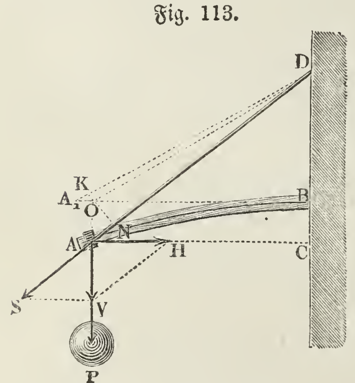
Die Fußspreize FG erleidet endlich den Axendruck

$$S = \frac{Pl}{a \; cosin.\, \beta} = \frac{12 \,.\, 1500}{6 \; cosin.\, 45^0} = 4243 \text{ Pfund,}$$

wie die Balkenstrebe, weshalb ihr auch derselbe Querschnitt von 17 Quadratzoll zu geben ist.

§. 61 **Ausdehnung der Zugstangen.** Wenn man die durch Streben oder Zugstangen unterstützten Balken nicht als starre Körper ansieht, sondern auch die Biegung derselben mit in Betracht zieht, wie wir es oben (§. 49) bei den durch Säulen unterstützten Balken gethan haben, so muß natürlich auch die Kraftzerlegung an denselben eine Aenderung erleiden. Da wir unter der letzten Voraussetzung Formeln zur Bestimmung der Kräfte eines auf genannte Weise unterstützten Balkens gefunden haben, so können wir dann noch sehen, ob die im Obigen, bei Annahme vollkommen starrer Körper gefundenen Formeln, in der Praxis noch ausreichen. Der einfachste Fall einer solchen Balkenunterstützung besteht in einem an einem Ende B eingemauerten und am anderen Ende A von einem Gewichte P ergriffenen Balken AB, Fig. 113, mit einer Zugstange AD. Vor Allem entsteht hier die Frage, welchen Theil der Kraft P am Ende des Balkens nimmt diese Stange auf und welchen Theil hat der Balken selbst zu tragen? Es sei P das angehängte Gewicht, S die Spannung der Zugstange AD, l die Länge AB des Balkens, $F = bh$ der Querschnitt desselben, ferner F_1 der Querschnitt der Stange und α der Neigungswinkel CAD derselben gegen den Horizont, endlich seien E der Elasticitätsmodul des Balkens, sowie E_1 der der Stange und W das Biegungsmoment des ersteren. Die Spannkraft S zerlegt sich in die Verticalkraft

Fig. 113.



$$V = S \; sin.\, \alpha$$

und in die Horizontalkraft

$$H = S \; cos.\, \alpha;$$

es wird daher der Balken durch die Kraft

$$P - V = P - S \sin.\alpha$$

gebogen und durch die Kraft

$$H = S \cos.\alpha$$

zusammengedrückt. Wenn nun der ursprünglich gerade Balken $A_1 B$ durch diese Kräfte die Bogengestalt AB annimmt, so ist für dieselbe die Höhe:

$$BC = OA = a = \frac{(P - S \sin.\alpha)\, l^3}{3\, WE} \text{ (s. Band I., §. 217),}$$

und die Verkürzung:

$$A_1 O = b = \frac{H}{EF} \cdot l = \frac{S l \cos.\alpha}{EF} \text{ (s. Band I., §. 204).}$$

Projicirt man die Höhe AO auf die Richtung AD der Zugstange, so erhält man in der Projection:

$$AN = AO \sin.AON = AO \sin.BOD = a \sin.\alpha$$

die der Biegung entsprechende Verlängerung der Zugstange, und projicirt man die Verkürzung $A_1 O = b$ des Balkens auf die Richtung $A_1 D$, so ergiebt sich in der Projection $A_1 K$ die entsprechende Verlängerung der Stange, nämlich:

$$A_1 K = A_1 O \cos.BA_1 D = b \cos.\alpha.$$

Es folgt daher die ganze Ausdehnung der Zugstange

$$\lambda = AN - A_1 K = a \sin.\alpha - b \cos.\alpha.$$

Nun ist aber die Spannung:

$$= \frac{\lambda}{AD} E_1 F_1 = \frac{\lambda \cos.\alpha}{l} \cdot E_1 F_1 = \left(\frac{a \sin.\alpha - b \cos.\alpha}{l}\right) \cos.\alpha \,.\, E_1 F_1$$

$$= \left(\frac{(P - S \sin.\alpha)\, l^2 \sin.\alpha}{3\, WE} - \frac{S \cos.\alpha^2}{FE}\right) \cos.\alpha \,.\, E_1 F_1,$$

daher folgt:

$$S \left(\frac{1}{E_1 F_1 \cos.\alpha} + \frac{\cos.\alpha^2}{EF} + \frac{l^2 \sin.\alpha^2}{3\, WE}\right) = \frac{P l^2 \sin.\alpha}{3\, WE},$$

also die gesuchte Spannkraft des Zugbandes

$$S = \frac{P l^2 \sin.\alpha}{3\, WE \left(\frac{1}{E_1 F_1 \cos.\alpha} + \frac{\cos.\alpha^2}{EF}\right) + l^2 \sin.\alpha^2}$$

oder, wenn man $W = \frac{b h^3}{12}$ und $F = b h$ einführt:

$$1)\quad S = \frac{P l^2 \sin.\alpha}{{}^1/_4 \frac{b h^3 E}{E_1 F_1 \cos.\alpha} + {}^1/_4 h^2 \cos.\alpha^2 + l^2 \sin.\alpha^2}.$$

Annähernd:

$$S = \frac{P}{sin.\,\alpha}\left[1 - {}^1/_4\left(\frac{F\,E}{F_1\,E_1\,cos.\,\alpha} + cos.\,\alpha^2\right)\frac{h^2}{l^2\,sin.\,\alpha^2}\right].$$

Die Querschnitte F und F_1 des Balkens und der Schiene ergeben sich nun mittels der entsprechenden Tragmodel T und T_1 durch die Formeln:

$$T = \frac{S\,cos.\,\alpha}{F} + \frac{(P - S\,sin.\,\alpha)\,h\,l}{2\,W} \text{ und } T_1 = \frac{S}{F_1},$$

und zwar der Querschnitt des Balkens:

$$2)\quad F = b\,h = \frac{S\,cos.\,\alpha}{T} + \frac{6\,(P - S\,sin.\,\alpha)\,l}{T\,h}$$

und der Querschnitt der Zugstange:

$$3)\quad F_1 = \frac{S}{T_1}.$$

Wenn α einen mittleren Werth hat, also sich weder 0^0 noch 90^0 sehr nähert, und wenn das Querschnittsverhältniß $\frac{F}{F_1} = \frac{b\,h}{F_1}$ nicht sehr groß ist, so kann man in der Formel (1) nicht nur das Glied ${}^1/_4\,h^2\,cos.\,\alpha^2$, sondern auch das Glied ${}^1/_4\,\frac{b\,h^3\,E}{E_1\,F_1\,cos.\,\alpha}$ vernachlässigen, weshalb für die meisten Fälle $S = \frac{P}{sin.\,\alpha}$ zu setzen und anzunehmen ist, daß die Zugstange die ganze Last P trägt, und der Balken nur in der Richtung seiner Axe mit der Kraft

$$H = S\,cos.\,\alpha = P\,cotang.\,\alpha$$

zusammengedrückt wird.

Wird der Balken auf gleiche Weise durch eine Strebe von unten unterstützt, so gelten dieselben Formeln, nur ist dann S eine Druck- und H eine Zugkraft, folglich $\lambda = a\,sin.\,\alpha - b\,cos.\,\alpha$ eine Verkürzung, und in $F_1 = \frac{S}{T_1}$, statt T_1 der Tragmodul für Druckfestigkeit einzuführen.

Beispiel. Wenn ein Balken AB, Fig. 113, von 100 Zoll Länge eine Last P von 5000 Pfund tragen und hierbei von einer schmiedeeisernen Zugstange oder einer sogenannten Helfschiene AD unterstützt werden soll, deren Axe um 25 Grad von der Axe des Balkens abweicht, welchen Querschnitt hat man dieser Schiene und dem Balken zu geben? Es ist hier:

$$S = \frac{P}{sin.\,\alpha} = \frac{5000}{sin.\,25^0} = \frac{5000}{0{,}4226} = 11831 \text{ Pfund},$$

und daher der nöthige Querschnitt der Zugstange, $F_1 = \frac{S}{T_1}$, also für $T_1 = 5000$ Pfd.:

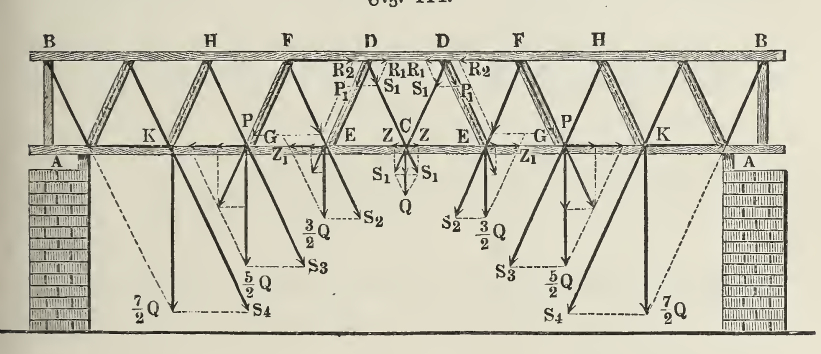
$$\frac{S}{T_1} = \frac{11831}{5000} = 2{,}366 \text{ Quadratzoll},$$

dagegen der Querschnitt des Balkens, wenn man $T = 250$ Pfund einführt:

$$F = \frac{H}{T} = \frac{P\, cotang.\, \alpha}{T} = \frac{5000\, .\, cotang. 25^0}{250} = 42{,}8 \text{ Quadratzoll.}$$

Fachwerksträger. Die sogenannten Fachwerksträger sind im Wesentlichsten zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerke. In der einfachsten Gestalt besteht ein solcher Balken aus zwei einfachen Balken AA, BB, Fig. 114, welche durch Streben, wie DE, FG u. s. w., und durch Zug- §. 62

Fig. 114.



stangen CD, EF u. s. w. mit einander verbunden sind. Die Art und Weise, wie ein solcher Balken dem Biegen und Zerbrechen Widerstand leistet, ist aus Folgendem zu ersehen. Denken wir uns den Balken der Länge nach in $2n$ gleiche Theile getheilt, und nehmen wir an, daß in jedem der $2n - 1$ Theilpunkte, sowie in jedem der beiden Endpunkte A, A eine gleiche Last Q niederziehe, und folglich die ganze Balkenlast $(2n - 1)\, Q$ sei. Die Last Q im Mittelpunkte C zerlegt sich nach den Richtungen der beiden Zugstangen CD, CD, deren Neigung gegen den Horizont $= \alpha$ sein möge, in die Zugkräfte

$$S_1 = \frac{Q}{2\, sin.\, \alpha} \text{ und } S_1 = \frac{Q}{2\, sin.\, \alpha}.$$

Diese Kräfte pflanzen sich bis D, D in dem oberen Balken BB fort und zerlegen sich hier in eine Druckkraft R_1 nach der Axe des Balkens BB und in eine Druckkraft P_1 in der Richtung der Strebe DE. Ist β der Neigungswinkel einer solchen Strebe gegen die Balkenaxe, so hat man:

$$\frac{R_1}{S_1} = \frac{sin.(\alpha + \beta)}{sin.\, \beta}, \text{ daher } R_1 = \frac{S_1\, sin.(\alpha + \beta)}{sin.\, \beta} = \frac{Q}{2}\, \frac{sin.(\alpha + \beta)}{sin.\, \alpha\, sin.\, \beta},$$

und

$$\frac{P_1}{S_1} = \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \beta}, \text{ daher } P_1 = \frac{S_1\, sin.\, \alpha}{sin.\, \beta} = \frac{Q}{2\, sin.\, \beta}.$$

Die Kraft P_1, welche sich durch die Strebe hindurch bis zum Punkte E in dem unteren Balken fortpflanzt, zerlegt sich hier in eine Verticalkraft

$$V = P_1 \sin.\beta = S_1 \sin.\alpha = \frac{Q}{2}$$

und in eine Horizontalkraft:

$$H = P_1 \cos.\beta = S_1 \sin.\alpha \,\mathrm{cotang.}\,\beta = \frac{Q}{2} \mathrm{cotang.}\,\beta.$$

Die Verticalkraft $V = \frac{Q}{2}$ vereinigt sich mit der in E angehängten Last Q, es zieht daher hier im Ganzen $^3/_2\ Q$ senkrecht nieder, und es ergiebt sich durch Zerlegung dieser Kraft die Spannung der Zugstange EF:

$$S_2 = {^3/_2}\, \frac{Q}{\sin.\alpha},$$

sowie die Zugkraft in der Richtung des Balkens AA:

$$= \frac{3\,Q}{2} \mathrm{cotang.}\,\alpha,$$

also, wenn man noch H hinzufügt, die ganze Zugkraft:

$$Z_1 = {^3/_2}\ Q \,\mathrm{cotang.}\,\alpha + \frac{Q}{2} \mathrm{cotang.}\,\beta.$$

Die Zugkraft S_2 pflanzt sich durch die Zugstange EF bis F im oberen Balken fort, und zerlegt sich hier wieder in eine Druckkraft nach der Balkenaxe:

$$R_2 = \frac{S_2 \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\beta} = {^3/_2} \frac{Q \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta},$$

und in eine Druckkraft nach der Strebe FG:

$$P_2 = \frac{S_2 \sin.\alpha}{\sin.\beta} = {^3/_2}\, \frac{Q}{\sin.\beta}.$$

Wenn man auf diese Weise, von der Mitte nach den Balkenenden fortschreitend, die übrigen Spannkräfte ermittelt, so findet man folgende Regeln:

1) Die Zugstangen CD, EF, GH u. s. w. sind durch die Kräfte

$$S_1 = \frac{Q}{2 \sin.\alpha},\ S_2 = {^3/_2}\, \frac{Q}{\sin.\alpha},\ S_3 = {^5/_2}\, \frac{Q}{\sin.\alpha} \text{ u. s. w.},$$

und die Streben DE, FG, HK u. s. w. durch die Kräfte

$$P_1 = \frac{Q}{2 \sin.\beta},\ P_2 = {^3/_2}\, \frac{Q}{\sin.\beta},\ P_3 = {^5/_2}\, \frac{Q}{\sin.\beta} \text{ u. s. w.}$$

gespannt.

2) Jede Hälfte des oberen Balkens BB wird durch die Kräfte

$$R_1 = \frac{Q}{2} \frac{\sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta},\ R_2 = {^3/_2}\, \frac{Q \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta},\ R_3 = {^5/_2}\, \frac{Q \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\alpha \sin.\beta}$$

oder

$$R_1 = \frac{Q}{2} (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),\ R_2 = {}^3/_2\, Q\, (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

$$R_3 = {}^5/_2\, Q\, (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta) \text{ u. s. w.}$$

zusammengedrückt, dergestalt also, daß die ganze zusammendrückende Kraft in der Mitte zwischen D und D am größten, nämlich

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots = [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] \frac{Q}{2} \frac{sin.(\alpha + \beta)}{sin.\,\alpha\; sin.\,\beta}$$

$$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] \frac{Q}{2} (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

$$= \frac{n^2 Q}{2} (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta),$$

und daß sie dagegen an den äußeren Balkenenden B, B nur

$$(2n - 1) \frac{Q}{2} \frac{sin.(\alpha + \beta)}{sin.\,\alpha\, sin.\,\beta} = (2n - 1) \frac{Q}{2} (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta)$$

ausfällt.

3) Jede Hälfte des unteren Balkens $A A$ wird durch die Zugkräfte

$$Z_1 = {}^3/_2\, Q\, cotang.\,\alpha + \frac{Q}{2} cotang.\,\beta,$$

$$Z_2 = {}^5/_2\, Q\, cotang.\,\alpha + {}^3/_2\, Q\, cotang.\,\beta \text{ u. s. w.}$$

ausgedehnt, so daß folglich die ganze Zugkraft in der Mitte C am größten nämlich

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots = [+ 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] \frac{Q}{2} cotang.\,\alpha$$

$$+ [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)] \frac{Q}{2} cotang.\,\beta$$

$$= [(n^2 - 1)\, cotang.\,\alpha + n^2 .\, cotang.\,\beta] \frac{Q}{2}$$

ist, und nach den Enden zu immer kleiner und kleiner wird, so daß sie an einem Ende die Größe

$$(2n - 1) \frac{Q}{2} cotang.\,\beta$$

behält.

Ist die Anzahl n der Streben und Zugbänder sehr groß, so kann §. 63
man die ganze Zugkraft des unteren Balkens der ganzen Druckkraft des oberen Balkens gleich, und zwar jede

$$R = \frac{n^2}{2} Q\, (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta) \text{ setzen.}$$

Bezeichnet h die Höhe des ganzen Balkens, oder der Normalabstand der beiden Balken von einander, und a den Abstand $CE = DF = EG$ u. s. w. der Streben von einander, in der Richtung der Balkenaxen gemessen, so hat man:

$$a = h\ (cotang.\,\alpha + cotang.\,\beta)$$

und daher

$$R = \frac{n^2 a}{2h}\ Q,$$

oder, wenn man die halbe Balkenlänge $l = n a$ einführt

$$R = \frac{l}{2h} \cdot n Q.$$

Ist nun F der Querschnitt eines Balkens und T der Tragmodul desselben, so hat man folglich

$$R = FT,$$

und daher die Belastung einer Trägerhälfte:

$$n Q = \frac{2h}{l}\ FT.$$

Es wächst also hiernach das Tragvermögen eines Fachwerkträgers wie der Querschnitt F seiner Hauptbalken und wie die Höhe h oder der Abstand der Hauptbalken desselben von einander.

Diesen Ausdruck für die Tragkraft eines zusammengesetzten Balkens findet man auch, wenn man den Balken als einen einfachen elastischen Körper ansieht und seine Biegungselasticität in Betracht zieht. Es wird jede Balkenhälfte an ihrem Ende durch die Unterstützung mit der Kraft $n Q$ von unten nach oben, und in ihrer Mitte durch eine gleiche Kraft $n Q$ von oben nach unten gebogen, und es ist daher das Biegungsmoment jeder Balkenhälfte:

$$n Q l - n Q\,\frac{l}{2} = \frac{n Q l}{2} \cdot \text{ (Vergl. Band I., §. 240).}$$

Nun wirkt aber die Spannung R eines Balkens in Hinsicht auf den Mittelpunkt des Balkens am Hebelarme $\frac{h}{2}$; es ist daher die Summe der Momente der Spannkräfte beider Balken:

$$2 R \cdot \frac{h}{2} = R h,$$

und es folgt daher durch Gleichsetzen dieser Momente:

$$\frac{n Q l}{2} = R h, \text{ und wie oben,}$$

$$n Q = \frac{2h}{l}\ R = \frac{2h}{l}\ FT.$$

Lägen die beiden Hauptbalken, wovon jeder die Höhe h_1 haben möge, lose über einander, so würde ihre Tragkraft

$$n\,Q = 2\,.\,2\,\frac{b\,h_1^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^2/_3\,\frac{h_1}{l}\,F\,T \text{ betragen,}$$

und diese Balken zu einem Ganzen fest mit einander verbunden, so hätte man

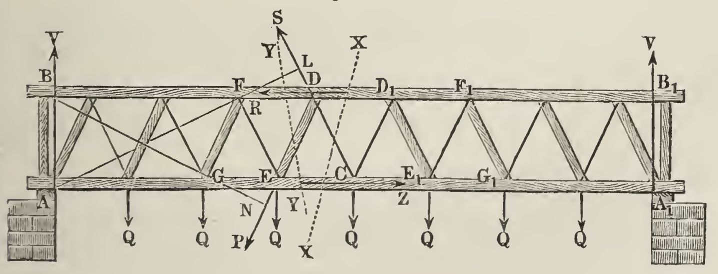
$$n\,Q = 2\cdot\frac{b\,(2\,h_1)^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^4/_3\,\frac{h_1}{l}\,F\,T \text{ zu setzen.}$$

Es trägt hiernach unter übrigens gleichen Umständen ein Fachwerksträger wie Fig. 114 darstellt, $3\,\frac{h}{h_1}$ mal soviel als die beiden lose auf einander gelegten, und $\frac{3\,h}{2\,h_1}$ mal soviel als die beiden auf einander gelegten und fest mit einander verbundenen Balken.

Die Spannungsverhältnisse fallen nicht wesentlich anders aus, wenn die Anzahl der Tragefelder eine ungerade ist, so wie wenn die Last auf dem oberen Balken aufruht, oder zwischen beiden Streckbalken angebracht ist. Da sich die Streben in Folge der Druckkräfte leicht biegen können, so ist es zweckmäßig, dieselben möglichst kurz zu machen, also senkrecht zu stellen, wobei $\beta = 90$ Grad ausfällt.

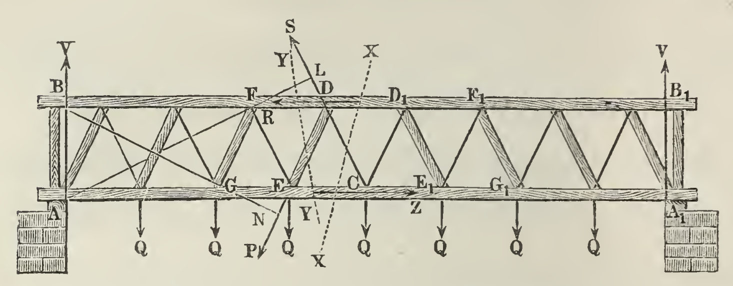
Die Bestimmung der Spannungen eines Fachwerksträgers läßt sich auch leicht durch Anwendung der Theorie der Drehungsmomente vollziehen, wenn man sich den Träger in zwei Theile zerschnitten denkt, und voraussetzt, daß der eine Theil nur durch die Spannungen in den Schnittflächen mit den anderen zusammenhängt. Es bilden dann diese Spannungen mit den äußeren Kräften auf der einen Seite des Trägers ein im Gleichgewicht befindliches Kraftsystem. Ist $(2\,n - 1)\,Q$ die ganze Belastung der Brücke, so beträgt die Kraft, welche jeder der Brückenpfeiler aufnimmt, mit welcher also auch jeder der beiden Pfeiler den einzelnen Kräften, Q, Q u. s. w. entgegenwirkt, $V = (n - {}^1/_2)\,Q$. Denken wir uns nun durch einen Schnitt XX zwischen C und D, Fig. 115, den Träger zerschnitten, so kön- §. 64

Fig. 115.



nen wir annehmen, daß die in den Schnittflächen wirkenden Spannungen R, Z und S mit den Kräften $(n - \frac{1}{2})\,Q$, Q, Q u. s. w. des Balken-

Fig. 116.



stückes ACD im Gleichgewichte sind. Um die Spannung R des oberen Balkens zu finden, betrachten wir C als Drehungspunkt, und machen die Bedingung, daß die algebraische Summe der Momente sämmtlicher in Rede stehenden Kräfte = Null sei. Nun ist das Moment des Pfeilerdruckes V, $V.\overline{CA} = (n - \frac{1}{2})\,Ql$, ferner die Summe der Momente von Q, Q u. s. w.

$$\frac{Ql}{n} + \frac{2\,Ql}{n} + \frac{3\,Ql}{n} + \cdots + (n-1)\,\frac{Ql}{n}$$

$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1)\,\frac{Ql}{n} = (n-1)\,\frac{Ql}{2},$$

und das Moment der Stangenspannung S, sowie das des Balkenzuges Z, $= 0$, da die Richtungen beider Kräfte durch C gehen, daher hat man das Moment des am Hebelarme $\overline{AB} = h$ wirkenden Balkendruckes R

$$Rh = (n - \tfrac{1}{2})\,Ql - (n-1)\,\frac{Ql}{2} = \frac{n\,Ql}{2},$$

und diesen Druck selbst

$$R = \frac{n\,Ql}{2h}.$$

Denkt man sich dagegen A als Drehungspunkt, so hat man das Moment der Spannung S,

$S.\overline{AL} = S.l\,sin.\,\alpha$, während die Summe der Momente von R, Q, Q u. s. w. unverändert bleiben und die Momente von V und Z Null ausfallen; es ist daher

$$Sl\,sin.\,\alpha = Rh - (n-1)\,\frac{Ql}{2} = \left(\frac{n}{2} - \frac{(n-1)}{2}\right)Ql = \frac{Ql}{2},$$

und die gesuchte Strebenspannung

$$S = \frac{Q}{2\,sin.\,\alpha}.$$

Denken wir uns nun einen Schnitt YY zwischen den Stützpunkten D und E, und nehmen wir zunächst einen Drehungspunkt in D an, für welchen die Momente von R und S Null sind. Das Moment von V ist dann $V.\overline{DB} = (n - 1/2)\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\,Q$, und die Summe der Momente der Belastungen Q, Q u. s. w.

$$Q\left(\frac{l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right) + Q\left(\frac{2l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right)$$
$$+ \cdots Q\left((n-1)\frac{l}{n} - h\ cotang.\,\alpha\right) = (n-1)\left(\frac{l}{2} - h\ cotg.\,\alpha\right)Q.$$

Daher folgt das Moment der Spannung Z des unteren Streckbalkens:

$$Zh = (n - 1/2)\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\,Q - (n-1)\left(\frac{l}{2} - h\ cotang.\,\alpha\right)Q$$

$$= (nl - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2},$$ und diese Spannung selbst

$$Z = (nl - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2h} = \left(\frac{nl}{h} - cotang.\,\alpha\right)\frac{Q}{2}.$$

Nehmen wir endlich den Drehungspunkt in B an, so daß die Momente von V und R = Null sind, so ist das Moment von dem Strebendrucke P:

$$P.\overline{BN} = P.\overline{BD}.sin.\,\beta = P(l - h\ cotang.\,\alpha)\ sin.\,\beta,$$ das von Z,

$$Zh = (nl - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2},$$ und die Summe der Momente von

Q, Q u. s. w.

$$Q\,\frac{l}{n} + \frac{2\,Ql}{n} + \cdots + (n-1)\,\frac{Ql}{n} = \left(\frac{n-1}{2}\right)Ql,$$

so daß schließlich

$$P\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\ sin.\,\beta = (nl - h\ cotang.\,\alpha)\,\frac{Q}{2} - (n-1)\frac{Ql}{2}$$

und der Druck in der Strebe:

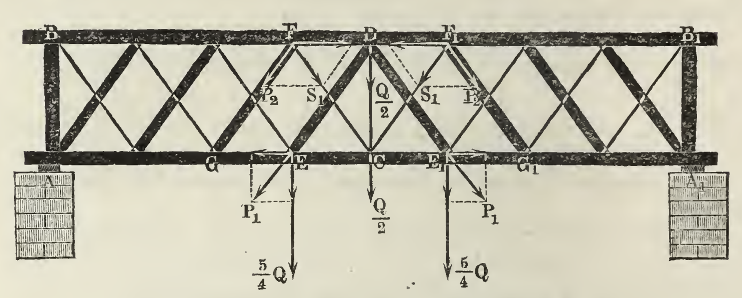
$$P = \frac{(l - h\ cotang.\,\alpha)\ Q}{2\,(l - h\ cotang.\,\alpha)\,sin.\,\beta} = \frac{Q}{2\,sin.\,\beta}$$ folgt.

Diese Kraftwerthe stimmen mit den im vorigen Paragraphen gefundenen vollständig überein. Es ist leicht zu ermessen, wie durch Annahme anderer Schnittlinien und anderer Drehungspunkte die Spannungen der übrigen Zugstangen und Streben, so wie die der Streckbalken an anderen Stellen gefunden werden können.

Gekreuzte Fachwerksträger. Wenn zwischen je zwei Streben und Zugstangen eine Strebe und Zugstange eingeschaltet ist, wie bei dem Träger in Fig. 117 (a. f. S.), wo jede Strebe sich mit einer §. 65

gleichgeneigten Zugstange kreuzt, und in der Mitte des Balkens noch eine verticale Zugstange CD angebracht ist, so kann man annehmen, daß das mittlere Stangenpaar CF, CF ebenso wie das mittlere Strebenpaar von

Fig. 117.



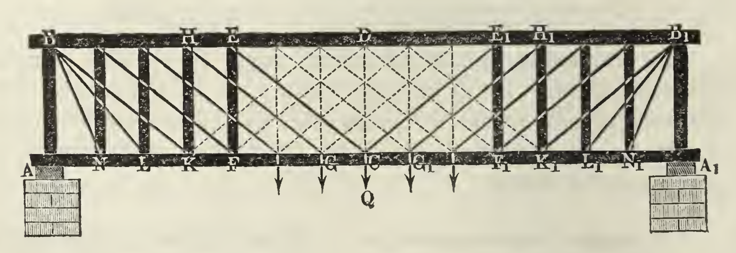
der Last Q in der Mitte C, die Hälfte, also $\frac{Q}{2}$ trägt, und daß daher von der Mitte C nach den Balkenenden A, A_1 zugegangen, die Stangen- und Strebenspannungen: $S_1 = P_1 = P_2 = {}^1/_4\, \frac{Q}{sin.\,\alpha}$, $S_2 = P_3 = {}^5/_4\, \frac{Q}{sin.\,\alpha}$, $S_3 = P_4 = {}^9/_4\, \frac{Q}{sin.\,\alpha}$ u. s. w. sind, vorausgesetzt, daß die Streben und Stangen denselben Neigungswinkel α haben.

Bei einer ziemlich großen Anzahl von Streben und Stützen ist die Spannung der Streckbalken in C und D, wie oben,

$$R = Z = \frac{n\,Q\,l}{2\,h} \text{ zu setzen.}$$

Bei einem Fachwerksträger AB_1, Fig. 118, mit zweifach gekreuzten Streben EF, HK ... und Zugstangen CE, GH ..., wovon die ersteren vertical stehen, sind die Spannungen der Zugstangen CE, GH u. s. w.

Fig. 118.



$$S_1 = \frac{Q}{2\,sin.\,\alpha},\ S_2 = S_3 = \frac{Q}{sin\ \alpha},\ S_4 = {}^3/_2\, \frac{Q}{sin.\,\alpha},\ S_5 = \frac{2\,Q}{sin.\,\alpha},$$

und die der äußersten Stangen, BL und BN, wenn α_1 und α_2 die Neigungswinkel derselben gegen die Balken bezeichnen, $S_6 = \frac{2\,Q}{sin.\,\alpha_1}$ und $S_7 = \frac{5\,Q}{2\,sin.\,\alpha_2}$; ferner sind die Drücke in den Streben EF, HK u. s. w.

$$P_1 = \frac{Q}{2},\; P_2 = P_3 = Q, \text{ und } P_4 = {}^3/_2\; Q \text{ u. s. w.}$$

Die Spannungen in den Streckbalken lassen sich wieder $R = Z = \frac{n\,Q\,l}{2\,h}$ setzen, wenigstens wenn die Anzahl n der Lastpunkte F, K, L ... sehr groß ist. In der Regel, zumal bei langen Brückenträgern, schaltet man im mittleren Theile EF_1 derselben die in der Figur punktirten Verstrebungen ein, nicht allein um dem Ganzen eine größere Steifigkeit zu geben, sondern auch aus dem Grunde, weil hier durch die mobile Belastung, z. B. durch einen Wagenzug, die stärkste Biegung des Trägers von der Mitte C weg zur Seite, z. B. nach G, rückt. Bezeichnet l die Länge des ganzen Trägers AB, Fig. 119, und p die constante Belastung desselben auf den laufenden Fuß, ferner c die Länge der mobilen Last, und die Größe derselben pr. Fuß $= q$, so ist die ganze constante Last $= p\,l$, und die mobile $= q\,c$, ferner der Druck in einem Stützpunkte B:

Fig. 119.

$$R_1 = \frac{p\,l}{2} + \frac{q\,c^2}{2\,l}$$

und der im andern Stützpunkte A:

$$R = \frac{p\,l}{2} + q\,c\left(1 - \frac{c}{2\,l}\right).$$

Das Biegungsmoment an einer Stelle O, welche um $A\,O = x$ vom Auflagerungspunkt absteht, ist:

$$M = R\,x - (p + q)\,\frac{x^2}{2} = \frac{p + q}{2}\,x\left(\frac{2\,R}{p + q} - x\right),$$

und fällt am größten aus für $x = \frac{R}{p + q}$, nämlich

$$M = \frac{R^2}{2\,(p + q)} = \frac{\left[{}^1/_2\;p\,l + q\,c\left(1 - \frac{c}{2\,l}\right)\right]^2}{2\,(p + q)}.$$

Da $1 - \frac{c}{2\,l}$ stets positiv ist, so giebt $c = l$, den Maximalwerth

$M = \frac{(p + q)\,l^2}{8}$, also genau denselben, als wenn der Balken die gleich-

mäßige vertheilte constante Last $(p + q) l$ trägt. Die verticale Schubkraft ist im Abstande $x < c$,

$V = R - (p + q) x$, und im Abstande $x_1 > c$,

$V_1 = R - px - qc$; in beiden Fällen am kleinsten für $x = c$, und zwar

$V = R - (p + q) c = \frac{pl}{2} - pc - \frac{qc^2}{2l}$.

Die Länge c der beweglichen Last, bei welcher diese Schubkraft Null ausfällt, giebt nun die Auflösung der Gleichung $c^2 + \frac{2pcl}{q} = \frac{pl^2}{q}$, nämlich

$$c = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l.$$

Für diese Länge ist der Hebelarm des größten Momentes, $x = \frac{R}{p+q} = c$, und das entsprechende größte Moment selbst,

$$M = \frac{R^2}{2(p+q)} = (p+q)\frac{c^2}{2} = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right]^2 \frac{(p+q)l^2}{2}.$$

Während bei einer auf den Träger gleichmäßig vertheilten Last pl oder $(p + q) l$, die größte Durchbiegung in der Mitte des Trägers, d. i. im Abstande $\frac{l}{2}$ von A stattfindet, ist bei einer mobilen Belastung die Stelle der größten Durchbiegung im Abstande $c = \left[-\frac{p}{q} + \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$, rückt also dieser Ort von der Mitte um $\frac{l}{2} - c = \left[1/2 + \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$ der mobilen Last entgegen, und bewegt sich nachher ebenso auf der anderen Seite von der Mitte des Trägers fort, wenn die mobile Last die erste Seite verlassen hat.

Aus dem Vorstehenden folgt, 1) daß man die Spannungen und Querschnitte der Strebebalken so berechnen soll, als wenn der ganze Träger die constante Last $(p + q) l$ zu tragen hätte, und 2) daß man sämmtliche Lastpunkte, welche nicht über $\frac{l}{2} - c = \left[1/2 + \frac{p}{q} - \sqrt{\frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q}\right)^2}\right] l$ von der Trägermitte C abstehen, wie diese Mitte, d. i. durch Diagonalstangen, wie Fig. 118 in punktirten Linien angiebt, zu unterstützen hat.

§. 66 **Ueber einander liegende Balken.** Zur Vergrößerung der Tragkraft werden auch oft zwei oder mehrere Balken über einander gelegt. Wird in diesem Falle weiter keine Verbindung der Balken mit einander durch Bänder oder Schrauben angewendet, so biegt sich jeder dieser Balken, wie z. B. AA, Fig. 120, I. unabhängig von dem anderen BB, und es ist daher

die Tragkraft dieser Balkenverbindung nur gleich der Summe der Tragkräfte der einzelnen Balken. Ist z. B. in dem abgebildeten Falle, wo die Balken an den Enden frei aufliegen und in der Mitte eine Last P tragen, l die Länge, b die Breite, und h die Höhe eines einzelnen Balkens, sowie n die Anzahl der über einander liegenden Balken, so beträgt die Tragkraft der Verbindung

Fig. 120.

$$P = n \, . \, 4 \, \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6}$$

$$= 4 \, n \, \frac{b h^2}{l} \cdot \frac{T}{6},$$

z. B. für Holz (s. Bd. I., §. 240)

$$P = 4 \, n \cdot 167 \, \frac{b h^2}{l}$$

$$= 668 \, n \, \frac{b h^2}{l} \text{ Pfund.}$$

Wenn hingegen die über einander liegenden Balken AA, BB, Fig. 120, II., durch Verzahnung oder eingelegte Dübel, sowie mittels Bänder oder Schrauben so fest mit einander verbunden sind, daß in der gemeinschaftlichen Berührungsfläche kein Verschieben möglich ist, und sich die Verbindung nur im Ganzen, d. i. wie ein einziger Balken biegen kann, so ist die Tragkraft dieser Verbindung auch gleich der eines einzigen Balkens, welcher zur Höhe h_1 die Summe nh der Höhen h der einzelnen Balken hat. Für den abgebildeten Fall II. ist folglich die Tragkraft:

$$P = 4 \cdot \frac{b (nh)^2}{l} \cdot \frac{T}{6} = 4 n^2 \, \frac{b h^2}{l} \, \frac{T}{6},$$

z. B. bei hölzernen Balken:

$$P = 4 n^2 \, . \, 167 \, \frac{b h^2}{l} = 668 \, n^2 \, \frac{b h^2}{l} \text{ Pfund.}$$

Es trägt also in diesem Falle der Balken $n$mal so viel als im ersteren. Z. B. der in Fig. 121 abgebildete Balken $ABBA$ trägt, da er in einer festen Verbindung von drei einfachen Balken besteht, $n^2 = 3^2 = 9$mal so

Fig. 121.



viel als der einfache Balken, und $n = 3$mal so viel als wenn diese drei Balken lose über einander liegen. Allerdings ist die künstliche Verbindung

der Balken durch die Schrauben u. s. w. nie so innig als die natürliche Verbindung, um so mehr, da die Balken auch durch die Verzahnung oder durch die Löcher für die Dübel, sowie durch die Schraubenlöcher geschwächt werden. Deshalb soll man in der Praxis stets auf eine kleinere Tragkraft rechnen, als die letzte Formel angiebt.

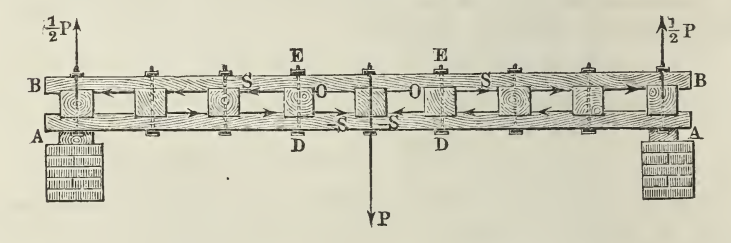
Um auf diese Weise sehr lange Balken herzustellen, ist wohl auch nöthig, die einfachen Balken der Länge nach an einander zu stoßen. Hierbei muß aber dafür gesorgt werden, daß niemals zwei Stoßfugen unmittelbar unter einander, sondern im Gegentheil möglichst entfernt von einander zu liegen kommen. Wegen dieses Zusammenstoßens ist natürlich immer einer von den über einander liegenden n Balken unwirksam, und daher die Tragkraft P nur

$$= 4\,(n-1)^2\,\frac{bh^2}{l}\,\frac{T}{6}.$$

§. 67 **Zusammengebolzte Balken.** Da die Tragkraft eines Balkenelementes um so größer ist, je entfernter dasselbe von der neutralen Axe liegt, so legt man auch oft die Balken nicht unmittelbar über einander, sondern spannt zwischen beide in gewissen Abständen von einander kurze Holzstücke oder Bolzen.

Eine solche Verbindung zweier Balken AA und BB mit einander durch Bolzen O, O ... und mittels Schrauben DE, DE ..., welche durch letztere hindurchgehen, führt Fig. 122 vor Augen. Behalten wir für einen solchen

Fig. 122.



Balken die vorige Bezeichnung bei, nehmen wir aber noch an, daß beide Balkenaxen um die Höhe a von einander abstehen, so haben wir unter der obigen Voraussetzung, daß der ganze Balken an beiden Enden frei aufliegt, und die Last in der Mitte desselben niederzieht (s. Band I., §. 236), die Größe dieser Last oder die sogenannte Tragkraft:

$$P = 4\,\frac{[(a+h)^3 - (a-h)^3]\,b}{(a+h)\,l}\,\frac{T}{6} = \frac{8\,(3\,a^2 + h^2)\,bh}{(a+h)\,l}\,\frac{T}{6},$$

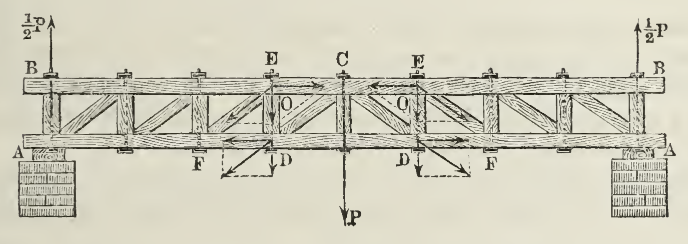
also z. B. für Holz, wo $\frac{T}{6} = 167$ Pfund ist,

$$P = 1336 \cdot \frac{(3\,a^2 + h^2)\,b\,h}{(a + h)\,l}.$$

Bei gleichem Querschnitte, und also auch bei gleichem Gewichte des Balkens, trägt folglich ein solcher zusammengesetzter Träger um so mehr, je größer der Abstand zwischen beiden Balkenhälften ist.

Da in Folge der Biegung der untere Balken, Fig. 123, ausgedehnt und der obere Balken BB zusammengedrückt wird, so besitzt der erstere ein Be-

Fig. 123.



streben, sich wieder zu verkürzen, und der zweite ein Bestreben, auf seine ursprüngliche Länge sich wieder auszudehnen. Diesen Bestrebungen müssen die Bolzen O und Schrauben DE entgegenwirken. Die Spannkräfte S und $-S$, welche diesen Bestrebungen entsprechen, bilden ein Kräftepaar $(S, -S)$ mit dem Hebelarm a, welches dem Kräftepaar $\left(\frac{P}{2}, -\frac{P}{2}\right)$ mit dem Hebelarm $CA = \frac{l}{2}$ das Gleichgewicht hält; es ist folglich

$$Sa = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2}, \text{ daher die Größe einer solchen Spannkraft: } S = \frac{Pl}{4a}.$$

Diese Kraft vertheilt sich auf die sämmtlichen Bolzen je einer Balkenhälfte. Nehmen wir an, daß eine solche Hälfte n Bolzen enthalte, und daß sich S auf diese Bolzen gleichmäßig vertheile, so erhalten wir die von einem Bolzen aufzunehmenden Kräfte:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{Pl}{4\,na} \text{ und } -S_1 = -\frac{S}{n} = -\frac{Pl}{4\,na}.$$

In Folge des Kräftepaares $\left(\frac{S}{n}, -\frac{S}{n}\right)$ erhält ein solcher Bolzen ein Bestreben zum Drehen, wobei er in den diagonal einander gegenüber liegenden Ecken desselben gewisse Kräfte $R, -R$ ausübt, welchen durch die Schraube DE das Gleichgewicht gehalten wird. Ist e die Breite eines Bolzens, parallel zur Axe des Balkens gemessen, so hat man:

$$Re = \frac{S}{n}\,a = \frac{Pl}{4n},$$

daher die mittlere Zugkraft einer Schraube

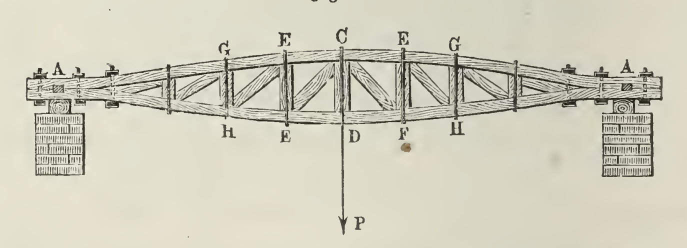
$$R = \frac{Pl}{4\,ne},$$

Um dem Bestreben zum Umdrehen der Bolzen noch kräftiger entgegenzuwirken, setzt man noch Streben, wie CD, EF, Fig. 123, zwischen je zwei Bolzen ein, auch zieht man wohl noch Hülfsstreben ein, so daß der Zwischenraum zwischen je zwei Bolzen durch ein sogenanntes Andreaskreuz ausgefüllt wird.

§. 68 **Gesprengte Balken.** Da die aus zwei parallelen Balken AA, BB zusammengesetzten Träger an den Enden eine unnöthige große Höhe oder Stärke haben, so giebt man auch wohl diesen Balken eine mäßige Biegung und setzt zwischen dieselben Bolzen, welche von der Mitte des Trägers aus nach den Enden zu allmälig an Höhe abnehmen.

Ein solcher gesprengter Balken ist in Fig. 124 abgebildet. Die beiden Balken ACA und ADA sind an den Enden durch Schrauben fest mit ein-

Fig. 124.



ander verbunden, und werden im Inneren durch Bolzen oder Spreizen GH, EF... auseinander-, sowie durch eiserne Bänder, welche um diese Spreizen herumlaufen, zusammengehalten und durch Streben CF, EH... gehörig abgesteift.

Da das Umdrehungsbestreben der Spreizen zwischen den beiden Balken mit der Höhe derselben wächst und abnimmt, so ist mit diesem Sprengen oder Biegen der Balken unter gewissen Umständen nicht allein ein Ersparniß an Material, sondern auch ein Gewinn an Stabilität verbunden. Allerdings darf man aber auch mit einer solchen Ausbiegung der Balken eine gewisse Grenze nicht überschreiten, da durch dieselbe der Balken einen Theil seines Tragvermögens verliert, welcher mit der Größe der Biegung wächst.

Um den Einfluß des Zusammenbiegens zweier Balken zu einem Ganzen auf die Tragfähigkeit des letzteren kennen zu lernen, denken wir uns wieder den einfachen Fall, welcher auch der Theorie der Biegung einfacher Balken in Band I. zu Grunde gelegt worden ist, wo der ganze Balken ABB_1, Fig. 125, an einem Ende fest eingemauert ist und am anderen Ende eine

Last P trägt. Ist dann wieder b die Breite und h die Höhe der einfachen Balken AB und AB_1, ferner l die Länge AC und a der Abstand zwischen den Axen der beiden einfachen Balken, unmittelbar an der Einmauerungsstelle gemessen, so hat man das Maaß des Biegungsmomentes des Ganzen:

Fig. 125.

$$W = \frac{b\,[(a + h)^3 - (a - h)^3]}{12}$$

$$= \frac{b\,h}{6}\,(3\,a^2 + h^2),$$

während das eines einfachen Balkens

$$W_1 = \frac{b\,h^3}{12} \text{ ist (s. Band I., §. 226).}$$

In Folge des Zusammenbiegens der beiden Balken wirken dieselben in A mit gewissen Kräften P_1 und $-P_1$ auf einander, welche von der Größe der Durchbiegung $CB = CB_1 = \frac{a - h}{2}$ abhängig sind. Wenn die Zusammenbiegung ohne weitere Unterstützung durch Bolzen DE, FG u. s. w. erfolgt, so bildet die neutrale Axe eines jeden einfachen Balkens eine elastische Linie; durch diese Bolzen kann man aber auch dieser Axe eine andere Gestalt, z. B. die Kreisform geben, wobei die Spannung des unbelasteten Trägers an allen Stellen gleich groß ist. Nehmen wir indessen der Sicherheit wegen die elastische Linie zum Anhalten, wenn auch eine innere Verstrebung durch DE, FG u. s. w. statt hat. Es ist dann (s. Band I., §. 217) die Durchbiegung eines einfachen Balken

$$\frac{a - h}{2} = \frac{P_1\,l^3}{3\,W_1 E},$$

daher das Kraftmoment:

$$P_1\,l = {}^3/_2\,\frac{(a - h)\;W_1\,E}{l^2},$$

ferner der Krümmungshalbmesser an der Einmauerungsstelle B oder B_1:

$$r_1 = \frac{W_1\,E}{P_1\,l} = \frac{2\,l^2}{3\,(a - h)},$$

und das Ausdehnungsverhältniß der äußersten Fasern an eben dieser Stelle:

$$\sigma_1 = \frac{e_1}{r_1} = {}^1/_2\,h : {}^2/_3\,\frac{l^2}{a - h} = {}^3/_4\,\frac{(a - h)\,h}{l^2}.$$

Die relative Ausdehnung an eben dieser Stelle, in Folge der Last P ist hingegen, da der Krümmungshalbmesser der neutralen Axe AC, im Punkte C:

$$r = \frac{WE}{Pl},$$

und der größte Abstand einer Faser von dieser Axe, $e = \frac{a + h}{2}$ gesetzt werden kann:

$$\sigma_2 = \frac{e}{r} = \frac{Pl\,(a + h)}{2\,WE}.$$

Diese beiden Ausdehnungen vereinigen sich in B zur gesammten relativen Ausdehnung

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = {}^3/_4\,\frac{(a - h)\,h}{l^2} + \frac{Pl\,(a + h)}{2\,WE}.$$

Nehmen wir nun an, daß diese Größe die Elasticitätsgrenze erreicht, so können wir $\sigma = \frac{T}{E}$, daher auch

$$T = {}^3/_4\,\frac{(a - h)\,h\,E}{l^2} + \frac{Pl\,(a + h)}{2\,W}$$

oder, wenn wir W aus dem Obigen einführen,

$$T = {}^3/_4\,\frac{(a - h)\,h\,E}{l^2} + \frac{3\,(a + h)\,l\,P}{(3\,a^2 + h^2)\,b\,h}$$ setzen.

Hieraus folgt nun die gesuchte Tragkraft

$$P = \frac{(3\,a^2 + h^2)\,b\,h}{3\,(a + h)\,l}\left(T - {}^3/_4\,\frac{(a - h)\,h\,E}{l^2}\right).$$

Wir können hiernach ermessen, daß das Tragvermögen des gesprengten Balkens Null ausfällt, wenn

$${}^3/_4\,\frac{(a - h)}{l^2}\,h\,E = T,$$

wenn folglich der größte Abstand zwischen den Axen der einfachen Balken

$$a = h + {}^4/_3\,\frac{Tl^2}{Eh}$$

oder noch größer ist.

Wenn die beiden Balken unmittelbar über einander liegen, und auf diese Weise fest mit einander verbunden sind, so ist $a = h$ und daher die Tragkraft:

$$P = \frac{4\,b\,h^2}{l}\,\frac{T}{6} = {}^2/_3\,\frac{b\,h^2}{l}\,T \text{ (vergl. §. 66).}$$

Zieht man diese Tragkraft von der oben gefundenen Tragkraft des gesprengten Balkens ab, so erhält man den Ueberschuß der letzteren über die des einfachen Balkens:

$$P_1 = \frac{b\,h\,T}{3\,l}\left[\left(\frac{3\,a^2 + h^2}{a + h}\right)\left(1 - {}^3/_4\,\frac{(a-h)\,h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right) - 2\,h\right]$$

$$= \frac{b\,h\,T}{3\,l}\left(\frac{3\,a^2 - 2\,a\,h - h^2}{a + h} - {}^3/_4\,\frac{(3\,a^2 + h^2)}{a + h}\cdot\frac{(a-h)\,h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right),$$

oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $a - h$ absondert:

$$P_1 = \frac{a - h}{a + h}\cdot\frac{b\,h\,T}{3\,l}\left(3\,a + h - {}^3/_4\,(3\,a^2 + h^2)\,\frac{h}{l^2}\,\frac{E}{T}\right).$$

Damit diese Kraftdifferenz nicht Null ausfalle, also die Sprengung des Balkens in jedem Falle Nutzen gewähre, muß

$${}^3/_4\,(3\,a^2 + h^2)\,\frac{h}{l^2}\,\frac{E}{T} < 3\,a + h,$$

d. i.

$$a^2 - {}^4/_3\,\frac{l^2\,T}{h\,E}\,a < {}^4/_9\,\frac{l^2\,T}{E} - \frac{h^2}{3} \text{ sein.}$$

Da nun h der kleinste Werth von a ist, so kann man auch hier $a = h$ setzen, so daß nun

$$h^2 - {}^4/_3\,\frac{l^2\,T}{E} < {}^4/_9\,\frac{l^2\,T}{E} - \frac{h^2}{3}, \text{ oder } {}^4/_3\,\frac{l^2\,T}{E} > h^2,$$

d. i.

$$\left(\frac{l}{h}\right)^2 > {}^3/_4\,\frac{E}{T}, \text{ oder } \frac{l}{h} > \sqrt{{}^3/_4\,\frac{E}{T}} \text{ sein muß.}$$

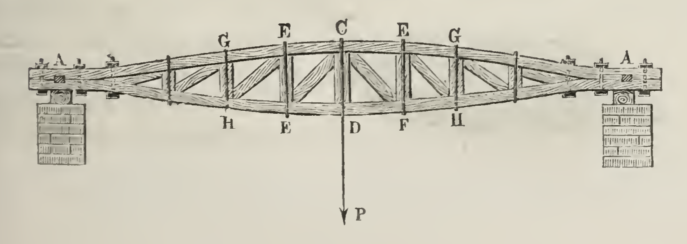
Nun ist aber für Holz $\frac{T}{E} = \sigma = {}^1/_{600}$ (s. Band I., §. 212), daher folgt:

$$\frac{l}{h} > \sqrt{{}^3/_4 \cdot 600}, \text{ oder } \frac{l}{h} > \sqrt{450}, \text{ d. i. } \frac{l}{h} > 21{,}21.$$

Es muß also der einfache Balken mindestens $21\,{}^1/_4$ mal so lang sein als hoch, wenn aus der Balkensprengung Nutzen gezogen werden soll. Um diese Theorie auf einen an beiden Enden unterstützten Balken, wie Fig. 126 anzuwenden, muß man natürlich statt l, $\frac{l}{2}$ und statt P, $\frac{P}{2}$ einsetzen.

Beispiel. Wenn der in Fig. 126 abgebildete Träger aus zwei einfachen

Fig. 126.



Holzbalken von 360 Zoll Länge, 4 Zoll Höhe und 12 Zoll Breite besteht, so soll die Sprenghöhe desselben

$$a < \frac{2}{3} \frac{l^2 T}{h E} + \sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{l^2 T}{h E}\right)^2 + \frac{4}{9} \frac{l^2 T}{E} - \frac{h^2}{3}},$$

d. i.

$$a < \frac{2}{3} \cdot \frac{180^2}{4 . 600} + \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{180^2}{4 . 600}\right)^2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{180^2}{600} - \frac{16}{3}},$$

oder

$$a < 9 + \sqrt{81 + 24 - 5}, \text{ oder } a < 9 + \sqrt{100},$$

d. i. $a < 19$ Zoll sein.

Machen wir $a = 14$ Zoll, so daß der Zwischenraum zwischen den beiden Balken $= 10$ Zoll ausfällt, so folgt für die Tragkraft des ganzen Balkens unter der Voraussetzung, daß der Tragmodul des zu diesem Träger verwendeten Holzes nach Bd. I., §. 240, $T = 4000$ Pfund beträgt,

$$\frac{P}{2} = \frac{(588 + 16) . 48}{3 . 18 . 180} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4 . 10}{180^2} \cdot 600\right) . 4000 = 2,9827 . \frac{4}{9} . 4000,$$
$$= 5298,$$

folglich $P = 10596$ Pfund.

Wären die Balken unmittelbar über einander befestigt, so hätte man

$$\frac{P}{2} = \frac{2}{3} \frac{b h^2}{l} \cdot T = \frac{2}{3} \cdot \frac{12 . 16}{180} \cdot 4000 = \frac{64}{9} . 400 = 2844,$$

folglich die ganze Tragkraft

$$P = 5688 \text{ Pfund}.$$

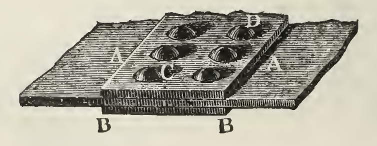
Anmerkung. Zur Bestimmung derjenigen Sprenghöhe, wobei die Tragkraft ein Maximum ist, hat man folgende durch Differenziiren gefundene cubische Gleichung

$$a^3 + \left(h - \frac{2}{3} \frac{l^2 T}{h E}\right) a^2 - \left(h^2 + \frac{4}{3} \frac{l^2 T}{E}\right) a + \frac{2}{9} h l^2 \frac{T}{E} + \frac{1}{3} h^3 = 0$$

anzuwenden.

§. 69 **Eisenblechverbindungen.** In neueren Zeiten kommen, zumal bei Eisenbahnbrücken, die Balken aus Eisenblech häufig in Anwendung. Dieselben werden aus großen Blechtafeln von $^1/_2$ bis $^3/_4$ Zoll Dicke zusammengesetzt, und bilden entweder cylindrische oder parallelepipedische Röhren, oder einfache I-förmige Träger. Die Blechtafeln, aus welchen diese Balken zusammengesetzt sind, werden stumpf an einander gestoßen und mittels doppelter Blechrippen durch gewöhnliche Nietbolzen fest mit einander verbunden. An den oberen Verbindungsstellen haben diese Blechrippen entweder die gewöhnliche schienenförmige Gestalt, oder sie erhalten einen T-förmigen Querschnitt, um eine größere Steifigkeit zu erzielen. In Fig. 127 ist eine solche Blechverbindung mit zwei einfachen Laschen AA, BB und den Nieten CD, CD vor Augen geführt, während Fig. 128 eine solche Ver-

Fig. 127.



bindung mit einer rectangulären Lasche AA und einer T-Rippe BCB darstellt. An den Stellen, wo die Bleche winkelig (gewöhnlich rechtwinkelig) an einander angestoßen sind, werden Winkelrippen mit L-förmigen Quer-

Fig. 128.

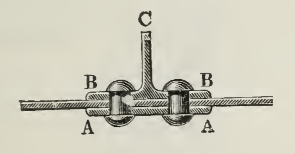
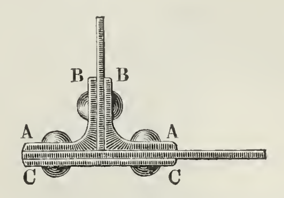


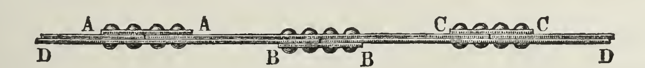
Fig. 129.



schnitten angesetzt, wie z. B. aus Fig. 129 zu ersehen ist, wo zwei rechtwinkelig zusammenstoßende Bleche durch zwei Winkelbleche AB, AB und eine Lasche CC mit einander verbunden sind. Um ein größeres Tragvermögen zu erzielen, läßt man auch zuweilen die Tragwände aus doppelten Blechtafeln bestehen, auch verbindet man wohl diese Wände mit den Laschen durch zwei oder mehrere Nietreihen.

Endlich wendet man auch nicht selten einfache Laschen an, oder man legt gar die durch Nieten zu verbindenden Bleche an ihren Rändern einfach über einander. In Fig. 130 ist z. B. das Doppelblech DD an den Stoßfugen

Fig. 130.



durch die einfachen Laschen AA, BB, CC mit doppelten Nietreihen verbunden, Fig. 131 zeigt dagegen die einfache Vernietung ohne Laschen u. s. w.

Fig. 131.

Bei der letzteren Vernietung geht die Spannung S des einen Bleches AC, Fig. 131, nicht unmittelbar auf das folgende Blech BD über, sondern es zerlegt sich diese Spannung $\overline{AS} = S$ in eine Kraft $\overline{DS} = S$ und in ein Kräftepaar $(S, -S)$, welches der Verbindung eine Drehung oder Biegung zu geben sucht. Das Moment dieses Paares ist $S \,.\, \overline{CD} = Ss$, wo s die Dicke CD des Bleches bezeichnet. Wenn nun das Ende A des Bleches vollkommen frei wäre, so würde sich dieses Blech in Folge dieses Kräftepaars zur Seite biegen, und deshalb (nach Band I., §. 271) einen Querschnitt:

$$F = \left(1 + \frac{6s}{s}\right)\frac{S}{T} = 7\,\frac{S}{T},$$

d. i. 7 mal so groß erhalten müssen, als wenn die Bleche stumpf an einander gestoßen und zu beiden Seiten mit Laschen bedeckt wären. Deshalb sind auch solche excentrische Vernietungen nur dann an-

wendbar, wenn die Blechwände sich nirgends frei endigen, sondern ein rings umschlossenes Ganze bilden, wobei sich die an den Nietstellen bildenden Kräftepaare gegenseitig aufheben.

Ist a die Entfernung der Nietaxen von einander, s die Dicke des Bleches, d der Durchmesser des Nietbolzens, n die Anzahl der Nietreihen und T der Tragmodul (= 5000 Pfund), so hat man die zulässige Spannung des durchlochten Bleches rechtwinkelig gegen die Stoßfuge:

$$S_1 = (a - d) s T = n \frac{\pi d^2}{4} T,$$

während für das ungenietete Blech diese Spannung:

$S = a s T$ ist (vergl. Band I., §. 213).

Hiernach hat man:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{a - d}{a} = 1 - \frac{d}{a}, \text{ auch } \frac{S_1}{S} = \frac{n \frac{\pi d^2}{4}}{ds + \frac{n \pi d^2}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \frac{s}{nd}}.$$

Wäre das Blech nur durch eine einzige Reihe von Nieten verbunden, so hätte man $n = 1$, und daher

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi d}{\pi d + 4 s} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \frac{s}{d}}.$$

z. B. für $d = 2 s$:

$$\frac{S}{S} = \frac{\pi}{\pi + 2} = \frac{22}{22 + 14} = {}^{11}/_{18} = 0{,}61.$$

Dann gingen durch die Vernietung der Bleche 100 — 61 = 39 Procent an Tragkraft verloren.

Für eine Vernietung mit zwei Nietreihen hat man dagegen

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi d}{\pi d + 2 s},$$

daher für die gewöhnliche Nietenstärke $d = 2 s$:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi}{\pi + 1} = {}^{22}/_{29} = 0{,}76,$$

so daß also das zusammengenietete Blech um 100 — 76 = 24 Procent weniger Tragkraft besitzt als das ungenietete Blech.

Bei drei Reihen Nieten ist:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3 \pi d}{3 \pi d + 4 s},$$

also für $d = 2 s$,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{3 \pi}{3 \pi + 2} = {}^{33}/_{40} = 0{,}825,$$

folglich der Verlust an Tragkraft durch das Zusammennieten nur 17,5 Procent.

Eisenblechträger. Die einfachste Form eines Trägers aus Eisenblech ist in Fig. 132 abgebildet. Die Hauptwand desselben ist aus zwei Blechtafeln §. 70

Fig. 132.

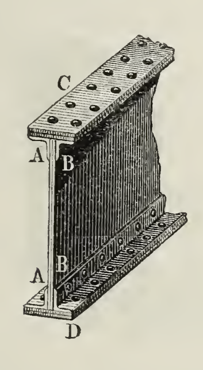
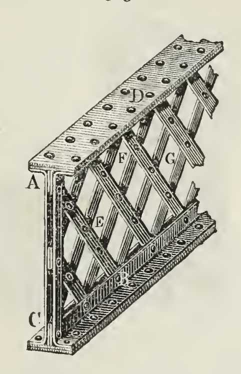


Fig. 133.



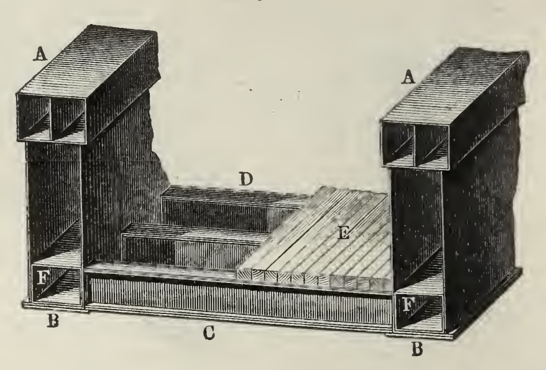
AA und *BB* zusammengesetzt, und die beiden Querschienen *C* und *D* sind durch vier Winkelbleche und Nietbolzen mit denselben verbunden. Wenn man statt der Blechtafeln Diagonalschienen anwendet, wie Fig. 133 vor Augen führt, so erhält man einen Gitterbalken, ähnlich wie einen Fachwerkbalken Fig. 118 in §. 65. Diese Diagonalschienen *AB*, *CD* u. s. w. sind nicht allein an ihren Enden zwischen je zwei Winkelschienen, sondern auch in den Kreuzpunkten *E*, *F*, *G* unter einander selbst vernietet.

Um den Widerstand der Blechbalken gegen eine seitliche Ausbiegung zu erhöhen, ist denselben zuerst von R. Stephenson eine kasten- oder röhrenförmige Form gegeben worden, und es sind hiernach die sogenannten Röhrenbrücken (franz. ponts en tubes; engl. tubular bridges) von R. Stephenson und W. Fairbairn entstanden. Bei den Röhrenbrücken von W. Fairbairn wird die Brücke von zwei Röhrenbalken getragen, wogegen die Stephenson'schen Röhrenbrücken aus einfachen Röhren bestehen, welche die Fahrbahn in sich einschließen.

Eine einfache Brücke, welche auf zwei Röhrenträgern *AB*, *AB* ruht, zeigt Fig. 134 (a. f. S.). Diese Träger sind unter einander durch I-förmige Querbalken *C*, *D* ... aus Eisenblech verbunden, welche mittels Winkeleisen an die inneren Wände der Röhrenträger angenietet werden. Auf diesen Querschwellen kommt die Brückenbahn *E* zu liegen. Um die Haltbarkeit der Röhrenträger und namentlich den Widerstand gegen das Zusammendrücken zu vergrößern, bringt man im Obertheil derselben noch mehrere Blechwände an, und um die Last auf beide Hauptwände eines Trägers zu vertheilen, ist es auch noch nöthig, dem Untertheil des letzteren durch eine besondere Bodenplatte *B*, sowie durch Einziehung einer besonderen Röhre *F* die nöthige Steifigkeit zu ertheilen.

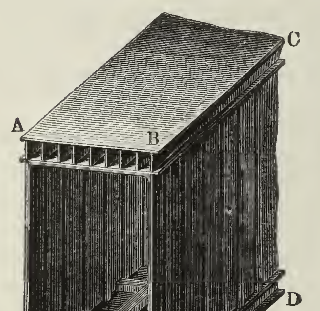
Die Construction einer Röhrenbrücke von Stephenson, welche die Fahrbahn ganz umschließt, ist aus Fig. 135 zu ersehen. Die ganze Brücke besteht

Fig. 134.



in einem hohlen Parallelepipede *ABCDEF*, welches aus Blechstücken von 4 bis 12 Fuß Länge, 2 Fuß Breite und $^3/_8$ bis $^3/_4$ Zoll Dicke mittels 1 Zoll dicker Bolzen zusammengenietet ist. Zur Erhöhung ihrer Tragkraft ist diese Brücke sowohl mit einem doppelten Boden als auch mit einer doppelten Decke versehen, und sind die dadurch gebildeten hohlen Räume *AB* und *EF* durch verticale Scheidewände in Zellen zertheilt, auch erhalten die Tragwände, wie z. B. *BD*, dadurch noch eine größere Steifigkeit, daß sie längs der verticalen Stoßfugen mittels doppelter T-Schienen aus langen Blechstücken zusammengenietet werden. In der Figur sind zugleich die Quer- und Längenschwellen für eine durch die Röhren zu führende Schienenbahn abgebildet. Ueberdies sind noch diejenigen Stellen der Röhre, wo dieselbe aufruht, von innen mit gußeisernen Rahmen abgesteift, und eben so die Wände der unteren Zellenreihe durch gußeiserne Träger gestützt. Damit sich endlich die Brücke in der Hitze und Kälte ungehindert ausdehnen und zusammenziehen könne, ruht dieselbe nicht unmittelbar auf den Pfeilern, sondern sie liegt auf 24 Paar gußeisernen Rollen von 6 Zoll Durchmesser und 2 Fuß Länge, welche sich zwischen einer gußeisernen Platte am Boden der Röhre und einer gleichen Platte auf dem Pfeiler bewegen können.

Fig. 135.



Man hat auch den Röhrenträgern eine kreisrunde oder eine elliptische

Querschnittsform gegeben; namentlich hat Brunnel cylindrische Blechröhrenträger an der Chepstow-Eisenbahnbrücke angewendet, an welchen die Brückenbahn aufgehangen ist. Die Kreisform gewährt jedoch keine vortheilhafte Benutzung des Materials (s. Band I., §. 242), auch haben die Versuche von Fairbairn nachgewiesen, daß sich die Röhrenträger mit kreisrundem Querschnitte leicht zusammendrücken, wobei sie an den Enden breiter und niedriger und in der Mitte höher und schmäler werden. Diesen Mangel einer constanten Querschnittsform besitzen, jedoch im geringen Grade, sogar auch die Träger mit elliptischen Querschnitten.

Tragkraft der Blechträger. Die Tragkraft eines Röhren- oder anderen Blechträgers läßt sich ohne Weiteres mittels der in Band I. mitgetheilten Elasticitäts- und Festigkeitsformeln berechnen. Setzen wir die Höhe einer Seitenwand des Blechträgers Fig. 135, $= h$ und die Dicke desselben, $= s$, so haben wir das Maaß des Biegungsmoments beider Seitenwände: §. 71.

$$W_1 = 2\,\frac{h^3 s}{12} = \frac{h^3 s}{6} \text{ (s. Band I., §. 236).}$$

Bezeichnen wir ferner die Breite der Decke oder des Bodens der Röhre durch b und die Stärke derselben durch s_1, so folgt das Biegungsmoment dieser beiden horizontalen Begrenzungsstücke:

$$W_2 = 2\,.\,b\,s_1\left(\frac{h - s_1}{2}\right)^2,$$

oder einfacher, da wir annähernd $h - s_1 = h$ setzen können:

$$W_2 = \frac{b h^2 s_1}{2},$$

oder, wenn, wie gewöhnlich, $s_1 = s$ ist:

$$W_2 = \frac{b h^2 s}{2}.$$

Ist ferner die Höhe der Zellen über dem Boden und unter dem Deckel, $= h_1$, so haben wir das Biegungsmoment der Deckflächen der Zellen:

$$W_3 = \frac{(h - 2\,h_1)^2\, bs}{2} = \tfrac{1}{2}\,(h - 2\,h_1)^2\, bs.$$

Insofern die Höhe h_1 der Zellen klein ist gegen die ganze Röhrenhöhe h, kann man endlich das Biegungsmoment der n Zellenwände setzen:

$$W_4 = n\,.\,2\,h_1 s\,.\left(\frac{h - h_1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\,n\,(h - h_1)^2 h_1 s.$$

Hiernach ist nun das Biegungsmoment der ganzen Brückenröhre:

$$W = (W_1 + W_2 + W_3 + W_4)$$
$$= \left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2\,h_1)^2 + n h_1\,(h - h_1)^2\right)\frac{s}{2}.$$

Das Gewicht einer Röhre sammt ihren Zellen ist bei einer gleichmäßigen Dicke s:

$$G = (2h + 4b + 2nh_1) \, . \, ls \, . \, \gamma,$$

wenn l die Länge der Brücke und γ die Dichtigkeit des Schmiedeeisens bezeichnet. Durch die hinzukommenden Rippen, Nieten u. s. w. wird dasselbe um die Hälfte größer, daher läßt sich

$$G = 3\,(h + 2b + nh_1)\, ls\gamma$$

setzen.

Zu diesem Gewichte der leeren Brücke kommt noch die bewegliche Last von $Q = 2000$ Pfund pr. Fuß Brückenlänge, folglich läßt sich das Moment der Kraft, mit welcher die Brücke gebogen wird, setzen:

$$M = \frac{Q}{4} \cdot \frac{l}{2} + \frac{G}{4} \cdot \frac{l}{2} = (Q + G)\,\frac{l}{8}$$

$$= [Q + 3\,(h + 2b + nh_1)\, ls\gamma]\,\frac{l}{8}.$$

Endlich hat man hiernach für den Gleichgewichtszustand zwischen der Last und der Festigkeit der Brücke, da nach Band I., §. 235,

$$M = \frac{WT}{c} = \frac{WT}{{}^1\!/_2 h} = \frac{2\,W}{h}\,T \text{ ist:}$$

$$[Q + 3\,(h + 2b + nh_1)\, ls\,.\,\gamma]\,\frac{l}{8}$$

$$= \left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2h_1)^2 + nh_1\,(h - h_1)^2\right)\frac{s\,.\,T}{h},$$

und es läßt sich hiernach eine Dimension der Röhre, z. B. die Höhe h derselben, berechnen, wenn der Trag- oder Sicherheitsmodul T gegeben ist.

Wenn wir nun noch das Gewicht eines Cubikzolles Eisens, $\gamma = 0{,}280$ Pfd. annehmen, so können wir daher bei der Berechnung einer Röhrenbrücke folgende Formel zu Grunde legen:

$$\frac{8\,T}{hl}\left(\frac{h^3}{3} + bh^2 + b\,(h - 2h_1)^2 + nh_1\,(h - h_1)^2\right)$$

$$- 0{,}84\,(h + 2b + nh_1)\,l - \frac{Q}{s} = 0.$$

Für die I-förmigen Blechträger (Fig. 134) fallen die Zellen weg, dagegen ist aber hier die Blechstärke s_1 der Querrippen nicht = der Blechstärke s der Tragwand. Da man hier nur eine Tragwand hat, so ist deshalb für diese Träger

$$\frac{8\,h\,T}{l}\left(\frac{hs}{6} + bs_1\right) - 0{,}84\,(hs + 2bs_1)\,l - Q = 0$$

zu setzen.

Die Größe der Einbiegung der Röhrenbrücke in der Mitte läßt sich durch die bekannte Formel (s. Band I., §. 223)

$$a = \frac{5\,l^3}{384\,WE}\,(Q + G)$$

berechnen. Vielfältigen Beobachtungen zufolge, fällt jedoch diese Einbiegung noch größer aus, wenn sich die Last Q über der Brücke weg bewegt, und nimmt auch mit der Geschwindigkeit dieser Last zu. (Siehe die unten citirten Werke von Becker, Dempsey u.s.w.). Um keine der Haltbarkeit nachtheiligen Durchbiegungen zu erhalten, soll man daher stets mit einer mäßigen Geschwindigkeit über diese wegfahren.

Anmerkung. Bei den Festigkeitsversuchen, welche Hodgkinson an Röhren von kreisförmigen, elliptischen und rectangulären Querschnitten angestellt hat, wurde nicht nur bestätigt, daß die letzteren unter übrigens gleichen Umständen mehr Stärke besitzen, sondern auch noch dargethan, daß die an beiden Enden aufliegende und in der Mitte belastete Röhre von oben herein, also durch Zerdrücken und nicht durch Zerreißen zerbricht. Es hat daher das Schmiedeeisen mit dem Holze die Eigenschaft gemein, daß es dem Zerreißen mehr widersteht als dem Zerdrücken, während es beim Gußeisen umgekehrt ist (s. Band I., §. 212). Deshalb versieht man auch die Decke der Röhre mit mehr Zellen, als den Boden.

Beispiel. Welche Sicherheit besitzt eine Röhrenbrücke von 400 Fuß Länge, 30 Fuß Höhe und 14 Fuß Breite, wenn dieselbe aus Eisenblech von $^5/_8$ Zoll Stärke zusammengesetzt und an jeder der beiden Grundflächen mit 7 Zellen von 2 Fuß Höhe verstärkt wird und wenn sie außer ihrem Gewichte noch eine auf die ganze Brückenlänge gleichmäßig vertheilte Last von 800000 Pfund tragen soll?

Es ist hier

$l = 400 \,.\, 12,\ h = 30 \,.\, 12,\ h_1 = 2 \,.\, 12,\ b = 14 \,.\, 12,\ s = {}^5/_8$ und $n = 7$,

daher der Tragmodul:

$$T = \frac{[Q + 0{,}84\,(h + 2\,b + n\,h_1)\,l\,s]\,h\,l}{8\,s\left(\frac{h^3}{3} + b\,h^2 + b\,(h - 2\,h_1)^2 + n\,h_1\,(h - h_1)^2\right)}$$

$$= \frac{[800000 + 0{,}84 \,.\, 144 \,.\, 400 \,.\, {}^5/_8\,(30 + 2 \,.\, 14 + 7 \,.\, 2)] \,.\, 30 \,.\, 400}{8 \,.\, {}^5/_8 \,.\, 12\left(\frac{30^3}{3} + 14 \,.\, 30^2 + 14 \,.\, 26^2 + 14 \,.\, 28^2\right)}$$

$$= \frac{200\,(800000 + 420 \,.\, 72 \,.\, 72)}{9000 + 12600 + 9464 + 10976} = \frac{200 \,.\, 2977280}{42040} = 14164 \text{ Pfund.}$$

In §. 212, Band I., ist $T = 20000$ Pfund angegeben. Durch Versuche ist gefunden worden im Mittel $K = 15$ Tonnen $= 30000$ Pfund, wonach die Sicherheit reichlich die zweifache wäre. Nimmt man den Elasticitätsmodul des Schmiedeeisens

$E = 25000000$ Pfund an,

setzt die bewegliche Last

$Q = 800000$ Pfund,

das Gewicht der leeren Brücke

$G = 3\,(h + 2\,b + n\,h_1)\,l\,s\,\gamma = 2177280$ Pfund,

und das Maaß des Biegungsmomentes:

$$W = \left(\frac{h^3}{3} + b\,h^2 + b\,(h - 2\,h_1)^2 + n\,h_1\,(h - h_1)^2\right)\frac{s}{2}$$

$$= 42040 \,.\, 1728 \,.\, {}^5/_{16} = 210200 \,.\, 108 = 22701600,$$

so erhält man die entsprechende Durchbiegung der Röhre in der Mitte:

$$a = (Q + G)\,\frac{5}{384}\,\frac{l^3}{WE} = \frac{(800000 + 2177280)\;64000000}{24\,.\,42040\,.\,25000000}$$

$$= \frac{2977280\,.\,64}{24\,.\,42040\,.\,25} = 7{,}55 \text{ Zoll.}$$

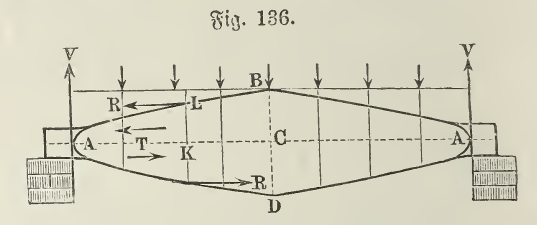
Die bewegliche Belastung Q giebt natürlich nur die Einbiegung:

$$a_1 = \frac{5\,Q\,l^3}{384\;WE} = \frac{Q}{Q + G}\,a = \frac{800000}{2977280}\,a = 0{,}268\;a = 2 \text{ Zoll.}$$

Durch die Nieten und durch die Rippen der Winkelbleche werden natürlich die gefundenen Größen noch etwas abgeändert.

§. 72 **Bogenträger mit Blechfüllung.** Wenn jede der Rippen, Streben und Zugstangen der im Obigen behandelten zusammengesetzten Träger an allen Stellen einen und denselben Querschnitt erhält, so soll man, um Material zu sparen, die Höhe derselben von der Mitte nach den Stützpunkten zu, allmälig an Höhe abnehmen lassen. Ist die Belastung des Trägers AA, Fig. 136,

Fig. 136.



dessen Länge $2\,CA = l$ sein möge, pr. Längeneinheit $= q$, so hat man die Verticalkraft in jedem der Stützpunkte, $V = \frac{1}{2}\,q\,l$, und das Biegungsmoment für die Balkenmitte C, $\frac{1}{2}\,Vl - \frac{1}{4}\,Vl = \frac{1}{4}\,Vl = \frac{1}{8}\,q\,l^2$; sowie die Verticalkraft eines Balkenstückes von der Länge $AK = x$, $V - qx$ und das Moment der Biegung in K, $Vx - \frac{1}{2}\,q\,x^2$.

Bezeichnet man nun noch die veränderliche Höhe $2\,KL$ des Trägers in K, durch y, sowie die Höhe BD desselben in der Mitte C, durch h, und nimmt man an, daß die ganze Last nur von den Hauptrippen ABA und ADA getragen wird, so sind die Axenspannungen jeder Rippe annähernd,

$$R = \frac{Vx - \frac{1}{2}\,q\,x^2}{y} = \frac{q\,x}{2\,y}\,(l - x),$$

und nimmt folglich in der Mitte C, wo $x = \frac{l}{2}$ ausfällt, den Werth

$R_m = \frac{q\,l^2}{8\,h}$ an.

Bei einem Träger mit constanter Höhe h ist die Rippenspannung

$R = \frac{q x}{2 h}(l - x)$, und zwar für $x = 0$, d. i. am Ende des Trägers, $= 0$, und für $x = \frac{l}{2}$, d. i. in der Mitte C desselben, $= \frac{q l^2}{8 h}$. Dieser allmälig von Null bis $\frac{q l^2}{8 h}$ wachsenden Spannung entsprechend müßte, um kein Material zu verschwenden, auch der Querschnitt der Rippen von den Enden nach der Balkenmitte zu allmälig bis $F = \frac{q l^2}{8 h T}$ zunehmen.

Wenn man aber eine veränderliche Höhe y anwendet, so kann man längs des ganzen Balkens eine constante Spannung R erhalten, denn es ist dann nur der Gleichung

$$R = \frac{q x}{2 y}(l - x) = \frac{q l^2}{8 h}, \text{ d. i.}$$

$$y = \frac{4 h x}{l^2}(l - x),$$

Genüge zu leisten.

Hiernach hat man z. B. in den Abständen

$$x = {}^1/_8\, l,\ {}^2/_8\, l,\ {}^3/_8\, l \text{ und } {}^4/_8\, l$$

vom Trägerende A, die erforderlichen Trägerhöhen eines solchen parabolischen Trägers

$$y = {}^7/_{16}\, h,\ {}^3/_4\, h,\ {}^{15}/_{16}\, h, \text{ und } h.$$

Die verticale Schubkraft des Balkens im Abstande $\overline{AK} = x$, $P = V - q x = q\left(\frac{l}{2} - x\right)$ fällt in der Mitte C, wo $x = \frac{l}{2}$ ist, Null aus, und wächst dagegen nach den Enden zu, so daß sie an denselben, wo $x =$ Null ist, den Werth $P = V = \frac{q l}{2}$ annimmt.

Besteht nun die Füllung zwischen den Hauptrippen in einer einfachen Blechwand von der Dicke s und dem veränderlichen Querschnitt $s y$, so hat man die Schubkraft des Trägers pr. Flächeneinheit, und zwar nicht bloß in verticaler, sondern auch in horizontaler Richtung

$$T = \frac{P}{s y} = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{s y}.$$

Bei einem Träger mit constanter Höhe $y = h$ wäre

$$T = \frac{q\left(\frac{l}{2} - x\right)}{s h},$$

und zwar Null, für $x = \frac{l}{2}$, und das Maximum $\frac{q\,l}{2\,s\,h}$, für $x = 0$. Wenn man daher die Stärke s der Füllung nicht variabel, sondern an allen Stellen $s = \frac{q\,l}{2\,h\,T}$ macht, so fällt ein solcher Träger auch aus diesem Grunde unnöthig schwer aus. Giebt man aber dem Träger die durch die Gleichung $y = \frac{4\,h\,x}{l^2}\,(l - x)$ bedingte Parabelform, so würde, da hiernach für $x = 0$, auch $y = 0$ ausfällt, zur Erlangung einer endlichen Spannung T, die Wanddicke $s = \frac{q\,l}{2\,y\,T} = \frac{q\,l}{2\,T\,.\,0} = \infty$ nöthig sein. Aus diesem Grunde erhält ein solcher Träger an den Enden die Höhe $h_1 = \frac{q\,l}{2\,s\,T}$, und erst von der Stelle an die parabolische Form, wo $y = h_1$ ausfällt.

§. 73 **Bogenträger mit Fachwerk.** Ist der Raum zwischen den Rippen durch Fachwerk ausgefüllt, so werden die Schubkräfte des Trägers $ABAD$,

Fig. 137.

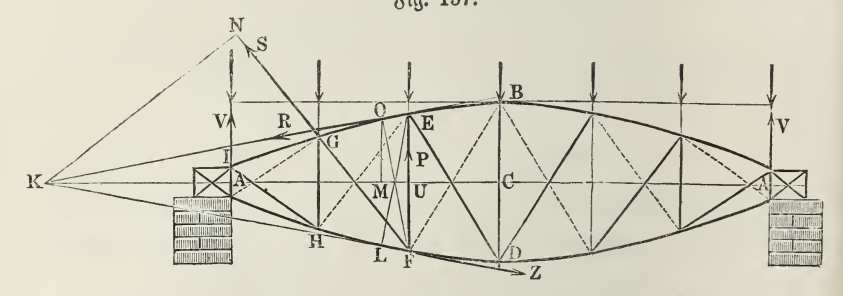


Fig. 137, durch die Streben und Zugstangen aufgenommen. Es sind dann die Verticaldrücke, welche die Streben BD, EF, GH u. s. w. von der oberen nach der unteren Rippe übertragen, $\frac{1}{2}\,q\,c$, $\frac{3}{2}\,q\,c$, $\frac{5}{2}\,q\,c$ u. s. w., wenn c den Abstand der benachbarten Streben von einander bezeichnet. Ebenso hat man die Züge, welche die Zugstangen DE, FG, HI auszuhalten haben, der Reihe nach

$$\frac{1}{2}\,\frac{q\,c}{sin.\,\alpha_1},\ \frac{3}{2}\,\frac{q\,c}{sin.\,\alpha_2},\ \frac{5}{2}\,\frac{q\,c}{sin.\,\alpha_3}\ \text{u. s. w.},$$

wenn α_1, α_2, α_3 u. s. w. die Neigungswinkel dieser Stangen gegen den Horizont bezeichnen, und die Neigungen der Rippen gegen denselben klein genug sind, um außer Acht gelassen werden zu können.

Wie bei den Trägern mit Ausfüllungswänden die Schubkräfte von der

Mitte nach den Enden des Trägers hin allmälig zunehmen, so wachsen also auch bei den Fachwerksträgern, die Druckkräfte in den Streben, und bei gleichen Neigungswinkeln der Zugstangen, auch die Zugkräfte in denselben von der Mitte aus nach den Trägerenden. Es findet folglich auch in dem Fachwerk eines Fachwerksträgers eine Verschwendung an Material statt, wenn bei gleicher Höhe der Streben oder gleicher Neigung der Zugstangen, die Querschnitte dieser Fachwerkstheile auf der ganzen Länge des Trägers immer dieselben bleiben, nämlich $F = \frac{V}{T} = \frac{ql}{2T}$ für die Streben und $F_1 = \frac{ql}{2T_1 \sin. \alpha}$ für die Zugstangen, wobei T und T_1 die entsprechenden Tragmodel bezeichnen. Da nun bei einem parabolischen Träger die Strebenlängen (y) nach den Enden zu abnehmen, während dieselben bei dem rectangulären Träger constant (h) sind, so fallen auch die Gewichte der Streben bei den ersteren kleiner aus als bei den letzteren. Anders ist aber dieses Verhältniß in Betracht der Zugstangen. Bei dem constanten Abstande $c = \frac{l}{n}$ zwischen den benachbarten Streben und der Höhe y derselben folgt für den Neigungswinkel α derselben, $tang. \alpha = \frac{y}{c} = \frac{ny}{l}$, und das Volumen einer Zugstange:

$$\frac{F_1 c}{\cos. \alpha} = \frac{qcl}{2T_1 \sin. \alpha \cos. \alpha} = \frac{ql}{2T_1}\left(y + \frac{c^2}{y}\right).$$

Da y kleiner als h ist, so folgt, daß das Volumen $\frac{F_1 h}{\sin. \alpha} = \frac{ql}{2T_1}\left(h + \frac{c^2}{h}\right)$ der Zugstange eines rectangulären Fachwerksträgers nur bei einem kleinen Abstande c größer ist als das einer solchen Stange bei dem parabolischen Fachwerksträger unter übrigens gleichen Verhältnissen.

Wenn die Hauptrippen um größere Winkel von dem Horizont abweichen, so fallen die im Obigen gefundenen Spannungen der Fachwerksträger etwas anders aus. Es lassen sich diese dann am einfachsten durch Anwendung der Theorie der Momente (s. §. 64) ermitteln. Man findet z. B. hiernach die Spannung R der oberen Rippe, in der Nähe der Strebe EF, welche um $AU = x$ vom Ende A absteht, wenn man von F aus ein Perpendikel $FO = r$ gegen die Richtung dieser Rippe in E fällt, und nun das Moment von R in Hinsicht auf F,

$$Rr = Vx - \frac{1}{2} qx^2, = \frac{1}{2} qx(l - x) \text{ setzt.}$$

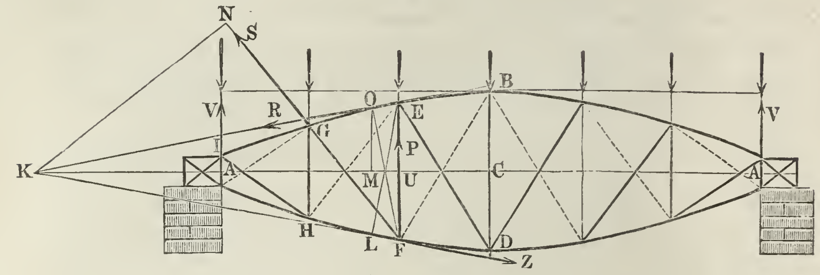
Hiernach ist der Druck in der oberen Hauptrippe

$$1) \quad R = \frac{1}{2} q \frac{x}{r}(l - x).$$

Ebenso ergiebt sich die Spannung Z der unteren Rippe nahe bei EF, wenn

man von E das Perpendikel $EL = Z$ gegen die Richtung dieser Rippe in F fällt, und das Moment von Z in Hinsicht auf E,

Fig. 138.



$$Zz = Vx - \frac{qx^2}{2} = \frac{1}{2}qx\,(l - x) \text{ angiebt.}$$

Hiernach folgt der Zug in der unteren Hauptrippe:

$$2)\quad Z = \frac{1}{2}\,\frac{qx}{z}\,(l - x).$$

Um ferner die Spannungen P und S der Strebe EF und der Zugstange FG zu finden, sehen wir den Durchschnittspunkt K der Richtungen der Kräfte R und Z als Drehungspunkt an, und drücken die Momente der Kräfte P und Z in Hinsicht auf diesen Punkt aus. Bezeichnet p den Abstand KU des Punktes K von der Axe der Strebe EF, sowie s den Abstand KN dieses Punktes von der Axe der Zugstange FG, so hat man

$$Pp = Ss = V\,(p - x) - qx\,(p - \tfrac{1}{2}x),$$

daher ist der Druck in der Strebe EF:

$$3)\ P = \frac{V\,(p - x) - q\,x\,(p - \frac{1}{2}\,x)}{p} = q\left((\tfrac{1}{2}\,l - x) - \frac{x\,(l - x)}{2p}\right),$$

und der Zug in der Zugstange FG

$$4)\quad S = \frac{V\,(p - x) - q\,x\,(p - \frac{1}{2}\,x)}{s} = \frac{q}{s}\left(p\,(\tfrac{1}{2}\,l - x) - \frac{x\,(l - x)}{2}\right).$$

Wenn diese parabolischen Fachwerksträger bei Brücken zur Anwendung kommen, wo, wie aus §. 65 bekannt ist, die Stelle der größten Durchbiegung von der Größe und Ausdehnung der mobilen Last, z. B. eines Dampfwagenzuges, mit abhängig ist, muß man die Träger auch noch mit Zugstangen versehen, welche die Streben nach der entgegengesetzten Seite ziehen und daher mit den Hauptzugstangen sogenannte Andreaskreuze bilden, wie in der Figur durch punktirte Linien angedeutet ist.

(§. 74) **Theorie der Tragbögen.** Es ist für die Praxis auch wichtig, die Biegungsverhältnisse ursprünglich krummer Balken oder Bögen, zumal gußeiserner Bögen zu kennen. Die allgemeine Theo-

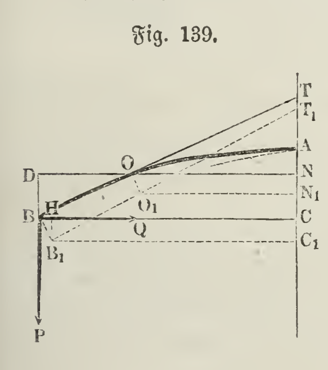
rie derselben ist von der Theorie der Biegung gerader Balken nicht wesentlich verschieden; nur hat man hier das Moment Px der biegenden Kraft nicht $= \frac{WE}{r}$ (s. Band I., §. 215), oder da nach Art. 33 der analyt. Vorlehren, $r = -\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ ist, Px nicht $= -\frac{WE\partial \alpha}{\partial s}$ zu setzen, sondern man muß

$$Px = WE\left(\frac{\partial \alpha - \partial \alpha_1}{\partial s}\right)$$

einführen, weil durch dieses Moment nur der Krümmungswinkel $\partial \alpha$ in $\partial \alpha_1$ umgeändert wird, und daher das Moment zum Biegen um $\partial \alpha$ wegfällt.

Wird durch die Wirkung der biegenden Kräfte die Axe AOB, Fig. 139, eines ursprünglich krummen Balkens in die Form AO_1B_1 umgeändert, so gehen die Coordinaten $AN = x$ und $NO = y$ in die Coordinaten $AN_1 = x_1$ und $N_1O_1 = y_1$ über, und es wird aus dem Tangentenwinkel $NTO = \alpha$ der Tangentenwinkel $N_1T_1O_1 = \alpha_1$, während die Bogenlänge $AO = AO_1 = s$ unverändert bleibt. Bestehen die biegenden Kräfte in einer Verticalkraft P und in einer Horizontalkraft Q, so haben wir das Moment beider Kräfte in Beziehung auf den Punkt O,

Fig. 139.



$$M = P.\overline{OD} + Q.\overline{BD}$$
$$= P(b - y) + Q(a - x),$$

wenn a und b die Höhe AC und die Sehne BC des Bogens AB bezeichnen. Es ist folglich:

$$WE\left(\frac{\partial \alpha - \partial \alpha_1}{\partial s}\right) = P(b - y) + Q(a - x),$$

und daher

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\int [P(b - y) + Q(a - x)]\,\partial s}{WE}.$$

Da $\alpha - \alpha_1$ ein kleiner Bogen ist, so können wir

$$cos.\alpha - cos.\alpha_1 = -2\,sin.\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{2}\right)sin.\left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right) = -sin.\alpha\,.\,(\alpha - \alpha_1)$$

und

$$sin.\alpha - sin.\alpha_1 = 2\,cos.\left(\frac{\alpha + \alpha_1}{2}\right)sin.\left(\frac{\alpha - \alpha_1}{2}\right) = cos.\alpha\,.\,(\alpha - \alpha_1),$$

folglich auch

$$\cos.\alpha - \cos.\alpha_1 = -\frac{\sin.\alpha}{WE}\int[P(b-y) + Q(a-x)]\,\partial s$$

und

$$\sin.\alpha - \sin.\alpha_1 = \frac{\cos.\alpha}{WE}\int[P(b-y) + Q(a-x)]\,\partial s$$

setzen.

Nun ist aber nach Art. 32, Band I., der analyt. Hülfslehren

$$\sin.\alpha = \frac{\partial y}{\partial s},\ \cos.\alpha = \frac{\partial x}{\partial s},$$

also auch

$$\sin.\alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s},\ \cos.\alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s},$$

sowie

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} \text{ annähernd } = \partial y\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right],$$

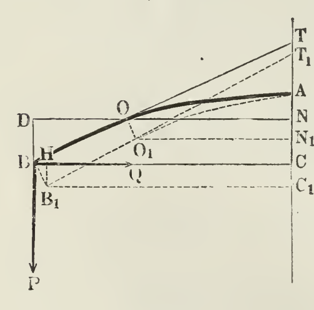
daher läßt sich auch setzen:

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE}\int[P(b-y) + Q(a-x)]\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\partial y,$$

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{\partial x}{WE}\int[P(b-y) + Q(a-x)]\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\partial y.$$

(§. 75) **Parabolische Tragbögen.** In den meisten Fällen haben wir es nur mit sehr gedrückten Bögen zu thun, welche wir stets als Parabelbögen ansehen und behandeln können. Setzen wir nun die Bogenhöhe AC derselben $= a$ und die Bogenweite $BC = b$, so giebt uns die Parabelgleichung

Fig. 140.



$$\frac{\overline{ON}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{AN}{AC},\ \text{d. i. } \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a},$$

es folgt daher

$$x = \frac{a y^2}{b^2},\ \partial x = \frac{2 a y \partial y}{b^2} \text{ und}$$

$$\partial s = \partial y\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right] = \partial y\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right),$$

sowie

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE}\int\left[P(b-y) + Qa\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right)\partial y$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2ay\partial y}{WEb^2}\int\left[P(b-y) + Qa\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right]\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right)\partial y,$$

d. i.

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE} \left\{ \begin{array}{l} P\left(by - \frac{y^2}{2}\right) + Q\,a\left(y - \frac{y^3}{3\,b^2}\right) \\ + \frac{2\,a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{b\,y^2}{3} - \frac{y^4}{4}\right) + Q\,a\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5\,b^2}\right)\right] \end{array} \right\}$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2\,a\,\partial y}{WEb^2} \left\{ \begin{array}{l} P\left(by^2 - \frac{y^3}{2}\right) + Q\,a\left(y^2 - \frac{y^4}{3\,b^2}\right) \\ + \frac{2\,a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{b\,y^4}{3} - \frac{y^5}{4}\right) + Q\,a\left(\frac{y^4}{3} - \frac{y^6}{5\,b^2}\right)\right] \end{array} \right\}.$$

Durch nochmaliges Integriren ergiebt sich nun

$$x_1 - x = \frac{1}{WE} \left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{b\,y^2}{2} - \frac{y^3}{6}\right) + Q\,a\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{12\,b^2}\right) \\ + \frac{2\,a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{b\,y^4}{12} - \frac{y^5}{20}\right) + Q\,a\left(\frac{y^4}{12} - \frac{y^6}{30\,b^2}\right)\right] \end{array} \right\}$$

und

$$y_1 - y = -\frac{2\,a}{WEb^2} \left\{ \begin{array}{l} P\left(\frac{b\,y^3}{3} - \frac{y^4}{8}\right) + Q\,a\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{15\,b^2}\right) \\ + \frac{2\,a^2}{b^4}\left[P\left(\frac{b\,y^5}{15} - \frac{y^6}{24}\right) + Q\,a\left(\frac{y^5}{15} - \frac{y^7}{35\,b^2}\right)\right] \end{array} \right\}.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $y = b$, so geben sie uns in $x_1 - x$ die Höhe $B_1 H = a_1$, um welche das Ende des Balkens durch die Kräfte P und Q herabgezogen wird, und in $y - y_1$ die horizontale Verkürzung $BH = b_1$, welche der Balken durch eben diese Kräfte erleidet. Es ist hiernach

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2\,b}{15}\right) + \frac{Q}{WE}\left(5/_{12}\,a\,b^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$

und

$$b_1 = \frac{P}{WE}\left(5/_{12}\,a\,b^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{Q}{WE}\left(8/_{15}\,a^2\,b + \frac{16\,a^4}{105\,b}\right).$$

Ist die Horizontalkraft $Q = 0$, so hat man

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2\,b}{15}\right) \text{ und } b_1 = \frac{P}{WE}\left(5/_{12}\,a\,b^2 + \frac{a^3}{10}\right),$$

und ist überdies $a = 0$, hat man es also mit einem geraden Barren zu thun, so hat man, wie bekannt,

$$a_1 = \frac{P\,b^3}{3\,WE} \text{ und } b_1 = 0 \text{ (s. Band I., §. 217).}$$

Ein an beiden Enden B und B durch eine Horizontalebene unter- (§. 76) stützter und in der Mitte mit einem Gewichte G belasteter Bogen BAB,

Fig. 141, drückt auf jede seiner Stützen mit der Verticalkraft $P = -\frac{1}{2} G$, und der Horizontalkraft $Q = 0$, da er ungehindert horizontal ausweichen kann. Es ist folglich die Senkung des Scheitels

$$AA_1 = a_1 = \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right)$$

und die Horizontalbewegung der Enden B und B_1

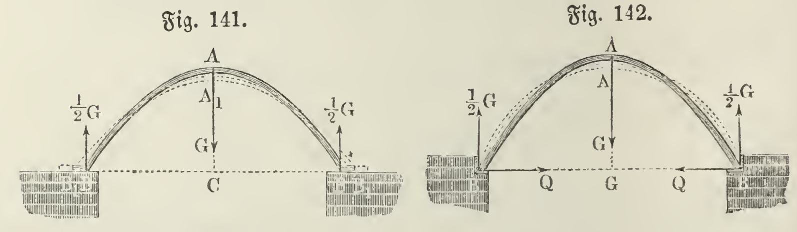
$$BB_1 = b_1 = \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{5\,a b^2}{12} + \frac{a^3}{10}\right).$$

Bei einem geraden Balken von der Länge $l = 2\,b$, welcher in seiner Mitte mit G belastet ist, hat man (Band I., §. 217)

$$a_1 = \frac{1}{16}\,\frac{P l^3}{3\,WE} = \frac{1}{2}\,\frac{G b^3}{3\,WE}$$

also kleiner als in dem vorliegenden Falle.

Fig. 141. Fig. 142.



Stemmt sich der in der Mitte durch ein Gewicht G belastete Bogen BAB, Fig. 142, an den Enden B und B gegen feste Stützen, so ist ein Verrücken in horizontaler Richtung unmöglich und daher $b_1 = 0$. Uebrigens ist auch hier $P = -\frac{1}{2} G$, dagegen folgt nun

$$Q = \frac{1}{2} G \frac{\left(\frac{5}{12}\, a b^2 + \frac{a^3}{10}\right)}{\frac{8}{15}\, a^2 b + \frac{16}{105}\, \frac{a^4}{b}} = \frac{1}{2} G \left(\frac{25\, b}{32\, a} - \frac{a}{28\, b}\right)$$

und die Senkung des Scheitels:

$$a_1 = \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) - \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\left(\frac{5}{12}\, a b^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$

$$= \frac{G}{2\,WE}\left(\frac{b^3}{128} + \frac{23}{6720}\, a^2 b\right),$$

oder meist genau genug,

$$a_1 = \frac{G b^3}{256\,WE},$$

d. i. $42\frac{2}{3}$mal so klein als beim geraden Balken von gleicher Spannweite $2\,b$.

Gleichmässig belastete Tragbögen. Wenn der Bogen AB, (§. 77) Fig. 143, auf seiner ganzen Länge belastet wird, so daß jede Längeneinheit der Horizontalprojection desselben q trägt, so hat man das Kraftmoment, welches ein Stück $\overline{OB}$ um O biegt

Fig. 143.

$$q \cdot \overline{OD} \cdot \tfrac{1}{2} \overline{OD}$$
$$= \tfrac{1}{2} q \, (\overline{BC} - \overline{ON})^2$$
$$= \tfrac{1}{2} q \, (b - y)^2,$$

und daher nach (§. 75):

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{\partial y}{WE} \int \tfrac{1}{2} q \, (b^2 - 2by + y^2) \left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right) \partial y$$

und

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{2ay\partial y}{WEb^2} \int \tfrac{1}{2} q \, (b^2 - 2by + y^2) \left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right) \partial y.$$

Durch wiederholtes Integriren ergiebt sich hieraus:

$$\partial x_1 - \partial x = \frac{q\partial y}{2WE} \left[b^2y - by^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^3}{3} - \tfrac{1}{2} by^4 + \frac{y^5}{5}\right)\right],$$

$$\partial y_1 - \partial y = -\frac{aqy\partial y}{WEb^2} \left[b^2y - by^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^3}{3} - \tfrac{1}{2} by^4 + \frac{y^5}{5}\right)\right],$$

und

$$x_1 - x = \frac{q}{2WE} \left[\frac{b^2y^2}{2} - \frac{by^3}{3} + \frac{y^4}{12} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^4}{12} - \frac{by^5}{10} + \frac{y^6}{30}\right)\right]$$

sowie

$$y_1 - y = -\frac{aq}{WEb^2} \left[\frac{b^2y^3}{3} - \frac{by^4}{4} + \frac{y^5}{15} + \frac{2a^2}{b^4}\left(\frac{b^2y^5}{15} - \frac{by^6}{12} + \frac{y^7}{35}\right)\right].$$

Setzen wir $y = b$, so erhalten wir die verticale Senkung des Bogenendes:

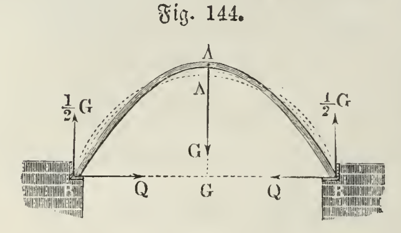
$$HB_1 = a_1 = \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2b^2}{60}\right),$$

und die horizontale Verschiebung desselben:

$$BH = b_1 = \frac{q}{WE}\left(\frac{3\,a b^3}{20} + \frac{a^3 b}{42}\right).$$

Diese Theorie läßt sich auch auf einen Bogen BAB, Fig. 144, anwenden, welcher an seinen beiden Enden B und B unterstützt, übrigens aber mit einem auf die Horizontalprojection

Fig. 144.



$$BB = 2b$$

gleichmäßig vertheilten Gewichte $2bq$ belastet wird. Es ist hier außer dem an jedem Schenkel niederziehenden Gewicht bq noch an jedem Ende eine Verticalkraft P und eine Horizontalkraft Q wirksam und daher die Veränderung a_1 in a und b_1 in b aus den beiderlei Kräften entsprechenden Veränderungen zusammengesetzt, also mit Berücksichtigung des §. 75 Gefundenen:

$$a_1 = \frac{P}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) + \frac{Q}{WE}\left({}^5/_{12}\, a b^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2 b^2}{60}\right)$$

und

$$b_1 = \frac{P}{WE}\left({}^5/_{12} a b^2 + \frac{a^3}{10}\right) + \frac{Q}{WE}\left({}^8/_{15} a^2 b + \frac{16 a^4}{105\, b}\right) + \frac{q}{WE}\left(\frac{3 a b^3}{20} + \frac{a^3 b}{42}\right).$$

Nun ist aber im vorliegenden Falle $P = -\,q b$ und $b_1 = 0$ anzunehmen; es folgt daher:

$$Q\left({}^8/_{15}\, a^2 b + \frac{16\, a^4}{105\, b}\right) = q\left({}^5/_{12}\, a b^3 + \frac{a^3 b}{10}\right) - q\left(\frac{3\, a b^3}{20} + \frac{a^3 b}{42}\right)$$
$$= q\,({}^4/_{15}\, a b^3 + {}^8/_{105}\, a^3 b),$$

d. i.

$$Q = \frac{q b^2}{2\, a},$$

und hieraus wieder:

$$a_1 = -\,\frac{q\, b}{WE}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{a^2 b}{15}\right) + \frac{q\, b^2}{2\, WEa}\left({}^5/_{12}\, a b^2 + \frac{a^3}{10}\right)$$
$$+ \frac{q}{WE}\left(\frac{b^4}{8} + \frac{a^2 b^2}{60}\right) = 0.$$

Es findet also in diesem Falle gar keine Senkung des Scheitels statt. Ueberhaupt erleidet hier der Bogen keine andere Formveränderung als diejenige, welche aus der Spannung desselben entspringt; wir haben es daher hier mit einer sogenannten Gleichgewichtscurve zu thun.

Wäre aber der Bogen überdies noch in seiner Mitte mit einem Gewichte G belastet, so würde die Horizontalkraft am Fuße B

$$Q = \frac{q b^2}{2 a} + \frac{1}{2} G \left(\frac{25 b}{32 a} - \frac{a}{28 b}\right)$$

betragen, und es wäre die Senkung im Scheitel, wie oben (§. 76):

$$a_1 = \frac{G}{2 WE} \left(\frac{b^3}{128} + \frac{23 a^2 b}{6720}\right).$$

Spannung der Bögen. Was die Spannung S oder die Zusammendrückung des Bogens in seiner Axe anlangt, so ist diese die Summe der in der Tangentenrichtung wirkenden Seitenkräfte von den Kräften P und Q, Fig. 145. Mittels des Tangentenwinkels $NTO = \alpha$ ergeben sich diese Seitenkräfte P_1 und Q_1 von P und Q durch die Formeln (§. 78)

Fig. 145.

$$P_1 = P \cos. \alpha$$

und

$$Q_1 = Q \sin. \alpha,$$

es ist daher die Spannung

$$S = Q_1 - P_1$$
$$= Q \sin \alpha - P \cos. \alpha$$
$$= Q \frac{\partial y}{\partial s} - P \frac{\partial x}{\partial s}$$
$$= \frac{Q \partial y - P \partial x}{\sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}},$$

also für einen Parabelbogen, wo

$$\partial x = \frac{2 a y \partial y}{b^2} \text{ und annähernd } \partial s = \partial y \left(1 + \frac{2 a^2 y^2}{b^4}\right)$$

ist:

$$S = \frac{Q - \frac{2 a y}{b^2} P}{1 + \frac{2 a^2 y^2}{b^4}}, \text{ annähernd} = \left(Q - \frac{2 a y}{b^2} P\right)\left(1 - \frac{2 a^2 y^2}{b^4}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{2 a^2 y^2}{b^4}\right) Q - \frac{2 a y}{b^2} \left(1 - \frac{2 a^2 y^2}{b^4}\right) P.$$

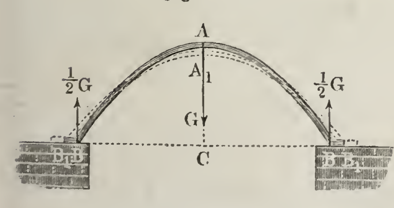


Fig. 146.

Wenn der Bogen BAB, Fig. 146, durch ein in der Mitte hängendes Gewicht G gespannt wird, so hat man:

$$Q = 0 \text{ und } P = -\frac{G}{2},$$

daher die Spannung:

$$S = \frac{a y}{b^2} \left(1 - \frac{2 a^2 y^2}{b^4}\right) G.$$

Da $\frac{a}{b}$ ein kleiner Bruch ist, so fällt S am größten aus für $y = b$, d. i.

$$S = \frac{aG}{b}.$$

Am Scheitel, also für $y = 0$, ist $S = 0$.

In dem Falle, welchen Fig. 144 darstellt, wo sich der in der Mitte mit G belastete Bogen gegen ein festes Hinderniß stemmt, hat man

$$P = -\, {}^1/_2\, G \text{ und } Q = {}^1/_2\, G \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right),$$

daher die Spannung:

$$S = \frac{ay}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right) G + \left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\frac{G}{2}$$

$$= \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25\,ay^2}{32\,b^3}\right) G,$$

wenn man die höheren Potenzen von a vernachlässigt. Dieser Ausdruck wird mit $y - {}^{25}/_{32} \cdot \frac{y^2}{b}$ ein Maximum, und zwar für $y = {}^{16}/_{25}\, b$. Der entsprechende Maximalwerth ist:

$$S = \left(\frac{25}{32}\,\frac{b}{a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2}.$$

Wenn dieser Bogen gleichmäßig belastet ist, so haben wir:

$$P = -\,qy \text{ und } Q = \frac{qb^2}{2a},$$

daher

$$S = \left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right)\frac{qb^2}{2\,a} + \frac{2\,ay}{b^2}\left(1 - \frac{2\,a^2y^2}{b^4}\right) qy$$

$$= \frac{qb^2}{2\,a} + \frac{qay^2}{b^2},$$

und trägt er überdies noch im Scheitel das Gewicht G, so ist

$$S = \frac{qb^2}{2\,a} + \frac{qay^2}{b^2} + \left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25\,ay^2}{32\,b^3}\right) G.$$

Differenziirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf y und setzt $\frac{\partial S}{\partial y} = 0$, so erhält man den Werth für y, welcher S zum Maximo macht, nämlich:

$$2\,qy + \left(1 - {}^{25}/_{16}\,\frac{y}{b}\right) G = 0,$$

d. i.

$$y = \frac{16\,b\,G}{25\,G - 32\,qb}.$$

Da y nicht größer als b sein kann, so folgt, daß in den Fällen, wenn

$$16\,G > 25\,G - 32\,qb, \text{ d. i. } G < {}^{32}/_9\,qb$$

ist, $y = b$ angenommen werden muß, und der Maximaldruck an den Enden B und B statthat.

Durch die Spannung wird auch die Bogenlänge verändert; besteht dieselbe in einem Drucke, so wird der Bogen verkürzt, und besteht sie in einem Zuge, so erleidet der Bogen eine Ausdehnung. Wird das Element ∂s des Bogens durch die Spannung S in ∂s_1 umgeändert, so hat man bei dem Querschnitte F des Bogens (s. Band I., §. 204): (§. 79)

$$S = \left(\frac{\partial s - \partial s_1}{\partial s}\right) FE,$$

und es ist hiernach:

$$s - s_1 = \int \frac{S \partial s}{FE} = \frac{1}{FE} \int S \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \frac{1}{FE} \int \left(1 + \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right) S \partial y,$$

wenn wir es mit einer Parabel zu thun haben. Für einen an beiden Enden gestützten und in der Mitte mit G belasteten Bogen (Fig. 144) ist

$$S = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25}{32}\,\frac{a\,y^2}{b^3}\right) G$$

gefunden worden, daher haben wir die Verkürzung des Bogens:

$$s - s_1 = \frac{G}{FE} \int \left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a} - \frac{a}{56 b} + \frac{ay}{b^2} - \frac{25}{32}\,\frac{a y^2}{b^3}\right) \partial y$$

$$= \frac{G}{FE} \left(\frac{25}{64}\,\frac{b}{a}\,y - \frac{ay}{56 b} + \frac{ay^2}{2\,b^2} - \frac{25}{96}\,\frac{a\,y^3}{b^3}\right),$$

also für die ganze Länge l, wo $y = b$ ist, die Verkürzung:

$$l_1 = \frac{G}{FE} \left(\frac{25}{64}\,\frac{b^2}{a} + \frac{149}{672} \cdot a\right).$$

Wenn hingegen derselbe Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$s - s_1 = \frac{q}{FE} \int \left(\frac{b^2}{2\,a} + \frac{a\,y^2}{b^2}\right) \left(1 + \frac{2\,a^2 y^2}{b^4}\right) \partial y$$

$$= \frac{q}{FE} \left(\frac{b^2 y}{2\,a} + \frac{2\,a}{3\,b^2}\,y^3\right),$$

folglich für den ganzen Bogen von der Länge l:

$$l_1 = \frac{q}{FE} \cdot \frac{b^3}{2\,a} \left[1 + {}^4/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right].$$

Wenn der Bogen l durch $\frac{G}{2}$ und lq zugleich belastet wird, so ist seine Verkürzung die Summe der beiden der letzten Werthe für l_1, folglich:

$$l_1 = \frac{qb^3}{2FEa}\left[1 + {}^4/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] + \frac{G}{FE}\left(\frac{25}{64}\frac{b^2}{a} + \frac{149}{627}a\right).$$

Aus der Verkürzung der Bogenlänge läßt sich nun auch die entsprechende Senkung a_1 des Scheitels finden. Es ist nach (§. 75):

$$\partial s = \partial y\left(1 + \frac{2a^2y^2}{b^4}\right),$$

folglich:

$$s = y\left(1 + {}^2/_3\frac{a^2y^2}{b^4}\right) = y\left(1 + {}^2/_3\frac{ax}{b^2}\right),$$

also für $x = a$ und $y = b$:

$$s = l = b\left(1 + {}^2/_3\frac{a^2}{b^2}\right)$$ (vergl. Band I., §. 160, Anmerkung 1).

Durch Differenziiren nach a ergiebt sich nun:

$$\partial l = {}^4/_3\frac{a\partial a}{b},$$ daher umgekehrt:

$$\partial a = {}^3/_4\frac{b\partial l}{a} \text{ und } a_1 = {}^3/_4\frac{b}{a}l_1.$$

Für den letzten Fall ist daher die Senkung des Scheitels:

$$a_1 = {}^3/_8\frac{b^3}{a^2FE}({}^{25}/_{32}G + qb).$$

(§. 80) **Tragkraft der Bögen.** Die Tragkraft der Bögen läßt sich nach der Theorie der zusammengesetzten Festigkeit beurtheilen, da die Bögen nicht allein durch die Kraft S zusammengedrückt, sondern auch durch die Kräfte P und Q gebogen werden. Der Spannung S entspricht das Zusammendrückungsverhältniß

$$\sigma_1 = \frac{S}{FE},$$

den Kräften P und Q dagegen das Ausdehnungs- und Zusammendrückungsverhältniß

$$\sigma_2 = \frac{e\partial\alpha - e\partial\alpha_1}{\partial s} = \frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s},$$

wenn e den Abstand der entferntesten Faser von der neutralen Axe bezeichnet, und $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$ und ∂s die seither gebrauchten Bedeutungen haben. Es ist hiernach das Verhältniß des Tragmoduls zum Elasticitätsmodul

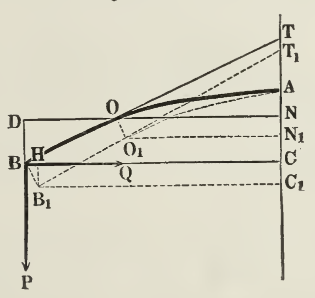
$$\frac{T}{E} = \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{S}{FE} + \frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s}.$$

Da es sich hier um den größten Werth von σ handelt, und da bei der

Biegung Ausdehnung und Zusammendrückung zugleich vorkommt, so hat man die beiden letzten Glieder $\frac{S}{FE}$ und $\frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s}$ stets arithmetisch zu addiren.

Wird der Bogen AB, Fig. 147, durch die Kräfte P und Q ergriffen, so haben wir nach (§. 74):

Fig. 147.



$$\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s} = \frac{P(b-y) + Q(a-x)}{WE},$$

daher:

$$T = \frac{S}{F} + [P(b-y) + Q(a-x)]\frac{e}{W}.$$

Dient dagegen der Bogen zur Unterstützung einer gleichförmig vertheilten Last qb, so ist nach (§. 77):

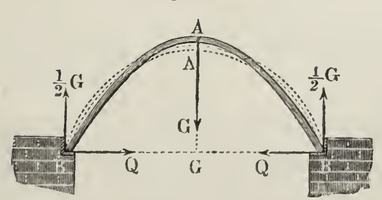
$$\frac{\partial\alpha - \partial\alpha_1}{\partial s} = {}^1/_2\, q\,(b-y)^2,$$

und daher

$$T = \frac{S}{F} + \frac{eq\,(b-y)^2}{2\,W}.$$

Für einen Bogen BAB, Fig. 148, welcher in der Mitte ein Gewicht G trägt und an beiden Enden festgehalten wird, hat man

Fig. 148.



$$P = -\frac{G}{2},\ Q = \frac{1}{2} G \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)$$

und

$$S = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right) G,$$

daher:

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b} + \frac{a\,y}{b^2} - \frac{25\,a\,y^2}{32\,b^3}\right) \frac{G}{F}$$
$$+ \left[\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)(a - x) - (b - y)\right] \frac{G\,e}{2\,W}.$$

Für $x = y = 0$, d. i. für den Bogenscheitel, ist

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b}\right) \frac{G}{F} - \left(\frac{7}{32}\,b + \frac{a^2}{28\,b}\right) \frac{G\,e}{2\,W},$$

oder vielmehr

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} - \frac{a}{56\,b}\right) \frac{G}{F} + \left(\frac{7}{32}\,b + \frac{a^2}{28\,b}\right) \frac{G\,e}{2\,W},$$

weil sich bei der von der neutralen Axe am meisten abstehenden Faser Zusammendrückung mit Zusammendrückung vereinigt.

Für $x = a$ und $y = b$, also für die Fußpunkte, ist hingegen

$$T = \left(\frac{25\,b}{64\,a} + \frac{45\,a}{224\,b}\right) \frac{G}{F}.$$

Um die schwächste, d. i. diejenige Stelle zu finden, wo der größte Tragmodul erfordert wird, differenziiren wir T in Hinsicht auf y und setzen $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$. Es folgt hiernach:

$$\left(\frac{a}{b^2} - \frac{50\,a\,y}{32\,b^3}\right) \frac{2\,W}{F\,e} - \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right) \frac{\partial x}{\partial y} + 1 = 0;$$

oder, da $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2}$, also $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2\,a\,y}{b^2}$ ist:

$$\left(\frac{a}{b^2} - \frac{50\,a\,y}{32\,b^3}\right) \frac{2\,W}{F\,e} + 1 = \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right) \frac{2\,a\,y}{b^2},$$

d. i.

$$\frac{2\,W}{F\,e} \cdot \frac{a}{b^2} + 1 = \left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b} + \frac{50}{32} \cdot \frac{W}{F\,b\,e}\right) \frac{2\,a\,y}{b^2};$$

hiernach ist:

$$y = \frac{2\,W\,a + F\,b^2\,e}{\frac{25}{8}\,W \cdot \frac{a}{b} + \left(\frac{25}{16}\,b - \frac{a^2}{14\,b}\right) F\,e}.$$

Annähernd hat man, wenn man die Glieder mit a vernachlässigt,

$y = {}^{16}/_{25}\, b$, und daher

$$T = \left(\frac{25\,b}{32\,a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2F} + \left[\left(\frac{25\,b}{32\,a} - \frac{a}{28\,b}\right)\cdot\frac{369}{625}\,a - \frac{9}{25}\,b\right]\frac{Ge}{2W}$$
$$= \left(\frac{25\,b}{32\,a} + \frac{423\,a}{700\,b}\right)\frac{G}{2F} + \left(\frac{81\,b}{800} - \frac{369\,a^2}{17500\,b}\right)\frac{Ge}{2W},$$

oder, wenn man die Glieder mit a und a^2 vernachlässigt,

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + \frac{81\,Gbe}{1600\,W}.$$

Wäre die Last $2\,bq$ auf dem Bogen BAB gleichmäßig vertheilt, so hätte man:

$$\frac{e(\partial\alpha - \partial\alpha_1)}{\partial s} = \frac{-\,qb\,(b-y) + {}^1/_2\,q\,(b-y)^2 + \frac{q\,b^2}{2\,a}\,(a-x)}{WE}$$
$$= \frac{-\,{}^1/_2\,q\,(b^2 - y^2) + {}^1/_2\,q\,(b^2 - y^2)}{WE} = 0,$$

und daher:

$$T = \frac{S}{F} = \left(\frac{b^2}{2\,a} + \frac{a\,y^2}{b^2}\right)\frac{q}{F}.$$

Beispiel. Welche Dimensionen b_1 und h_1 hat man dem rectangulären Querschnitt $b_1 h_1$ eines gußeisernen Bogens BAB, Fig. 146, von 12 Fuß Spannweite und 3 Fuß Höhe zu geben, wenn derselbe in der Mitte ein Gewicht von 10000 Pfund tragen soll? Für das Zerbrechen im Scheitel haben wir:

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + {}^7/_{64}\,\frac{Gbe}{W},$$

und für das Zerbrechen im Abstande $y = {}^{16}/_{25}\,b$:

$$T = \frac{25\,b}{64\,a}\,\frac{G}{F} + \frac{81\,Gbe}{1600\,W};$$

da der erstere Ausdruck einen größeren Werth giebt, so werden wir nur diesen in Betracht ziehen. Führen wir den Tragmodul $T = 10000$ Pfund ein, so läßt sich setzen:

$$1 = {}^{25}/_{64}\cdot\frac{b}{aF} + \frac{7\,b\,e}{64\,W}.$$

Nun ist aber $\frac{b}{a} = {}^6/_3 = 2$, $b = 6$ Fuß $= 72$ Zoll, ferner $F = b_1 h_1$, $W = \frac{b_1 h_1^3}{12}$ und $e = {}^1/_2\,h_1$, wobei b_1 und h_1 die gesuchten Querschnittsdimensionen des Bogens bezeichnen; daher folgt:

$$1 = \frac{25\,.\,2}{64\,b_1 h_1} + \frac{7\,.\,9\,.\,6}{8\,b_1 h_1^2},\ \text{oder}\ b_1 h_1^2 = {}^{25}/_{32}\,h_1 + \frac{7\,.\,9\,.\,3}{4}.$$

Nimmt man nun noch $h_1 = 10\,b_1$ an, so ergiebt sich:

$$h_1^3 = 7{,}8\,h_1 + 472{,}5$$

und daher:

$h_1 = \sqrt[3]{472,5 + 64} = \sqrt[3]{536,5} = 8,12$ Zoll, sowie $b_1 = 0,812$ Zoll.

Für einen geraden gußeisernen Balken hätte man bei der Länge $l = 12$ Fuß $= 144$ Zoll und dem Gewichte $G = 10000$ Pfund, nach I., §. 240:

$$G l = 4\, b_1 h_1^2 \cdot \frac{T}{6},$$

daher hier, wo $G = T$ ist,

$$b_1 h_1^2 = \tfrac{3}{2} . l = \tfrac{3}{2} . 72 = 108, \text{ oder } h_1^3 = 1080,$$

so daß nun

$$h_1 = \sqrt[3]{1080} = 10,26 \text{ und } b_1 = 1,026 \text{ Zoll folgt.}$$

Nimmt man das Gewicht eines Cubikzolles Eisen $= 0,26$ Pfund an, so erhält man das Gewicht des gußeisernen Bogens, da dessen Länge (s. Bd. I, §. 160, Anmerkung 1)

$$l_1 = 2 b \left[1 + \tfrac{2}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 72\,(1 + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{4}) = 72 + 12 = 84 \text{ Zoll}$$ gesetzt werden kann,

$$G_1 = 0,26 . b_1 h_1 l_1 = 0,26 . 8,12 . 0,812 . 84 = 144 \text{ Pfund.}$$

Dagegen ist das Gewicht des geraden Balkens von gleichem Stoffe und von gleicher Tragkraft:

$$G_1 = 0,26 . 10,26 . 1,026 . 72 = 197 \text{ Pfund.}$$

§. 81 **Bogenträger aus Holz und Gusseisen.** Bei gleichem Querprofile und gleichem Tragmodul, sowie unter übrigens gleichen Verhältnissen, besitzen, dem Vorstehenden zufolge, die Träger, mit bogenförmiger Axe, die sogenannten Bogenträger, eine größere Tragkraft als die sogenannten Balkenträger, deren Längenaxe eine gerade ist. Da nun die Bogenträger aus Gußeisen gleich beim Gusse die Bogenform erhalten, so kann der Tragmodul bogenförmiger Balken von dem der geraden Balken nicht sehr verschieden sein, und deshalb ist denn auch bei gußeisernen Trägern die Anwendung der Bogenform von besonderem Vortheil. Anders ist es aber bei Trägern aus Holz oder Schmiedeeisen. Da das Holz in einem gewissen Grade auch das Eisenblech durch das Biegen bei seiner Verwendung zu Bogenträgern an Tragkraft verliert, so ist der Tragmodul eines Trägers aus gebogenem Holze oder Eisenblech kleiner als der eines geraden Trägers oder Balken und daher bei diesen Stoffen die Bogenform mit Vorsicht und namentlich immer nur von mäßiger Krümmung anzuwenden. Ist r der Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens und e der größte Abstand seiner Fasern von der neutralen Axe, so hat man die relative Ausdehnung oder Zusammendrückung dieser Fasern (s. Bd. I., §. 215):

$$\sigma = \frac{e}{r},$$

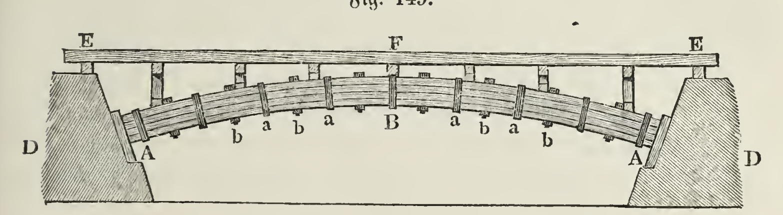
und daher die entsprechende Spannung:

$$S = \sigma E = \frac{e}{r} E,$$

wo E den Elasticitätsmodul bezeichnet.

Da hiernach die Spannung des gebogenen Balkens direct wie die Dicke oder Höhe ($2e$) und umgekehrt wie der Halbmesser r der Krümmung desselben wächst, so setzt man ihn mit Vortheil aus dünnen brettförmigen Stücken (Bohlen) zusammen, indem man dieselben mit ihren breiten Flächen übereinander legt, zusammenschraubt u. s. w. Einen solchen Bohlenbogen ABA, welcher aus vier über einander liegenden Bohlen besteht, führt Fig. 149

Fig. 149.



vor Augen. Dieser Bogen trägt einen Balken EFE, und stützt sich gegen die Widerlager DD. Die Bohlen, aus welchen derselbe besteht, werden durch Bänder $a, a \ldots$ und Schrauben $b, b \ldots$ zusammengehalten. Die Balkenbögen werden aus ganzen Balken in ähnlicher Weise zusammengesetzt; übrigens verbindet man auch die über einander liegenden Balken noch durch Verzahnung oder durch eingesetzte Dübel, wie gerade Balken, Fig. 121, noch fester mit einander. Zum Biegen der Balken und Bohlen zu Tragbögen ist Lärchen-, Kiefern-, Tannen- und Eichenholz, und zwar im grünen Zustande, zu verwenden. Man biegt diese Holzstücken von der Mitte aus nach den Enden zu auf einem besonderen Gerüste, und läßt sie auf diesem mindestens zwei Monate lang im gespannten Zustande liegen. Bei diesem Biegen des frischen Holzes wird natürlich die Elasticitätsgrenze bedeutend überschritten, und es ist daher zu erwarten, daß der Festigkeitsmodul des trockenen Balkens, welcher eine bleibende Bogenform angenommen hat, kleiner ist als derjenige, welchen er ohne Biegung haben würde. Ardant findet ihn kaum ein Viertel von dem eines einfachen geraden Balkens. Nach Band I., §. 212, wäre z. B. für Holz im Mittel die relative Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze

$$\sigma = \frac{e}{r} = {}^1/_{600},$$

und daher der entsprechende Krümmungshalbmesser:

$$r = 600\, e,$$

z. B. für $e = {}^1/_2$ Fuß, $r = 300$ Fuß, daher bei einer Spannweite $s = 50$ Fuß, die zulässige Spannhöhe $h = \frac{s^2}{8r} = \frac{2500}{2400}$ nur $= 1{,}06$ Fuß und folglich die Krümmung $\frac{h}{s} = {}^1/_{50}$. Erfahrungsmäßig kann man

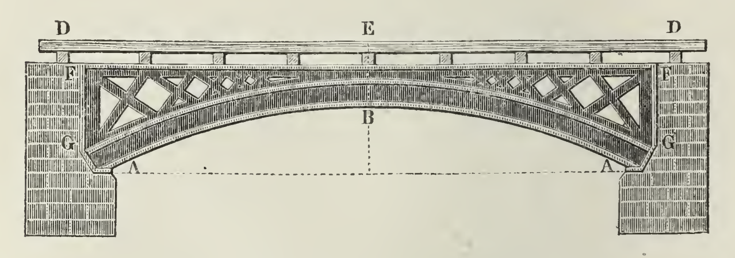
nach Wiebeking (s. dessen allgemeine Wasserbaukunst Band III.) Balken von Tannenholz um $\frac{h}{s} = {}^1/_{25}$, und solche von Eichenholz um $\frac{h}{s} = {}^1/_{40}$ biegen; die viel schwächeren Bohlen von vielleicht nur zwei Zoll Stärke lassen sich natürlich in einem viel stärkeren Verhältnisse krümmen, z. B. um $\frac{h}{s} = {}^1/_{10}$. Die einzelnen Balken und Bohlen haben eine Länge von höchstens 50 Fuß; bei größeren Spannweiten muß man folglich mehrere Balken oder Bohlen der Länge nach an einander anstoßen (schiften, s. §. 66).

Bei einer anderen Construction von Bohlenbögen werden die Bohlen nicht über, sondern neben einander gelegt, weshalb dieselben auch nicht krumm gebogen, sondern nur krumm geschnitten werden. Hierbei geht allerdings viel Holz verloren; auch erfordert diese Construction eine sehr solide Verbindung der Bohlen oder Felgen unter einander.

Schmiedeeiserne Tragbögen lassen sich natürlich mit Vortheil aus Eisenblech ausschneiden und zusammennieten.

Die Art und Weise, wie ein gußeiserner Bogen als Träger dient, ist aus Fig. 150 zu ersehen. Der eigentliche Bogen ABA ist außen und innen

Fig. 150.



durch eine breite Rippe verstärkt und zur Unterstützung des Balkens DED dient eine breite Tragwand FF, welche den ganzen Bogen oben horizontal begrenzt. Das Ganze stützt sich mittels starker Flantschen an die Widerlagsmauern G, G. Wenn man diese Bögen aus mehreren Theilen zusammensetzt, so läßt man die einzelnen Stücke in Flantschen an einander anstoßen und verbindet dieselben mit einander durch Schraubenbolzen.

§. 82 Die im Obigen (§. 74 u. s. w.) abgehandelte Theorie der Tragkraft von krummen Balken oder Bögen ist von Ardant (s. dessen am Ende des Capitels angeführte Schrift) durch Versuche an verschiedenen Holzbögen erprobt worden. Was z. B. den Horizontalschub anlangt, so ist für den Fall, daß die Last G in der Mitte des Bogens hängt, derselbe (§. 76):

$$Q = {}^1/_2\, G \left(\frac{25\, b}{32\, a} - \frac{a}{28\, b}\right),$$

und für den Fall, daß dieselbe längs der Sehne des Bogens gleichmäßig vertheilt ist, dieser Schub (nach §. 77):

$$Q_1 = \frac{q b^2}{2a} = \frac{Gb}{4a}.$$

Obgleich diese Formeln nur unter der Voraussetzung gefunden worden sind, daß die Träger nach der Parabel gebogen sind, so stimmen doch dieselben mit den Ergebnissen der Versuche an nach dem Kreise gebogenen Trägern ziemlich überein. So findet z. B. Ardant für einen Halbkreisbogen, im ersten Falle:

$$Q = 0{,}32\ G,$$

und im zweiten Falle:

$$Q_1 = 0{,}22\ G,$$

während die Formeln, wenn man darin $b = a$ setzt, auf

$$Q = 0{,}37\ G \text{ und}$$
$$Q_1 = 0{,}25\ G$$

führen.

Bei den häufiger angewendeten gedrückten Bögen ist, wie zu erwarten war, die Uebereinstimmung zum Theil noch größer.

Für die letztere Belastungsweise ist, wenn das Verhältniß der halben Spannweite b zur Spannhöhe a,

$\frac{b}{a} =$	2	3	4	5	10	beträgt,
nach Ardant: $Q =$	0,54 G	0,775 G	1,02 G	1,33 G	3,33 G,	
und dagegen nach der Formel $Q = \frac{Gb}{4a}$: $Q =$	0,50 G	0,75 G	1,00 G	1,250 G	2,500 G.	

Was die durch die längs der Sehne gleichmäßig vertheilte Last hervorgebrachte Senkung des Scheitels betrifft, so kann dieselbe natürlich bei der Kreisform des Trägers nicht Null sein. Ardant findet dieselbe für einen Halbkreisbogen:

$$a_1 = 0{,}007\ \frac{Gb^3}{WE} = 0{,}084\ \frac{Gb^3}{b_1 h_1^3 E},$$

wenn b_1 und h_1 die Querschnittsdimensionen des Bogens bezeichnen.

Bei einer längs der Sehne gleichmäßigen Belastung hat der Parabelbogen nur durch seine Druckfestigkeit zu widerstehen, und es ist der entsprechende Querschnitt dieses Tragbogens (s. §. 80):

$$F = b_1 h_1 = \left(\frac{b^2}{2a} + a\right)\frac{G}{2bT} = \left(\frac{b}{2a} + \frac{a}{b}\right)\frac{G}{2T}.$$

Ein kreisbogenförmiger Träger muß dagegen auch durch seine Biegungsfestigkeit widerstehen, und es findet Ardant für denselben, wenn dessen Halbmesser durch r bezeichnet,

$$F = b_1 h_1 = \left(\mu + \frac{\nu r}{4 h_1}\right) \frac{G}{2 T},$$

wobei für

$\frac{b}{a} =$	2	3	4	5	10	15	20
$\mu =$	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
und $\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001

zu setzen ist. Nach Ardant wäre für Tragbögen aus Holz

der Tragmodul T nur $= 30$ Kilogr. $= 410$ Pfund,

und für solche aus Gußeisen

der Tragmodul $T = 500$ Kilogr. $= 6840$ Pfund

zu setzen.

Beispiel. Eine Brücke soll aus mehreren Brückenfeldern von je 350000 Pfund Belastung und 72 Fuß Spannweite bestehen, und die Unterstützung dieser Last soll durch sieben Bögen von 12 Fuß Höhe erfolgen, welche Querschnittsdimensionen hat man diesen Bögen zu geben?

Es ist hier $G = {}^{350000}/_7 = 50000$ Pfund, $a = 12$, und $b = 36$ Fuß. Bei einer parabolischen Form dieser Bögen wäre

$$b_1 h_1 = ({}^{36}/_{24} + {}^{12}/_{36}) \frac{G}{2 T} = 0,917 \frac{G}{T},$$

und dagegen bei der Kreisform, da hier der Halbmesser

$$r = \tfrac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} + a\right) = \tfrac{1}{2}(36 . 3 + 12) = 60 \text{ Fuß sowie } \mu = 1,550 \text{ und } \nu = 0,263 \text{ ist,}$$

$$b_1 h_1 = \left(1,550 + 0,263 \cdot \frac{15}{h_1}\right) \frac{G}{2 T} = \left(0,775 + \frac{1,972}{h_1}\right) \frac{G}{T}.$$

Für hölzerne Bögen ist $T = 410$, daher

$$\frac{G}{T} = {}^{50000}/_{410} = 122,$$

folglich im ersten Falle:

$$b_1 h_1 = 0,917 . 122 = 112 \text{ Quadratzoll,}$$

also wenn man $h_1 = {}^3/_2\, b_1$ nimmt,

$$b_1 = \sqrt{{}^2/_3 . 112} = \sqrt{74,6} \ldots = 8,62 \text{ und } h_1 = 12,93 \text{ Zoll.}$$

Nimmt man $b_1 = 8^1/_2$ und $h_1 = 12$ Zoll an, so kann man den Bogen aus sechs Bohlen von je $8^1/_2$ Zoll Breite und 2 Zoll Dicke zusammensetzen.

Im zweiten Falle bei der Kreisform wäre dann

$$b_1 h_1 = 0{,}775 \,.\, 122 + \frac{1{,}972 \,.\, 122}{{}^1\!/_{12}\, h_1} = 94{,}55 + \frac{2887}{h_1}.$$

Auch hier $h_1 = {}^3\!/_2\, b_1$ gesetzt, folgt:

$$ {}^2\!/_3\, h_1^2 = 94{,}55 + \frac{2887}{h_1},$$

so daß nun

$$h_1 = \sqrt[3]{4331 + 142\, h_1} = 19 \text{ Zoll, und } b = 12^2\!/_3 \text{ Zoll}$$

folgt.

Da man im letzteren Falle so sehr große Querschnittsdimensionen nöthig hat, so wendet man hier lieber gußeiserne Bögen an. Für sie ist

$$\frac{G}{T} = {}^{50000}\!/_{6840} = 7{,}30$$

und daher

$$b_1 h_1 = 0{,}775 \,.\, 6{,}38 + \frac{1{,}972 \,.\, 7{,}30 \,.\, 12}{h_1} = 4{,}94 + \frac{172{,}75}{h_1}.$$

Nimmt man $h_1 = 8\, b_1$ an, so folgt

$$h_1 = \sqrt[3]{1382 + 39{,}5\, h_1} = 12{,}3 \text{ Zoll},$$

und folglich:

$$b_1 = \frac{h_1}{8} = 1{,}54 \text{ Zoll}.$$

Der Horizontalschub eines Bogens gegen die Widerlager ist

$$Q = 0{,}775 \,.\, G = 0{,}775 \,.\, 50000 = 38750 \text{ Pfund},$$

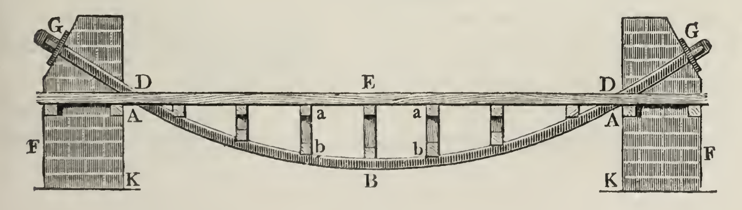
also für alle sieben Bögen:

$$= 7 \,.\, 38750 = 271250 \text{ Pfund},$$

während der Verticaldruck $= \frac{G}{2} = 175000$ Pfund beträgt. Es ist natürlich dem Widerlager eine gewisse Dicke d zu geben, damit es die nöthige Stabilität besitze.

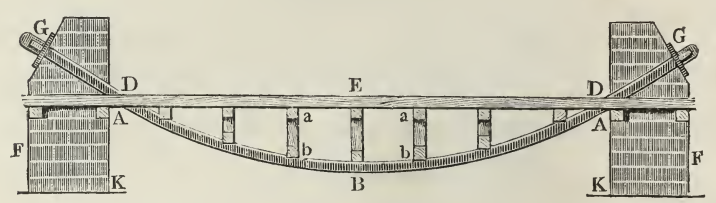
Hängebögen. Wenn man den Tragbogen nicht nach oben, sondern nach unten, folglich in die Richtung der Last stellt, so findet in Hinsicht auf den seither betrachteten Fall nur der Unterschied statt, daß der Bogen durch die Belastung dort comprimirt und hier ausgedehnt wird, daß er also im ersten Falle durch seine Druck- und im letzteren Falle durch seine Zugfestigkeit widerstehen muß. Da das Schmiedeeisen eine größere Zug- und das Gußeisen eine größere Druckfestigkeit besitzt, so ist das erstere mehr zu einer solchen umgekehrten Bogenstellung geeignet als das Gußeisen. Einen solchen Tragbogen führt Fig. 151 vor Augen. Es ist ABA ein schmiede-

Fig. 151.



eiserner Bogen, *DED* der von ihm getragene Balken, ferner sind *FK*, *FK* die beiden Widerlagspfeiler, und *G*, *G* Keile und Unterlagsplatten, womit sich die Bogen von außen gegen die Widerlager stützen. Natürlich sind es

Fig. 152.



alle Mal mindestens zwei neben einander liegende Tragbögen, welche einen oder mehrere Balken wie *DED* unterstützen, und es besteht nun die Verbindung dieser Theile unter einander durch die Querbalken *a*, *a* . . ., *b*, *b* . . . und Tragsäulen *ab*, *ab* . . . Die Wirkung eines solchen Tragbogens auf die Widerlager ist, wie bei den umgekehrten Häng- und Sprengwerken (§. 58), die umgekehrte, nämlich von außen nach innen; man hat also hier dafür zu sorgen, daß die Widerlager nicht um die inneren Kanten *K*, *K* nach innen kippen. Uebrigens kann man einen Balken *DED* durch einen solchen Bogen ebenso gut von unten als von oben unterstützen, wenn man nur die Tragsäulen *ab*, *ab* durch Hängesäulen ersetzt. Man hat es dann mit einem sogenannten Hängebogen zu thun und nennt auch die durch Hängebögen getragenen Brücken Hängebrücken (franz. ponts suspendus; engl. suspension-bridges). In der Regel bildet man diese Bögen nicht aus krummem Holz oder Eisen, sondern man läßt dieselben entweder aus Seilen, und namentlich Drahtseilen, oder aus schmiedeeisernen Ketten bestehen. Die hierzu verwendeten Spann- oder Tragseile (franz. câbles en fil de fer; engl. cables of iron-wire) bestehen aus Draht von $\frac{1}{2}$ bis 2 Linien Dicke, und haben je nach der Spannweite u. s. w., eine Stärke von 1 bis 10 Zoll. Die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz, welche eine Spannweite von 870 Fuß hat, wird z. B. von vier Seilen getragen, welche aus 1056 Drähten von je $\frac{1}{8}$ Zoll Stärke bestehen, und $5\frac{1}{4}$ Zoll dick sind, und die Drahtbrücke über den Niagara-Wasserfall, von 822 Fuß Spannweite, besteht aus vier Drahtseilen, welche bei 3640 Drähten einen Durchmesser von 10 Zoll haben. Damit die nur neben einander liegenden und übrigens gehörig gefirnißten Drähte eines Taues gehörig zusammenhalten, sind sie in Abständen von circa 1 Fuß ungefähr 1 Fuß lang mit anderem Draht umwickelt.

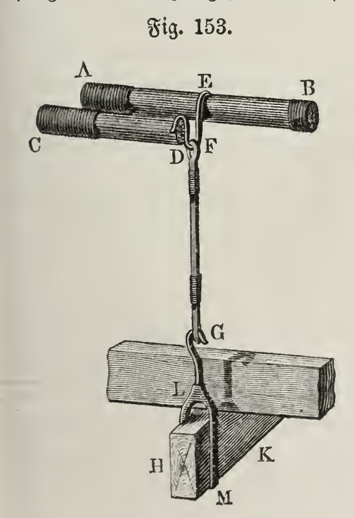
Die Glieder der Tragketten (franz. chaînes; engl. chains) bestehen aus mehreren neben einander liegenden und aufs Hohe gestellten Eisenschienen

von 8 bis 12 Fuß Länge, und sind durch cylindrische Bolzen mit einander verbunden. Der Querschnitt eines Kettengliedes und folglich auch die Anzahl und die Querschnittsdimensionen der einzelnen Schienen eines ganzen Gliedes sind natürlich von der Spannweite, Höhe u. s. w. abhängig. Die 420 Fuß spannende Kettenbrücke zu Prag wird z. B. von acht Ketten getragen, deren Glieder aus je sechs 10 Fuß langen, 4 Zoll hohen und $^7/_{12}$ Zoll dicken Schienen zusammengesetzt sind; die 630 Fuß spannende Kettenbrücke zu Pesth ruht hingegen nur auf vier Ketten mit 12 Fuß langen und $10^1/_4$ Zoll hohen Gliedern, welche je 10 bis 11 Schienen enthalten, die zusammen in der Mitte der Kette eine Dicke von 11,87 Zoll und an den Enden derselben eine solche von 12,1 Zoll haben. Endlich hat man Hängebrücken aus über einander liegenden Eisenbändern construirt; eine größere Brücke dieser Art befindet sich zu Suresnes bei Paris. Dieselbe hat eine Spannweite von 63 Meter und es besteht hier jedes Tragseil aus 20 über einander liegenden gewalzten Eisenbändern von 8,1 Centimeter Breite und 3,83 bis 4,15 Millimeter Dicke.

Hängebrücken. Das Hängewerk (franz. suspensoires; engl. suspension rods), welches die Brückenbalken mit den Spann- oder Tragseilen verbindet, besteht entweder aus schmiedeeisernen Hängestangen oder aus Hängeseilen. Die Art und Weise, wie diese Stangen oder Seile einerseits mit den Spannketten und andererseits mit den Balken der Brücke zu verbinden sind, ist aus Folgendem zu ersehen. §. 84

Hat eine Drahtbrücke nicht je zwei neben einander hängende Seile, so hängt man die Hängeseile mittelst einfacher Oehre an das Tragseil; besteht sie hingegen aus je zwei neben einander hängenden Seilen, so werden die Hängeseile mittels Haken an ein solches Seilpaar aufgehangen. Diese Aufhängungsweise ist in Fig. 153 dargestellt. AB und CD sind die beiden Seile, DE ist der Haken und FG stellt das Hängeseil vor. Das Tragseil CD ist unmittelbar beim Haken abgeschnitten gedacht. Die Enden HK der Querbalken oder Unterzüge, auf welchen die ganze Brücke ruht, sind entweder mit Bügeln LM umgeben, deren hakenförmige Köpfe in die unteren Oehre G der Hängeseile eingehakt werden, oder sie sind von unten mit Eisenplatten bekleidet, und es

Fig. 153.



werden die durch die Querbalken und diese Platten gehenden, zu diesem Ende durchlochten oder schraubenförmig zugeschnittenen Enden der Hängestangen durch Keile oder starke Schraubenmuttern mit den ersteren fest verbunden.

Die Art und Weise, wie die Hängestäbe an die Tragketten angehangen werden, ist aus Fig. 154 und Fig. 155 zu ersehen. Bei der ersteren An-

Fig. 154.

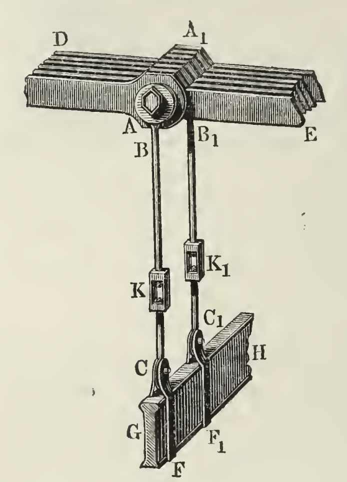
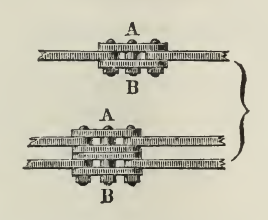


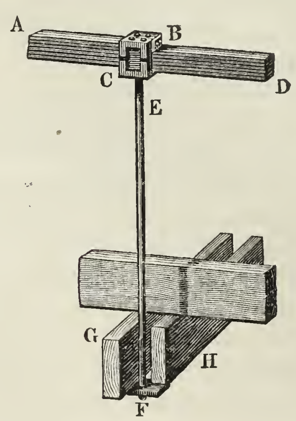
Fig. 155.



ordnung hängen die Hängestäbe BC, B_1C_1 unmittelbar an dem Bolzen AA_1, Fig. 154, welcher die Kettenglieder DA und EA_1 mit einander verbindet. Die mit Stell- oder Scheerengliedern K, K_1 versehenen Hängestangen sind auch hier mittels Bügel CF, C_1F_1 an die gußeisernen Querbalken angeschlossen. Bei älteren Kettenbrücken sind die Kettenglieder durch besondere Blätter mit einander verbunden, welche in ihrer Mitte noch besondere Bolzen, A, B, Fig. 155, tragen, woran dann die Hängestangen aufgehangen werden.

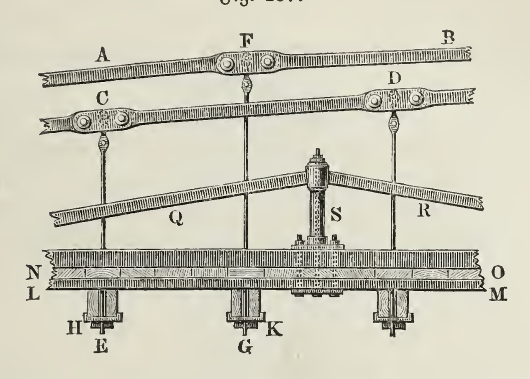
Die Aufhängung der Brücke an ein Bandeisenseil ist in Fig. 156 abgebildet. Es ist hier an jeder Stelle, wo oben ein Band AB sich endigt, und unten ein neues Band hinzutritt, eine gußeiserne Klemmbüchse BC aufgesetzt, an welche die Enden B und C, nachdem sie durch dieselbe gegangen sind, durch je zwei Schrauben befestigt werden. Die mit einem Kopfe in der Klemmbüchse aufgehangene Hängestange EF trägt an ihrem unteren Ende eine Eisenplatte F, auf welcher die Enden von zwei Querbalken G und H aufruhen, zwischen welchen die Hängestange hindurchgeht.

Fig. 156.



Meist hat man auf einer und derselben Seite der Brücke zwei Tragketten über einander, wie z. B. AB und CD, Fig. 157, und deshalb gehen auch

Fig. 157.



noch einmal so viel Hängestäbe als Kettenglieder nach der Brücke herab; ist folglich die Länge der Kettenglieder 10 bis 12 Fuß, so beträgt die Entfernung zwischen je zwei Hängestäben CE und FG, 5 bis 6 Fuß. Die Figur zeigt auch noch, wie die unteren Enden der Kettenstäbe durch Fußplatten H, K und Keile E, G mit den Querbalken verbunden sind. Auf den Querbalken liegen die Längenschwellen wie LM, quer darüber wieder eine Bohlenlage NO, oder eine Holzpflasterung u. s. w.

Was die Breite der Brückenbahn anlangt, so rechnet man auf eine Laufbahn 3 bis 6 und auf eine Fahrbahn 7 bis 12 Fuß; eine Brücke mit zwei Lauf- und zwei Fahrbahnen erhält folglich eine Totalbreite von 20 bis 36 Fuß.

Um der Brücke eine größere Steifigkeit zu geben, versieht man die Brückenbahn noch durch besondere Verstrebungen, wie z. B. QRS, Fig. 157; sehr zweckmäßig sind, z. B. die nach dem Principe der Gitterwände construirten Steifwände. Man kann auch nach Cadiat und Oudry die Querbalken durch einen Gitterbalken ersetzen, wobei sich die Last eines Balkens auf das ganze Gitterwerk vertheilt. Auch giebt man zu diesem Zwecke der Brückenbahn eine schwache Wölbung.

Die Bogenhöhe der Hängebrücken ist in Ansehung der ganzen Brücken- §. 85
länge meist sehr klein ($^1/_7$ bis $^1/_{25}$ der Sehne), daher die Spannung der Seile oder Ketten sehr bedeutend (s. Band I., §. 157); es haben daher auch die Pfeiler, über welche die Seile oder Ketten weggehen, und die Anker, mit welchen die Seil- oder Kettenenden an den Ufern befestigt sind, eine bedeutende Kraft auszuhalten, und es sind deshalb Pfeiler von hoher Stabilität und Widerlager von bedeutendem Widerstande in Anwendung zu brin-

gen. Die Entfernungen zwischen je zwei Pfeilern macht man, um nicht zu schwere Seilketten zu erhalten und die Pfeiler nicht zu sehr zu belasten, nicht gern über 500 Fuß, doch kommen auch Umstände vor, welche zu größeren Spannweiten nöthigen; es beträgt dieselbe z. B. bei der Menai-Kettenbrücke in England 560 Fuß und bei der Seilbrücke zu Freiburg in der Schweiz sogar 840 Fuß.

Wenn die Kette zu beiden Seiten eines Pfeilers ungleich gespannt wird, was bei einer einseitigen Belastung stets eintritt, so sucht dieselbe über ihrem Lager nach der Seite der größeren Spannung fortzugleiten; da nun aber die Kette mit dem Kopfe des Pfeilers durch die aus der Mittelkraft der Spannungen entspringende Reibung bis zu einem gewissen Grade verbunden ist, so hat hiernach der Pfeiler einer der Reibung gleichen Seitenkraft durch seine Stabilität zu widerstehen. Aus diesem Grunde hat man denn auch Pfeiler von großen Breiten und Dicken anzuwenden, oder besondere Mittel zu ergreifen, um diese Wirkungen der ungleichen Belastung zu ermäßigen. Diese Mittel bestehen aber entweder darin, daß man die Ketten über Rollen oder Walzen laufen läßt, und dadurch die gleitende Reibung auf eine kleinere Zapfen- oder Walzenreibung zurückführt, oder daß man die Ketten an einen Sector anschließt, welcher, sich auf dem Kopfe des Pfeilers wälzend, sich nach der einen oder nach der anderen Seite hin neigen läßt, oder daß man endlich gar den Pfeiler durch eine Säule ersetzt, welche um eine horizontale Axe drehbar ist. In der Anordnung von Fig. 158 sind die zwei Ketten AB, CD über gewöhnliche Leitrollen E, E, F, F gelegt, in Fig. 159 liegen hingegen die beiden Ketten auf einem gußeisernen Sattel EFE, welcher wieder auf neun gußeisernen Walzen ruht. Diese Walzen werden endlich von einer Fußplatte GH unterstützt, welche auf dem Kopfe des Kettenpfeilers festsitzt. Wenn die beiden Ketten auf der einen Seite mehr als auf der anderen belastet sind, so rollt der ganze Sattel sammt den darauf liegenden Ketten so weit fort, bis die Ketten auf

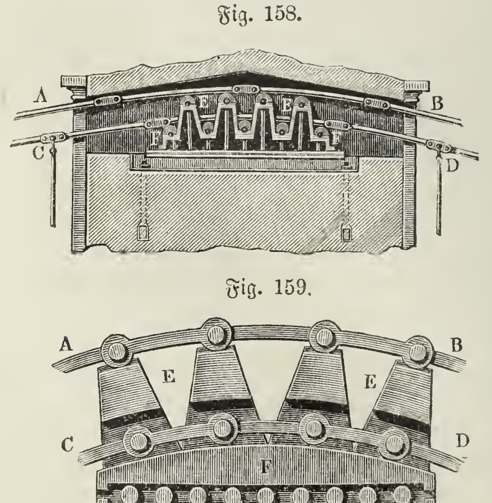
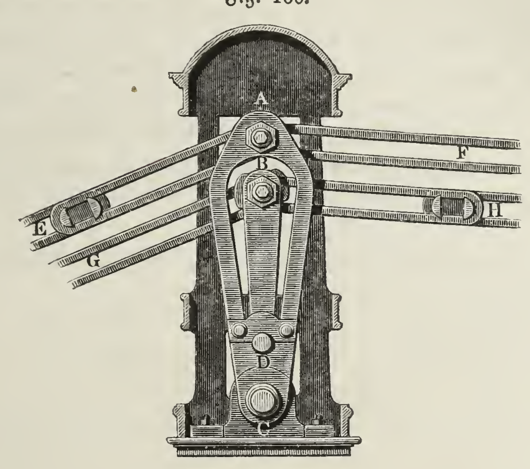


Fig. 158.

Fig. 159.

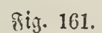
der einen Seite fast ebenso stark gespannt werden, als die Ketten auf der anderen Seite. In Fig. 160 ist eine Kettenführung vor Augen geführt,

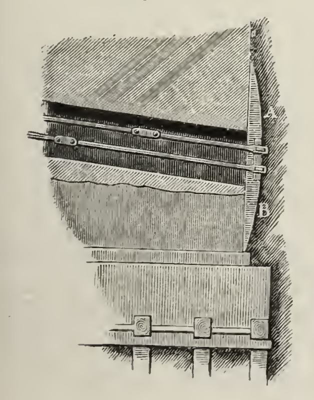
Fig. 160.



welche bei einer Kettenbrücke über die Maas bei Seraing zur Anwendung gekommen ist. Die obere Kette EAF ist hier an einen Hebel CA angeschlossen, dessen Drehungsaxe auf dem Kopfe einer gußeisernen Säule ruht, und die untere Kette GBH ist an einem kleineren Hebel DB befestigt, dessen Drehungsaxe D auf dem ersteren Hebel selbst sitzt.

Damit die Mittelkraft aus den beiden Spannungen der über einen Pfeiler weggehenden Kette vertical wirke, und so vom Pfeiler am sichersten aufgenommen werde, ist es nöthig, daß die Theile der Kette zu beiden Seiten des Pfeilers gleiche Neigung gegen den Horizont haben. Läßt sich diese Gleichheit nicht herstellen, wie es z. B. bei den Uferpfeilern sehr oft der Fall ist, so muß man die Pfeiler bedeutend verstärken.

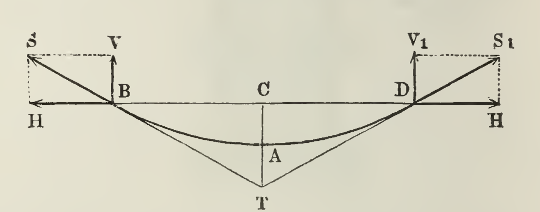

Fig. 161.



Um die Kettenenden an den Ufern zu verankern, versieht man dieselben mit starken Bolzen und legt diese in Lager, welche auf einer großen und dicken Eisenplatte AB, Fig. 161, sitzen, die sich gegen eine dicke Widerlagsmauer, oder gegen ein Gewölbe, oder gar gegen das feste Gestein stemmt. Durch Keile läßt sich dann noch die Kette in gehöriger Spannung erhalten, wenn sie durch Dehnung etwas schlaff geworden ist.

§. 86 **Theorie der Hängebrücken.** Die Curve, welche von der Kette oder von dem Seile einer Hängebrücke gebildet wird, liegt zwischen einer Parabel und einer Kettenlinie, und kommt einer Ellipse sehr nahe. Der Parabel nähert sich diese Curve bei der belasteten Brücke, der Kettenlinie aber bei unbelasteter Brücke (vergl. Band I., §. 157, 158 ff.), ersteres, weil dort die Gewichte mehr der Horizontalprojection der Kette, letzteres aber, weil sie mehr der Länge der Kette selbst proportional sind. Der Sicherheit wegen betrachten wir aber die Brücke im belasteten Zustande, behandeln also die von den Tragketten oder Tragseilen gebildeten Curven als Parabeln. Sind die beiden Aufhängepunkte B und D, Fig. 162, einer Tragkette gleich hoch, so

Fig. 162.

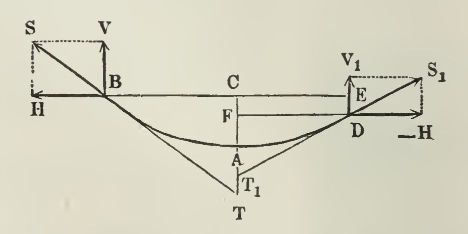


hat man bei der Spannweite $BD = 2b$, bei der Bogenhöhe $AC = a$, für den Winkel $CBT = CDT = \alpha$, welchen die Kettenenden B und D mit dem Horizonte einschließen,

$$tang.\,\alpha = \frac{CT}{BC} = \frac{2a}{b} \text{ (s. Band I., §. 157).}$$

Sind dagegen die Aufhängepunkte B und D, Fig. 163, in verschiedenem

Fig. 163.



Niveau, so liegt der Kettenscheitel A nicht in der Mitte und es haben auch die Kettenenden verschiedene Neigungen. Setzen wir die Abscisse $AC = a$ und die Ordinate $BC = b$, sowie die Coordinaten AF und $FD = a_1$ und b_1, bezeichnen wir die ganze Spannweite BE durch s und den Höhenunterschied DE zwischen beiden Aufhängepunkten durch h, so haben wir:

$$h = a - a_1,\ s = b + b_1 \text{ und } \frac{a}{a_1} = \frac{b^2}{b_1^2},$$

es folgt daher aus h, s und a:

$$1)\quad a_1 = a - h,$$

$$2)\quad b = \frac{s}{1 + \sqrt{\frac{a_1}{a}}},$$

$$3)\quad b_1 = s - b = \frac{s}{1 + \sqrt{\frac{a}{a_1}}},$$

und für die Neigungswinkel α und α_1 der Kettenenden:

$$4)\quad tang.\,\alpha = \frac{2\,a}{b} \text{ sowie}$$

$$5)\quad tang.\,\alpha_1 = \frac{2\,a_1}{b_1}.$$

Die Länge der Kettenstücke $AB = l$ und $AD = l_1$ ist endlich noch:

$$l = b\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$l_1 = b_1\left[1 + {}^2/_3\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\right]$$ (s. Band I., §. 160, Anmerkung 1).

Giebt man nun die Entfernung e zwischen je zwei Hängestangen, so erhält man die Anzahl derselben auf die Länge $BC = b$:

$$n = \frac{b}{e};$$

und setzt man nun noch in der Gleichung $x = \frac{y^2}{b^2}\,a$ statt y die Werthe

$$0,\ e,\ 2\,e,\ 3\,e,\ 4\,e \text{ u. s. w.}$$

ein, so erhält man die Längen der Hängestangen:

$$0,\ \frac{e^2}{b^2}\,a,\ \frac{4\,e^2}{b^2}\,a,\ \frac{9\,e^2}{b^2}\,a \text{ u. s. w., oder } 0,\ \frac{a}{n^2},\ \frac{4\,a}{n^2},\ \frac{9\,a}{n^2} \text{ u. s. w.,}$$

wenn man hierzu noch eine kleine Constante addirt.

Aus dem Gewichte G der belasteten Kettenhälfte AB ergiebt sich die Horizontalspannung der ganzen Kette:

$$H = G\ cotang.\,\alpha = \frac{b}{2\,a}\,G,$$

und die vollständige Kettenspannung am Ende:

$$S = \frac{G}{sin.\,\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + 4\,a^2}}{2\,a}\cdot G.$$

Kennt man die Festigkeitsmodel der Tragketten und Hängestangen, so kann man nun die erforderlichen Querschnitte dieser Theile finden. Nach den Erfahrungen in Frankreich kann man für Spannketten die größte Belastung auf 1 Quadratmillimeter = 12 Kilogramme und für Spannseile aus Eisendraht = 18 Kilogramme annehmen. Da die Hängestäbe noch die Stöße der Wagen u. s. w. aufzunehmen haben, so belastet man sie gar nur mit $1\frac{1}{2}$ Kilogramm auf 1 Quadratmillimeter. Auf das preußische Maaß reducirt, läßt sich hiernach setzen: für die Spannketten auf einen Quadratzoll 16920 Pfund, für Spannseile 24630, und für die Hängestäbe nur 2050 Pfund Maximalbelastung.

§. 87 **Stärke der Ketten und Seile.** Um die Querschnittsverhältnisse einer Hängebrücke auszumitteln, hat man nicht allein auf das Gewicht der Brückenbahn, sondern auch noch auf die größte zufällige Belastung durch Menschen, Thiere und Lastwagen Rücksicht zu nehmen, und diese kann man, nach Navier, auf 200 Kilogramm für 1 Quadratmeter Brückenfläche, d. i. auf 42 Pfund für 1 Quadratfuß annehmen, in welchem Falle allerdings ein dichtes Gedränge noch nicht vorkommen darf. Aus dieser Maximallast berechnen sich nun auch nach der Lehre der relativen Festigkeit die Querschnitte der Quer- und Längebalken, Bohlen u. s. w., und hieraus folgt wieder das Gewicht der ganzen Brückenbahn. Setzen wir nun die Summe aus diesem constanten Gewichte und jener Maximalbelastung, $= Q$, die mittlere Länge einer Hängestange $= c$ und den Tragmodul der Tragstangen $= T_1$, so haben wir nach Band I., §. 207 den Querschnitt der Hängestangen:

$$F_1 = \frac{Q}{T_1 - c\gamma},$$

also wenn man c in Fußen giebt, und das Gewicht γ eines Cubikzolles Schmiedeeisen 0,280 Pfund setzt:

$$1)\quad F_1 = \frac{Q}{T_1 - 3{,}36\,c}.$$

Hiernach haben nun sämmtliche Hängestangen das Gewicht:

$$G_1 = 3{,}36\ F_1 c = \frac{3{,}36\ Qc}{T_1 - 3{,}36\,c},$$

und annähernd

$$G_1 = \left(1 + \frac{3{,}36\,c}{T_1}\right) \cdot \frac{3{,}36\ Qc}{T_1} = 3{,}36\ \frac{Qc}{T_1}$$

Ist F der Querschnitt der Tragkette, so hat man deren Gewicht:

$$G = 2\,Fl\gamma = 2\,Fb\gamma \cdot \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right],$$

folglich ist die ganze Belastung der Tragketten:

$$Q + G_1 + G = Q + 3{,}36\, F_1 c + 2 \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] F b \gamma,$$

und daher die Maximalspannung derselben:

$$S = \frac{Q + G_1 + G}{2\, sin.\, \alpha} = \frac{Q + 3{,}36 \left(F_1 c + 2 \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] F b\right)}{2\, sin.\, \alpha}.$$

Ist T der Tragmodul für die Spannketten, so kann man auch setzen $S = F T$; daher folgt:

$$2\, F T\, sin.\, \alpha = Q + 3{,}36 \left(F_1 c + 2 \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] F b\right),$$

so daß nun der gesuchte Querschnitt der Spannketten:

$$F = \frac{{}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c}{T\, sin.\, \alpha - 3{,}36\, b \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}$$

sich ergiebt.

Führt man noch

$$sin.\, \alpha = \frac{2\, a}{\sqrt{b^2 + 4\, a^2}} = \frac{2\, a}{b} \left[1 + \left(\frac{2\, a}{b}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{2\, a}{b} \left[1 - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$$

ein, so erhält man

$$F = \frac{({}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c)\, b}{2\, T a \left[1 - 2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] - 3{,}36\, b^2 \left[1 + {}^2/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}.$$

Auch läßt sich, wenn man annähernd $\frac{a}{b} = {}^1/_2\, sin.\, \alpha$ einführt,

$$F = \frac{{}^1/_2\, Q + 1{,}68\, F_1 c}{T\, sin.\, \alpha - 3{,}36\, b\, [1 + {}^1/_6\, (sin.\, \alpha)^2]}$$

setzen.

Beispiel. Man soll für eine Kettenbrücke von 150 Fuß Spannweite, 15 Fuß Bogenhöhe und 25 Fuß Breite die nöthigen Querschnittsverhältnisse berechnen. Geben wir über die ganze Breite 45 Hängeeisen, so bekommen wir $45 - 1 = 44$ Theile, und daher die Entfernung zwischen je zwei Hängeeisen $= {}^{150}/_{44} = 3{,}409$ Fuß. Es folgen nun die Längen dieser Eisen, von der Mitte ausgegangen:

$$0,\ \frac{15}{22^2} = 0{,}031,\ 4 \cdot \frac{15}{22^2} = 0{,}124,\ 9 \cdot \frac{15}{22^2} = 0{,}279,\ 16 \cdot \frac{15}{22^2} = 0{,}496,\ 25 \cdot \frac{15}{22^2}$$
$$= 0{,}775 \text{ Fuß u. s. w.}$$

oder, wenn man hierzu 2 Zoll addirt:

2 Zoll, 2,37, 3,49, 5,35, 7,95, 11,30 Zoll u. s. w.

Die Maximalbelastung der halben Brückenbahn ist $75 . 25 . 42 = 78750$ Pfund,

und wiegt nun die übrigens vollkommen armirte halbe leere Brückenbahn ebenso viel, so erhalten wir die Last:

$$\frac{1}{2} Q = 157500 \text{ Pfund}.$$

Die mittlere Länge eines Hängeeisens ist der Quadratur der Parabel zu Folge (s. den Ingenieur S. 189) ein Drittel der Bogenhöhe a, also hier mit Einschluß von 2 Zoll Uebermaaß:

$$c = 15/3 + 1/6 = 5,167 \text{ Fuß}.$$

Folglich hat man den Querschnitt sämmtlicher Hängeeisen:

$$F_1 = \frac{Q}{T_1 - 3,36\, c} = \frac{315000}{2050 - 3,36 \,.\, 5,167} = \frac{315000}{2033} = 155 \text{ Quadratzoll}.$$

Es ist also der Querschnitt eines Hängestabes $\frac{F_1}{90} = 155/90 = 1,722$ Quadratzoll, und der Durchmesser desselben, $d = 1,48$ Zoll.

Nimmt man $T = 16420$ Pfund an und setzt

$$sin.\, \alpha = \frac{2\, a}{\sqrt{b^2 + 4\, a^2}} = \frac{30}{\sqrt{75^2 + 30^2}} = \frac{1}{\sqrt{6,25 + 1}} = 0,3714,$$

so erhält man den Querschnitt der Spannketten:

$$F = \frac{\frac{1}{2} Q + 1,68\, F_1\, c}{T\, sin.\, \alpha - 3,36\, b \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]} = \frac{157500 + 1,68 \,.\, 155 \,.\, 5,167}{16420 \,.\, 0,3714 - 3,36 \,.\, 75\,(1 + \frac{2}{3} \,.\, 0,04)}$$

$$= \frac{157500 + 1345}{6098 - 259} = \frac{158845}{5839} = 27,2 \text{ Quadratzoll},$$

also bei vier Spannketten, der Querschnitt einer jeden:

$$\frac{F}{4} = 6,8 \text{ Quadratzoll}.$$

§. 88 **Verlängerung der Ketten.** Die Spannketten werden durch die angehängte Last verlängert und nehmen dadurch auch eine größere Bogenhöhe an; auch geht aus dem Temperaturwechsel eine Veränderung in der Kettenlänge hervor, welche wieder eine Veränderung in der Bogenhöhe zur Folge hat. Beides müssen wir daher noch kennen lernen. Wenn die Bogenhöhe a in a_1 übergeht, so nimmt die Länge der Tragkette

$$l = b \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right],$$

die Größe

$$l_1 = b \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{b}\right)^2\right]$$

an, und es folgt daher die Verlängerung der Kette:

$$\lambda_1 = l_1 - l = \frac{2}{3}\left(\frac{a_1^2 - a^2}{b}\right) = \frac{2}{3}\, \frac{(a_1 - a)\,(a_1 + a)}{b},$$

oder, die Vergrößerung $a_1 - a$ der Bogenhöhe mit δ bezeichnet und annähernd $a + a_1 = 2\, a$ gesetzt,

$$\lambda_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{b}\, \delta,$$

also für die ganze Kette: $\lambda = {}^8/_3 \cdot \frac{a}{b}\,\delta$,

sowie umgekehrt: $\delta = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a}\,\lambda$.

Nun folgt aber aus dem Gewichte G der halben Kettenbrücke die Horizontalspannung oder Spannung im Scheitel:

$$H = G\ cotang.\,\alpha$$

und die Maximalspannung oder Spannung an den Enden:

$$S = \frac{G}{sin.\,\alpha};$$

es läßt sich daher im Mittel die Spannung:

$$S_1 = \frac{H + S}{2} = \frac{G\,(1 + cos.\,\alpha)}{2\,sin.\,\alpha}$$

und die von ihr bewirkte Ausdehnung der Spannketten setzen:

$$\lambda = \frac{(1 + cos.\,\alpha)}{2\,sin.\,\alpha} \cdot \frac{G}{FE} \cdot 2\,l \text{ (s. Band I., §. 204)},$$

wofür annähernd $\lambda = \frac{2\,G\,b}{FE\ sin.\,\alpha}$ anzunehmen ist. Führen wir diesen Werth in den Ausdruck für δ ein, so erhalten wir die gesuchte Vergrößerung der Bogenhöhe bei der belasteten Spannkette:

$$\delta = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{2\,G\,b}{FE\ sin.\,\alpha} = {}^3/_4\,\frac{G}{FE\ sin.\,\alpha} \cdot \frac{b^2}{a}, \text{ oder}$$

$$sin.\,\alpha = \frac{2\,a}{\sqrt{b^2 + 4\,a^2}}, \text{ annähernd } = \frac{2\,a}{b} \text{ gesetzt, folgt:}$$

$$\delta = {}^3/_8 \cdot \frac{G}{FE} \cdot \frac{b^3}{a^2}.$$

Das Schmiedeeisen nimmt mit jedem Centesimalgrad Wachsthum an Wärme um 0,0000122 an Länge zu; es ist daher diese Zunahme bei t^0 Temperaturveränderung und für die ganze Spannkette

$$= 0{,}0000122\,.\,2\,l\,t = 0{,}0000244\,.\,l\,t.$$

Setzen wir diesen Werth in die Formel für δ, so folgt die der Temperaturzunahme t entsprechende Vergrößerung der Bogenhöhe:

$$\delta_1 = {}^3/_8 \cdot \frac{b}{a} \cdot 0{,}0000244 \cdot l\,t, \text{ oder annähernd,}$$

$$= 0{,}00000915 \cdot t \cdot \frac{b^2}{a}.$$

Ebenso bestimmt sich die Verkürzung bei einer Temperaturabnahme.

Beispiel. Behalten wir die Werthe des Beispieles im letzten Paragraphen bei, so erhalten wir die Vergrößerung der Bogenhöhe in Folge der Belastung

der Brücke, wenn wir den Elasticitätsmodul E des Stabeisens = 30000000 (s. Band I., §. 212) setzen, und zur Belastung 158845 Pfund noch das halbe Gewicht der Spannketten, d. i.

$$Fb\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]\gamma = 27{,}2 \,.\, 259 = 7045 \text{ Pfund}$$

hinzufügen, also $G = 158845 + 7045 = 165890$ Pfund annehmen:

$$\delta = \frac{3}{8} \cdot \frac{165890}{27{,}2 \,.\, 30000000} \cdot \frac{900^3}{180^2} = 1{,}72 \text{ Zoll.}$$

Bei einem Temperaturwechsel von 20° stellt sich diese Veränderung

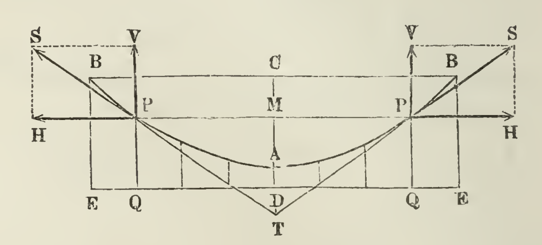
$$\delta_1 = 0{,}00000915 \,.\, 20 \cdot \frac{900^2}{180} = 0{,}82 \text{ Zoll}$$

heraus.

(§. 89) **Ketten von gleichem Widerstande.** Da die Spannung der Tragketten einer Kettenbrücke von unten nach oben allmälig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten nicht überall gleich groß machen, sondern denselben vom Scheitel aus, nach den Aufhängepunkten zu, allmälig größer und größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl, oder die Dicke der Schienen in den Kettengliedern um so größer macht, je näher diese den Aufhängepunkten hängen. Um aber die größte Materialersparniß zu erlangen, ist der Querschnitt der Tragketten der Gestalt eines Körpers von gleichem Widerstande (s. Band I., §. 208) entsprechend zu bestimmen, wobei die Flächeneinheit des Kettenquerschnittes an allen Stellen einerlei Spannung ausgesetzt ist. Bezeichnet S die veränderliche Kettenspannung, F den entsprechenden Kettenquerschnitt und T den Tragmodul des Kettenmaterials, so hat man folglich zu fordern, daß $\frac{S}{F} = T$ sei.

Es seien x und y die Coordinaten AM und MP des Punktes P in der Curve BAB, welche von der Tragkette gebildet wird, ferner bezeichne s den

Fig. 164.



diesen Coordinaten entsprechenden Bogen AP, sowie α den Tangenten- oder Neigungswinkel $MPT = SPH$ dieses Bogens in P, endlich werde noch

die Dichtigkeit der Tragkette durch γ und das Gewicht des laufenden Fußes Brückenbahn EDE durch q bezeichnet.

Es wiegt ein Element der Tragkette, von dem Querschnitte F und der Länge ∂s, $F\partial s . \gamma$, folglich ist das Gewicht des Kettenbogens AP:

$$\int F\partial s . \gamma = \gamma \int F\partial s.$$

Addirt man hierzu das Gewicht qy des darunterhängenden Brückenbahnstückes DQ, so erhält man die Verticalspannung, oder den verticalen Componenten der Kettenspannung S:

$$V = \gamma \int F\partial s + qy = \gamma \int \frac{S\partial s}{T} + qy.$$

Nun bestimmt sich auch S aus der constanten Horizontalspannung $\overline{PH} = H$ durch die bekannte trigonometrische Formel:

$$S = \frac{H}{cosin.\, \alpha},$$

oder, da auch $cosin.\, \alpha = \frac{\partial y}{\partial s}$ ist (s. Band I., analyt. Hülfslehren Artikel 32), durch $S = \frac{H\partial s}{\partial y}$; daher folgt dann:

$$V = \frac{\gamma H}{T} \int \frac{\partial s^2}{\partial y} + qy,$$

oder, da $V = H\, tang.\, \alpha$ gesetzt werden kann:

$$tang.\, \alpha = \frac{\gamma}{T} \int \frac{\partial s^2}{\partial y} + \frac{qy}{H}.$$

Differenzirt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$\partial\, (tang.\, \alpha) = \frac{\gamma}{T}\, \frac{\partial s^2}{\partial y} + \frac{q\partial y}{H},$$

oder, da $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + 1\right] \partial y^2 = [1 + (tang.\, \alpha)^2]\, \partial y^2$ ist:

$$\partial\, (tang.\, \alpha) = \frac{\gamma}{T}\, [1 + (tang.\, \alpha)^2]\, \partial y + \frac{q}{H}\, \partial y,$$

und daher:

$$\partial y = \frac{\partial\, (tang.\, \alpha)}{\frac{\gamma}{T} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{T}\, (tang.\, \alpha)^2}.$$

Da im Scheitel A die Spannung $= H$ ist, so folgt der Querschnitt der Kette an dieser Stelle:

$$F_0 = \frac{H}{T},\ \text{also umgekehrt: } H = F_0\, T,\ \text{und}$$

$$\partial y = \frac{T \partial\,(tang.\,\alpha)}{\gamma + \frac{q}{F_0} + \gamma\,(tang.\,\alpha)^2}.$$

Noch kann man $q = F_0\,\gamma_1$ setzen, wo γ_1 die Dichtigkeit eines prismatischen Körpers vom Querschnitte F_0 und der Länge = Eins bezeichnet, dessen Gewicht dem laufenden Fuß Brückenbahn gleich ist, daher folgt nun:

$$\partial y = \frac{T \cdot \partial\,(tang.\,\alpha)}{\gamma + \gamma_1 + \gamma\,(tang.\,\alpha)^2}.$$

Diesen Ausdruck hat man nun zweimal hinter einander zu integriren, um die gesuchte Gleichung der Kettenbrückenlinie zu finden.

(§. 90) Es ist auch:

$$\partial y = \frac{T \partial\,(tang.\,\alpha)}{(\gamma + \gamma_1)\left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}\,(tang.\,\alpha)^2\right)}$$

$$= \frac{T \partial \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right)}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}\left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right)^2\right]}$$

$$= \frac{T \partial u}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}\,(1 + u^2)},$$

wenn $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha$ durch u bezeichnet wird.

Nach Band I., analyt. Hülfslehren Artikel 26, VI., hat man aber:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = arc.\,(tang. = u),$$

daher folgt hier zunächst die Gleichung zwischen der Ordinate y und dem Tangenten- oder Neigungswinkel α:

$$y = \frac{T}{\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}\,arc.\left(tang. = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha\right),$$

sowie umgekehrt:

$$\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1}}\,tang.\,\alpha = tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}{T}\right),$$

d. i.:

$$1)\quad tang.\,\alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\,tang.\left(\frac{y\sqrt{\gamma\,(\gamma + \gamma_1)}}{T}\right),$$

wozu keine Constante hinzuzufügen ist, da für $y = 0$, $\alpha = 0$ und daher auch $tang.\,\alpha = 0$ ausfällt.

Nun ist aber $tang.\, \alpha = \frac{\partial x}{\partial y}$, daher läßt sich:

$$\partial x = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\, tang. \left(\frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T}\right) \partial y$$

setzen.

Nach Formel VIII. des letzten Citates ist endlich:

$$\int tang.\, w \, \partial w = - Log.\, nat.\, cos.\, w = Log.\, nat.\, \frac{1}{cos.\, w}$$
$$= Log.\, nat.\, sec.\, w,$$

daher hier:

$$x = \int \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\, tang. \left(\frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T}\right) \partial y = \frac{T}{\gamma} Log.\, nat.\, sec.\, w,$$

oder, da $w = \frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T}$ bezeichnet:

$$2) \quad x = \frac{T}{\gamma} Log.\, nat. \left(sec. \frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T}\right),$$

wozu ebenfalls keine Constante nöthig ist, da für $y = 0$, $sec. = 1$, folglich $Log.\, nat.\, sec. = 0$ ist, wie x.

Sind die Coordinaten x und y gegeben, so kann man γ_1 bestimmen, wie folgt. Es ist:

$$3) \quad sec. \frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T} = e^{\frac{x\gamma}{T}},$$

wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Setzt man nun den Bogen

$$\frac{y \sqrt{\gamma (\gamma + \gamma_1)}}{T} = \psi, \text{ also } Log.\, nat.\, sec.\, \psi = \frac{x\gamma}{T},$$

so hat man:

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T\psi}{y}\right)^2,$$

und daher:

$$4) \quad \gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T\psi}{y}\right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right] \gamma$$

Hieraus bestimmt sich weiter der Querschnitt der Tragkette im Scheitel A:

$$5) \quad F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma \left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right]},$$

und die Horizontalspannung:

$$6) \quad H = F_0 T = \frac{q T}{\gamma \left[\left(\frac{T\psi}{y\gamma}\right)^2 - 1\right]}.$$

Ferner ist für einen Punkt P der Kette die Verticalspannung:

7) $V = H \, tang. \alpha$,

sowie die Tangentialspannung:

8) $S = \frac{H}{cosin. \alpha}$

und der Querschnitt:

9) $F = \frac{S}{T} = \frac{H}{T \, cosin. \alpha} = \frac{F_0}{cosin. \alpha}$,

wobei sich einfach α durch den Ausdruck

$$tang. \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \, tang. \psi$$

bestimmen läßt.

Das Gewicht G des Kettenstückes $\overline{AP}$ ist endlich bestimmt durch die Gleichung:

$$V = G + qy,$$

also:

10) $G = V - qy = H \, tang. \alpha - qy$.

Die Aufgabe wird durch diese Formeln insofern noch nicht vollständig gelöst, da bei der Entwickelung derselben nicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen Rücksicht genommen worden ist. Es fällt indessen dieses Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängestangenlänge $c = \frac{x}{3}$ einführen, und folglich für das Gewicht derselben, $G_1 = F_1 c \gamma$ setzen zu können.

Nun ist aber der Querschnitt sämmtlicher Hängestangen an AP zusammengenommen:

$$F_1 = \frac{qy}{T_1 - c\gamma} \text{ annähernd } = \frac{qy}{T_1},$$

daher folgt:

$$G_1 = \frac{qc\gamma}{T_1} \cdot y = 3{,}36 \frac{qcy}{T_1},$$

und es ist folglich in den obigen Ausdrücken statt

$$qy, \left(1 + 3{,}36 \frac{c}{T_1}\right) qy$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe mit Rücksicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen ist zu finden in „the Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843“. S. auch in Bd. I, des Civilingenieurs „die Abhandlung von Dr. O. Schlömilch“ über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beispiele. Für die Kettenbrücke im Beispiel von §. 87 erhalten wir, wenn wir in

$$Log. nat. sec. \psi = \frac{x\gamma}{T}, \; \gamma = 3{,}36, \; T = 16420,$$

und statt x, die ganze Pfeilhöhe $a = 15$ Fuß einsetzen:

$$Log.\ nat.\ sec.\ \psi = \frac{15\,.\,3{,}36}{16420} = 0{,}0030694,$$

es ist hiernach $Log.\ cos.\ \psi = 0{,}99866 - 1$, $\psi^0 = 4^0\,29'\,10''$, und $\psi = 0{,}078297$, so daß nun folgt:

$$\gamma_1 = \gamma \left[\left(\frac{T\psi}{y\,\gamma}\right)^2 - 1\right],$$

wenn man für y die halbe Spannweite von 75 Fuß einsetzt:

$$\gamma_1 = 3{,}36 \left[\left(\frac{16420\,.\,0{,}078297}{75\,.\,3{,}36}\right)^2 - 1\right] = 3{,}36\,.\,25{,}028 = 84{,}10.$$

Da die Belastung der einen Kettenhälfte sammt Hängeeisen: $157500 + 1345 = 158845$ Pfund beträgt, so hat man für den laufenden Fuß:

$$q = \frac{158845}{75} = 2117{,}9 \text{ Pfund},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel A:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2117{,}9}{84{,}10} = 25{,}18 \text{ Quadratzoll.}$$

Für den Aufhängewinkel ist:

$$tang.\ \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}}\ tang.\ \psi = \sqrt{\frac{3{,}36 + 84{,}10}{3{,}36}}\ tang.\ 4^0\,29'\,10''$$
$$= \sqrt{\frac{87{,}46}{3{,}36}} \cdot tang.\ 4^0 29'\,10'' = 0{,}4003;$$

und hiernach folgt der Aufhängewinkel oder der Neigungswinkel der Kette im Aufhängepunkte:

$$\alpha = 21^0\,49'.$$

Bei Annahme der Parabelform erhält man diesen Winkel

$$\alpha_1 = 20^0\,23'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{cosin.\ \alpha} = \frac{25{,}18}{cos.\ 21^0\,49'} = 27{,}12 \text{ Quadratzoll.}$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0 T = 25{,}18\,.\,16420 = 413460 \text{ Pfund},$$

und die Verticalspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H\,tang.\ \alpha = 165500 \text{ Pfund},$$

endlich ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - bq = 165500 - 158845 = 6655 \text{ Pfund},$$

Bei constantem Querschnitte $F = 27{,}2$ Quadratzoll, wäre das Gewicht einer solchen Hälfte:

$$G = \left[1 + {}^2\!/_3 \left(\frac{a}{b}\right)^2\right] Fb\gamma = 272\,.\,27{,}2 = 7398 \text{ Pfund},$$

folglich ist das ganze Ersparniß an Material bei Anwendung der Kettenform von gleichem Widerstande nur:

$$2\,.(7398 - 6655) = 2\,.\,743 = 1486 \text{ Pfund.}$$

Stossende Belastung. Bei der vorstehenden Theorie der Kettenbrücken wurde eine ruhende Belastung vorausgesetzt, wobei natürlich die Hängestangen und Tragketten weniger in Anspruch genommen werden, als wenn die Last stoßend auf die Brückenbahn wirkt. Um sich wenigstens ein §. 91

allgemeines Urtheil über die Wirkungen solcher Stöße zu verschaffen, wollen wir annehmen, daß längs der ganzen Brückenbahn auf den laufenden Fuß eine Last q_1 mit der Geschwindigkeit v auf diese Bahn aufschlage. Hat dieselbe ohnedies auf jeden Fuß Länge das Gewicht q, so beträgt die Geschwindigkeit, mit welcher $q + q_1$ nach dem Stoße gemeinschaftlich wieder zu sinken beginnen (vergl. Band I., §. 332):

$$w = \frac{q_1 v}{q + q_1},$$

und es ist hierbei das beiden Körpern gemeinschaftliche Arbeitsvermögen:

$$(q + q_1) \frac{w^2}{2g} = \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Dieses Arbeitsvermögen wird durch die Ausdehnung der Hängestangen und die der Tragkette aufgehoben. Ist P die veränderliche Ausdehnungskraft oder die verticale Zugkraft während dieser Ausdehnungen, so hat man bei dem Querschnitte F_1, der Länge c und dem Elasticitätsmodul E_1 einer Hängestange deren Ausdehnung:

$$\lambda_1 = \frac{Pc}{F_1 E_1},$$

und folglich die hierbei von dieser Stange aufgenommene mechanische Arbeit:

$$\frac{P\lambda_1}{2} = \frac{P^2 c}{2 F_1 E_1} \text{ (vergl. Band I., §. 348).}$$

Diese Formeln gelten auch für die ganze Brücke, wenn man unter P die Stoßkraft längs der ganzen Brücke, unter F_1 die Summe der Querschnitte aller Hängestangen und unter c die mittlere Länge einer Hängestange versteht.

Bezeichnet ferner S die durch diesen Stoß bewirkte Vergrößerung der Spannung einer Tragkette, $2l$ die Länge, sowie F den Querschnitt und E den Elasticitätsmodul derselben, so ist die entsprechende Verlängerung dieser Kette:

$$\lambda = \frac{2Sl}{FE},$$

und ebenso die von ihr verzehrte mechanische Arbeit:

$$\frac{S\lambda}{2} = \frac{S^2 l}{FE},$$

oder da man $S = \frac{1/2\, P}{sin. \alpha}$ setzen kann: $\frac{S\lambda}{2} = 1/4 \, \frac{P^2 l}{FE\, sin. \alpha^2}$.

Setzt man die Summe der Arbeiten $\frac{P\lambda_1}{2}$ und $\frac{S\lambda}{2}$ dem oben angegebenen Arbeitsvermögen $2b\,(q + q_1)\frac{w^2}{2g}$ gleich, so erhält man folgende Gleichung:

$$\left(1/4 \, \frac{l}{FE\, sin. \alpha^2} + 1/2 \, \frac{c}{F_1 E_1}\right) P^2 = \frac{2 b q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

woraus dann die Kraft:

$$1)\quad P = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4}\,\frac{l}{F E\, sin.\alpha^2} + \frac{1}{2}\,\frac{c}{F_1 E_1}} \cdot \frac{2\, b q^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}}$$

folgt.

Aus P ergiebt sich nun die mittlere Senkung der Brücke in Folge der Ausdehnung der Hängestäbe:

$$2)\quad \lambda_1 = \frac{P c}{F_1 E_1},$$

und die mittlere Senkung derselben in Folge der Ausdehnung der Kette:

$$\delta = \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{a}\, \lambda, \text{ d. i.}$$

$$3)\quad \delta = \frac{3}{8} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{P l}{F E\, sin.\alpha}.$$

Vernachlässigt man die Senkung oder Ausdehnung λ_1 der Hängestäbe, so hat man:

$$P = \sqrt{\frac{4\, F E\, sin.\alpha^2}{l} \cdot \frac{2\, b q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}},$$

und daher:

$$\delta = \frac{3}{4}\,\frac{b}{a} \sqrt{\frac{2\, b l}{F E} \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}},$$

oder annähernd, wenn man $l = b$ setzt:

$$\delta = \frac{3}{4}\,\frac{b^2}{a} \sqrt{\frac{2\, q_1^2}{F E\,(q + q_1)} \cdot \frac{v^2}{2 g}}.$$

Wird der Stoß durch die Masse $2\, l q_1$ $n$mal wiederholt, und zwar in dem Augenblicke, wenn die Senkung die größte (δ) geworden ist, so hat man die auf die Ausdehnung der Spannkette aufgewendete Arbeit:

$$n \cdot \frac{2\, b q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}$$

und folglich die endliche Senkung der Kette:

$$\delta_1 = \delta \sqrt{n}.$$

Dieser Fall kann vorkommen, wenn eine gedrängte Menschenmasse im tactmäßigen Schritt über die Brücke geht. Die hierbei erfolgte Ausdehnung der Kette ist:

$$\lambda = \frac{P l}{F E\, sin.\alpha} = \sqrt{\frac{8\, n b l}{F E} \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}}.$$

annähernd:

$$= 2 b \sqrt{\frac{2\, n}{F E} \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2 g}},$$

und die Spannung der Kette:

$$S_1 = \frac{\lambda}{2l} FE = \sqrt{2n\, FE \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}}.$$

Damit die Tragkette durch diese Stöße nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus gedehnt werde, muß die Gesammtspannung

$$S + S_1 < FT$$

sein.

Hat man der Kette μ fache Sicherheit gegeben, ist also:

$$F = \mu\, \frac{S}{T}, \text{ oder } S = \frac{FT}{\mu},$$

so muß sein:

$$S_1 < FT\left(1 - \frac{1}{\mu}\right).$$

Beispiel. Wenn wir bei der Kettenbrücke im Beispiele zu §. 87 die Last $2bq_1 = 78750$ Pfund nicht aufliegend, sondern mit der Geschwindigkeit $v = 5$ Fuß aufstoßend annehmen, das übrige Gewicht der Brückenbahn aber

$$2bq = 78750 \text{ Pfund}$$

beibehalten, so ist zu setzen:

$$b = 75,\ q = q_1 = {}^{78750}/_{150} = 525,$$

also:

$$\frac{q_1^2}{q + q_1} = {}^{525}/_2 = 262{,}5,$$

ferner:

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}016 \,.\, 25 = 0{,}4, \text{ und } FE = 27{,}2 \,.\, 30000000 = 816000000,$$

folglich die Verlängerung der Tragkette, in Folge des Stoßes der Masse q_1:

$$\lambda = 2b\sqrt{\frac{2}{FE} \cdot \frac{q_1^2}{q + q_1} \cdot \frac{v^2}{2g}} = 150\sqrt{\frac{2 \,.\, 262{,}5 \,.\, 0{,}4}{816000000}} = 150\sqrt{\frac{1}{3860000}}$$

$$= 150 \,.\, 0{,}000508 = 0{,}0762 \text{ Fuß}.$$

Wäre die Anzahl der Stöße $n = 100$, so würde folglich diese Verlängerung

$$\lambda\sqrt{n} = \lambda\sqrt{100} = 10\,\lambda = 0{,}762 \text{ Fuß},$$

und die entsprechende Vergrößerung der Kettenspannung pro Quadratzoll Querschnitt:

$$S_1 = \frac{\lambda\sqrt{n}}{2l}\, FE = \frac{0{,}762}{150}\, 30000000 = 152400 \text{ Pfund}$$

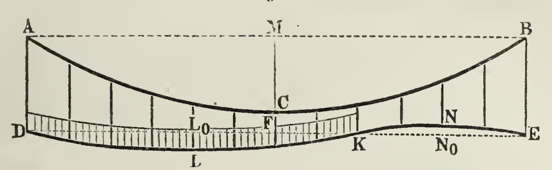
betragen.

Da der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens nur $T = 56000$ Pfund beträgt, so wäre ein Zerreißen der Tragketten bei diesen Stößen eine unausbleibliche Folge.

§. 92 **Wirkung der einseitigen Belastung.** Unter der Voraussetzung, daß durch die mobile Last DK, Fig. 165, auf der nur an den Enden festgehaltenen Brückenbahn DE die parabolische Form der Kette ACB nicht wesentlich verändert werde, lassen sich die Biegungsverhältnisse dieser Bahn nach Rankine wie folgt, ermitteln.

Ist die Größe der mobilen Last pr. Einheit Brückenlänge, $= q_1$ und nimmt dieselbe Last auf der Brücke die Länge $DK = DF + FK$

Fig. 165.



$= b + x$ ein, hat also die ganze mobile Last das Gewicht $Q_1 = (b + x)\, q_1$, so läßt sich die entsprechende Spannung der Hängestangen auf die laufende Einheit Brückenlänge, $q_2 = \frac{Q_1}{2\,b} = \frac{(b + x)\, q_1}{2\,b}$ setzen, und daher auch annehmen, daß das unbelastete Stück KE der Brückenbahn mit der gleichmäßig vertheilten Kraft $Q_2 = (b - x)\, q_2 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b}$ durch die Hängestangen von unten nach oben gezogen werde.

Eben so groß ist auch die Kraft

$$(b + x)\,(q_1 - q_2) = (b + x)\left(1 - \frac{b + x}{2\,b}\right) q_1 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b},$$

mit welcher das belastete Stück AK der Brückenbahn nach unten gebogen wird. Jede dieser Kräfte zerlegt sich in zwei Hälften, welche die Endpunkte des Stückes DK nach unten drücken, und die des Stückes EK nach oben ziehen. Es ist folglich die Scheerkraft zwischen beiden Balkenstücken in K,

$$R = \frac{Q_2}{2} = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{4\,b}.$$

Diese Kraft ist für $x = 0$, also wenn die mobile Last nur bis zur Mitte reicht, am größten, und zwar

$$R_m = \frac{b q_1}{4}.$$

Das Biegungsmoment des belasteten Brückenstückes DK ist, da man es hier mit einer auf die Länge $b + x$ gleichförmig vertheilten Last $Q_2 = \frac{(b^2 - x^2)\, q_1}{2\,b}$ zu thun hat, nach Bd. I, §. 240,

$$M_1 = \frac{Q_2\,(b + x)}{8} = \frac{(b + x)\,(b^2 - x^2)\, q_1}{16\,b},$$

und das des unbelasteten Brückenstückes EK, da dasselbe auf der Länge $b - x$ mit gleichförmig vertheilter Kraft nach oben gezogen wird,

$$M_2 = \frac{Q_2\,(b - x)}{8} = \frac{(b - x)\,(b^2 - x^2)\, q_1}{16\,b}.$$

Das erstere Moment ist ein Maximum für $x = \frac{b}{3}$, das letztere für $x = -\frac{b}{3}$, und zwar das eine oder andere

$$M_m = \pm\, {}^2/_{27}\, b^2 q_1.$$

In dem einen Falle ist also das größere Stück von der Länge $b + x = {}^4/_3\, b$ = zwei Drittel, und im zweiten das kleinere Stück $b - x = {}^2/_3\, b$ = ein Drittel der Brückenlänge $(2\,b)$ belastet.

Wäre die ganze Brückenbahn mit $Q = 2\,b q_1$ belastet, ohne von den Hängestangen getragen zu werden, so würde das Biegungsmoment

$$M = \frac{Q b}{4} = \frac{b^2 q_1}{2} = {}^{27}/_4 \,.\, {}^2/_{27}\, b^2 q_1,$$

d. i. siebenzwanzig Viertel mal so groß sein, als das so eben gefundene Maximalmoment der aufgehangenen Brückenbahn.

Die größte Durchbiegung des belasteten Brückenstückes DK ist nach Band I, §. 223

$$a_1 = {}^5/_8\, \frac{Q_2\, ({}^4/_3\, b)^3}{48\, WE} = {}^5/_{27}\, \frac{Q_2\, b^3}{6\, WE},$$

oder, wenn man die halbe Trägerhöhe der Brücke mit e, sowie den Tragmodul des Trägermateriales mit T bezeichnet, und daher

$$Q_2 \,.\, {}^4/_3\, b = 8\, \frac{WT}{e} \text{ setzt,}$$

$$a_1 = {}^5/_{27}\, \frac{Tb^2}{Ee}.$$

Wäre die ganze Brückenbahn nicht aufgehangen, sondern an den Enden nur unterstützt, so würde die Durchbiegung

$$a = {}^5/_8\, \frac{Q_2\, b^3}{6\, WE} = {}^5/_8 \cdot \frac{4\, Tb^2}{6\, Ee} = {}^5/_{12}\, \frac{Tb^2}{Ee} = {}^9/_4 \,.\, {}^5/_{27}\, \frac{Tb^2}{Ee},$$

d. i. **neun Viertel** mal so groß sein, als bei der durch die Spannkette getragenen Brückenbahn. Die Größe der Aufbiegung des unbelasteten Brückenstückes ist dagegen

$$a_2 = {}^5/_8 \,.\, \frac{Q_2\, ({}^2/_3\, b)^3}{48\, WE} = {}^5/_{27}\, \frac{Q_2\, b^3}{48\, WE}, \text{ oder da hier}$$

$$Q_2 \,.\, {}^2/_3\, b = \frac{8\, WT}{e} \text{ zu setzen ist,}$$

$$a_2 = {}^5/_{27} \cdot \frac{Tb^2}{4\, Ee},$$ d. i. **ein Viertel** von der Durchbiegung des belasteten Theiles.

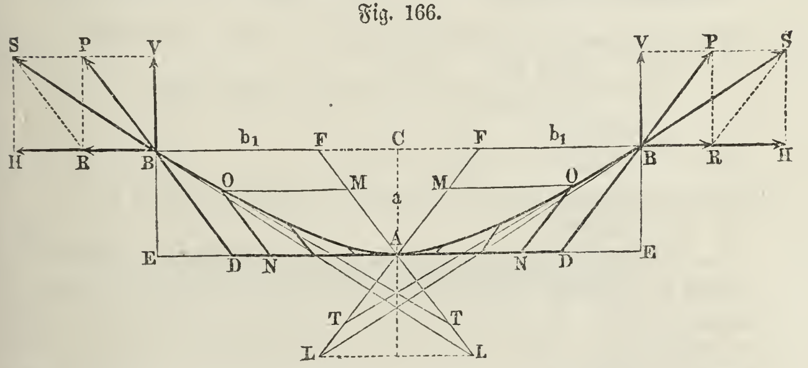
Damit eine Hängebrücke den Wirkungen der beweglichen Last den nöthigen Widerstand entgegen setzen könne, versieht man die Brückenbahn entweder mit

besonderen Tragwänden, oder mit Zugseilen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagara-Brücke; auch wendet man wohl eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugstangen mit der Brückenbahn verbunden wird.

Ferner vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man je zwei Spannketten über einander hängt, und dieselben unter einander verstrebt, wie eine gewöhnliche Fachwerkswand.

Hängebrücken mit geneigten Hängestangen. Die Hängebrücken BAB, Fig. 166, mit geneigten Hängestangen BD, QN... sind ebenfalls steifer als die mit verticalen Hängestangen. Es §. 93

Fig. 166.



ist auch hier die Verticalspannung V an einem Kettenende B, gleich der Last Q der halben Brücke AD. Aus derselben bestimmt sich mit Hülfe des Neigungswinkels $BDE = \beta$ der Hängestäbe gegen den Horizont die Gesammtspannung der Hängestäbe in einer Brückenhälfte:

1) $P = \frac{V}{sin. \beta} = \frac{Q}{sin. \beta}$, und die Kraft, mit welcher jede Brückenhälfte durch die Kraft P nach außen gezogen wird

2) $R = P \, cos. \beta = Q \, cotang. \beta$.

Aus der Spannweite $BB = 2\,CB = 2\,b$, und der senkrechten Bogenhöhe $AC = a$, folgt die geneigte Bogenhöhe AD, d. i.

3) $a_1 = \frac{a}{sin. \beta}$, und die halbe Spannweite zwischen den Aufhängepunkten D, D der Brückenbahn,

$$AD = FB = CB - CF, \text{ d. i.}$$

4) $b_1 = b - a \, cotang. \beta$.

Da die Kette AB auch hier durch lauter gleiche parallele Kräfte gespannt wird, deren Angriffspunkte einen und denselben Normalabstand von einander

haben, so bildet dieselbe ebenfalls einen Parabelbogen, und es ist daher auch die Subtangente eines Punktes O in derselben gleich der doppelten, in der Richtung der Hängestange gemessenen Abscisse $AM = x_1$, d. i. $MT = 2\,MA = 2\,x$, für den Aufhängepunkt B ist die Abscisse $AM = a_1$, und die Ordinate $FB = b_1$, und die Subtangente $FL = 2\,\alpha$. Bezeichnet man daher die Neigung $SBH = FBL$ der Spannkette in B durch α, so hat man, da

$$\frac{sin. BLF}{sin. FBL} = \frac{BF}{FL} \text{ ist,}$$

$$\frac{sin. (\beta - \alpha)}{sin. \alpha} = \frac{b_1}{2\,a_1}, \text{ woraus dann}$$

$$5) \quad cotang. \alpha = cotang. \beta + \frac{b_1}{2\,a_1\;sin.\;\beta} \text{ folgt.}$$

Die Seilspannung in den Aufhängepunkten ist durch die Proportion

$$\frac{S}{P} = \frac{sin. BPS}{sin. BSP} = \frac{sin. \beta}{sin. \alpha} \text{ bestimmt, und hiernach}$$

$$6) \quad S = \frac{P\;sin. \beta}{sin. \alpha} = \frac{Q}{sin. \alpha} \text{ zu setzen.}$$

Die Horizontalspannung H des Seiles im Aufhängepunkte B ist

$$7) \quad H = S\;cos. \alpha.$$

Da die Hängestangen der beiden Brückenhälften entgegengesetzt geneigt sind, so geben sie der ganzen Brücke einen Widerstand gegen Längenschwingungen, welchen die Brücke mit verticalen Hängestangen nicht hat. Auch wird durch die Horizontalspannungen R und R der Brückenbahn die Durchbiegung der letzteren vermindert.

§. 94 **Charnierbrücken.** Die in den neueren Zeiten in Vorschlag und auch bereits mehrfach in Ausführung gebrachten Charnierbrücken, lassen sich sowohl bei den Spreng- als auch bei den Hängewerksbrückensystemen mit Vortheil anwenden. Durch Anbringung von Charnieren oder horizontalen Drehungsaxen werden die durch Temperaturwechsel und durch Nachgeben der Widerlager hervorgebrachten gefährlichen Spannungen der Bogenbrücken beseitigt, und den Spannungen überhaupt bestimmte Richtungen gegeben, wodurch es möglich wird, die Größen der Spannungen und folglich auch die denselben entsprechenden Querschnittsdimensionen der Brücke mit Sicherheit zu bestimmen. Insbesondere leisten die Charniere bei einseitigen oder mobilen Belastungen die besten Dienste. Um den Zweck vollkommen zu erreichen, erhält ein solcher Brückenbogen wie ADB, Fig. 167 u. Fig. 168 ein Charnier im Scheitel D, und je ein Gelenk in den Stützpunkten A und B. Die Kräfte, welche dann die Widerlager auszuhalten haben, wenn die Brücken auf der ganzen Länge $AB = UU = 2\,b$ pr. Einheit mit p, und auf der halben Länge $AC = UD = b$ pr. Einheit mit q belastet ist, bestimmen sich unter der Voraussetzung, daß

sowohl der Spreng- als auch der Hängebogen ADB die Parabelform hat, wie folgt. Aus der constanten Last $P = 2bp$ gehen die Tangentialspan-

Fig. 167.

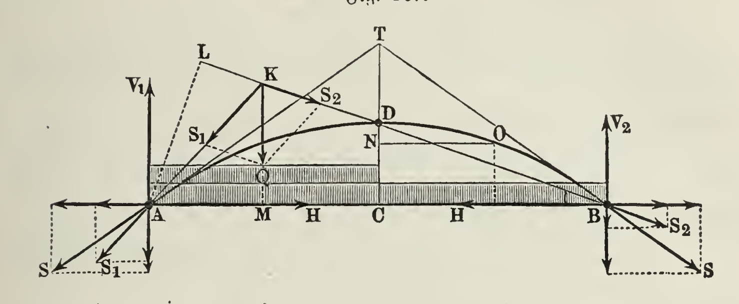
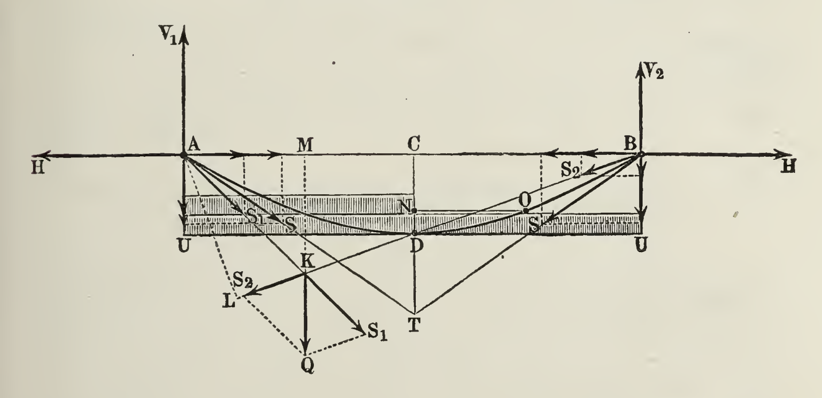


Fig. 168.



nungen S und S in den Stützpunkten A und B hervor, deren verticale Componenten je $\frac{1}{2} P = bp$ und horizontale Componenten $\frac{b}{2a} \cdot \frac{1}{2} P = \frac{b^2 p}{2a}$ sind. (Siehe §. 77.) Die mobile Last $Q = bq$, deren Angriffspunkt K in einer Verticalen gedacht werden kann, welche AC halbirt, zerlegt sich dagegen in zwei von den Stützpunkten A und B aufzunehmende Kräfte S_1 und S_2, wovon die zweite in Folge der Drehbarkeit um D, die Richtung DB annehmen muß. Da die Richtung der Seitenkraft S_1 durch A geht, so haben in Hinsicht auf diesen Drehungspunkt die Kräfte S_2 und Q ein und dasselbe Moment, es ist also, da der Hebelarm von S_2 das Perpendikel $AL = AB \; sin. \; ABD = 2b \; sin. \; \beta$, und der Hebelarm von Q, $AM = \frac{1}{2} AC = \frac{b}{2}$ ist,

$$S_2 . 2 b \sin. \beta = Q \frac{b}{2}, \text{ und daher}$$

$$S_2 = \frac{Q}{4 \sin. \beta} = \frac{b q}{4 \sin. \beta}.$$

Der verticale Component dieser Kraft ist $S_2 \sin. \beta = \frac{b q}{4}$, und der horizontale Component derselben,

$$S_2 \cos. \beta = \frac{b q}{4} \operatorname{cotg.} \beta = \frac{b^2 q}{4 a},$$

wogegen der verticale Component von S_1,

$Q - S_2 \sin. \beta = b q - \frac{b q}{4} = \frac{3}{4} b q$, und der horizontale Component derselben wieder $S_2 \cos. \beta = - \frac{b^2 q}{4 a}$ ausfällt.

Hiernach ist also die ganze Horizontalkraft in jedem der Stützpunkte A und B,

$$H = \frac{b^2 p}{2 a} + \frac{b^2 q}{4 a} = \frac{b^2}{2 a} \left(p + \frac{q}{2}\right),$$

dagegen der gesammte Verticaldruck in A,

$$V_1 = b p + \frac{3 b q}{4} = b \left(p + \frac{3}{4} q\right), \text{ und der in } B,$$

$$V_2 = b p + \frac{1}{4} b q = b \left(p + \frac{1}{4} q\right).$$

Nachdem man die äußeren Kräfte H, $-H$, V_1 und V_2 bestimmt hat, kann man nach bekannten Regeln, z. B. mit Hülfe der Theorie der Drehungsmomente (§. 64), die Spannungen an jeder beliebigen Stelle des Tragbogens ermitteln, derselbe mag massiv sein, oder aus Fachwerk bestehen.

Für eine Stelle O des Bogens, dessen Coordinaten $DN = x$ und $NO = y$ sind, ist das Biegungsmoment M zusammengesetzt aus dem Momente $H . \overline{CN} = H (a - x)$ der Horizontalkraft H, dem Momente $- V_2 (CB - NO) = - V_2 (b - y)$ der Verticalkraft V_2, und dem Momente $\frac{1}{2} (b - y)^2 p$ der von dem Bogen $B O$ zu tragenden Last $(b - y) p$. Es ist daher

$$M = H (a - x) - V_2 (b - y) + \frac{p}{2} (b - y)^2, \text{ d. i.,}$$

da die Parabelgleichung $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}$, $x = \frac{a y^2}{b^2}$ giebt,

$$M = H a \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - V_2 (b - y) + \frac{1}{2} p (b - y)^2.$$

$$= H a - V_2 b + \frac{1}{2} p b^2 + (V_2 - p b) y - \left(\frac{H a}{b^2} - \frac{1}{2} p\right) y^2.$$

Dieses Moment ist ein Maximum für

$$\left(\frac{2\,Ha}{b^2} - p\right) y = V_2 - pb, \text{ wonach}$$

$$y = \frac{V_2 - pb}{\frac{2\,Ha}{b^2} - p} = \frac{\frac{1}{4}\,bq}{\frac{1}{2}\,q} = \frac{b}{2} \text{ und } x = \frac{a}{4} \text{ folgt.}$$

Hiernach ist das gesuchte größte Biegungsmoment des Bogens BD

$M = \frac{3}{4}\,Ha - \frac{1}{2}\,V_2 b + \frac{1}{8}\,p b^2 = \frac{3}{8}\,b^2 p + \frac{3}{16}\,b^2 q - \frac{1}{2}\,b^2 p - \frac{1}{8}\,b^2 q$
$+ \frac{1}{8}\,b^2 p = \frac{1}{16}\,b^2 q.$

Ebenso groß fällt auch das größte Biegungsmoment auf der anderen Seite AD des Bogens aus, wo die mobile Last bq aufruht.

Außer diesem Biegungsmomente hat der Bogenträger in O auch noch die Horizontalkraft H und die Verticalkraft $V_2 - \frac{b}{2}\,p$ auszuhalten. Aus beiden Kräften resultirt eine Druck- oder Zugkraft in der Tangentenrichtung, und eine Schubkraft in der Richtung der Normale von O. Bezeichnet β den Winkel, welchen der Bogen in O mit dem Horizont einschließt, und welcher durch die Gleichung

$$tang.\beta = \frac{2\,\overline{DN}}{ON} = \frac{\frac{1}{2}\,a}{\frac{1}{2}\,b} = \frac{a}{b}$$

bestimmt ist, so hat man die Druck- oder Zugkraft in O:

$$R = H\cos.\beta + \left(V_2 - \frac{bp}{2}\right)\sin.\beta,$$

und dagegen die Schubkraft

$$N = H\sin.\beta - \left(V_2 - \frac{bp}{2}\right)\cos.\beta.$$

Bezeichnet nun F den Querschnitt, W das Biegungsmoment und h die Höhe des Trägers in O oder des mit ihm in O fest verbundenen Fachwerkes, und bedeutet T den Tragmodul des Trägermateriales, so hat man zu setzen:

$$\frac{\frac{1}{2}\,Mh}{W} + \frac{R}{F} < T, \text{ so wie } \frac{N}{F} < T.$$

Pfeiler und Widerlager. Ein wichtiger Gegenstand ist noch die Bestimmung der Dimensionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind S und S_1 die Spannungen der über einen Pfeiler $ABCD$ weggehenden Ketten, Fig. 169 (a. f. S.), und α und α_1 ihre Neigungswinkel, so hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler: §. 95

$$V_2 = V + V_1 = S\sin.\alpha + S_1\sin.\alpha_1,$$

und den Horizontaldruck, da die Horizontalspannungen einander entgegenwirken:

$$H_2 = H - H_1 = S\cos.\alpha - S_1\cos.\alpha_1.$$

Ist nun h die Höhe KL, e die Breite und d die Dicke AB eines Pfeilers, sowie dessen Dichtigkeit $= \gamma$, so hat man das Gewicht desselben:

Fig. 169.

$$G = deh\gamma,$$

und den gesammten Verticaldruck:

$$= V_2 + G = S \sin. \alpha + S_1 \sin. \alpha_1 + deh\gamma.$$

Damit aber die Horizontalkraft $H_2 = H - H_1$ den Pfeiler nicht umstürze um die Kante B, ist es nöthig, daß das statische Moment

$$H_2 . \overline{KL} = H_2 h = (S \cos. \alpha - S_1 \cos. \alpha_1) h$$

von dem statischen Moment

$$(V_2 + G)\, \overline{BL} = (S \sin. \alpha + S_1 \sin. \alpha_1 + deh\gamma) \frac{d}{2}$$

übertroffen werde, daß also

$$d^2 + \left(\frac{S \sin. \alpha + S_1 \sin. \alpha_1}{eh\gamma}\right) d > \frac{2 (S \cos. \alpha - S_1 \cos. \alpha_1)}{e\gamma} \text{ oder}$$

$$d^2 + \left(\frac{V + V_1}{eh\gamma}\right) d > \frac{2 (H - H_1)}{e\gamma} \text{ sei.}$$

Hiernach ist die nöthige Pfeilerdicke

$$d = -\frac{V + V_1}{2eh\gamma} + \sqrt{\frac{2\delta (H - H_1)}{e\gamma} + \left(\frac{V + V_1}{2eh\gamma}\right)^2},$$

wobei δ den Sicherheitscoefficienten 2 bis 4 bezeichnet.

Uebrigens ist der Sicherheit wegen für $S \cos. \alpha$ der größte und für $S_1 \cos. \alpha_1$ der kleinste Werth zu setzen, also anzunehmen, daß die Kette einerseits vollkommen, und andererseits ganz unbelastet sei.

Diese Formel setzt voraus, daß die Kräfte S und S_1 vollkommen übertragen werden auf den Pfeilerkopf, was allerdings nur eintritt, entweder wenn die Seilenden am Pfeilerkopf festsitzen, oder wenn die Reibung auf denselben die Differenz $S - S_1$ der Spannungen übertrifft. Nach Band I, §. 193, ist diese Reibung:

$$F = \left[\left(1 + 2\varphi \sin. \frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_1,$$

wenn φ den Reibungscoefficienten, n die Zahl der auf dem Pfeilerkopfe aufliegenden Kettenglieder und β den Centriwinkel bezeichnet, welcher einem Gliede entspricht; wenn daher

$$S - S_1 < \left[\left(1 + 2\varphi \sin. \frac{\beta}{2}\right)^n - 1\right] S_1, \text{ oder}$$

$$S < \left(1 + 2\varphi \sin. \frac{\beta}{2}\right)^n S_1 \text{ ist, so legt sich die Kette}$$

fest auf den Pfeilerkopf auf; außerdem gleitet sie aber auf dem Pfeilerkopfe hin, und es ist deshalb in obige Formel

$$S = \left(1 + 2\,\varphi\, sin. \frac{\beta}{2}\right)^n S_1,$$

oder bei Seilen,

$$S = e^{\varphi\alpha} S_1 \text{ (s. Band I, §. 194) einzusetzen.}$$

Legt man die Kette oder das Seil auf Rollen, so ist diese Differenz, und daher die nöthige Pfeilerstärke, viel kleiner. Sind die Rollenhalbmesser $= a$, und die Zapfenhalbmesser $= r$, so hat man:

$$S = S_1 + \varphi \frac{r}{a} (S\, sin.\alpha + S_1\, sin.\alpha_1) = S_1 + \varphi \frac{r}{a} (V + V_1)$$

zu setzen, weil die auf den Rollenhalbmesser reducirte Zapfenreibung den Werth

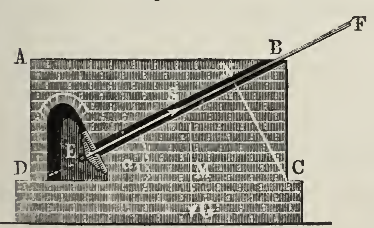
$$F = \varphi \frac{r}{a} (S\, sin.\alpha + S_1\, sin.\alpha_1) \text{ hat.}$$

Besteht der Pfeiler in einer drehbaren Säule, so ist statt r der Zapfenhalbmesser und statt a die Höhe derselben einzusetzen, und liegt das Seil auf Walzen, so hat man statt φr den Hebelarm $f = 0{,}02$ Zoll der wälzenden Reibung einzuführen.

Aus der Spannung S der Spann- oder Endketten (Spann- oder Endseile) kann man auch noch die nöthigen Dimensionen der Widerlagsmauer AC, Fig. 170, bestimmen.

Die Spannung S sucht die Widerlagsmauer AC um die Kante C zu drehen, und wirkt dabei am Hebelarme

Fig. 170.



$CN = CD\, sin.\alpha_1 = l\, sin.\alpha_1$, wenn α_1 den Neigungswinkel SDC des Seiles gegen den Horizont und l die Länge CD der Mauer bezeichnet. Das Gewicht G der Mauer wirkt aber mit dem Momente

$$G.\overline{CM} = h e l \gamma \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} h e l^2 \gamma$$

entgegen, wo h die Höhe BC, e die Dicke und γ die Dichtigkeit der Mauer bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$S l\, sin.\alpha_1 = \frac{1}{2} h e l^2 \gamma,$$

daher die nöthige Mauerlänge:

$$l = \frac{2\,\delta\, S\, sin.\alpha_1}{h e \gamma}.$$

Damit ferner dieselbe Mauer nicht fortgeschoben werde, muß ihre Reibung $\varphi\,(G - S\,sin.\,\alpha_1)$ größer, als die Horizontalkraft $S\,cos.\,\alpha_1$, also:

$$\varphi\,G > S\,(cos.\,\alpha_1 + \varphi\,sin.\,\alpha_1) \text{ sein.}$$

Man setzt hiernach:

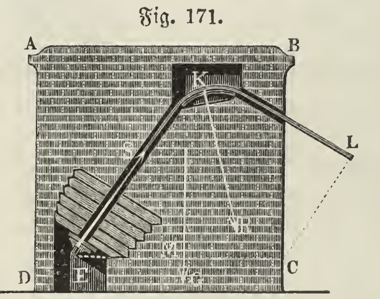
$$l = \frac{\delta\,S}{h\,e\,\gamma}\left(\frac{cos.\,\alpha_1}{\varphi} + sin.\,\alpha_1\right),$$

wobei $\varphi = 0{,}67$ und

der Sicherheitscoefficient δ 2 bis 4 anzunehmen ist.

Wenn die Kette im Widerlagspfeiler nicht bloß befestigt, sondern auch aufgelagert ist, wie in Fig. 171, so ist der Hebelarm der Spannung S das Perpendikel $CL = b$, vom Stützpunkte C nach der Seilrichtung KL gefällt, und der Hebelarm des Pfeilergewichtes G die Hälfte CM der Pfeilerlänge $CE = l$, letztere, der Sicherheit wegen, nur bis zum Befestigungspunkt E des Seiles gemessen. Hiernach hat man

Fig. 171.



$^1/_2\, h e l^2 \gamma = S b$, und daher mit Rücksicht auf Sicherheit,

$$l = \sqrt{\frac{2\,\delta\,S\,b}{h\,e\,\gamma}}.$$

In Hinsicht auf das Fortschieben über CE ist, wenn α die Neigung des Tragseiles KL gegen den Horizont bezeichnet, $\varphi\,(G + S\,sin.\,\alpha) = S\,cos.\,\alpha$, wonach

$$G = \frac{S\,cos.\,\alpha - \varphi\,S\,sin.\,\alpha,}{\varphi}, \text{ und}$$

$$l = \frac{\delta\,S\,(cos.\,\alpha - \varphi\,sin.\,\alpha)}{\varphi\,h\,e\,\gamma} \text{ folgt.}$$

Beispiel. Bei der in den Beispielen der Paragraphen 87 und 88 behandelten Kettenbrücke ist die Verticalkraft der belasteten Kette:

$$V = 165890 \text{ Pfund},$$

und die der unbelasteten:

$$V_1 = V - 78750 = 87140 \text{ Pfund};$$

wird nun noch $\frac{r}{a} = {}^1/_4$ und auch $\varphi = {}^1/_4$ angenommen, so ist die Zapfenreibung zwischen den Rollen des Pfeilerkopfes:

$$F = \varphi\,\frac{r}{a}\,(V + V_1) = {}^1/_4 \cdot {}^1/_4 \cdot (165890 + 86916) = 15800 \text{ Pfund}$$

viel kleiner als die Differenz der Spannungen. Es tritt daher eine Bewegung der Kette und ein Umdrehen der Rollen ein, wobei die Spannung der Kette auf der einen Seite allmälig zu-, sowie auf der anderen Seite allmälig abnimmt, und die Differenz zwischen beiden Spannungen in 15800 Pfund übergeht. Ist nun

die Pfeilerhöhe 16 Fuß, die Dicke 4 Fuß und die Dichtigkeit der Mauermasse = 130 Pfund, so hat man

$V + V_1 = 253030$, $e\gamma = 4.130 = 520$, $e h \gamma = 8320$, $H - H_1 = F = 15786$,

und wenn man noch $\delta = 4$ annimmt, so folgt die erforderliche Pfeilerdicke

$$d = -\frac{V + V_1}{2 e h \gamma} + \sqrt{\frac{2\delta(H - H_1)}{e\gamma} + \left(\frac{V + V_1}{2 e h \gamma}\right)^2} = -15{,}21$$

$$+ \sqrt{231{,}34 + 242{,}86} = -15{,}18 + 21{,}76 = 6{,}59 \text{ Fuß.}$$

Die nöthige Länge der Widerlagsmauer hat man für den in Fig. 170 abgebildeten Fall, wenn wir $h = 16$ und $d = 10$ Fuß und die Neigungswinkel α und α_1 der Trag- und Spannketten einander gleich setzen, sowie den Sicherheitscoefficienten $\delta = 2$ annehmen,

$$l = \frac{2\delta S \sin.\alpha_1}{h e \gamma} = \frac{4.165890}{16.10.130} = 31{,}9 \text{ Fuß.}$$

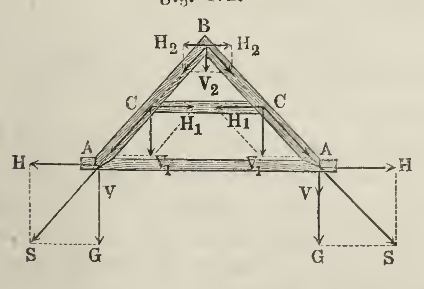
Einfache Dachgespärre. Die im (obigen §. 51 u. s. w.) entwickelten Formeln, Regeln u. s. w. über die Tragkraft der Balken, Träger, Sparren u. s. w. finden ihre vielfachen Anwendungen bei den Dachconstructionen, Lehrgerüsten und Brücken, und es ist daher noch Einiges über diese Anwendungen zu sagen nöthig. §. 96

Wir haben im Früheren (§. 52 u. s. w.) nur von den einfachen Dachconstructionen, wobei ein einfaches Hängewerk in Anwendung kommt, gehandelt; im Folgenden soll deshalb noch von den complicirteren, bei großen Spannweiten angewendeten Dachconstructionen die Rede sein.

Zur Unterstützung der Dachsparren wendet man gewöhnlich Kehlbalken, Stuhlsäulen, einfache oder zusammengesetzte Dachstühle u. s w. an. Bei Beurtheilung dieser Constructionen läßt sich voraussetzen, daß das Gewicht des Daches auf die Fläche desselben gleichförmig vertheilt ist, auch wollen wir hierbei die Körper als vollkommen starr ansehen und deshalb annehmen, daß gleichgroße Theile desselben durch ihr Gewicht gleichstark vertical abwärts drücken.

Ist hiernach ein Sparren AB, Fig. 172, in einem Punkte C unterstützt, welcher von seinen Endpunkten A und B um l_1 und l_2 absteht, während er selbst die ganze Länge $AB = l$ hat, so beträgt die der ganzen Belastung G desselben entsprechende Verticalkraft in A:

Fig. 172.



$$V = \frac{1}{2}\frac{l_1}{l} G,$$

ferner in B:

$$V_2 = \frac{1}{2}\frac{l_2}{l} G,$$

und daher in C:

$$V_1 = V + V_2$$

$$= \frac{l_1 + l_2}{2l} G = \frac{1}{2} G.$$

Ist nun das Gespärre mit einem einfachen Kehlbalken CC ausgerüstet, so hat man bei dem Neigungswinkel α der Sparren die aus V_1 und V_2 resultirenden Horizontalschube:

$$H_1 = V_1 \, cotang. \alpha = \frac{1}{2} G \, cotang. \alpha,$$

sowie

$$H_2 = V_2 \, cotang. \alpha = \frac{1}{2} \frac{l_2}{l} G \, cotang. \alpha,$$

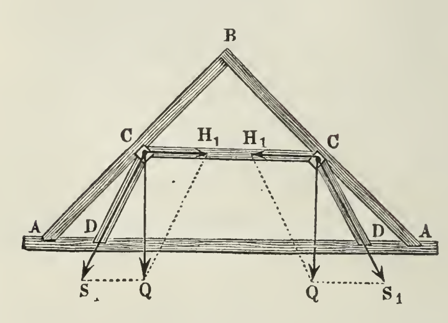
und es ist folglich der Sparrenschub in A:

$$H = H_1 + H_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{l_2}{l} \right) G \, cotang. \alpha,$$

also z. B. für $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$, $H = \frac{3}{4} G \, cotang. \alpha$, wogegen für Gespärre ohne Kehlbalken H nur $= \frac{1}{2} G \, cotang. \alpha$ ausfällt. Durch Anwendung eines Kehlbalkens wird also der Sparrenschub erhöht.

Bei dem Gespärre ABA, Fig. 173, mit einem Dachstuhl $DCCD$, zerlegt sich der Verticaldruck $Q = \frac{1}{2} G$ in der Stuhlfette C nach der Axe CC des Kehlbalkens oder Spannriegels und nach der Axe CD der Stuhlsäule. Ist α_1 der Neigungswinkel der Stuhlsäule gegen den Horizont, so hat man den Horizontalschub im Kehlbalken

Fig. 173.



$$H_1 = Q \, cotang. \alpha_1$$
$$= \frac{1}{2} G \, cotang. \alpha_1,$$

und dagegen den Schub in der Stuhlsäule

$$S_1 = \frac{Q}{sin. \alpha_1} = \frac{G}{2 \, sin. \alpha_1}.$$

Der horizontale Sparrenschub am Fuße ist dann nur:

$$H = \frac{1}{4} G \, cotang. \alpha,$$

dagegen der horizontale Component des Schubes in der Stuhlsäule:

$$H_2 = S_1 \, cos. \alpha_1 = \frac{1}{2} G \, cotang. \alpha_1.$$

Wie ein zusammengesetztes Hänge- und Sprengwerk zur Unterstützung eines Daches und einer Brücke oder Decke zugleich dienen kann, wird durch Fig. 174 vor Augen geführt. Bezeichnet man die Neigungswinkel der Streben DE und DE_1 (sowie $D_1 E_1$ und $D_1 E$) gegen den Horizont durch α_1 und α_2, so hat man die aus der Sparrenlast $Q = \frac{1}{2} G$ entspringenden Drücke auf die kürzeren Streben:

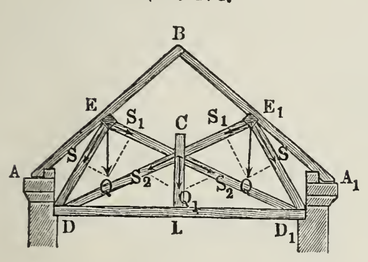
$$S = \frac{Q \cos. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{1}{2} \frac{G \cos. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

und die auf die längeren Streben:

$$S_1 = \frac{Q \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)};$$

Fig. 174.



dagegen die aus der in der Mitte L des Balkens DD_1 niederziehenden Last Q_1 entspringenden Zugkräfte der Streben:

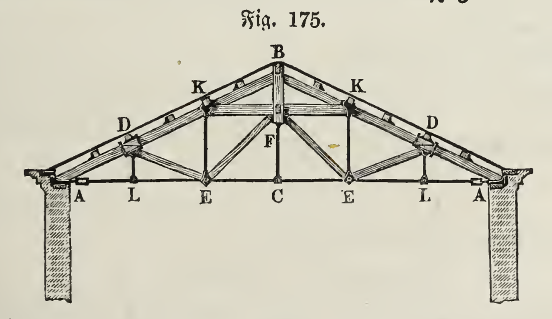
$$S_2 = \frac{Q_1}{2 \sin. \alpha_2},$$

und daher den Gesammtschub in den längeren Streben:

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{G \cos. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{Q_1}{\sin. \alpha_2}\right).$$

Zusammengesetzte Dachgespärre. Gespärre von großer Spannweite haben, wenn sie besonders sehr flach sind, einen bedeutenden Schub, und es ist deshalb sehr nöthig, dieselben durch einen Durchzug (franz. tirant; engl. tie-beam) zu unterstützen. Einen solchen Dachstuhl führt Fig. 175 vor Augen. Es besteht hier der Durchzug in einer schmiede- §. 97

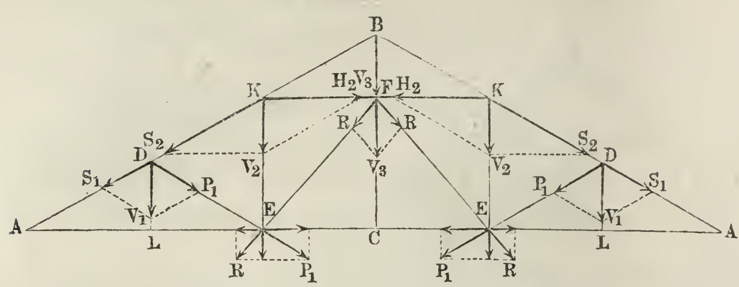
Fig. 175.



eisernen Stange AA, welche mittels eiserner Füße A, A den Schub der Hauptsparren AB, AB (franz. arbalétriers; engl. principal-rafters) aufnimmt. Zur Unterstützung der letzteren dient das aus Streben DE, EF, aus Hängestäben DL, KE, FC, aus einem Kehlbalken KK und aus einer Hängesäule BF zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerk. Die Art und Weise, wie die Sparrenlast G von dieser Construction aufgenommen wird, ist aus den Kraftzerlegungen Fig. 176 (a. f. S.) zu ersehen. Die Verticalkraft $V_1 = \frac{1}{3} G$ zerlegt sich in zwei Seitenkräfte P_1 und S_1 nach der Richtung der Strebe DE und der des Sparrens AB; die Verticalkraft $V_2 = \frac{1}{3} G$ hingegen in zwei Seiten-

kräfte H_2 und S_2, nach der Axe des Kehlbalkens und nach der des Sparrens, die Verticalkraft $V_3 = \frac{1}{3} G$ endlich nimmt die Hängesäule BF auf und

Fig. 176.



zerlegt sich in zwei Seitenkräfte R, R, welche auf die Streben EF, EF übergehen. Die Kräfte P_1 und R zerlegen sich ferner in E in Horizontal- und Verticalkräfte, deren Resultanten von den Zugstangen AE, AE und Hängestangen KE, KE aufgenommen werden. Die beiden Componenten von P_1 sind, wenn die Streben DE, DE mit den Sparren AB, AB einerlei Neigung α haben:

$$P_1 \sin.\alpha = \frac{G}{6} \text{ und } P_1 \cos.\alpha = \frac{G}{6} cotang.\alpha,$$

und die von R sind, wenn α_1 den Neigungswinkel der Streben EF gegen den Horizont ausdrückt:

$$R \sin.\alpha_1 = \frac{1}{6} G \text{ und}$$

$$R \cos.\alpha_1 = \frac{1}{6} \frac{G}{\sin.\alpha_1} \cdot \cos\alpha_1 = \frac{1}{6} G\, cotang.\alpha_1;$$

in Folge dieser Kräfte wird daher die Hängestange KE mit einer Kraft

$$\frac{G}{6} + \frac{G}{6} = \frac{G}{3}$$

und die Zugstange AE mit einer Kraft

$$\frac{G}{6}(cotang.\alpha - cotang.\alpha_1)$$

gespannt. Durch die ersten dieser beiden Kräfte wird V_2 verdoppelt, d. i. $= \frac{G}{3} + \frac{G}{3} = \frac{2}{3} G$, weshalb die Horizontalspannung des Kehlbalkens:

$$H_2 = \frac{2}{3} G\, cotang.\alpha$$

und daher der horizontale Sparrenschub in A:

$$H = H_1 + H_2 = S_1 \cos.\alpha_1 + H_2$$
$$= \frac{1}{6} G\, cotang.\alpha + \frac{2}{3} G\, cotang.\alpha = \frac{5}{6} G\, cotang.\alpha \text{ ausfällt.}$$

Die Durchzugstange ist endlich zwischen A und E mit der Kraft

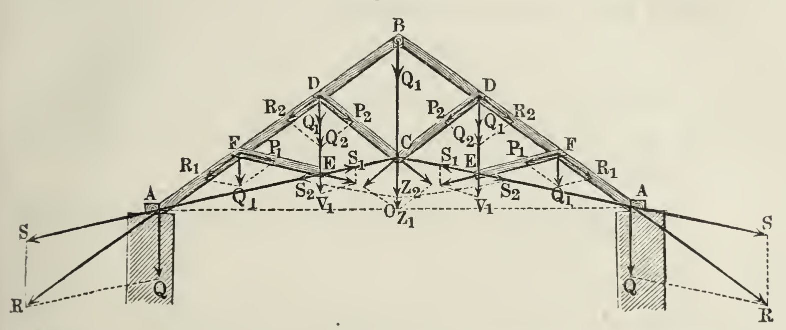
$$H = \frac{5}{6} G\, cotang.\alpha$$

und zwischen E und E mit der Kraft

$$H_3 = {}^5/_6\, G\, cotang.\, \alpha - {}^1/_6\, G\, (cotang.\, \alpha - cotang.\, \alpha_1)$$
$$= {}^2/_3\, G\, cotang.\, \alpha + {}^1/_6\, G\, cotang.\, \alpha_1 \text{ gespannt.}$$

Die Spannungsverhältnisse eines eisernen Daches, wie Fig. 177, lassen §. 98
sich entweder durch Anwendung des Kräfteparallelogrammes, oder durch An-

Fig. 177.



wendung der Hebeltheorie wie folgt bestimmen. Die Last G eines Sparren AB sei so vertheilt, daß jeder der Zwischenpunkte D und F, ${}^1/_3\, G$, und jeder der Endpunkte A und B, ${}^1/_6\, G$ trage. Diesem zu Folge ist also anzunehmen, daß in jedem der fünf Punkte B, D, D und F, F, die Last $Q_1 = \frac{G}{3}$ niederziehe, und daß jeder der Sparrenfüße A und A mit der Kraft $Q = {}^5/_6\, G$ senkrecht niederdrücke. Ist nun α der Neigungswinkel eines Sparrens AB und α_1 der einer Zugstange AC gegen den Horizont, so erhält man mit Hülfe des Kräfteparallelogramms, dessen eine Seite die Kraft Q ist, den Sparrenschub innerhalb AF:

$$R = \frac{Q\, cos.\, \alpha_1}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)},$$

sowie der Stangenzug zwischen A und E:

$$S = \frac{Q\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)}.$$

Die Last Q_1 in F zerlegt sich in zwei Seitenkräfte P_1 und R_1, wovon die eine durch Druck in der Strebe EF fortgepflanzt wird, während die andere einen Theil des Sparrenschubes ausmacht. Bezeichnet β_1 den Neigungswinkel der Strebe EF gegen den Horizont, so ist

$$P_1 = \frac{Q_1\, cos.\, \alpha}{sin.\, (\alpha + \beta_1)}, \text{ und } R_1 = \frac{Q_1\, cos.\, \beta_1}{sin.\, (\alpha + \beta_1)},$$

wonach noch der Sparrenschub längs FD:

$$R - R_1 = \frac{Q\, cos.\, \alpha_1}{sin.\, (\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1\, cos.\, \beta_1}{sin.\, (\alpha + \beta_1)} \text{ folgt.}$$

Die Kraft P_1 in der Richtung der Strebe FE zerlegt sich in E in zwei Kräfte S_1 und V_1, wovon

$$S_1 = \frac{P_1 \cos.\beta_1}{\cos.\alpha_1} = \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}$$ die Stange AE,

und $$V_1 = \frac{P_1 \sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos.\alpha_1} = \frac{Q_1 \cos.\alpha \sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}$$ die Stange DE spannt.

Hiernach ist die Spannung der Zugstange AC längs CE:

$$S_2 = S - S_1 = \frac{Q \cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}.$$

Die Verticalkraft V_1 vereinigt sich mit der Last Q_1 in D zu einer Verticalkraft $Q_2 = Q_1 + V_1$, und diese giebt nun den Druck in der Strebe CD, deren Neigung gegen den Horizont β_2 sein möge,

$$P_2 = \frac{Q_2 \cos.\alpha}{\sin.(\alpha + \beta_2)},$$ sowie die Kraft in der Richtung des Sparrens

$$R_2 = \frac{Q_2 \cos.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)}.$$

In Folge der letzteren ist der Sparrenschub innerhalb BD:

$$R_3 = R - R_1 - R_2 = \frac{Q \cos.\alpha_1}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)} - \frac{Q_2 \cos.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)},$$

woraus wieder der Zug in der Stange BC:

$Z = 2\, R_3 \sin.\alpha - Q_1$ folgt.

Letzterer ist auch gleich der Summe von der Mittelkraft aus den Strebedrücken P_2, P_2, d. i.

$$Z_1 = 2\, P_2 \sin.\beta_2 = \frac{2\, Q_2 \cos.\alpha \sin.\beta_2}{\sin.(\alpha + \beta_2)}$$

und von der Mittelkraft aus den Stangenzügen S_2, S_2, d. i.

$$Z_2 = 2\, S_2 \sin.\alpha_1$$
$$= 2\left(\frac{Q \cos.\alpha}{\sin.(\alpha - \alpha_1)} - \frac{Q_1 \cos.\alpha \cos.\beta_1}{\sin.(\alpha + \beta_1)\cos.\alpha_1}\right)\sin.\alpha_1.$$

Führt man statt der Winkel die Seiten des Dachgespärres ein, so fallen die im Vorstehenden gefundenen Formeln einfacher und übersichtlicher aus. Es bezeichne

l die Länge des Sparrens AB,
l_1 die Länge der Zugstange AC,
a die Verticalprojection BO des ersteren,
a_1 die Verticalprojection CO der letzteren,
ferner $h = a - a_1$ die Höhe oder Länge der Zugstange BC,
b die Horizontalprojection oder halbe Spannweite AO,

$$c_1 = \frac{b}{3\cos.\beta_1},$$ die Länge der Strebe EF, und

$$c_2 = \frac{b}{3\cos.\beta_2},$$ die Länge der Strebe CD.

Uebrigens ist im Dreiecke ABC

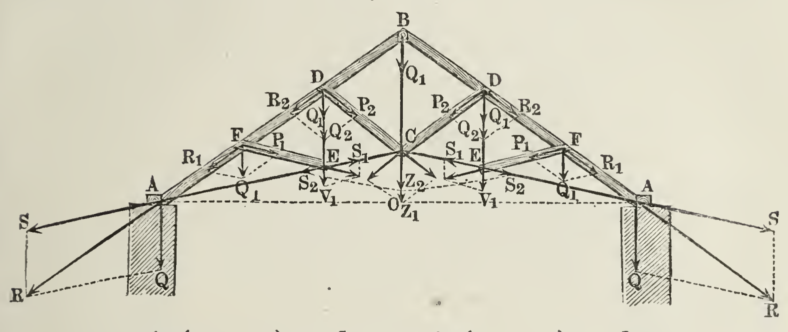
$$l_1^2 = l^2 + h^2 - 2ah,$$

sowie in den Dreiecken AOB und AOC,

$$l^2 = a^2 + b^2, \text{ und } l_1^2 = a_1^2 + b^2.$$

Es giebt die Auflösung des Dreieckes ABC:

Fig. 178.



$$\frac{\sin.(\alpha - \alpha_1)}{\cos.\alpha_1} = \frac{h}{l} \text{ und } \frac{\sin.(\alpha - \alpha_1)}{\cos.\alpha} = \frac{h}{l_1},$$

daher folgt zunächst der Sparrenschub

$$R = \frac{Ql}{h} = {}^5/_6\,\frac{Gl}{h}, \text{ und der Stangenzug } S = \frac{Ql_1}{h} = {}^5/_6\,\frac{Gl_1}{h}.$$

Ferner ist $\dfrac{\sin.(\alpha + \beta_1)}{\cos.\alpha} = \dfrac{DE}{FE} = \dfrac{2h}{3c_1}$, und

$\dfrac{\sin.(\alpha + \beta_1)}{\cos.\beta_1} = \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{2h}{l}$, daher folgt der Strebendruck

$P_1 = Q_1\,\dfrac{3c_1}{2h} = {}^1/_2\,G\,\dfrac{c_1}{h}$ und der Druck auf den Sparren

$R_1 = Q_1\,\dfrac{l}{2h} = {}^1/_6\,G\,\dfrac{l}{h}$, so daß sich der Sparrenschub innerhalb DF:

$R - R_1 = {}^5/_6\,G\,\dfrac{l}{h} - {}^1/_6\,G\,\dfrac{l}{h} = {}^2/_3\,G\,\dfrac{l}{h}$ ergiebt.

Aus diesem Strebendruck folgen nun, da

$\cos.\alpha_1 = \dfrac{b}{l_1}$, $\cos.\beta_1 = \dfrac{{}^1/_3\,b}{c_1} = \dfrac{b}{3c_1}$ und

$\dfrac{\sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos.\alpha_1} = \dfrac{{}^1/_3\,h}{c_1} = \dfrac{h}{3c_1}$ ist, die Stangenkräfte

$$S_1 = \frac{P_1\cos.\beta_1}{\cos.\alpha_1} = {}^1/_2\,G\,\frac{c_1}{h}\cdot\frac{l_1}{3c_1} = {}^1/_6\,G\,\frac{l_1}{h}, \text{ und}$$

$$V_1 = \frac{P_1\sin.(\alpha_1 + \beta_1)}{\cos.\alpha_1} = {}^1/_2\,G\,\frac{c_1}{h}\cdot\frac{h}{3c_1} = {}^1/_6\,G.$$

Die Spannung der Stange CE ist nun

$$S_2 = S - S_1 = {}^5/_6\, G\, \frac{l_1}{h} - {}^1/_6\, G\, \frac{l_1}{h} = {}^2/_3\, G \cdot \frac{l_1}{h},$$

und die Verticalkraft in D:

$$Q_2 = Q_1 + V_1 = {}^1/_3\, G + {}^1/_6\, G = {}^1/_2\, G.$$

Letztere giebt nun, da

$$\frac{sin.\,(\alpha + \beta_2)}{cos.\,\alpha} = \frac{BC}{CD} = \frac{h}{c_2} \text{ und}$$

$$\frac{sin.\,(\alpha + \beta_2)}{cos.\,\beta_2} = \frac{BC}{BD} = \frac{h}{{}^1/_3\, l} = \frac{3\,h}{l}$$

ist, den Druck in der Strebe CD:

$$P_2 = \frac{Q_2\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\alpha + \beta_2)} = {}^1/_2\, G\, \frac{c_2}{h},$$

und die Kraft, welche auf den Sparren übergeht,

$$R_2 = \frac{Q_2\ cos.\,\beta_2}{sin.\,(\alpha + \beta_2)} = {}^1/_2\, G\, \frac{l}{3\,h} = {}^1/_6\, \frac{Gl}{h},$$

woraus der Sparrenschub innerhalb BD:

$$R_3 = R - R_1 - R_2 = {}^2/_3\, G\, \frac{l}{h} - {}^1/_6\, \frac{Gl}{h} = {}^1/_2\, \frac{Gl}{h} \text{ folgt.}$$

Nun ergiebt sich die Zugkraft der Stange BC:

$$Z = 2\, R_3\, sin.\,\alpha - Q_1 = 2\,.\,{}^1/_2\, \frac{Gl}{h}\, \frac{a}{l} - {}^1/_3\, G = G\left(\frac{a}{h} - {}^1/_3\right).$$

Auch ist die Mittelkraft aus den Strebendrücken P_2, P_2,

$$Z_1 = 2\, P_2\, sin.\,\beta_2 = 2\,.\,{}^1/_2\, G\, \frac{c_2}{h} \left(\frac{{}^2/_3\, h - {}^1/_3\, a_1}{c_2}\right) = G\left({}^2/_3 - \frac{a_1}{3\,h}\right),$$

und die aus den Stangenzügen S_2 und S_2:

$$Z_2 = 2\, S_2\ sin.\,\alpha_1 = {}^4/_3\, G\, \frac{l_1}{h}\, \frac{a_1}{l_1} = {}^4/_3\, G\, \frac{a_1}{h},$$

daher folgt die gesammte Spannung der Stange BC:

$$Z = Z_1 + Z_2 = G\left({}^2/_3 + \frac{a_1}{h}\right) = G\left({}^2/_3 + \frac{a - h}{h}\right) = G\left(\frac{a}{h} - {}^1/_3\right),$$

wie oben.

§. 99 Mit Hülfe der Momente- oder Hebeltheorie ergeben sich die im Vorstehenden bestimmten Spannungen des Dachgespärres ABA, Fig 179, wie folgt. Die Reaction Q hält dem Sparrenschub R und dem Stangenzug S das Gleichgewicht, daher ist

$$R\,.\,\overline{KL} = Q\,.\,\overline{FN}, \text{ wonach } R = Q \cdot \frac{FN}{KL} \text{ folgt.}$$

$$\text{Aber } \frac{FN}{AF} = \frac{KL}{KF}, \text{ daher}$$

$$\frac{FN}{KL} = \frac{AF}{KF} = \frac{3\,AF}{3\,KF} = \frac{l}{h}, \text{ und } R = \frac{Ql}{h} = {}^5/_6\, G\, \frac{l}{h}.$$

Ebenso hat man $S . \overline{FM} = Q . \overline{FN}$, oder $S = Q \cdot \frac{FN}{FM}$;

Aber $\frac{FN}{AK} = \frac{FM}{FK}$, oder $\frac{FN}{FM} = \frac{AK}{FK} = \frac{3\,AK}{3\,FK} = \frac{l_1}{h}$,

daher hat man $S = Q \cdot \frac{l_1}{h} = {}^5/_6\, G\, \frac{l_1}{h}$, wie auch im vorigen Paragraphen gefunden worden ist.

Fig. 179.

Ferner hält in Beziehung auf den Stützpunkt A die Kraft P_1 in der Strebe EF der in F wirkenden Last Q_1 das Gleichgewicht, weil die Richtungen der Kräfte in AB und AC durch A gehen, und folglich die Momente der letzteren Null sind. Deshalb ist $P_1 . \overline{AU} = Q_1 \overline{NF}$, oder, da

$\frac{AU}{DE} = \frac{FN}{EF}$, also $AU = \frac{{}^1/_3\, b \,.\, {}^2/_3\, h}{c_1} = {}^2/_9\, \frac{bh}{c_1}$ ist,

$$P_1 \,.\, {}^2/_9\, \frac{bh}{c_1} = Q_1 \frac{b}{3}, \text{ so daß}$$

$$P_1 = {}^3/_2\, Q_1 \frac{c_1}{h} = {}^1/_2\, G\, \frac{c_1}{h} \text{ folgt.}$$

Um ferner die Spannung $R - R_1$ des Sparrens längs DF zu finden, setzen wir das Moment

$$(R - R_1) . \overline{ET} = \text{dem Momente } Q \,.\, {}^2/_3\, b - Q_1 \frac{b}{3},$$

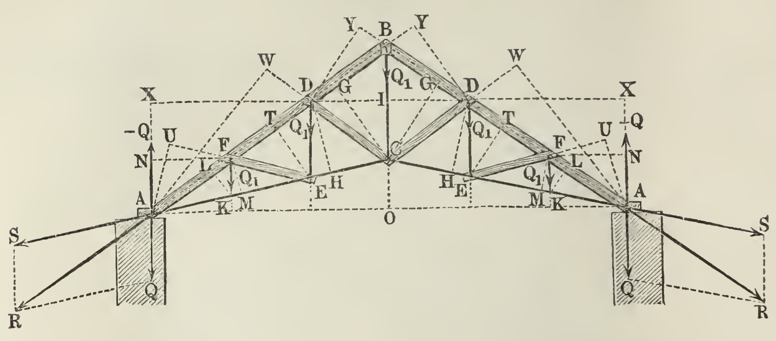
wonach dann, da $\frac{ET}{DE} = \frac{b}{l}$, also $ET = \frac{b}{l}\, DE = {}^2/_3\, \frac{bh}{l}$ ist,

$$R - R_1 = \left(\frac{{}^2/_3\, Qb - {}^1/_3\, Q_1 b}{{}^2/_3\, bh}\right) l = (Q - {}^1/_2\, Q_1)\, \frac{l}{h} = {}^2/_3\, G \frac{l}{h} \text{ folgt.}$$

Die Spannung S_2 des Stückes CE der Stange AC ergiebt sich, indem man das Moment $S_2 . \overline{DH} = {}^2/_3\, Qb - {}^1/_3 Q_1\, b$ setzt. Da $\frac{DH}{DE} = \frac{b}{l_1}$, also $DH = {}^2/_3\, \frac{bh}{l_1}$ ist, so folgt hiernach

$$S_2 = (2\,Q - Q_1) \cdot \frac{l_1}{2\,h} = (5/3 - 1/3)\,G \cdot \frac{l_1}{2\,h} = 2/3\,\frac{G\,l_1}{h}.$$

Fig. 180.



Die Spannung Q_2 der Zugstange DE ist durch die Momentengleichung $Q_2 . \overline{XD} = Q_1 . \overline{XD} + Q_1 . \overline{NF}$ bestimmt, welche, da $XD = 2/3\,b$ ist,

$$Q_2 = \frac{3\,Q_1\,b}{2\,b} = 3/2\,Q_1 = 1/2\,G \text{ giebt.}$$

Für die Spannung P_2 der Strebe CD ist ferner

$$P_2 . \overline{A\,W} = Q_1 . \overline{NF} + Q_1 . \overline{XD} = Q_1\,b, \text{ und da man}$$

$$\frac{A\,W}{A\,D} = \frac{b}{l} \cdot \frac{h}{CD}, \text{ also } A\,W = \frac{2\,b\,h}{3\,c_2} \text{ hat, so folgt}$$

$$P_2 = \frac{3\,Q_1\,b\,c_2}{2\,b\,h} = 3/2\,Q_1\,\frac{c_2}{h} = 1/2\,G\,\frac{c_2}{h}.$$

Zur Bestimmung des Druckes $R - R_1 - R_2$ des obersten Sparrenstückes BD dient die Momentengleichung

$$(R - R_1 - R_2) . \overline{C\,G} = Q . b - Q_1 . 2/3\,b - Q_1\,\frac{b}{3} = (Q - Q_1)\,b.$$

Nun ist aber $\frac{C\,G}{C\,B} = \frac{A\,O}{A\,B}$, d. i. $C\,G = \frac{h\,b}{l}$, daher folgt

$$R - R_1 - R_2 = (Q - Q_1)\,\frac{l}{h} = 1/2\,G\,\frac{l}{h}.$$

Um endlich noch den Zug Z in der Stange $B\,C$ zu bestimmen, setzen wir in Beziehung auf D als Stützpunkt, das Moment $Z . \overline{DI} =$ dem Moment $(R - R_1 - R_2) . \overline{DY}$ des Sparrenschubes BD minus dem Momente $Q_1 . DI$ der Belastung Q_1 im Scheitel B.

Hiernach ist $Z = 1/2\,G\,\frac{l}{h} \cdot \frac{D\,Y}{D\,I} - Q_1$, folglich, da

$$\frac{D\,Y}{D\,D} = \frac{a}{l}, \text{ also } \overline{D\,Y} = \frac{a}{l}\,\overline{D\,D} = \frac{2\,a}{l}\,\overline{DI} \text{ ist,}$$

$$Z = G\,\frac{a}{h} - \frac{G}{3} = G\left(\frac{a}{h} - 1/3\right),$$

ganz in Uebereinstimmung mit den Resultaten des vorigen Paragraphen.

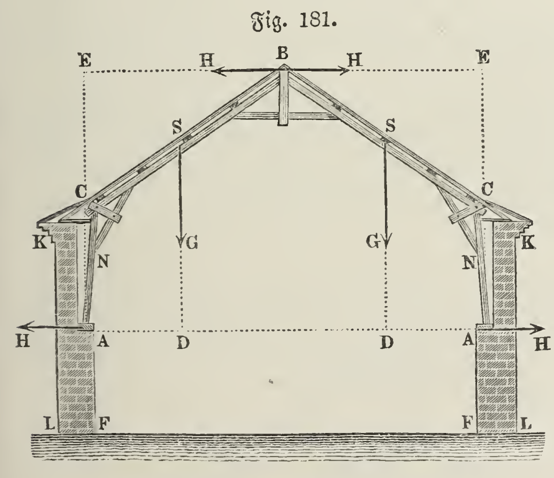
Wenn ein Gespärre keinen Durchzug hat, so muß der Sparrenschub H §. 100
von den Seiten- oder Stützmauern des Gebäudes aufgenommen werden, und es sind die Sparren durch Bänder und Zangen mit einander zu verbinden, sowie durch Streben zu stützen. In den Figuren 181, 182 und 183 (a. S. 229, 230 und 231) sind drei solche Gespärre abgebildet. Bei der Bestimmung des horizontalen Sparrenschubes gilt auch die §. 82 mitgetheilte Regel. Ist G das Gewicht des halben Gespärres ACB, ferner a die Höhe AE des Forstes B über dem Fuße des Gespärres und s der Horizontalabstand AD des letzteren Punktes von der verticalen Schwerlinie SD des Gespärres, so hat man den Horizontalschub am Fuße A und im Scheitel B:

$$H = \frac{G s}{a}.$$

Die Richtigkeit dieser Formel wird durch die Versuche Ardant's (siehe das am Ende des Capitels angeführte Werk) vollkommen bestätigt; nach diesen ist für die hier abgebildeten Gespärre:

$$H = 0,44\, G.$$

Fig. 181.



Aus dieser Formel sowie aus Ardant's Versuchen folgt, daß der Schub H um so kleiner ausfällt, je mehr sich der Schwerpunkt der Sparrenlast dem Fußpunkte A des Sparrens in horizontaler Richtung nähert.

Für ein halbkreisförmiges Sparrwerk mit gleichförmiger Belastung wäre z. B. nach Band I, §. 107:

$$\frac{s}{a} = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}, \text{ daher auch:}$$

$$H = \frac{4}{11}\, G = 0,36\, G,$$

während Ardant's Versuche

$$H = 0,32\, G \text{ geben.}$$

Bildet das Gespärre einen flachen Parabelbogen, so ist nach §. 77 bei gleichmäßiger Belastung, der Sparrenschub

$$Q = \frac{q b^2}{2 a}, \text{ d. i. } H = \frac{G b}{2 a},$$

was mit der zuletzt gefundenen Formel $H = \frac{G s}{a}$ ebenfalls übereinstimmt, da b die halbe Spannweite und a die Dachhöhe bezeichnet.

Bogengespärre, sie mögen aus über einander liegenden krumm gebogenen Holzschienen, oder aus neben einander liegenden krumm geschnittenen Holzbohlen bestehen, geben denselben Horizontalschub wie gerade Gespärre. Dagegen läßt sich der Sparrenschub durch die Verbindung der Sparren unter einander mittels Bänder, Durchzüge u. s. w. herabziehen, weil sich dadurch beide Gespärrhälften einem einzigen starren Körper mehr nähern, welcher natürlich keinen Horizontalschub äußert.

Die Stärke der Mauer, welche den Sparrenschub auszuhalten hat, ist wie die einer Widerlagsmauer für Gewölbe (s. §. 27) zu berechnen.

Bezeichnen wir die Höhe und Breite des inneren Mauerstücks AF durch h_1 und b_1 und die Höhe und Breite des äußeren Mauerstückes KL durch h_2 und b_2, ferner den auf je 1 Fuß Mauerlänge kommenden Sparrenschub durch H_1, und die auf eben diese Länge kommende Sparrenlast durch G_1, endlich noch die Dichtigkeit der Mauermasse durch γ, so haben wir bei dreifacher Sicherheit:

$$3 H_1 h_1 = G_1 (\tfrac{1}{2} b_1 + b_2) + (\tfrac{1}{2} b_1 + b_2) b_1 h_1 \gamma + \tfrac{1}{2} b_2^2 h_2 \gamma,$$

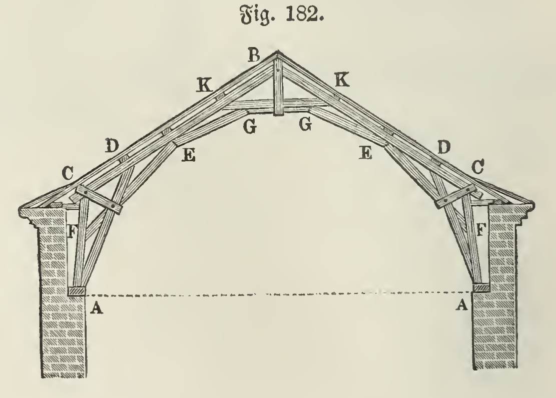
und es läßt sich nun hieraus entweder b_1 oder b_2 berechnen. Zur Bestimmung von b_2 hat man z. B. die quadratische Gleichung

$$\tfrac{1}{2} h_2 \gamma . b_2^2 + (G_1 + b_1 h_1 \gamma) . b_2 = 3 H_1 h_1 - \tfrac{1}{2} G_1 b_1 - \tfrac{1}{2} b_1^2 h_1 \gamma$$

aufzulösen.

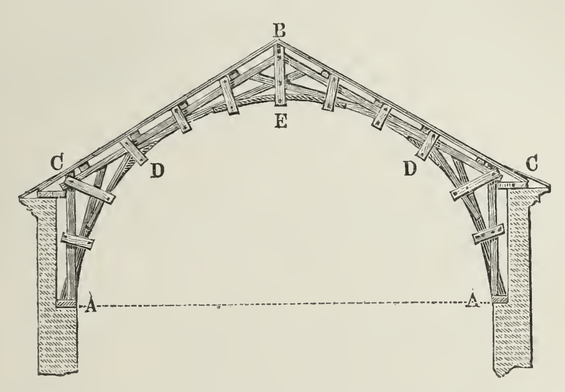
§. 101 Bei großen Spannweiten sind die Sparren durch Streben oder Bögen zu stützen, weil sie sonst der Belastung nicht hinreichenden Widerstand leisten können. In Fig. 182 wird ein Sparrwerk vor Augen geführt.

Fig. 182.



wo die Sparren BC, BC durch Streben AD, EF, EG, einen Kehlbalken KK, einen Spannriegel GG u. s. w. unterstützt werden. Bei dem Sparrwerk in Fig. 181 ist es ein aus Streben zusammengesetzter Bogen $ADEDA$, welcher die Sparren BC, BC stützt.

Fig. 183.

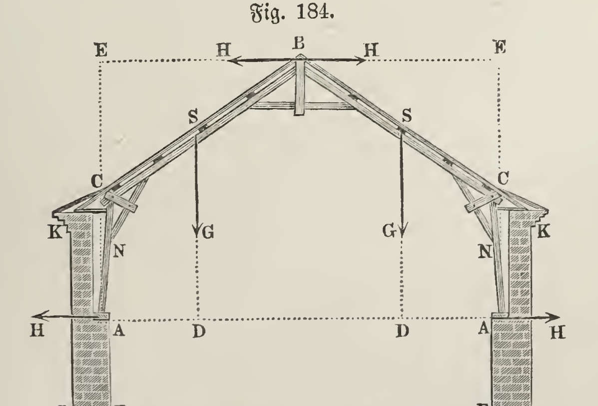


Die Stärken der Theile eines Gespärres sind vorzüglich nach der Theorie der zusammengesetzten Festigkeit (s. Band I, §. 270 ꝛc.) zu berechnen, da diese Hölzer meist der Biegung und Ausdehnung oder Zusammendrückung zugleich ausgesetzt sind. Bei einem Gespärre wie Fig. 184 (und Fig. 185 a. f. S.) wird diese Rechnung auf folgende Weise geführt.

Für den Sparren BC ist das Moment zum Abbrechen in seiner Mitte S

$$M = \frac{1}{2} Hl \sin.\alpha - \frac{1}{8} Gl \cos.\alpha,$$

Fig. 184.



wenn l die Länge, α den Neigungswinkel und G das Gewicht desselben bezeichnet. Außerdem wird dieser Sparren noch mit einer Kraft

$$S = H \cos.\alpha + \frac{1}{2}\, G \sin.\alpha$$

zusammengedrückt; es ist daher für den Querschnitt bh dieses Balkens die Formel:

$$bh = \frac{S}{T} + \frac{6\,M}{H\,T} \text{ (s. Band I, §. 205 und §. 235)}$$

zu setzen, oder wenn man den Tragmodul für den Druck $T = 500$, und den für die Biegung $T = 1200$ Pfund annimmt:

$$bh = \frac{S}{500} + \frac{M}{200\,h}.$$

Für das Abbrechen des Sparrens AC um seine Mitte N ist dagegen, wenn l_1 die Länge, α_1 den Neigungswinkel und G_1 das Gewicht desselben bezeichnet, das Moment:

$$M_1 = \frac{1}{8}\, G_1 l_1 \cos.\alpha_1 + \frac{1}{2}\, G (l \cos.\alpha + l_1 \cos.\alpha_1)$$
$$- H (l \sin.\alpha + \frac{1}{2}\, l_1 \sin.\alpha_1);$$

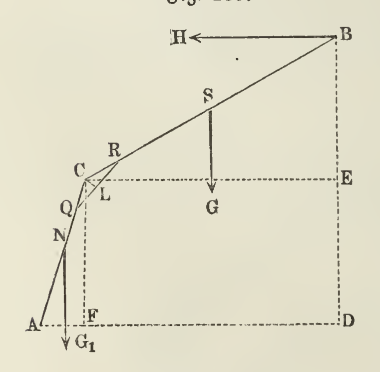
ferner ist die Compressionskraft des Sparrens:

$$S_1 = H \cos.\alpha_1 + (G + \frac{1}{2}\, G_1) \sin.\alpha_1,$$

und der Querschnitt desselben:

$$b_1 h_1 = \frac{S_1}{500} + \frac{M_1}{200\,h_1}.$$

Fig. 185.



Für eine Drehung um die Ecke C ist das Moment

$$M_2 = \frac{1}{2}\, G l \cos.\alpha - H l \sin.\alpha,$$

und der nöthige Querschnitt der Strebe QR,

$$= \frac{M_2}{\overline{CL}.\,T_1} = \frac{M_2}{500\,d},$$

wenn d den Abstand $\overline{CL}$ des Eckpunktes C von der Strebe QR bezeichnet.

Für diese Berechnung kann man die folgenden Erfahrungsresultate zu Grunde legen:

Ein	Quadratfuß	Ziegeldach	wiegt	12 Pfund,
„	„	Schieferdach	„	7 1/2 „
„	„	Zinkdach	„	5 „

Hierzu kommt noch auf jeden Quadratfuß 15 bis 20 Pfund zufällige Belastung durch Schnee und Wind, und außerdem noch 0,15 bis 0,20 Cubikfuß Holz, welches an Gewicht 4 bis 10 Pfund ausmacht, da ein

Cubikfuß Tannenholz 25 bis 40 Pfund und ein Cubikfuß Eichenholz 40 bis 50 Pfund wiegt.

Beispiel. Bei einem Ziegeldach, wie Fig. 184 und 185, sei die Länge des oberen Sparrens, $BC = l = 30$ Fuß, die des unteren, $AC = l_1 = 15,5$ Fuß, ferner der Neigungswinkel des ersteren, $\alpha = 30^0$ und der des letzteren, $\alpha_1 = 75^0$; man sucht die nöthigen Stärken dieser Construction. Nehmen wir die Last des Daches auf jeden Quadratfuß $= 12 + 8 + 20 = 40$ Pfund an, und setzen wir voraus, daß die Gespärre 6 Fuß von einander abstehen. Die ganze Last eines Sparrens BC ist hiernach:

$$G = 30 . 6 . 40 = 7200 \text{ Pfund},$$

und die eines Sparrens AC:

$$G_1 = 15,5 . 6 . 40 = 3720 \text{ Pfund},$$

folglich ist der Sparrenschub:

$$H = [\tfrac{1}{2} G_1 l_1 \cos. \alpha_1 + G (l_1 \cos. \alpha_1 + \tfrac{1}{2} l \cos. \alpha)] : (l \sin. \alpha + l_1 \sin. \alpha_1)$$
$$= [1860 . 15,5 . \cos. 75^0 + 7200 (15,5 \cos. 75^0 + 15 \cos. 30^0)] : (30 \sin. 30^0 + 15,5 \sin. 75^0)$$
$$= (28830 . 0,2588 + 7200 . 17) : (15 + 14,97)$$
$$= \frac{129861}{29,97} = 4333 \text{ Pfund}.$$

Für den Bruch in der Mitte S des Sparrens BC, Fig. 183, ist nun das Moment:

$$M = \tfrac{1}{2} H l \sin. \alpha - \tfrac{1}{8} G l \cos. \alpha = 2166,5 . 15 - 900 . 25,98$$
$$= 32497 - 23382 = 9115 \text{ Fußpfund} = 109380 \text{ Zollpfund},$$

und die Spannung:

$$S = H \cos. \alpha + \tfrac{1}{2} G \sin. \alpha = 4333 . 0,8660 + 3600 . \tfrac{1}{2} = 5552 \text{ Pfund},$$

folglich hat man für den Querschnitt dieses Sparrens:

$$b h = \frac{S}{500} + \frac{M}{200 h} = \frac{5552}{500} + \frac{109380}{200 h} = 11,1 + \frac{546,9}{h},$$

also, wenn man $h = \tfrac{7}{5} b$ macht:

$$\tfrac{49}{25} b^3 = 11,1 . \tfrac{7}{5} b + 546,9,$$

folglich die Sparrenbreite:

$$b = \sqrt[3]{279 + 7,9 b} = 7 \text{ Zoll}$$

und die Sparrenhöhe:

$$h = \tfrac{7}{5} . 7 = \tfrac{49}{5} = 9\tfrac{4}{5},$$

also nahe 10 Zoll.

Für den Bruch in der Mitte N des Sparrens AC ist ferner das Moment:

$$M_1 = \tfrac{1}{8} G_1 l_1 \cos. \alpha_1 + \tfrac{1}{2} G (l \cos. \alpha + l_1 \cos. \alpha_1) - H (l \sin. \alpha + \tfrac{1}{2} l_1 \sin. \alpha_1)$$
$$= \tfrac{1}{8} . 3720 . 4,01 + 3600 (25,98 + 4,01) - 4333 (15 + 7,485)$$
$$= 465 . 4,01 + 3600 . 29,99 - 4333 . 22,485 = 109828 - 97428$$
$$= 12400 \text{ Fußpfund} = 148800 \text{ Zollpfund},$$

und die Spannung:

$$S_1 = H \cos. \alpha_1 + (G + \tfrac{1}{2} G_1) \sin. \alpha_1 = 4333 . 0,2588 + (7200 + 1860) . 0,5$$
$$= 1121 + 4530 = 5651 \text{ Pfund};$$

hiernach hat man für den Querschnitt dieses Sparrens:

$$b_1 h_1 = \tfrac{5651}{500} + \frac{148800}{200 h_1} = 11,3 + \frac{744}{h_1},$$

folglich, wenn man $h_1 = \tfrac{7}{5} b_1$ annimmt, die Sparrenbreite:

$$b_1 = \sqrt[3]{379 + 8{,}07\, b_1} = 7{,}6 \text{ Zoll},$$

und die Sparrendicke:

$$h_1 = 1{,}4 \,.\, b_1 = 10{,}64 \text{ Zoll}.$$

Das Moment zum Drehen um die Sparrenecke C ist endlich:

$$M_2 = \tfrac{1}{2}\, G l \cos.\alpha - H l \sin.\alpha = 3600 \,.\, 25{,}98 - 4333 \,.\, 15$$
$$= 93528 - 64995 = 28533 \text{ Fußpfund};$$

steht demnach die Strebe QR um $CL = 1$ Fuß von C ab, so ist der nöthige Querschnitt dieser Strebe:

$$F = {}^{28533}\!/_{500} = 57 \text{ Quadratzoll}.$$

Aus dem Horizontalschube $H = 4333$ Pfund und dem Abstande $a = 6$ Fuß je zweier Gespärre von einander folgt der Horizontalschub für den laufenden Fuß Mauer:

$$H_1 = {}^{4333}\!/_{6} = 722 \text{ Pfund},$$

und ebenso aus der Last $G = 10920$ Pfund eines Gespärres der Verticaldruck auf den laufenden Fuß Mauer:

$$G_1 = {}^{10920}\!/_{6} = 1820 \text{ Pfund};$$

ist nun noch die innere Mauer AF, Fig. 182, 30 Fuß hoch und 1 Fuß dick, hat der Aufsatz AK eine Höhe von 6 Fuß, und wiegt ein Cubikfuß Mauer 125 Pfund, so hat man, da nach dem vorigen Paragraphen

$$\tfrac{1}{2} h_2 b_2^2 \gamma + (G_1 + b_1 h_1 \gamma)\, b_2 = 3\, H_1 h_1 - \tfrac{1}{2}\, G_1 b_1 - \tfrac{1}{2}\, b_1^2 h_1 \gamma$$

ist:

$$18 \,.\, 125\, b_2^2 + (1820 + 30 \,.\, 125)\, b_2 = 90 \,.\, 722 - \tfrac{1}{2} \,.\, 1820 - \tfrac{1}{2} \,.\, 30 \,.\, 125$$

d. i. $2250\, b_2^2 + 5570\, b_2 = 62195$, oder $b_2^2 + 2{,}476\, b_2 = 27{,}64$,

daher:

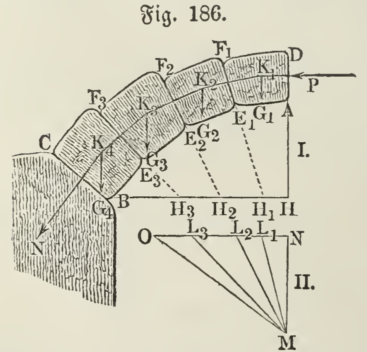
$$b_2 = -1{,}24 + \sqrt{27{,}64 + 1{,}54} = -1{,}24 + 5{,}40 = 4{,}16 \text{ Fuß},$$

also ist die erforderliche ganze Mauerdicke:

$$b = b_1 + b_2 = 1 + 4{,}16 = 5{,}16 \text{ Fuß}.$$

§. 102 Die zusammengesetzten Sprengwerke kommen vorzüglich auch bei den sogenannten Lehrgerüsten der Gewölbe (franz. cintres; engl. centres) vor. Diese Constructionen haben den Zweck, die Gewölbe während ihrer Aufführung zu unterstützen. Es handelt sich hier vorzüglich darum, die Kräfte kennen zu lernen, mit welchen die Gewölbsteine vermöge ihrer Schwere auf ihren Lagerflächen herabzugleiten suchen. Behalten wir die in §. 21 gebrauchten Bezeichnungen bei, bezeichnen wir auch hier die Gewichte der Gewölbstücke $AF_1, E_1F_2, E_2F_3 \ldots$, Fig. 186, durch $G_1, G_2, G_3 \ldots$, und die Neigungswinkel der Gewölbfugen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 … gegen den Horizont durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$, dagegen die Kräfte, welche in den Richtungen der Gewölbfugen E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 … dem Herabgleiten der Steine $G_1, G_2, G_3 \ldots$ entgegenwirken, durch $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$

Fig. 186.



Zunächst ist (nach Band I, §. 176) die Kraft in der Richtung $E_1 F_1$, welche das Herabgleiten des ersten Steines verhindert:

$$Q_1 = G_1 (sin. \alpha_1 - \varphi \, cos. \alpha_1).$$

Da die Richtung dieser Kraft den Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ mit der Fuge $E_2 F_2$ bildet, so läßt sich diese Kraft in die Seitenkräfte $Q_1 \, cos. (\alpha_1 - \alpha_2)$ und $Q_1 \, sin. (\alpha_1 - \alpha_2)$ parallel und rechtwinkelig zu $E_2 F_2$ zerlegen, und es ist daher die Kraft, mit welcher $G_1 + G_2$ auf $E_2 F_2$ herabzugleiten sucht:

$$(G_1 + G_2) \, sin. \alpha_2 - Q_1 \, cos. (\alpha_1 - \alpha_2),$$

und die Reibung, welche diesem Herabgleiten entgegenwirkt:

$$\varphi \, [(G_1 + G_2) \, cos. \alpha_2 - Q_1 \, sin. (\alpha_1 - \alpha_2)],$$

folglich die nöthige Kraft in der Richtung der Fuge $E_2 F_2$, um den Stein $E_2 F_2$ zu stützen:

$$Q_2 = (G_1 + G_2) \, sin. \alpha_2 - Q_1 \, cos. (\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \, [(G_1 + G_2) \, cos. \alpha_2 - Q_1 \, sin. (\alpha_1 - \alpha_2)]$$
$$= (G_1 + G_2)(sin. \alpha_2 - \varphi \, cos. \alpha_2) - Q_1 \, [cos. (\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \, sin. (\alpha_1 - \alpha_2)].$$

Auf demselben Wege findet man die Kraft in der Richtung $E_3 F_3$ zum Stützen des dritten Gewölbsteines:

$$Q_3 = (G_1 + G_2 + G_3)(sin. \alpha_3 - \varphi \, cos. \alpha_3) - Q_1 \, [cos. (\alpha_1 - \alpha_3) - \varphi \, sin. (\alpha_1 - \alpha_3)] - Q_2 \, [cos. (\alpha_2 - \alpha_3) - \varphi \, sin. (\alpha_2 - \alpha_3)];$$

ebenso die Kraft gegen das Herabgleiten eines vierten Steines $E_4 F_4$:

$$Q_4 = (G_1 + G_2 + G_3 + G_4)(sin. \alpha_4 - \varphi \, cos. \alpha_4) - Q_1 \, [cos. (\alpha_1 - \alpha_4) - \varphi \, sin. (\alpha_1 - \alpha_4)] - Q_2 \, [cos. (\alpha_2 - \alpha_4) - \varphi \, sin. (\alpha_2 - \alpha_4)] - Q_3 \, [cos. (\alpha_3 - \alpha_4) - \varphi \, sin. (\alpha_3 - \alpha_4)].$$

U. s. w.

Diese Kräfte sind auch wirklich von dem Lehrgerüste unmittelbar vor dem Schlusse des Gewölbes aufzunehmen.

Es ist übrigens hiernach leicht zu ermessen, daß der Druck eines Gewölbsteines gegen das Lehrgerüste abnimmt, wenn man über denselben nach und nach noch andere Gewölbsteine legt. Der letzte von den Gewölbsteinen, welche keinen Druck auf das Gerüste ausüben, liegt über der Fuge, deren Neigungswinkel α_n durch die Gleitung $tang. \alpha_n = \varphi$ (s. Band I, §. 172) bestimmt ist. Kommt nun auf diesen ein zweiter Stein G_{n-1} mit der Fugenneigung α_{n-1}, so hat man dann die Kraft zum Stützen dieses zweiten Steines:

$$Q_{n-1} = G_{n-1} (sin. \alpha_{n-1} - \varphi \, cos. \alpha_{n-1}),$$

und dagegen die zum Stützen des ersteren:

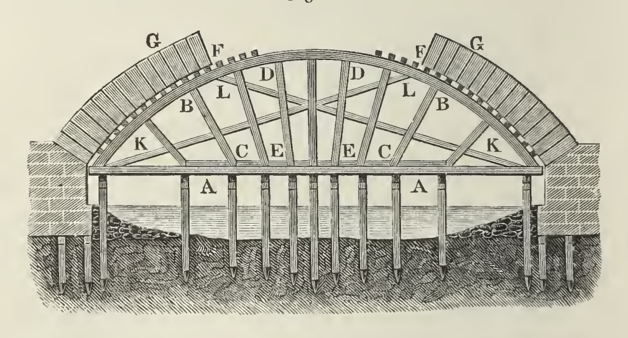
$$Q_n = (G_n + G_{n-1}) (sin. \alpha_n - \varphi \, cos. \alpha_n) - Q_{n-1} \, [cos. (\alpha_{n-1} - \alpha_n) - \varphi \, sin. (\alpha_{n-1} - \alpha_n)]$$
$$= - Q_{n-1} \, [cos. (\alpha_{n-1} - \alpha_n) - \varphi \, sin. (\alpha_{n-1} - \alpha_n)],$$

also negativ. Es ist folglich wohl nöthig, die Gewölbsteine in den Seiten des Gewölbes gegen das Ausschieben durch Belastung von oben zu schützen.

§. 103 Die Lehrgerüste bestehen in der Regel aus zwei, drei oder mehreren Kränzen, welche von unten durch Streben unterstützt werden, und durch Latten, die sogenannten Schaallatten (franz. couchis; engl. bolstres) bedeckt werden, auf die nun die Gewölbsteine mit ihren inneren Flächen zu liegen kommen. Die Streben stemmen sich entweder gegen die Widerlagspfeiler, oder sie kommen auf festeingerammte Pfähle oder auf besonders zu diesem Zwecke aufgeführte Pfeiler zu stehen. Damit sich das durch die Gewölbsteine belastete Gerüste so wenig wie möglich in seiner Form verändere, ist nöthig, daß die Streben desselben gegen das Biegen und Nachgeben gesichert sind.

Ein gestütztes Lehrgerüste, d. i. ein solches, dessen Stützen sich unter dem Gewölbe selbst befinden, ist in Fig. 187 abgebildet. Man sieht hier

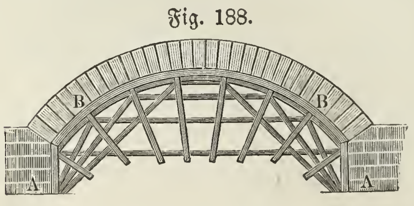
Fig. 187.



bei A, A eine Reihe von Pfählen, auf welchen das Gerüste mittels der Streben BC, DE u. s. w. ruht; auch bemerkt man in $F, F \ldots$ die Schaallatten, auf welchen die Gewölbsteine G, G zunächst ruhen. Um das Biegen der Streben zu verhindern, sind noch die Zangen KL, KL eingezogen.

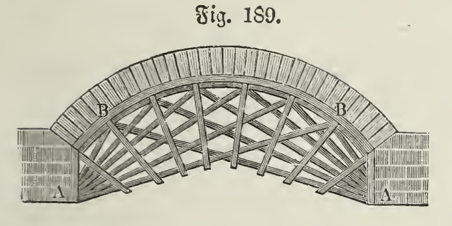
In den Figuren 188 und 189 werden zwei gesprengte Lehrgerüste vor Augen geführt, welche sich gegen die Widerlagspfeiler A, A stützen; bei dem ersteren Gerüste befindet sich zwischen je zwei zusammengehörigen Streben ein Spannriegel, deshalb muß hier das Gewölbe gleichzeitig von beiden Seiten B und B her aufgeführt werden; bei dem zweiten Gerüste stemmen sich je zwei Streben unmittelbar gegen einander, weshalb

Fig. 188.



auch hier Gewölbsteine auf der einen Seite eher gelegt werden können, als auf der anderen Seite. Auch hier sind Bänder oder Zangen angebracht, um das Biegen der Streben zu verhindern.

Fig. 189.



Damit sich das geschlossene Gewölbe allmälig und ohne Nachtheile setzen könne, muß die Ausrüstung desselben nach und nach vorgenommen werden, und deshalb läßt man das Gerüste gewöhnlich auf Keilen ruhen, welche man nach Vollendung des Gewölbes nur nach und nach zu lüften braucht, um die allmälige Senkung des Gewölbes zu bewirken. Diese Keile können entweder zwischen den Pfählen und dem Hauptträger, oder zwischen diesem und den Streben, oder endlich zwischen den letzteren und den Lehrbögen angebracht werden. Auch hat man in neuerer Zeit statt der Keile starke eiserne Schrauben, sowie Sandsäcke u. s. w. angewendet, um die starken Erschütterungen, welche beim Zurücktreiben der Keile vorkommen, zu vermeiden.

Die Kräfte, welche die Streben auszuhalten, lassen sich nach §. 57 leicht finden. Ist Q der Normaldruck, welchen ein Strebenpaar aufzunehmen hat, und sind δ_1 und δ_2 die Winkel, um welche die Axen dieser Streben von der Richtung dieser Kraft abweichen, so hat man die Kräfte, welche auf diese Streben übergehen:

$$S_1 = \frac{Q \sin. \delta_2}{\sin. (\delta_1 + \delta_2)} \text{ und } S_2 = \frac{Q \sin. \delta_1}{\sin. (\delta_1 + \delta_2)}.$$

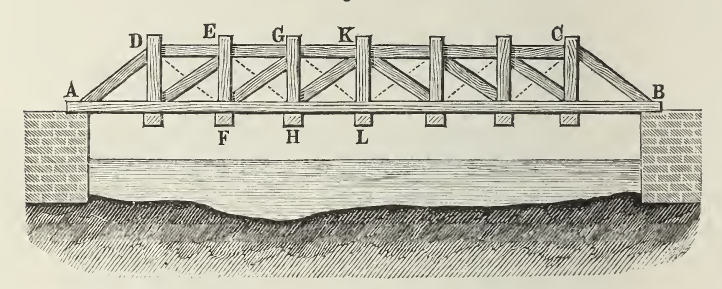
Hölzerne Brücken. Sehr zusammengesetzte Holzconstructionen kommen bei den hölzernen Brücken (franz. ponts en bois; engl. timber bridges) von großer Spannweite vor. Diese Brücken ruhen entweder auf steinernen oder auf hölzernen Pfeilern. Die letzteren sind entweder mit Steinen ausgefüllte Blockkästen, oder sie sind aus einer oder zwei Pfahlreihen bestehende und durch Schwellen verbundene Joche. Die Brücken selbst sind nach sehr verschiedenen Systemen aufgeführt. Das eine Brückensystem besteht in einer Verbindung von Hänge- und Sprengwerken, wie wir oben §. 56 u. s. w. schon mehrere behandelt haben; ein anderes System besteht aus Holzbögen, welche aus über einander liegenden Balken oder Bohlen zusammengesetzt sind (s. §. 81); ein drittes System besteht aus geraden, durch Streben und Bolzen mit einander verbundenen Balken, den sogenannten Gitterbalken (franz. poutres en treillis; engl. lattice trusses). Die älteren Brücken in Schaffhausen, Zürich, Wettingen u. s. w. sind zusammengesetzte Hänge- und Sprengwerke mit einer Menge von über einander §. 104

weggreifenden Streben, und zwei- oder dreifachen Balken oder Rippen. Hölzerne Bogenbrücken sind von Wiebeking in Bamberg, Freysing und in späteren Zeiten von Burr zu Trenton über den Delaware aufgeführt worden. Bei den Wiebeking'schen Brücken läuft die Brückenbahn über dem Bogen weg; bei der Brücke von Burr ist hingegen die Brückenbahn mittels eiserner Stäbe an die Holzbögen aufgehangen. Im ersteren Falle hat man es also mit einer Bogenspreng- und im zweiten mit einer Bogenhängwerkbrücke zu thun. Viele ältere Holzbrücken bestehen aus einer Verbindung von einem Bogen mit einem Häng- und Sprengwerke.

Eine große Verbreitung haben in der neueren Zeit die Gitter- und Fachwerksbrücken (s. §. 62) erlangt, namentlich sind viele derartige Brücken in Nordamerika ausgeführt worden.

Zu diesem Brückensysteme gehört gewissermaßen die in Fig. 190 abgebil-

Fig. 190.

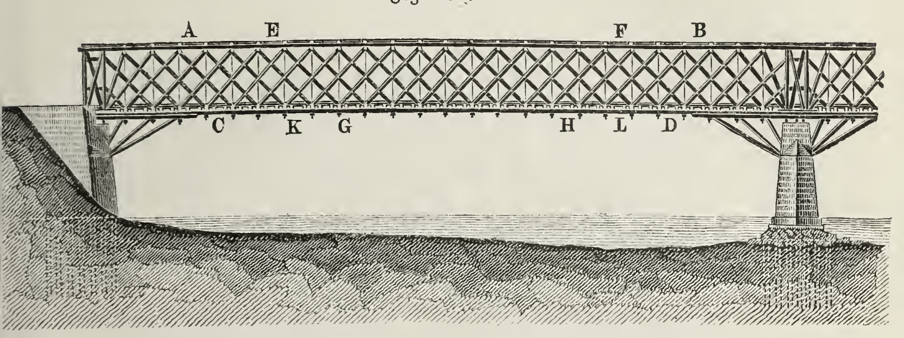


dete Brücke von Palladio. Es ist hier $ABCD$ ein gewöhnliches Hängewerk; der Spannriegel besteht aber aus kürzeren Stücken $DE, EG \ldots$, welche sich gegen dazwischen eingesetzte Hängesäulen $EF, GH \ldots$ stemmen, die den Balken oder die Rippe AB mittels Träger $F, H \ldots$ unterstützen. Zwischen je zwei Hängesäulen sind die Streben $FG, HK \ldots$ eingesetzt, welche der Construction erst eine größere Haltbarkeit geben, weil sie durch ihre rückwirkende Festigkeit der Verschiebung der Rechtecke EH, $GL \ldots$ in schiefwinkelige Parallelogramme entgegenwirken, welche bei der Biegung des Ganzen eintritt. Statt dieser Streben kann man auch Eisenstäbe EH; $GL \ldots$ einziehen, welche durch ihre absolute Festigkeit der Verschiebung der Parallelogramme entgegenwirken. In dieser Art ist z. B. von Wernwag die obere Shuylkill-Brücke bei Philadelphia ausgeführt; da diese Brücke auch auf dreifachen Bogenrippen ruht, so gehört sie jedoch mehr dem zweiten Systeme an.

Die meiste Verbreitung haben die Gitterbrücken nach Howe's System. Eine Seitenansicht von einer solchen Brücke zeigt Fig 191. Diese Brücke besteht aus zwei Gitterwänden, deren Hauptträger AB und CD aus je drei neben einander liegenden Balken bestehen. Deshalb besteht auch eine Tragwand aus lauter doppelten Hauptstreben $CE, DF \ldots$, welche sich

gegen die beiden äußersten Balken stemmen, und aus zwischen inne stehenden Gegenstreben $EG, FH\ldots$, welche mit dem mittleren Balken verbunden sind.

Fig. 191.



Die Verbindung dieser Streben mit den Balken erfolgt jedoch nicht unmittelbar, sondern mittels oben abgeschrägter Querhölzer C, E, $G\ldots$ Das Ganze wird durch je 2 Zoll starke schmiedeeiserne Zugstangen $EK, FL\ldots$ mittels Schrauben $K, L\ldots$ fest zusammengezogen, und es sind zu diesem Zwecke auch noch Querhölzer außen auf die Balken aufgelegt, so daß je zwei dieser Stangen zwischen je zwei der drei Balken und durch zwei Paar Querhölzer hindurch gehen.

Eine der großartigsten Holzbrücken ist die auf der Newyork-Erie-Eisenbahn befindliche Cascadebrücke von Brown, welche über eine Schlucht von 300 Fuß Weite und 175 Fuß Tiefe gespannt ist. Von dieser Brücke zeigt Fig. 192 die Seitenansicht eines am Widerlager anstoßenden Stückes.

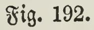
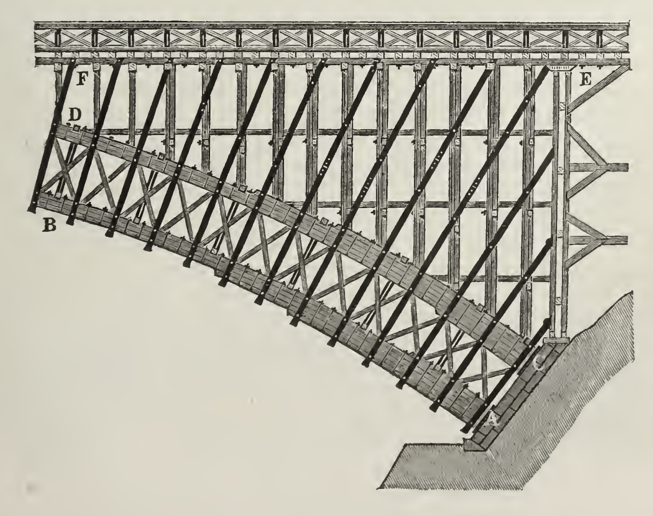
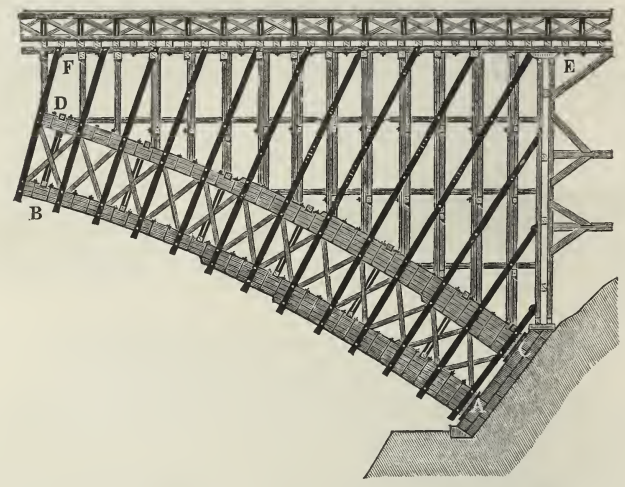


Fig. 192.



Wie man sieht, so besteht diese Brücke in der Hauptsache aus Tragbögen *AB*, *CD* mit zwischen befindlichen Kreuzstreben. Diese Tragbögen sind größten-

Fig. 193.

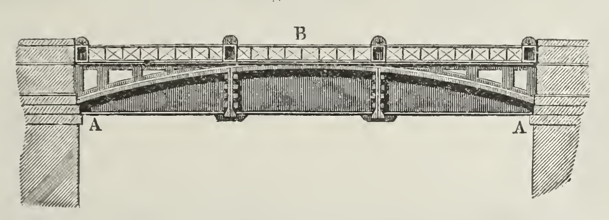


theils aus 3, nach den Enden zu aus 4, 5, und dicht an den Widerlagern sogar aus 6 Balken zusammengesetzt. Die Stärke dieser Balken ist 8 und 9 Zoll, und die der Kreuzstäbe 8 und 8 Zoll. Das Ende eines jeden Balkens ruht in einem eisernen Schuh, und diese Schuhe stützen sich auf eine untermauerte gußeiserne Platte. Die ganze Brückenbahn *EF* ruht mittels verticaler Tragsäulen auf vier solchen Doppelträgern, welche unter einander wieder durch Kreuzstreben verbunden sind.

Anmerkung. Die größeren Holzbrücken haben zum Theil noch größere Spannweiten als die steinernen Brücken. Bei der oberen Shuylkill-Brücke kommt ein Bogen von 325 Fuß Spannweite und 20 Fuß Höhe vor. Die alten Schweizer Brücken, sowie die Wiebeking'schen Brücken, haben schon Spannweiten von 160 bis 200 Fuß. Bei der Trenton-Brücke hat der mittlere Bogen eine Spannweite von 195 Fuß und eine Höhe von 26 Fuß. Eine sehr große Gitterbrücke ist bei Wittenberge über die Elbe geführt. Dieselbe hat 11 Oeffnungen zu je 171 Fuß und 3 zu je 120 Fuß Spannweite. Die Tragwände dieser Brücke haben eine Höhe von 19 Fuß, während ihr Abstand von einander nur 13 Fuß mißt. Die Versuche, welche vorläufig mit einem Theile dieser Brücke angestellt worden sind, haben sehr günstige Resultate geliefert; bei der Fahrt und dem Stillstande einer Locomotive von 600 Centner Gewicht betrug die Senkung nur 7 Linien; bei einem Marsch von 240 Mann über die Brücke war dieselbe nur $6\frac{1}{2}$ Linien, erst bei einer gleichmäßigen Belastung von 2000 Centnern und einer Ueberfahrt von zwei Locomotiven von 1260 Centner Gewicht betrug die Senkung 3 Zoll. Siehe die Nachrichten darüber in der Eisenbahnzeitung, 1850, Nr. 29 bis 31, oder polyt. Centralblatt, 1850, Lief. 18.

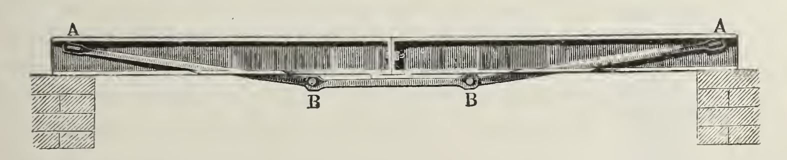
Gusseiserne Brücken. Die gußeisernen Brücken werden größtentheils nach denselben Regeln gebaut wie die hölzernen Brücken, und kommen auch fast unter denselben Umständen zur Anwendung wie diese, haben aber vor diesen den Vorzug der großen Dauerhaftigkeit. Bei kleineren Brücken bestehen die Rippen aus geraden Balken mit I-förmigen oder ähnlichen Querschnitten. Da das Gußeisen dem Drucke mehr widersteht als dem Zuge, so ist es zweckmäßig, den an beiden Enden aufliegenden gußeisernen Brückenträgern eine breitere Fuß- und eine schmalere Kopfrippe, also den Querschnitten derselben die Form ⊥ zu geben (s. Band I, §. 237). Um die Tragkraft dieser Barrenbrücken zu erhöhen, kann man sie nach der Mitte zu verstärken, wie z. B. bei der Brücke ABA in Fig. 194, oder sie mit einem §. 105

Fig. 194.



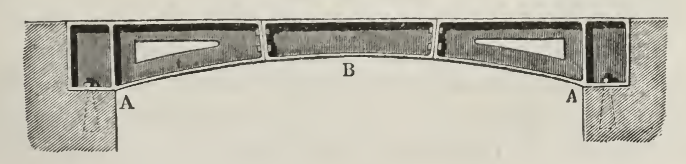
schmiedeeisernen Hängewerk verbinden, wie Fig. 195 vor Augen führt, wo dieses Hängewerk aus zwei Paar schmiedeeiserner Spannschienen AB, AB und den dieselben verbindenden schmiedeeisernen Tragschienen BB besteht. Lassen sich die gußeisernen Träger an ihren Enden stark befestigen, so daß sich

Fig. 195.



dieselben bei der Belastung nicht aufbiegen können, so widerstehen dieselben mehr durch ihre Druckfestigkeit, und es ist daher ihre Verstärkung in der Mitte nicht nöthig; man giebt vielmehr solchen Trägern eine innere Wölbung, wie ABA, Fig. 196, wobei die Höhe von der Mitte nach den Auflagerungsflächen hin allmälig größer wird.

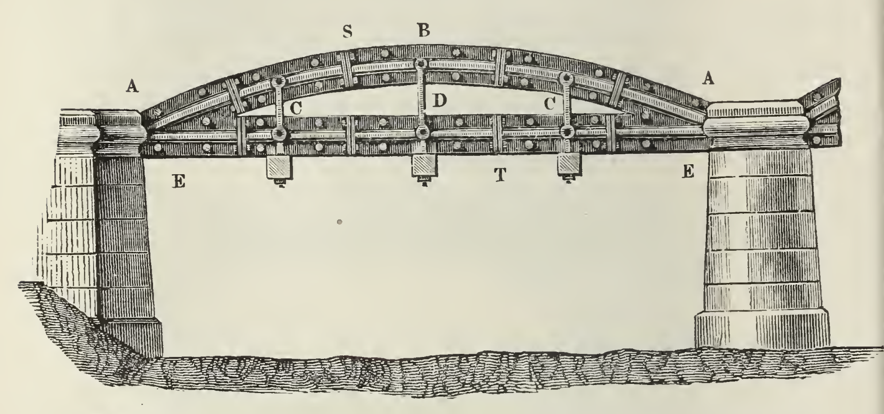
Fig. 196.



Sehr gewöhnlich ahmt man bei der Construction gußeiserner Brücken die Häng- und Sprengwerke hölzerner Brücken nach, indem man die Streben und Spannriegel aus Gußeisen und die Zugbänder und Hängesäulen aus Schmiedeeisen anfertigt. Eine hierher gehörige Construction ist in Fig. 107 §. 58 abgebildet.

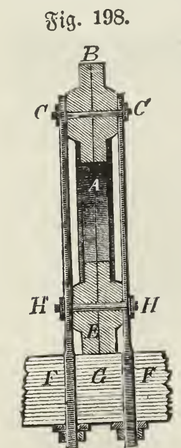
Es gehört hierher auch die Bogenconstruction in Fig. 197, denn es

Fig. 197.



wirkt hier der Bogen *ABA* wie Streben und Spannriegel, und es wird der Brückenbarren *EE* durch die Hängestäbe *C, C, D*, unterstützt. Die Art der Aufhängung ist in Fig. 198 besonders abgebildet; es ist hier *AB* die Bogenrippe, *E* der gerade Brückenbarren, und es sind *CF*, *CF* zwei Hängestäbe, welche durch schmiedeeiserne Bolzen *CC* und *HH* mit beiden Rippen verbunden sind und die Querschwelle *G* tragen, auf welcher die Brückenbahn ruht. Sehr gewöhnlich läßt man die Bogenrippe als Hänge- und Sprengwerk zugleich wirken, indem man sie über und unter die gerade Rippe weggreifen läßt. Wie die Rippen aus einzelnen Gußstücken mittels Kränzen und Schrauben zu einem Ganzen zu vereinigen sind, ist bei *S, T* ... in Figur 197 zu ersehen. Eine ähnliche Construction hat die Elzbrücke bei Sexau in Baden.

Fig. 198.



Gußeiserne Brücken von großen Spannweiten bestehen meist aus einer Reihe neben einander stehender Bögen, welche die Brückenbahn von unten stützen, und ihr ganz das Ansehen steinerner Brücken geben. Die Bogenrippen sind hier entweder aus massiven Platten, oder aus gitterförmigen Gerippen (s. Fig. 148, §. 81), oder aus Röhren zusammengesetzt. Röhrenbrücken mit kreisförmigen Querschnitten sind zuerst von Reichen-

bach, und solche mit elliptischen Querschnitten von Polonceau ausgeführt worden. Schiefe Brücken lassen sich aus Gußeisen fast eben so leicht herstellen, als rechtwinkelige.

Anmerkung. Bei der berühmten von Rennie erbauten Southwarkbrücke über die Themse in London sind die Bogenrippen aus Segmentplatten zusammengesetzt. Die Spannweite der Bögen dieser Brücke beträgt 232,5 Fuß, die Spannhöhe $23\frac{1}{4}$ Fuß, und die Anzahl der Rippen eines Bogens ist 8. Die von Polonceau erbaute Carrousselbrücke über die Seine in Paris ist aus röhrenförmigen Bogenrippen zusammengesetzt. Der elliptische Querschnitt einer Rippe hat 13 Zoll Weite und 24 Zoll Höhe, die Zahl der Stücke einer Rippe ist 11. Die Spannweite dieser Brücke beträgt 146 Fuß und die Spannhöhe 15,7 Fuß.

Schmiedeeiserne Brücken. Das Schmiedeeisen ist in der neuesten §. 106
Zeit das gewöhnlichste Material zur Construction der Brücken, es hat dasselbe eine größere Zug- und Biegungsfestigkeit als das Gußeisen, und besitzt nicht die Sprödigkeit des letzteren, vermöge welcher das Gußeisen bei Stößen und Schwingungen leicht in Stücke zerbricht. Deshalb kann man denn auch den schmiedeeisernen Trägern die einfache Balkenform geben, wogegen gußeiserne Träger, namentlich, wenn dieselben eine größere Länge haben, die dem Zerdrücken mehr widerstehende Bogenform erhalten müssen. Aus diesem Grunde lassen sich auch bei den schmiedeeisernen Brücken die größten Spannweiten erreichen. Uebrigens haben die schmiedeeisernen Brückenträger mit den Brückenträgern aus Gußeisen und aus Holz vor den steinernen Brückenbögen den großen Vorzug, daß sie die Brückenbahn nicht bloß von unten, sondern auch von oben, sowie in jedem beliebigen Punkte ihrer Höhe unterstützen können.

Zu kurzen Brücken verwendet man jetzt sehr häufig I-förmig gewalzte eiserne Träger; auch bildet man schmiedeeiserne Träger aus zwei gewalzten Eisenschienen, wovon die eine gekrümmt ist, und dadurch entweder ein in der Mitte verstärkter Träger, wie Fig. 199, oder ein Bogenträger, wie Fig. 200, entsteht, wobei der Zwischenraum mit Eisenblech ausgefüllt werden kann.

Fig. 199.

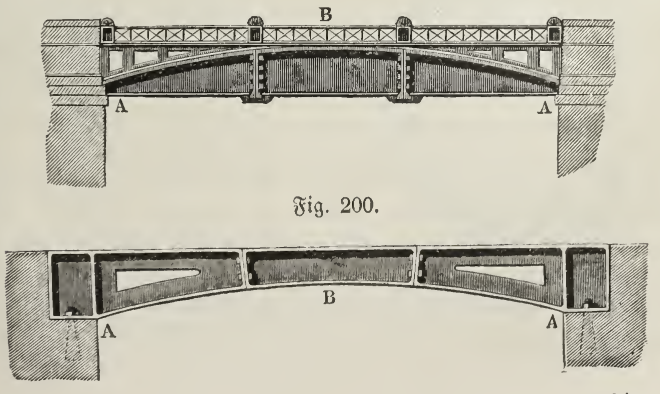


Fig. 200.

Größere Brücken werden vollständig aus Eisenblech zusammengesetzt. Es gehören hierher vor Allem die Röhrenbrücken (tubular-bridges) von Stephenson und zwar die Conway-Brücke und die Britannia-Brücke. Die erstere besteht aus zwei neben einander liegenden Röhren, wovon jede 424 Fuß lang, 14 Fuß 8 Zoll breit, $22^1/_2$ Fuß hoch an den Enden und $25^1/_2$ Fuß hoch in der Mitte ist, und ein Gewicht von 1446 Tonnen (à 2172 Pfund Preuß.) hat. Die Britannia-Brücke, welche wie die Telfort'sche Kettenbrücke über den Menai-Meeresstrom führt, besteht aus vier Brückenfeldern *A, B, B, A*, Fig. 201, zwei von je 460 Fuß und zwei von je 230 Fuß Länge, und hat im Ganzen eine Länge von 1513 Fuß. Die Breite dieser Brücke ist 14 Fuß 8 Zoll, die Höhe derselben an den Enden 22 Fuß 9 Zoll und in der Mitte 30 Fuß. Zu jeder Röhre waren nöthig: 2830 Tonnen ebenes Eisenblech, 594 Tonnen Winkeleisen, 418 Tonnen T-Rippen, 336 Tonnen (882000 der Zahl nach) Nieten, und außerdem noch 1000 Tonnen gußeiserne Rahmen u. s. w.; es wiegt folglich eine Röhre im Ganzen 5178 Tonnen. Durch jede Röhre führt ein Eisenbahngeleis.

Den Querschnitt einer Röhrenträgerbrücke (tubular girder bridge) von Fairbairn, welche sich auf einer Werfte (Great Landing Stage at St. Georg's Wharf in Liverpool) befindet, ist in Fig. 202 abgebildet. Zwei Röhrenträger *AB,AB*, welche in der Mitte durch einen eisernen Bogen *C* verbunden sind, tragen hier die Brückenbahn *DD* so, daß sie in der Mitte einen Weg für das Fuhrwerk und an den Seiten zwei Wege für die Fußgänger übrig lassen.

Ein Theil einer einfachen Blechträgerbrücke für eine Eisenbahn ist in Fig. 203 abgebildet. Die ganze Bahn *AB* ruht hier mittels Querschwellen *C, D*... auf sechs I-förmigen Blechträgern, wie *EF*, von 3 bis 5 Fuß Höhe, welche unter sich selbst wieder durch mehrere Querbalken von Eisenblech verbunden sind. Die Hauptträger liegen auf den Holzschwellen *G*, welche durch eiserne Stühle mit den Pfeilern *H* verbunden sind.

Bei einer vom Herrn Etzel entworfenen Eisenbahnbrücke über die Aar unweit Olten in der Schweiz hat man auch bogenförmige Blechträger angewendet, welche ihr das Ansehen einer gußeisernen oder hölzernen Brücke wie Fig. 192 geben. Diese Brücke besteht aus drei Oeffnungen von je 105 Fuß Spannung und 17 Fuß Bogenhöhe und jedes Brückenfeld wird aus 5 Blechbögen von 3 Fuß Höhe und 5 unmittelbar unter der 24 Fuß breiten zweigleisigen Bahn liegenden geraden Blechbalken von 2 Fuß Höhe zusammengesetzt.

Die Gitterbrücken aus Eisenblech haben bei den neuesten Eisenbahnanlagen die häufigste Anwendung gefunden (s. namentlich den unten citirten Atlas von Etzel über die schweizerischen Eisenbahnen). Fig. 204 (a. S. 246) zeigt die Seitenansicht von einem Stück der Gitterbrücke über die Kinzig bei Offenburg. Diese Brücke trägt neben dem doppelten Schienenweg *DE* noch zwei Trottoirs zu den Seiten, und besteht aus drei $6^1/_4$ Meter hohen

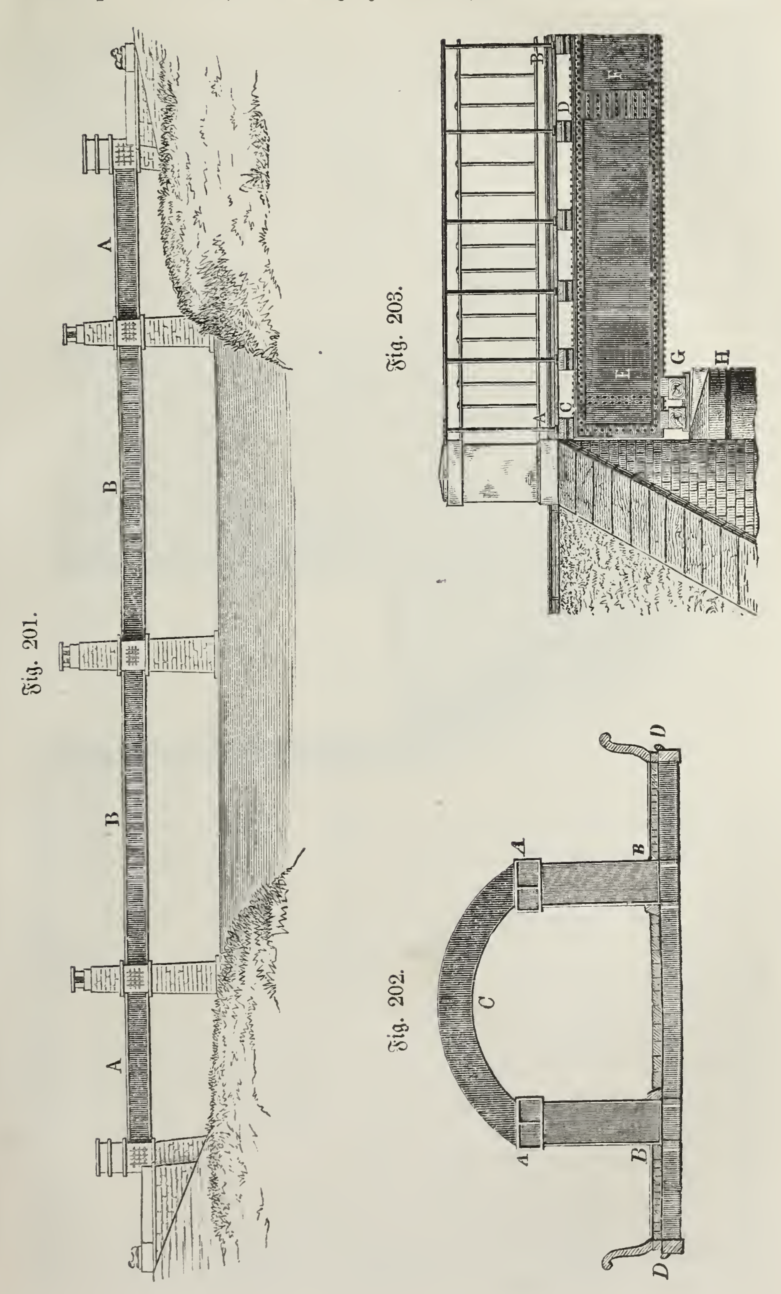


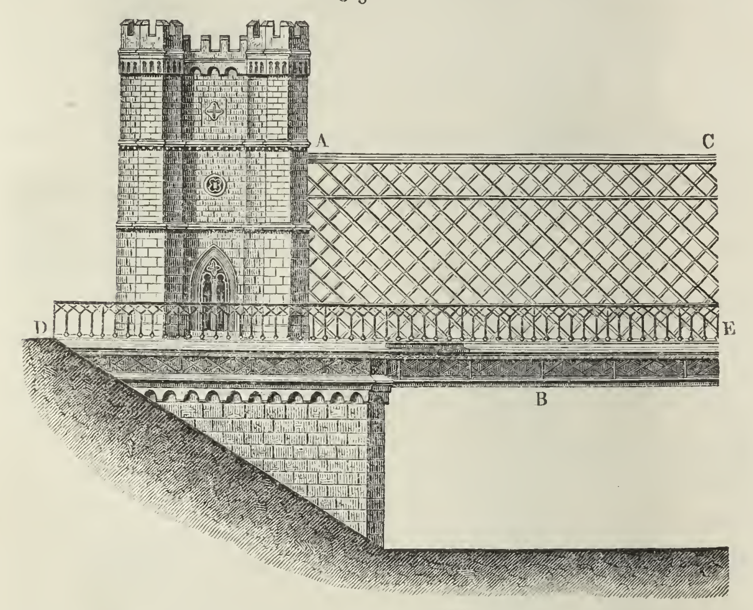
Fig. 201.

Fig. 202.

Fig. 203.

und $71\frac{1}{8}$ Meter langen Gitterwänden wie *ABC*. Die Gitterstäbe kreuzen sich unter rechten Winkeln, sie haben bei 2,1 Centimeter Stärke $10\frac{1}{2}$ Centimeter Breite, und sind in den Kreuzpunkten durch 3 Centimeter dicke Bolzen vernietet. Um die Festigkeit dieser Brücke zu erhöhen, hat man die Tragwände derselben nicht allein auf jeder Seite 4 Meter lang aufgelagert, son-

Fig. 204.



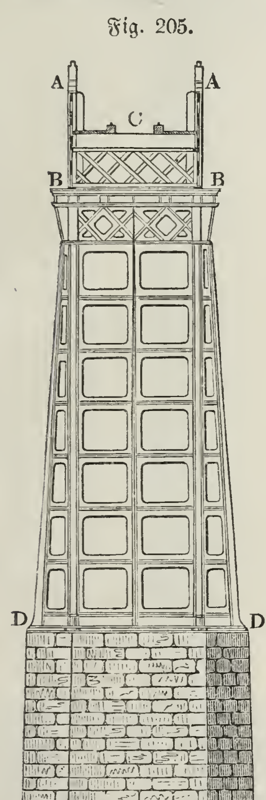
dern auch noch mit den Pfeilern fest verankert. Zu Verhütung des Zurseiteziehens sind diese Wände auch oben noch durch Eisenschienen mit einander verbunden.

Statt der steinernen Brückenpfeiler sind von Herrn Etzel bei Gitterbrücken in der Schweiz auch gußeiserne Pfeiler angewendet worden. Einen solchen Pfeiler von einer eingeleisigen Eisenbahnbrücke über die Thur bei Wyl zeigt Fig. 205. Es stellen *AB*, *AB* die Gitterwände vor, welche unter sich durch gitterförmige Querwände *BB* verbunden sind und die Schienenbahn *C* unterstützen. Der thurmförmige Pfeiler *BBDD* ist aus durchbrochenen Gußeisenplatten etagenförmig zusammengesetzt, welche durch Schrauben fest mit einander verbunden sind. Bei einer anderen Brücke dieser Art erreicht der gußeiserne Pfeiler eine Höhe von 78,8 Fuß.

Die Rider'schen Brücken bilden den Uebergang zwischen den eisernen Gitter- oder Fachwerksbrücken und den schmiedeeisernen Bogenträgerbrücken. Die Tragwände dieser Brücken bestehen aus zwei concentrischen Bögen, wovon der obere, oder Tragbogen aus Stücken von Gußeisen, und der untere

oder Spannbogen aus Schienen von Schmiedeeisen zusammengesetzt ist, und die Verbindung dieser Bögen zu einem Ganzen wird durch gußeiserne Säulen und schmiedeeiserne Diagonalschienen bewirkt. Mit einer solchen Brücke von 116 Fuß Spannweite ist der Rock-Creek zwischen Washington und Georgtown überbrückt. Vollkommen sind die schmiedeeisernen Bogen-Brücken von Fox und Henderson. Die Tragwand einer solchen Brücke besteht aus einem röhrenförmigen Tragbogen und aus einer horizontal gespannten, mehrgliedrigen Spannkette, beide durch Säulen und Andreaskreuze zu einem Ganzen fest mit einander verbunden. Eine solche Brücke von 120 Fuß Spannweite und 8 Fuß Bogenhöhe befindet sich auf der Verbindung zwischen der Blackwall- und Eastern-Countiesbahn bei London.

Fig. 205.



Die Paulischen Brücken bestehen aus Bogenträgern mit Fachwerk von Eisenblech, wie in Fig. 137, §. 73 dargestellt wird. Der obere oder Druckbogen eines solchen Trägers ist kastenförmig aus Eisenblech zusammengenietet; der untere, oder Spannbogen besteht dagegen aus übereinander liegenden Eisenblechschienen. Durch die Ausbauchung eines solchen Trägers ist es möglich, daß bei der größtmöglichen Belastung desselben die Spannungen der beiden Gurtbögen an allen Stellen gleichgroß, folglich die Masse derselben möglich klein ausfällt. Das Fachwerk, welches die beiden Gurtbögen mit einander verbindet, besteht aus gerippten Säulen oder Streben, welche nur der Druckkraft ausgesetzt sind, und aus diagonalen Bändern, welche nur Zugkraft auszuhalten haben. Die Brückenbahn ist nur mit den Streben verbunden. Nach dem Pauli'schen Systeme ist unter anderen vorzüglich die Eisenbahnbrücke über die Isar bei Großheselohe, und die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz ausgeführt. Die letztere besteht aus 4 Hauptöffnungen von je 90 Meter Weite, und aus 6 Flußöffnungen von je $33\frac{1}{2}$ Meter Weite, an welche sich dann noch 22 Oeffnungen von kleinerer Weite anschließen, so daß die ganze Brücke 1028,645 Meter lang ausfällt. Die Abbildungen in Fig. 206 und 207 (a. f. S.) stellen die Seitenansicht und den Grundriß einer Hauptöffnung vor; *AMA* und *ACA* sind die beiden Gurtbögen, *DE*, *DE* u. s. w. die Streben,

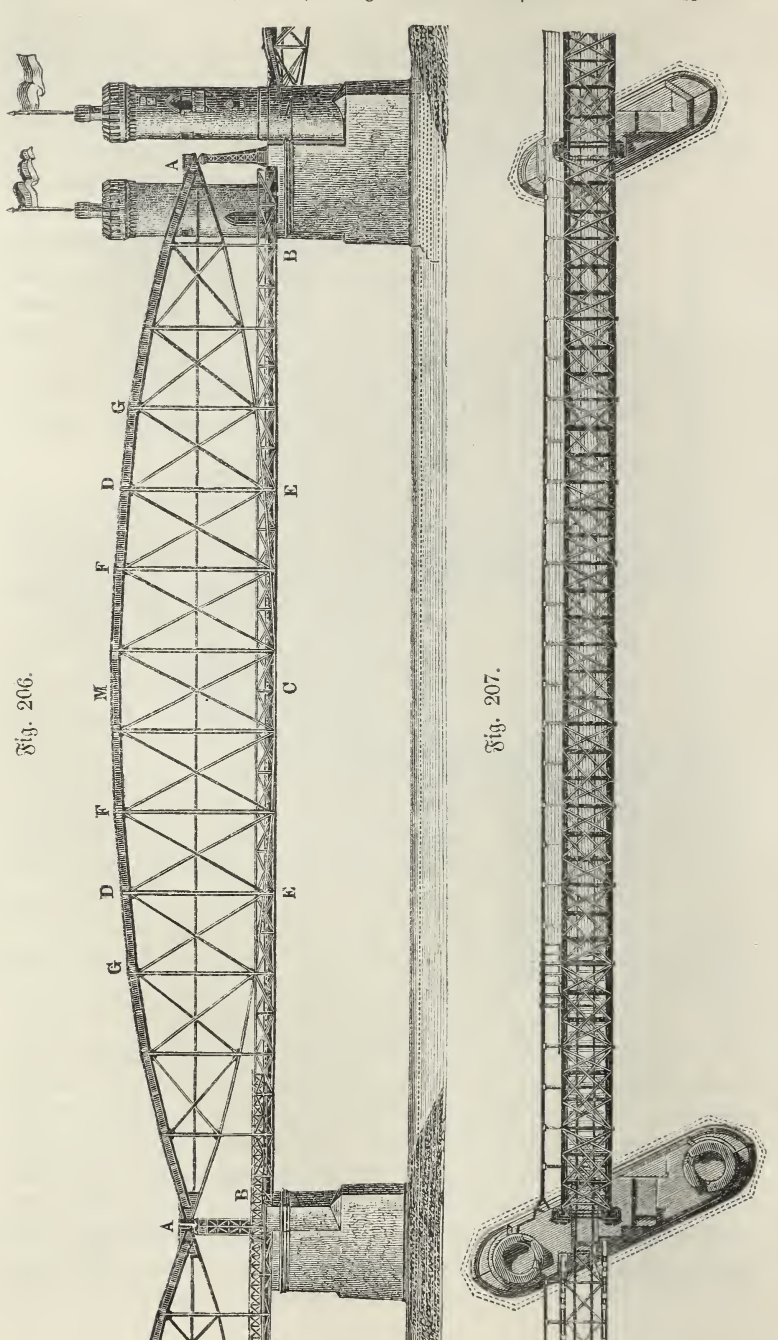


Fig. 206.

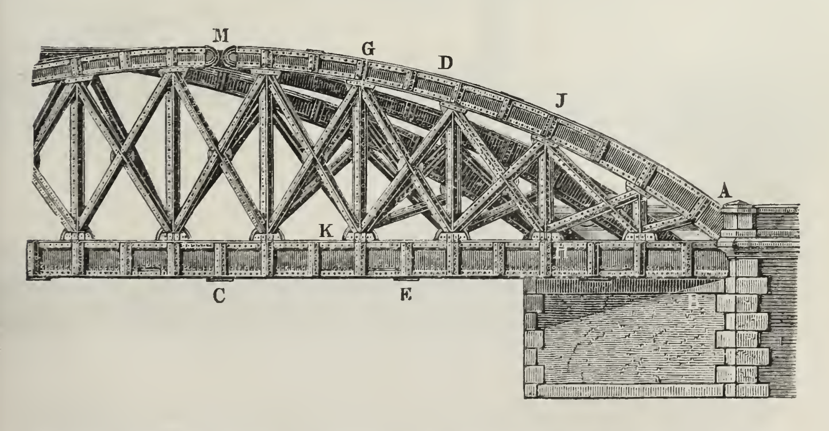
Fig. 207.

EF, *EG* u. s. w. die Zugstangen, und *BCB* ist die Brückenbahn. Die Enden *A* und *A* eines solchen Brückenträgers ruhen mittels ebenen Fußplatten auf cylindrisch abgedrehten Lagerplatten aus Stahl, greifen aber auch außerdem noch zahnförmig in einander ein, damit keine Verschiebung eintreten könne. Die Lagerplatten sind auf gußeisernen Stühlen befestigt, von welchen der eine auf dem Pfeilerkopfe festsitzt, und der andere mittels Walzen auf demselben aufruht, wodurch eine Längenverschiebung des ganzen Trägers möglich gemacht wird. Die aus Sandsteinquadern aufgeführten Strompfeiler haben eine Stärke von $4^1/_4$ Meter, und ruhen bis zu einer Höhe von $1^1/_2$ Meter unter Null auf einer 3,5 bis 3,8 Meter dicken und 10 Meter breiten Betonschicht, welche von einer dicken Pfahlwand eingefaßt und mittels eines starken Steinwurfes vor Zerstörung gesichert wird. Die Höhe der Tragbögen ist in der Mitte 15 Meter, die lichte Brückenweite 4 Meter und die Höhe der Fahrbahn über den Nullpunkt des Pegels mißt 15,1 Meter; die Constructionsdicke der Brücke, gemessen von der Fahrbahn bis Unterkante der Träger, beträgt 1 Meter.

Die Querschnittsdimensionen der Brückenträger sind so ausgewählt, daß die dreifache variable Last sammt dem ganzen permanenten Gewicht der Brücke pr. Quadratcentimeter eine Spannung von 1600 Kilogramm, also pr. Quadratzoll eine solche von 22000 Pfund giebt. Dieser Forderung wird dadurch entsprochen, daß die Spannbögen aus $9 . 2 = 18$ Blechbändern von je 20 Centimeter Breite und 1,2 Centimeter Dicke und die Druckbögen so zusammengesetzt sind, daß sie eine rectanguläre Blechröhre von 1 Meter Weite und 1,2 Centimeter Wandstärke bilden.

In Fig 208 ist noch ein Theil der schiefen Bogenbrücke (bowstring-

Fig. 208.



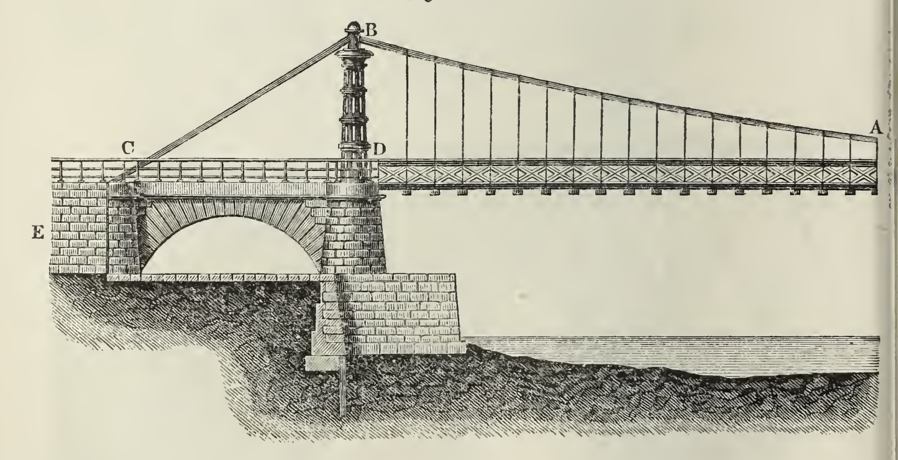
bridge) abgebildet, welche zu Oudenarden eine Eisenbahn über die Schelde führt. Diese Brücke gehört in gewissem Grade dem Charnierbrückensystem

an, denn die Druckbögen derselben bestehen hier aus zwei getrennten Stücken, wie *ADM*, welche sich im Scheitel *M* mittels eines eingeschobenen Keiles gegen einander stemmen. Es wird dadurch der Scheiteldruck localisirt, welches, wie aus §. 94 bekannt ist, seine besonderen Vortheile bei unsymmetrischer Belastung der Brücke gewährt. An den Enden sind dagegen die Druckbögen durch Nietung fest mit den geraden Zugbändern verbunden. Uebrigens sind die Tragwände an einem Ende mit dem Pfeilerkopfe *B* fest verbunden, während sie an dem anderen Ende mittels Rollen auf dem Brückenpfeiler aufruht. Die Länge einer Tragwand ist 27,8 Meter und Pfeilhöhe derselben 6 Meter. Der Druckbogen ist im Scheitel 0,35 und an den Füßen 0,80 Meter hoch, wogegen das Zugband durchgängig 0,96 Meter Höhe hat. Beide sind im Querschnitt T förmig und aus Eisenblech von 10 bis 13 Millimeter Dicke zusammengenietet. Die Bogenfüllung besteht, wie gewöhnlich aus verticalen Blechstreben, wie *KG*, *IH* und diagonalen Zugbändern, wie *DH*, *DK* u. s. w., welche unter einander sogenannte Andreaskreuze bilden. Diese Brücke hat noch die Eigenthümlichkeit, daß hier zwischen den Querträgern, welche die Tragwände mit einander verbinden, Ziegelgewölbe aufgeführt sind, welche ein über $1/2$ Meter dickes Schotterbette für die Bahnschwellen tragen.

§. 107 **Hängebrücken.** Eine neuere Hängebrückenanlage ist die von Brialmont construirte Kettenbrücke über die Maas bei Seraing.

Die Seitenansicht von einem Stück dieser Bahn führt Fig. 209 vor Augen.

Fig. 209.

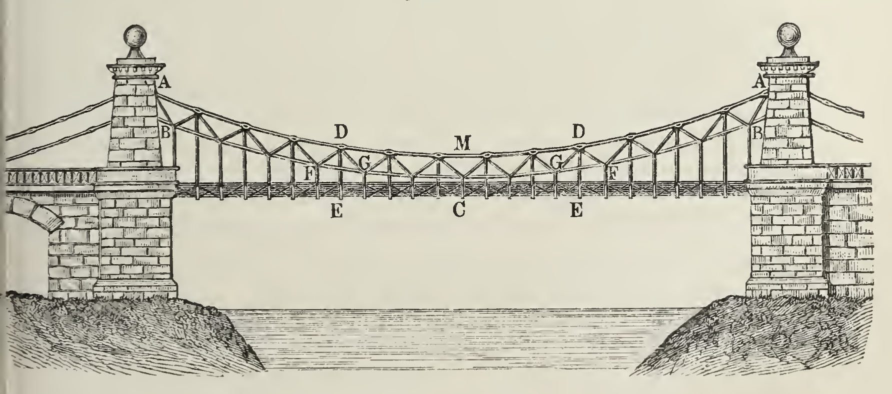


Diese Brücke, welche bei einer Breite von 5 Meter und einer Bogenhöhe von 7 Meter, eine Spannweite von 105 Meter hat, besteht aus acht und zwar auf jeder Seite aus vier nahe über und neben einander liegenden Dop=

pelketten. Die Glieder dieser Ketten, deren Metalldicke $2^1/_2$ und Höhe 5 Centimeter mißt, bilden Scheeren oder Ringe von 3 Meter Länge und 1 Decimeter lichter Weite. Die auf einer Seite neben einander liegenden Doppelketten sind durch 1 Decimeter dicke Bolzen mit einander verbunden, und an die letzteren sind die 3 Centimeter dicken Hängestangen angeschlossen. Die Tragketten *AB* sind mit den Spannketten *BC* durch die in Fig. 160 abgebildeten und in §. 85 beschriebenen Hebel verbunden, welche in einem 8 Meter hohen und aus vier Stücken und einem cylindrischen Kern bestehenden gußeisernen Thurme enthalten sind. Die Befestigung der Kettenenden in der Widerlagsmauer *E* ist ähnlich wie Fig. 161 darstellt. Die ganze Brücke wiegt auf das laufende Meter 1010 Kilogramm, und nimmt man die Belastung eben so groß an, so berechnet sich die Spannung der Ketten auf 418910 Kilogramm, so daß auf ein Quadratmillimeter desselben eine Spannung von 10 Kilogramm kommt. Die Hängestangen sind dagegen nur mit 2 Kilogramm und die gußeisernen Pfeiler mit $2^1/_2$ Kilogramm pr. Quadratmillimeter belastet.

Die Eisenbahnkettenbrücke über den Donau-Canal in Wien, ausgeführt von den Ingenieuren Schnirch und Fillunger ist in Fig. 210 skizzirt.

Fig. 210.



Dieselbe besteht aus je zwei durch Diagonalstäben *DF*, *DG* ... mit einander verbundenen Hängeketten *AMA* und *BGGB*, welche wie gewöhnlich, die Brückenbahn *ECE* mittels verticaler Hängestangen tragen. Diese Brücke hat eine Spannweite von 264 Wiener Fuß, eine Bogenhöhe von $13^1/_5$ Fuß und trägt eine Fahrbahn mit Doppelgeleisen von 35 Fuß Breite. Der Gesammtquerschnitt der Ketten ist 248 Quadratzoll, und der Materialaufwand dieser Brücke besteht aus 7290,8 Centner Schmiedeeisen, und aus 668 Centner Gußeisen.

Schlußanmerkung. Zum weiteren Studium der Statik der Holz- und Eisenconstructionen sind folgende Schriften zu empfehlen. Eytelwein's Statik, Band II, Gerstner's Mechanik, Band I, und Kaiser's Handbuch der Statik. Ferner Navier: Resumé des leçons sur l'application de la mécanique. Part I, Paris 1833, auch deutsch von Westphal, unter dem Titel: Mechanik der Baukunst, und Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenconstructionen, mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen, Wien 1856. Ardant, Theoretisch-praktische Abhandlung über Anordnung und Construction der Sprengwerke von großer Spannweite, aus dem Französischen von Kaven, Hannover 1844. Ausführlich über Dachconstructionen ist die Schrift von M. Winter, Berlin 1862. Ein älteres Werk ist: Elementary Principles of Carpentary etc. by Th. Tredgold, London 1820. Persy, Cours de stabilité des constructions. Sganzin, Cours des constructions. Cresy, An Encyclopaedia of Civil-Engineering, London 1847. Fairbairn, An account of the construction of the Britannia- and Conway-Tubular-Bridges etc. Dempsey, Tubular- and other Iron-Girder-Bridges, auch deutsch von Werther unter dem Titel: Praktisches Handbuch bei dem Bau eiserner Träger- oder Jochbrücken 2c., Dresden 1853; sowie Dempsey, Iron applied to railway structures, sowie: Malleable iron-bridges, und Examples for iron roofs etc. Ferner M. Becker, die gußeisernen Brücken der badischen Eisenbahnen, Carlsruhe 1847, sowie dessen angewandte Baukunde des Ingenieurs, und C. M. Bauernfeind, Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde mit erläuterndem Text, München 1853. Siehe auch „Die Brücken und Thalübergänge schweizerischer Eisenbahnen, von C. v. Etzel, Basel 1856, sowie Duggan, Specimens of the stone-, iron- and wood-bridges, New-York 1850.

Was die Hängebrücken insbesondere anlangt, so handelt hiervon schon Gerstner in seiner Mechanik, Band I, ziemlich ausführlich, und beschreibt namentlich die Hammersmith- und die Menaikettenbrücke von Telford. In theoretischer Hinsicht ist vorzüglich zu nennen: Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, auch deutsch von Scheffler, unter dem Titel: Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architectur, Braunschweig 1845. In Navier's Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823, wird nicht allein eine allgemeine Theorie der Kettenbrücken abgehandelt, sondern auch eine in Paris über die Seine aufgehangene Kettenbrücke beschrieben, welche leider durch das Nachgeben der Pfeiler unbrauchbar wurde und deshalb wieder abgetragen werden mußte. Ueber die in Frankreich sehr häufig angewendeten Drahtbrücken handelt Seguin (der Aelt.) in einem Mémoire sur les ponts en fil de fer. Eine gedrängte Abhandlung über ältere Hängebrücken ist in Sganzin's Cours des constructions zu finden. Nächstdem findet man auch mehrere Kettenbrücken beschrieben in den Annales des ponts et chaussées, ferner in Förster's Bauzeitung u. s. w. Ueber englische Kettenbrücken wird auch gehandelt in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 5 und 11.

Ueber die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz handelt die letztere Zeitschrift im 32. Jahrgange (1853); die Hängebrücke über die Maas bei Seraing wird (nach Armengaud's publication industrielle) im „Civil-Ingenieur", Band II, 1856, beschrieben. Ferner die Prager Kettenbrücke von Schnirch ist in einer besonderen Schrift von Hennig, Prag 1842, beschrieben, und ebenso die Kettenbrücke über die Donau zu Pesth von Clark. Letztere Schrift ist in engli-

scher Sprache erschienen unter dem Titel: An account of the suspension bridge across the river Danube, London 1853.

Ferner gehört hierher: Schnirchs erste Kettenbrücke für Locomotivenbetrieb, von J. Fauta. Wien 1861.

Die Theorie der Hängebrücken mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung, von H. Tellkampf, Hannover 1856, enthält in gedrängter Kürze das Wesentliche über die Theorie und die Anwendung dieser Brücken.

Endlich ist noch folgende ganz neue Schrift zum Studium der statischen Baukunst zu empfehlen:

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1857. Die Basis dieser Schrift bildet das zuerst von Herrn Moseley aufgestellte und vom Herrn Scheffler weiter ausgebildete „Princip des kleinsten Widerstandes". S. das oben citirte Werk von Moseley, sowie die Abhandlungen Schefflers im Crelle Journal für die Baukunst, Band 29 und 30.

Die Literatur über die statische Baukunst und insbesondere über den Brückenbau hat sich in der neuesten Zeit so sehr ausgedehnt, daß hier nur die wichtigsten Schriften über diesen Gegenstand angezeigt werden können. Vor Allem ist zu nennen: Rankine's Manuel of Civil-Engineering, London 1862. Ferner die Schrift von Laißle und Schübler über den Bau der Brückenträger, welche 1864 in Stuttgart in einer zweiten Auflage erschienen ist. Ueber die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz, nach Pauli's System ist 1863 in Mainz eine kurze Beschreibung erschienen. In dem Werke von Dr. A. Ritter: Elementar-Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, wird von der Methode der statischen Momente der ausgedehnteste Gebrauch gemacht. Ein größeres Werk über Brücken ist folgendes: Traité théorique et practique de la construction des ponts metalliques par Molinos et Pronnier, Paris 1857. Siehe Bd. IV des Civilingenieurs „über die allgemeine Methode der Berechnung von Brücken." Auch gehört hierher: Langer. Der Eisenbrückenbau. Wien 1863. Mehrere Abhandlungen über eiserne Brücken und Brückenträger sind in den letzten Jahrgängen des Civilingenieurs, sowie in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, in der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, und in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins enthalten.

Ueber die §. 106 beschriebene Brücke zu Oudenarden handelt speciell der Civilingenieur in Band IX, 1863. Eine Untersuchung des Einflusses bewegter Lasten auf den Widerstand eiserner Brücken mit geraden Trägern von Herrn Renaudot enthält Band VIII, 1862 des Civilingenieurs. Ueber die Theorie continuirlicher Brückenträger handelt die gedachte Zeitschrift in Band IV, VI und VIII. Die Blechbogenbrücke über den Canal von Saint-Denis ist in Band VI, und die Blechbogenbrücke über die Theiß bei Szegedin in Band VII des Civilingenieurs beschrieben. Die Construction steifer Hängebrücken mit Charnieren ist zuerst behandelt vom Herrn Köpcke im sechsten und siebenten Band der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover.

Zweite Abtheilung.

Die

Anwendung der Mechanik auf Kraft-Maschinen.

Einleitung.

Maschinen. Maschinen (franz. und engl. machines) heißen alle künstlichen Vorrichtungen, durch welche Kräfte in den Stand gesetzt werden, mechanische Arbeiten zu verrichten. Sie sind insofern von den Bauwerken (franz. constructions; engl. structures) verschieden, als diese den Zweck haben, nur den Gleichgewichtszustand zwischen den Kräften verschiedener Körper herzustellen. Instrumente oder Werkzeuge (franz. und engl. instruments) sind von den Maschinen wesentlich nicht verschieden; sie dienen nur zur Verrichtung kleiner Arbeiten durch Menschenhände. §. 108

Bei jeder Maschine ist zu unterscheiden: Kraft und Last oder Widerstand. Kraft (franz. force; engl. power) ist die Ursache der Bewegung, und Last oder Widerstand (franz. résistance, engl. resistance) ist Das, was der Kraft entgegenwirkt, und dessen Ueberwindung Zweck der Maschine ist. Die Körper, deren Kräfte zur Bewegung von Maschinen verwendet werden, heißen Beweger, Motoren (franz. moteurs; engl. motors); diese Kräfte selbst sind aber vorzüglich die animalischen Kräfte, die Schwerkraft, die Trägheit, Elasticität, Expansivkraft u. s. w. (s. Band I, §. 63). Last oder Widerstand ist aber zu überwinden, indem man Körper von einem Orte nach einem anderen bringt, oder Körper in ihrer Form verändert, z. B. zertheilt, zusammendrückt u. s. w.

An jeder Maschine lassen sich in der Regel drei Hauptheile unterscheiden. Der erste Haupttheil dient zur Aufnahme der Kraft, und heißt deshalb die Kraft- oder Umtriebsmaschine (franz. récepteur; engl. receiver), der zweite Haupttheil dient zur unmittelbaren Verrichtung der Arbeit, und heißt deshalb die Last-, Ausübungs- oder Arbeitsmaschine (franz. opérateur, outil; engl. operator), und der dritte dient zur Verbindung beider, indem er die Bewegung der Kraftmaschine auf die Arbeitsmaschine überträgt, sie dem Zwecke entsprechend verändert u. s. w.; er heißt deshalb die Verbin-

dungs- oder Zwischenmaschine (franz. communicateur; engl. communicator). Bei einer gewöhnlichen Mahlmühle ist z. B. das Wasserrad die Umtriebsmaschine, der armirte umlaufende Mühlstein die Arbeitsmaschine und das Räderwerk zwischen beiden die Zwischenmaschine (das Zwischengeschirr).

Anmerkung. Nicht bei allen Maschinen treten diese drei Haupttheile vollständig getrennt hervor, namentlich fehlt die Zwischenmaschine zuweilen ganz, weil die Umtriebsmaschine manchmal schon diejenige Bewegung hat, welche zur Verrichtung einer gewissen Arbeit nöthig ist. Bei einem gewöhnlichen Schubkarren sind die drei Haupttheile ganz mit einander vereinigt; die Handhaben desselben lassen sich als den kraftaufnehmenden, die Schenkel als den fortpflanzenden und der Kasten als den ausübenden Maschinentheil ansehen, jedoch machen alle drei nur einen einzigen Körper aus.

§. 109 **Leistung.** Die Wirkung, Leistung oder der Effect einer Maschine (franz. effet; engl. effect, work) wird durch die in einer Minute oder Secunde verrichtete Arbeit (s. Band I, §. 71) oder durch das Product aus der Kraft und dem in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege gemessen. Ist P die Kraft und s der in jeder Secunde wirklich zurückgelegte oder einer Secunde entsprechende Weg, so hat man demnach als Maß der Leistung einer Maschine: $L = Ps$ Pfundfuß (Fußpfund) oder Kilogrammeter.

Es ist sehr gewöhnlich, sich noch einer größeren Einheit von 75 Kilogrammeter oder 478 Fußpfund zum Messen der Maschinenleistungen zu bedienen, und diese Einheit eine Pferdekraft (franz. cheval-vapeur; engl. horse-power) zu nennen. In England rechnet man 550 Fußpf., in Preußen 480 Fußpf., und in Oesterreich 430 Fußpf. pr. Pferdekraft.

Es ist auch nothwendig, Nutz-, Neben- und Totalleistung einer Maschine von einander zu unterscheiden. Nutzleistung (franz. effet utile; engl. useful effect, useful work) ist diejenige, deren Ueberwindung die Maschine bezweckt, welche auch wirklich verrichtet wird; Nebenleistung (franz. effet perdu; engl. lost effect, impeding effect) ist diejenige Wirkung, welche die Maschine durch die Reibung, Steifigkeit, Stöße u. s. w. ohne Nutzen consumirt; Roh- oder Totalleistung (franz. effet total, effet absolut; engl. whole-effect) ist die Summe beider oder das dem Motor innewohnende oder ihm entnommene Arbeitsvermögen. Eine Maschine ist um so vollkommener, je kleiner ihre Nebenleistung in Hinsicht auf die Nutz- oder Totalleistung, oder je größer ihre Nutzleistung in Hinsicht auf die Totalleistung ist, je weniger also Wirkung durch die Maschine beim Uebertragen vom Motor auf den Widerstand verloren geht. Man bedient sich deshalb des Verhältnisses der Nutzleistung zur Totalleistung als Maß zur Beurtheilung der Vollkommenheit einer Maschine, und nennt dieses die relative Leistung oder den Wirkungsgrad (franz. rendement, engl. efficiency) einer Maschine. Ist L die Total-, L_1 die Nutz- und L_2 die Nebenleistung, so hat man den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{L - L_2}{L}.$$

Eine Maschine ist hiernach um so vollkommener oder um so zweckmäßiger eingerichtet, je mehr sich ihr Wirkungsgrad der Einheit nähert. Da sich die Nebenhindernisse, z. B. die Reibung, der Luftwiderstand u. s. w., nie ganz beseitigen lassen, so ist es allerdings nie möglich, den Wirkungsgrad einer Maschine auf Eins zu bringen.

Beispiel. Ein Pochwerk besteht aus 20 Stempeln, wovon jeder 250 Pfund schwer ist und in jeder Minute 40 Mal 1 Fuß hoch gehoben wird; die Umtriebsmaschine desselben besteht in einem Wasserrade, welches ein Wasserquantum von 260 Cubikfuß pr. Minute bei 20 Fuß Gefälle aufnimmt. Man sucht die Wirkungsverhältnisse dieser Maschine. Die Nutzleistung pr. Secunde ist:

$$\frac{20.250.40.1}{60} = 3333\frac{1}{3} \text{ Fußpfund} = 6\frac{1}{2} \text{ Pferdekräfte;}$$

die Totalleistung aber, da in jeder Secunde $\frac{260}{60}$ Cubikfuß $= \frac{260.61,75}{60} = 267,5$ Pfund Wasser 20 Fuß hoch herabsinken:

$$= 267,5.20 = 5350 \text{ Fußpfund} = 11,2 \text{ Pferdekräfte;}$$

die Nebenleistung:

$$= 5350 - 3333\frac{1}{3} = 2016\frac{2}{3} \text{ Fußpfund} = 4,2 \text{ Pferdekräfte;}$$

der Wirkungsgrad der Maschine endlich:

$$\eta = \frac{3333\frac{1}{3}}{5350} = 0,623.$$

Anmerkung. Ueber die Arbeitseinheit „Pferdekraft" s. eine Abhandlung des Herrn Reuleaux im Civilingenieur, Band III.

Nutz- und Nebenlast. Auch die Last einer Maschine ist in Nutz- und Nebenlast zu unterscheiden; da aber die Kraft, Nutz- und Nebenlast in der Regel an verschiedenen Punkten angreifen, so läßt sich die Kraft nicht unmittelbar der Summe aus der Nutz- und Nebenlast gleichsetzen, sondern es erfordert dieses Gleichsetzen erst eine Reduction. Diese Reduction ist entweder mit Hülfe der gleichzeitigen Wege der verschiedenen Angriffspunkte einer Maschine, oder mittels der Hebelarme auszuführen. §. 110

Legt die Kraft P den Weg s zurück, während die Nutzlast P_1 den Weg s_1 und die Nebenlast P_2 den Weg s_2 macht, so hat man zu setzen:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2, \text{ daher } P = \frac{s_1}{s} P_1 + \frac{s_2}{s} P_2.$$

Man nennt den Punkt einer Maschine, in welchem die Kraft (P) angreift oder angreifend gedacht werden kann, den Kraftpunkt, und den Punkt, in welchem die Last (P_1 und P_2) unmittelbar wirkt, den Lastpunkt, und erhält in

$$\frac{s_1}{s} P_1$$

die auf den Kraftpunkt reducirte Nutz-, sowie in

$$\frac{s_2}{s} P_2$$

die ebendahin reducirte Nebenlast; es ist also die Kraft gleich der Summe aus der auf den Kraftpunkt reducirten Nutz- und der ebendahin reducirten Nebenlast. Auch folgt

$$P_1 = \frac{s}{s_1} P - \frac{s_2}{s_1} P_2,$$

d. i. die Nutzlast ist die Differenz von der auf den Lastpunkt reducirten Kraft und von der ebendahin reducirten Nebenlast.

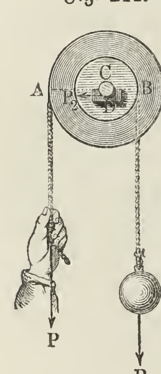
Hiernach läßt sich auch der Wirkungsgrad einer Maschine:

$$\eta = \frac{P_1 s_1}{Ps} = \frac{s_1}{s} P_1 : P = P_1 : \frac{s}{s_1} P,$$

d. i dem Quotienten aus der auf den Kraftpunkt reducirten Nutzlast und der Kraft, oder dem Quotienten aus der Nutzlast und der auf den Lastpunkt reducirten Kraft gleichsetzen.

Die meisten Maschinen sind Zusammensetzungen von Radwellen (s. Bd. I, §. 165), weswegen sich diese Reductionen oft mit Hülfe der Hebelarme vollziehen lassen. Ist bei der Radwelle ABC, Fig. 211, der Radhalbmesser $CA = a$, der Wellenhalbmesser $CB = b$, so hat man das statische Moment der Kraft P:

Fig. 211.



$$= Pa,$$

und das der Nutzlast P_1:

$$= P_1 b;$$

daher die auf den Kraftpunkt A reducirte Nutzlast:

$$= \frac{P_1 b}{a} = \frac{b}{a} P_1,$$

und die auf den Lastpunkt B reducirte Kraft:

$$= \frac{Pa}{b} = \frac{a}{b} P.$$

Besteht nun die Nebenlast P_2 nur in der Zapfenreibung $\varphi (P + P_1 + G)$, und ist r der Halbmesser CD des Zapfens, so hat man das Moment derselben:

$$= P_2 r,$$

und daher die auf den Kraftpunkt reducirte Nebenlast:

$$= \frac{P_2 r}{a} = \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G),$$

dagegen die auf den Lastpunkt reducirte Nebenlast:

$$= \frac{P_2 r}{b} = \frac{\varphi r}{b} (P + P_1 + G).$$

Es ist daher die Kraft:

$$P = \frac{b}{a} P_1 + \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G),$$

sowie die Nutzlast:

$$P_1 = \frac{a}{b} P - \frac{\varphi r}{b} (P + P_1 + G),$$

endlich der Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta = \frac{b}{a} P_1 : P = P_1 : \frac{a}{b} P = \frac{P_1 b}{P a}.$$

Beispiel. Wenn bei einer 250 Pfund schweren Radwelle der Radhalbmesser 30 Zoll, der Wellenhalbmesser 6 Zoll, der Zapfenhalbmesser $\frac{1}{2}$ Zoll mißt, ferner die Nutzlast 500 Pfund beträgt, und der Coefficient der Zapfenreibung $\frac{1}{10}$ angenommen wird, so hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Nutzlast:

$$= \frac{b}{a} P_1 = \frac{6}{30} \cdot 500 = 100 \text{ Pfund},$$

die ebendahin reducirte Nebenlast:

$$= \frac{\varphi r}{a} (P + P_1 + G) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2 \cdot 30} (750 + P) = \frac{5}{4} + \frac{P}{600},$$

daher zu setzen die Kraft:

$$P = 100 + \frac{5}{4} + \frac{P}{600},$$

d. i.

$$P = 101,25 \cdot \frac{600}{599} = 101,42 \text{ Pfund},$$

und den Wirkungsgrad dieser Maschine:

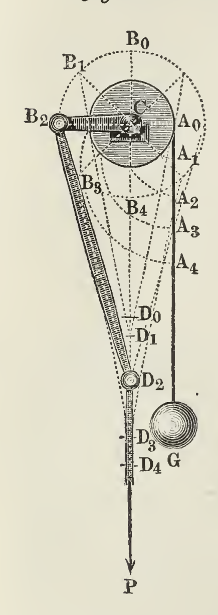
$$\eta = \frac{100}{101,42} = 0,986.$$

Beharrungszustand. Eine Maschine kommt, nachdem sie einmal in den Gang gesetzt worden ist, sehr bald in den Beharrungszustand, d. h. sie wiederholt periodenweise oder in gleichen Zeitabschnitten die nämlichen Verrichtungen. Deshalb betrachten wir denn auch die Maschinen in der Regel nur in ihrem Beharrungszustande. Bewegen sich sämmtliche Theile einer Maschine gleichförmig, so befindet sich dieselbe in einem gleichförmigen Beharrungszustande, bewegen sich dieselben aber innerhalb einer Periode ungleichförmig, so ist die Maschine in einem ungleichförmigen Beharrungszustande. Die Ursachen des letzten Zustandes sind: Veränderlichkeit der Kraft, der Last, oder der Masse der Maschine, ferner die durch die Zusammensetzung der Maschinentheile bedingte Veränderlichkeit des Verhältnisses zwischen den gleichzeitigen Wegen der Kraft und Last. Bei einer Dampfmaschine ist die Kraft veränderlich, wenn sie mit Expansion wirkt, wenn also der Dampfzufluß während der Kolbenbewegung aufgehoben wird, und bei einem Hammerwerke sind Kraft und Masse veränderlich, weil der Hammer während des Zurückfallens mit der Maschine außer Verbindung ist; beide Maschinen können daher nur einen ungleichförmigen Beharrungszustand annehmen; sind nun noch diese Maschinen mit einander verbunden, wird also das Hammerwerk durch die Expansionsdampfmaschine in Bewegung gesetzt, so ist dieser Zustand aus drei Ursachen zugleich ein ungleichförmiger. Wird ein Gewicht G, Fig. 212 (a. f. S.), mittels eines Rades CA_0 und §. 111

einer Kurbel CB_2 durch eine Dampfmaschine mit constantem Dampfdrucke gehoben, so nimmt die Maschine ebenfalls einen ungleichförmigen Beharrungszustand an, weil, wenn man von dem Lastpunkte A_0 und dem Kraftpunkte D_0 ausgeht, gleichen Wegen A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 der Last sehr ungleiche Wege D_0D_1, D_1D_2, D_2D_3, D_3D_4 der Kraft entsprechen, das Wegeverhältniß während einer halben Umdrehung also ein veränderliches ist.

Bei einem gleichförmigen Beharrungszustande sind die trägen Massen der Maschine ohne Einfluß auf den Gang und die Wirkung der Maschine, weil sie nur anfangs, so lange noch ein Geschwindigkeitszuwachs statt hat, Arbeit in sich aufnehmen, später aber, bei unveränderlicher Geschwindigkeit, weder Arbeit aufnehmen noch ausgeben (s. Band I, §. 55). Befindet sich hingegen eine Maschine in einem ungleichförmigen Beharrungszustande, so haben die trägen Massen einen wesentlichen Einfluß auf den Gang der Maschine, weil sie beim Zunehmen an Geschwindigkeit Arbeit in sich aufnehmen und beim Abnehmen derselben wieder Arbeit ausgeben. Ist M die Summe aller auf den Kraft- oder Lastpunkt reducirten Massen der Maschine, v_1 die Minimal- und v_2 die Maximalgeschwindigkeit des Kraft- und Lastpunktes, so hat man die Arbeit, welche die trägen Massen in dem Theile der Periode, in welchem v_1 in v_2 übergeht, consumiren, und welche dieselben in dem Theile der Periode, in welchem v_2 wieder in v_1 sich umändert, wieder ausgeben,

Fig. 212.



$$= \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) M.$$

Es wird also hiernach durch die Trägheit der Massen in jeder Periode die Nebenleistung um diese Arbeit vergrößert und auch um so viel vermindert, und es ist daher die Totalleistung für die ganze Periode oder die mittlere Leistung überhaupt dieselbe, als wenn die trägen Massen nicht vorhanden wären; es gilt also die allgemeine Formel einer Maschine

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2$$

auch beim ungleichförmigen Gange, insofern man für s, s_1, s_2 die Wege einer vollständigen Periode, oder für P, P_1, P_2 die Mittelwerthe von Kraft, Nutz- und Nebenlast innerhalb einer Periode substituirt. Für den beschleunigten Bewegungszustand hat man:

$$Ps = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) M,$$

daher:

$$v_2 - v_1 = \frac{Ps - (P_1 s_1 + P_2 s_2)}{\left(\frac{v_2 + v_1}{2}\right) M}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Geschwindigkeitsveränderung einer Maschine nicht allein um so kleiner ausfällt, je kleiner die Differenz zwischen der Arbeit der Kraft und der Summe der Arbeiten der Lasten ist, sondern auch je größer die Massen und Geschwindigkeiten der Maschinentheile sind.

Anmerkung. Wenn hiernach die Massen nur auf den Bewegungszustand, nicht aber auf die Wirkung einer Maschine Einfluß äußern, so folgt daraus noch nicht, daß es gleichgültig ist, ob die Theile einer Maschine mehr oder weniger Masse besitzen. Veränderungen in Geschwindigkeit vergrößern oft die Nebenhindernisse, wie z. B. die Reibung, veranlassen störende Schwingungen und nicht selten Stöße, auch liefern manche Maschinen beim ungleichförmigen Gange ein schlechteres Product u. s. w., weshalb es oft nöthig ist, Mittel anzuwenden, um die Ungleichförmigkeit im Gange einer Maschine zu vermindern. Wenn eine Maschine oder ein Maschinentheil abwechselnd aus der Ruhe in Bewegung und aus der Bewegung in Ruhe übergehen muß, so ist nicht ein gleichförmiger, sondern ein solcher Bewegungszustand zu erzielen, daß die Geschwindigkeit abwechselnd von Null stetig bis zu einem gewissen Maximalwerthe zu-, und von diesem wieder bis Null stetig abnimmt, da plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen Schwingungen und Stöße verursachen, welche nicht allein mit Arbeitsverlusten (s. Band I, §. 335) verbunden sind, sondern auch ein starkes Abführen der Maschinen herbeiführen. Hierüber kann jedoch erst in der Folge gehandelt werden.

Erster Abschnitt.

Von den bewegenden Kräften der Thiere, des Wassers und des Windes, sowie von den Maschinen zur Aufnahme dieser Kräfte.

Erstes Capitel.

Von dem Messen der bewegenden Kräfte und ihrer Wirkungen.

§. 112 **Dynamometer.** Um die Wirkungen der Kräfte und Maschinen angeben zu können, hat man drei Elemente nöthig, nämlich die Größe der Kraft, die Größe ihres Weges und die entsprechende Zeit der Wirkung. Zum Ausmessen der Kräfte dienen Kraftmesser oder Dynamometer, zu dem Ausmessen von Wegen gebraucht man Meßstäbe, Ketten und Meßbänder, und zur Angabe der Zeit werden Pendel und Uhren angewendet. Ist P die Größe der durch das Dynamometer angegebenen Kraft, und s der Weg, längs dessen dieselbe während einer gewissen Zeit t wirkt, so hat man die Leistung oder mechanische Arbeit dieser Kraft auf diese Zeit, $= Ps$ und daher die Leistung pr. Secunde:

$$L = \frac{Ps}{t}.$$

Hier möge nur von den Dynamometern (franz. dynamomètres; engl. dynamometers) die Rede sein. Dieselben sind entweder Gewichts-, oder Feder-, oder Bremsdynamometer. Gewichts- und Federdynamometer sind von den Gewichts- und Federwagen nicht wesentlich verschieden; während letztere vorzüglich nur zum Abwägen oder Messen der Gewichte der Körper dienen, wendet man erstere zum Messen der Kräfte überhaupt an. Bremsdynamometer kommen nur beim Ausmessen der Kraft einer umlaufenden Welle in Anwendung.

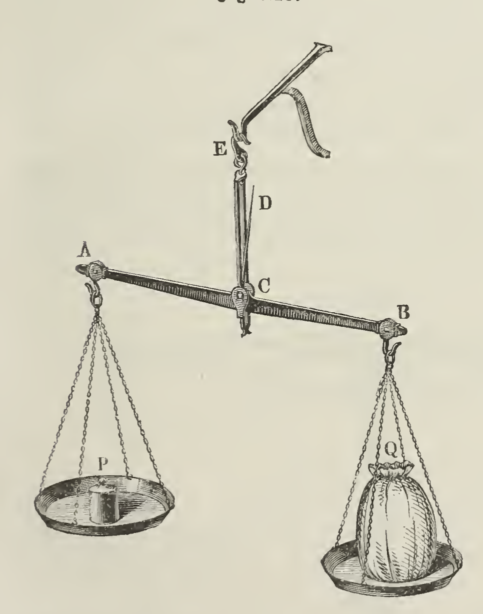
Die Gewichtsdynamometer oder Gewichtswagen sind ein- oder mehrfache Hebel, an welchen die zu messende Kraft oder die abzuwägende Last mit bekannten Gewichten ins Gleichgewicht gesetzt wird; die Federdynamometer

sind Stahlfedern, welche die Größe der auf sie wirkenden Kräfte durch die bewirkte Formveränderung mit Hülfe von Zeigern angeben.

Die Gewichtswagen sind entweder gleicharmige oder ungleicharmige, letztere wieder entweder einfache oder zusammengesetzte Wagen, je nachdem sie aus einem gleicharmigen oder aus einem oder mehreren ungleicharmigen Hebeln bestehen.

Die gleicharmige Wage. Die gemeine oder gleicharmige Gewichtswage (franz. balance ordinaire; engl. common balance) ist im Wesentlichen ein gleicharmiger Hebel AB, Fig. 213, an welchem die abzuwägende Last Q mit einem gleich großen Gewichte P ins Gleichgewicht gesetzt wird. Man unterscheidet an ihr den Wagebalken AB (franz. fléau; engl. beam), die Zunge CD (franz. aiguille, languette; engl. tongue), die Scheere CE (franz. und engl. chape), die durch ein dreiseitiges Prisma gebildete Axe C (franz. axe; engl. axis) und die mittels Schnüre, Ketten u. s. w. aufgehängten, zur Aufnahme der Gewichte bestimmten Wagschalen (franz. bassins; engl. scales). §. 113

Fig. 213.



Von einer solchen Wage fordert man, daß sie, und zwar nur dann einspiele, d. h. der Wagebalken eine horizontale, also die Zunge eine verticale Lage annehme, oder mit der Richtung der Scheere zusammenfalle, wenn das bestimmte Gewicht in der einen Wagschale so groß ist als das Gewicht des Körpers in der anderen. Außerdem soll eine Wage auch noch Empfindlichkeit und Stabilität besitzen, d. h. sie soll eine Neigung annehmen, wenn auf der einen Seite der vorher im Einspielen befindlichen Wage ein kleines Gewicht zugelegt wird, und soll in den horizontalen Stand zurückkehren, wenn die Gleichheit der Gewichte wieder hergestellt oder die Zulage wieder weggenommen wird.

Damit eine Wage bei gleichen Auflagen zu beiden Seiten einspiele, müssen die Hebelarme derselben vollkommen gleich sein. Ist a die Länge

des einen, b die des anderen Armes, P das Gewicht an dem einen und Q das Gewicht an dem anderen Arme, so hat man beim Einspielen

$$Pa = Qb;$$

vertauscht man aber die Gewichte, bringt man P an den anderen Arm und Q an den ersten, so hat man auch:

$$Pb = Qa,$$

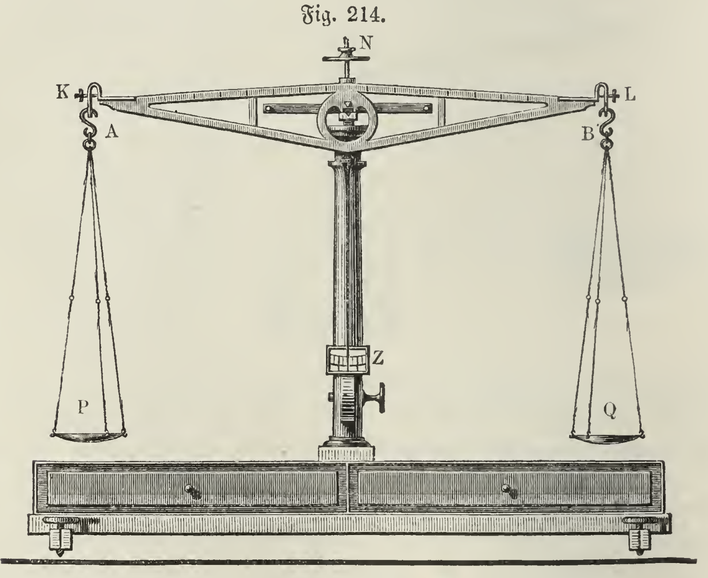
falls hierbei wieder ein Einspielen statt hat. Aus beiden Gleichungen folgt

$$P^2 . ab = Q^2 . ab,$$

d. i. $P = Q$ und ebenso auch $a = b$.

Wenn also durch das Vertauschen der Gewichte das Gleichgewicht nicht gestört wird, so ist dies ein Beweis von der Richtigkeit der Wage. Diese Prüfung läßt sich aber auch auf folgende Weise bewerkstelligen. Bringt man hinter einander zwei Gewichte P und P mit einem dritten Q in der zweiten Wagschale ins Gleichgewicht, so sind dieselben unter sich, wenn auch nicht mit diesem dritten gleich; legt man daher nach Wegnahme dieses dritten Gewichtes die beiden ersten auf, so hat man für den Gleichgewichtszustand $Pa = Pb$, und also auch $a = b$. Es liefert also hier das Einspielen der Wage beim Auflegen von zwei gleichen Gewichten den Beweis

Fig. 214.



der Richtigkeit der Wage unmittelbar. Kleine Unrichtigkeiten kann man durch angeschraubte Gegengewichtchen K, L beseitigen, wie die feinere Wage Fig. 214 vor Augen führt.

Giebt eine Wage für einen und denselben Körper die Gewichte P und

Q an, je nachdem man denselben in der einen oder in der anderen Wagschale wiegt, so hat man für den wahren Werth X des Gewichtes:

$$Xa = Pb \text{ und } Xb = Qa,$$

daher:

$$X^2 \,.\, ab = PQ \,.\, ab,$$

also:

$$X^2 = PQ \text{ und } X = \sqrt{PQ}.$$

Es ist also das geometrische Mittel aus beiden Angaben das wahre Gewicht des Körpers.

Auch läßt sich

$$X = \sqrt{P\,(P + Q - P)} = P\sqrt{1 + \frac{Q-P}{P}},$$

annähernd

$$X = P\left(1 + \frac{Q-P}{2P}\right) = \frac{P+Q}{2}$$

setzen, wenn, wie gewöhnlich, die Abweichung $Q - P$ nicht groß ist; man kann also auch einfacher das arithmetische Mittel aus beiden Angaben als das wahre Gewicht des Körpers ansehen.

Beschreibt man über der Summe AB von $\overline{AM} = P$ und $\overline{BM} = Q$ einen Halbkreis AOB, Fig. 215, so repräsentirt in demselben der Halbmesser $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CO}$ den Näherungswerth $\frac{P+Q}{2}$, dagegen die Ordinate $\overline{MO}$ den genauen Werth $\sqrt{PQ}$ von X.

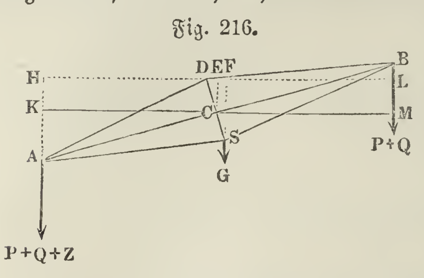
Fig. 215.

Bringt man die abzuwiegende Last erst durch Hülfsgewichte, wie Sand, Schrot u. s. w., auf der Wage ins Gleichgewicht, und ersetzt sie nachher durch gewöhnliche Gewichte, so geben diese ebenfalls die wahre Größe der Last an.

Empfindlichkeit der Wage. Damit die Wage sich möglichst frei §. 114
bewege, und namentlich durch die Axenreibung nicht aufgehalten werde, giebt man ihr eine dreiseitige Stahlaxe und läßt diese noch auf harten Metall- oder Steinlagern ruhen. Damit ferner die Richtung der Mittelkraft der belasteten oder unbelasteten Wagschale durch den Aufhängepunkt gehe und die Reibung eine Abweichung hiervon nicht hervorbringe, also der Hebelarm der Schale unveränderlich bleibe, ist es nöthig, die Schalen ebenfalls an schneidigen Axen aufzuhängen. Wie nun auch eine solche Wage belastet ist, immer läßt sich annehmen, daß die angehängten und aufgelegten Gewichte in den Aufhängepunkten selbst angreifen, und ebenso der Angriffspunkt der Mittelkraft in der die beiden Aufhängepunkte verbindenden Linie liege. Da nach

Band I, §. 131 ein aufgehangener Körper nur dann Stabilität besitzt, wenn sein Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkte liegt, so folgt sogleich, daß die Drehaxe D, Fig. 216, einer Wage stets über den Schwerpunkt S des leeren Wagebalkens, und auch nicht unter die Linie AB durch die Aufhängepunkte zu legen ist. Der Allgemeinheit wegen wollen wir daher in Folgendem die Axe D über, und den Schwerpunkt S unter AB liegend annehmen.

Fig. 216.



Der Ausschlag oder die Abweichung des Wagebalkens von der Horizontalen bestimmt die Empfindlichkeit einer Wage; es ist daher seine Abhängigkeit von der Zulage oder Differenz der Gewichte in beiden Wagschalen kennen zu lernen. Setzen wir in dieser Absicht die Armlänge $CA = CB$ des Wagebalkens, $= l$, den Abstand CD des Drehpunktes von der Linie AB durch die Aufhängepunkte, $= a$, den Abstand SD des Schwerpunktes vom Drehpunkte, $= s$, setzen wir ferner den Ausschlagswinkel, $= \varphi$, das Gewicht des leeren Wagebalkens, $= G$, das Gewicht auf der einen Seite, $= P$ und das auf der anderen, $= P + Z$, also die Zulage $= Z$, und endlich noch das Gewicht einer Wagschale sammt Aufhängeketten und Haken, $= Q$, so haben wir das statische Moment auf der einen Seite der Wage:

$$(P + Q + Z) \,.\, \overline{DH} = (P + Q + Z)(\overline{CK} - \overline{DE})$$
$$= (P + Q + Z)(l \cos.\varphi - a \sin.\varphi),$$

und das auf der anderen Seite:

$$(P + Q) \,.\, \overline{DL} + G \,.\, \overline{DF} = (P + Q)(\overline{CM} + \overline{DE}) + G \,.\, \overline{DF}$$
$$= (P + Q)(l \cos.\varphi + a \sin.\varphi) + G s \sin.\varphi;$$

es ist daher für den Gleichgewichtszustand:

$$(P + Q + Z)(l \cos.\varphi - a \sin.\varphi)$$
$$= (P + Q)(l \cos.\varphi + a \sin.\varphi) + G s \sin.\varphi,$$

oder, wenn man $tang.\varphi$ einführt und transformirt:

$$([2(P + Q) + Z]\, a + G s)\, tang.\varphi = Zl,$$

also die Tangente des gesuchten Ausschlagwinkels:

$$tang.\varphi = \frac{Zl}{[2(P + Q) + Z]\, a + G s}.$$

Dieser Ausdruck sagt uns, daß der Ausschlag, und also auch die Empfindlichkeit, mit der Länge des Wagebalkens, sowie mit der Zulage gleichmäßig wächst, daß dagegen die Empfindlichkeit abnimmt, wenn die Gewichte P, Q,

G, Z und die Abstände a und s größer werden. Es ist daher eine schwere Wage weniger empfindlich als eine leichte unter übrigens gleichen Umständen, und es nimmt auch die Empfindlichkeit immer mehr und mehr ab, je größer die abzuwiegenden Gewichte sind. Um endlich die Empfindlichkeit einer Wage zu erhöhen, soll man die Aufhängelinie AB und den Schwerpunkt des Wagebalkens dem Drehungspunkte D nahe bringen.

Wäre a und s = Null, fiele also D und S in AB, so hätte man:

$$tang.\,\varphi = \frac{Zl}{o} = \infty, \text{ also } \varphi = 90^0;$$

es würde also die geringste Zulage eine Drehung des Wagebalkens um 90^0 bewirken. Auch wäre in diesem Falle für $Z = 0$, $tang.\,\varphi = \frac{0}{0}$, d. h. es könnte die Wage bei jeder Lage in Ruhe bleiben, wenn gleiche Gewichte aufgelegt wären, es besäße also die Wage ein indifferentes Gleichgewicht und wäre deshalb unbrauchbar. Macht man bloß $a = 0$, legt man also den Drehpunkt in die Linie AB durch die Aufhängepunkte, so hat man:

$$tang.\,\varphi = \frac{Zl}{Gs},$$

es ist also in diesem Falle die Empfindlichkeit gar nicht von den angehängten und aufgelegten Gewichten abhängig, daher die Wage besonders brauchbar. Man kann durch ein angeschraubtes Gegengewicht N, wie Fig. 214 vor Augen führt, die Empfindlichkeit reguliren.

Stabilität und Schwingungen einer Wage. Die Stabilität oder das statische Moment S, mit welchem eine gleichbelastete Wage in die Gleichgewichtslage zurückkehrt, wenn sie vorher einen Ausschlag φ hatte, ist bestimmt durch die Formel: **§. 115**

$$S = 2\,(P + Q)\,\overline{DE} + G\,.\,\overline{DF} = [2\,(P + Q)\,a + Gs]\,sin.\,\varphi.$$

Es wächst also das Maß $[2\,(P + Q)\,a + Gs]$ der Stabilität mit den Gewichten P, Q und G und mit den Abständen a und s, ist aber von der Länge des Wagebalkens unabhängig.

Eine schwingende Wage läßt sich mit einem Pendel vergleichen, und deren Schwingungsdauer auch nach der Theorie des letzteren berechnen. Es ist

$$2\,(P + Q)\,a$$

das statische und

$$2\,(P + Q)\,.\,\overline{AD^2} = 2\,(P + Q)\,(l^2 + a^2)$$

das Trägheitsmoment der belasteten Wagschalen, ferner Gs das statische Moment des leeren Wagebalkens; setzt man noch das Trägheitsmoment desselben $= Gk^2$, so hat man die Länge des mathematischen Pendels, welches mit der Wage isochron schwingt (s. Band I, §. 327):

$$r = \frac{2\,(P + Q)\,(l^2 + a^2) + G k^2}{2\,(P + Q)\,a + G s},$$

und daher die Schwingungszeit der Wage:

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,(P + Q)\,(l^2 + a^2) + G k^2}{g\,[2\,(P + Q)\,a + G s]}};$$

wofür man, wenn a sehr klein oder gar Null ist, setzen kann:

$$t = \pi \sqrt{\frac{2\,(P + Q)\,l^2 + G k^2}{g\,G\,s}}.$$

Man ersieht hieraus, daß die Schwingungsdauer wächst, je größer P, Q und l, je kleiner aber a und s ist. Bei gleichen Gewichten schwingt hiernach auch eine Wage um so langsamer, je empfindlicher sie ist. Es ist also das Abwägen an empfindlichen Wagen aufhaltiger als bei weniger scharfen Wagen. Aus diesem Grunde ist es denn auch nützlich, empfindliche Wagen mit Scalen (wie bei Z, Fig. 214) zu versehen. Um die Angaben dieser Scalen beurtheilen zu können, setzen wir in dem Nenner der Formel

$$tang.\,\varphi = \frac{Z l}{[2\,(P + Q) + Z]\,a + G s},\quad Z = 0,$$

und schreiben φ statt $tang.\,\varphi$, so daß wir

$$\varphi = \frac{Z l}{2\,(P + Q)\,a + G s}$$

erhalten. Führen wir dann statt Z, Z_1 und statt φ, φ_1 ein, so erhalten wir:

$$\varphi_1 = \frac{Z_1\,l}{2\,(P + Q)\,a + G s},$$

daher:

$$\varphi : \varphi_1 = Z : Z_1.$$

Bei kleinen Zulagen verhalten sich also die Ausschlagwinkel wie die Zulagen selbst. Es ist hiernach auch:

$$\varphi : \varphi_1 - \varphi = Z : Z_1 - Z;$$

und daher:

$$Z = \frac{\varphi}{\varphi_1 - \varphi}\,(Z_1 - Z).$$

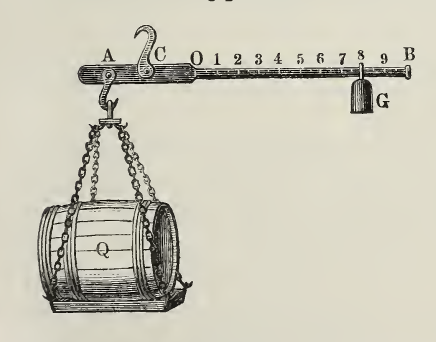
Man findet also die einem Ausschlage φ entsprechende Zulage, indem man zusieht, wie viel der Ausschlag vergrößert wird, wenn man die Zulage um ein bestimmtes Gewicht vergrößert, und nun diese Vergrößerung $(Z_1 - Z)$ durch das Verhältniß des ersten Ausschlages zur nachherigen Vergrößerung desselben multiplicirt.

Anmerkung. Die gleicharmigen Wagen kommen in sehr verschiedenen Größen und in sehr verschiedenen Graden der Güte vor. Die gewöhnlichste Wage ist die im Handel vorkommende Krämerwage, wie sie Fig. 211 vor Augen

führt; am feinsten sind aber die Probir- und solche Wagen, welche zu physikalischen und chemischen Zwecken bestimmt sind, wie deren eine in Fig. 212 abgebildet ist. An ihnen wiegt man höchstens 1 Pfund schwere Gegenstände ab, und sie geben gleichwohl noch $1/_{50}$ Gran oder $1/_{3000}$ Quentchen, also $1/_{384000}$ von einem Pfunde oder von dem größten Gewichte an. Die feinsten Wagen zeigen sogar noch den milliontesten Theil der Last an, doch wiegt man damit nur höchstens wenige Lothe schwere Gegenstände ab. Wenn man den Wagbalken eine Eintheilung giebt, und an denselben ein feines Drahthäkchen hängt, so kann man durch Verschiebung desselben auch ohne ganz feine Gewichte die Schärfe in der Angabe einer guten Wage vergrößern. Uebrigens lassen sich auch große Wagen, womit man centnerschwere Gegenstände abwiegt, in sehr hohem Grade empfindlich construiren, namentlich wenn man dieselben leicht, ihre Balken aus Holz u. s. w. verfertigt. S. Lardner's und Kater's Lehrbuch der Mechanik.

Ungleicharmige Wagen. Der ungleicharmigen Gewichtswagen (Schnellwagen) giebt es dreierlei, nämlich die Schnellwage mit Laufgewicht, die Schnellwage mit verjüngtem Gewichte und die Schnellwage mit festem Gewichte. Die Schnellwage mit Laufgewicht (franz. balance romaine; engl. steel-yard), Fig. 217, ist ein un- §. 116

Fig. 217.



gleicharmiger Hebel AB, an dessen kürzerem Arme CA eine Schale und an dessen längerem eingetheilten Arme CB ein verschiebbares Gewicht (Laufgewicht) hängt, welches mit dem in der Schale liegenden Körper Q ins Gleichgewicht gesetzt wird. Ist l_0 der Hebelarm CO des Laufgewichtes G, wenn dasselbe die leere Wage zum Einspielen bringt, so hat man das statische Moment, mit welchem die leere Wagschale niederzieht:

$$X_0 = G l_0.$$

Ist dagegen l_n der Hebelarm CG, wenn das Laufgewicht G der belasteten Wage das Gleichgewicht hält, so hat man für deren statisches Moment:

$$X_n = G l_n;$$

und es folgt daher durch Subtraction, das Moment der aufgelegten Last Q:

$$X_n - X_0 = G(l_n - l_0) = G \cdot \overline{OG}.$$

Bezeichnet nun noch a den Hebelarm CA der Last und x die Entfernung OG des Laufgewichtes von dem Punkte O, wo dasselbe die leere Wage zum Einspielen bringt, so hat man:

$$Q \cdot a = G \cdot x,$$

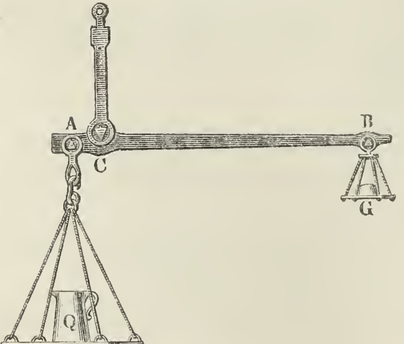
daher die Last selbst:

$$Q = \frac{G}{a} \cdot x.$$

Es ist also die Last oder das Gewicht Q der aufgelegten Waare der Entfernung x oder dem Wege des Laufgewichtes vom Punkte O aus, proportional. Dem doppelten x entspricht ein doppeltes Q, dem dreifachen x ein dreifaches Q u. s. w.; es ist daher die Scala OB eine gleichtheilige und ihr Anfang im Punkte O. Die Einheit der nöthigen Eintheilung ergiebt sich, wenn man zusieht, welches Gewicht Q_n aufzulegen ist, um dem am Ende B niederziehenden Laufgewichte G das Gleichgewicht zu halten; es ist dann Q_n die Anzahl der Theile und daher $\frac{OB}{Q_n}$ die Einheit der Eintheilung oder Scala OB. Ist z. B. das Laufgewicht auf B, wenn die Last $Q = 100$ Pfund beträgt, so hat man OB in 100 gleiche Theile zu theilen, und daher die Einheit der Scala $= \frac{OB}{100}$. Hat man bei einer anderen Last Q das Gewicht auf $x = 80$ stellen müssen, um die Wage zum Einspielen zu bringen, so ist auch $Q = 80$ Pfund; steht ebenso das Laufgewicht auf 53, so ist die Last Q, 53 Pfund schwer u. s. w.

Bei der Schnellwage mit verjüngtem Gewichte, Fig. 218, hängt die Last an einem kurzen Arme $CA = a$, und das Gewicht an einem langen Arme $CB = b$. Das Verhältniß $\frac{CB}{CA} = \frac{b}{a}$ der Armlängen ist gewöhnlich ein sehr einfaches, z. B. $^{10}/_{1}$, in welchem Falle die Wage eine Decimalwage heißt. Hat man die leere Wage durch ein besonderes, übrigens nicht in Betracht zu ziehendes Gewicht (Tarirgewicht) zum Einspielen gebracht, so ist für das Gewicht Q des aufgelegten Gegenstandes:

Fig. 218.



$$Qa = Gb,$$

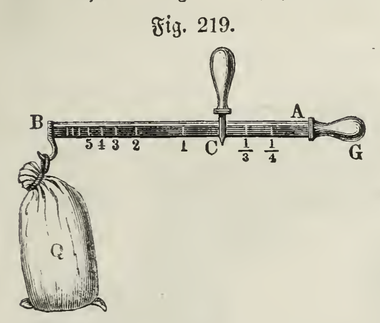
daher:

$$Q = \frac{b}{a}\, G.$$

Es wird also das Gewicht der Waare gefunden, wenn man das verjüngte Gewicht mit einer unveränderlichen Zahl, z. B. bei der Decimalwage, mit 10, multiplicirt, oder das letztere $\frac{b}{a}$mal, z. B. zehnmal so schwer setzt, als es wirklich ist.

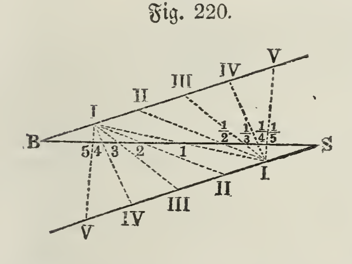
Die Schnellwage mit festem Gewichte, dänische Wage, Fig. 219, hat eine veränderliche Drehaxe C, welche mit einer Handhabe festgehalten wird, während man den Wagebalken über sie wegschiebt und das Gleichgewicht zwischen der angehängten Last Q und dem festen Knopfe G am anderen Ende herzustellen sucht. Ihre Eintheilung ist eine ungleichtheilige, wie in der Anmerkung gezeigt wird.

Fig. 219.



Anmerkung. Um die Eintheilung der Dänischen Wage, Fig. 220, zu finden, ziehe man durch den Schwerpunkt S und durch den Aufhängepunkt B derselben zwei Parallellinien, trage auf diese, von S und B aus, gleiche Theile auf, und ziehe von dem ersten Theilpunkte (I) der einen Parallellinie aus nach den Theilpunkten I, II, III u. s. w. der anderen Parallellinien gerade Linien; diese Verbindungslinien schneiden die Axenlinie BS des Wagebalkens in den gesuchten Theilpunkten. Der Theilpunkt (1) in der Linie I÷I liegt in der Mitte zwischen B und S, bei Unterstützung desselben ist daher im Gleichgewichtszustande das Gewicht Q der Waare dem Gewichte G der ganzen Wage gleich; der Theilpunkt (2) in der Linie I÷II steht von S noch einmal so weit ab als von B; bei Unterstützung desselben ist daher im Zustande des Gleichgewichtes, $Q = 2\,G$, ebenso der Theilpunkt (3) in der Linie I÷III steht von S dreimal so viel ab als von B; es ist daher derselbe zu unterstützen, wenn $Q = 3\,G$ beträgt u. s. w. Ebenso läßt sich leicht einsehen, daß bei Unterstützung der Theilpunkte $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ u. s. w. im Gleichgewichtszustande die Last Q, $\frac{1}{2}\,G$, $\frac{1}{3}\,G$ u. s. w. ist. Man ersieht hieraus, daß die Theilpunkte für größere Lasten näher und für kleinere weiter von einander abstehen, daß also auch diese Wage einen sehr veränderlichen Grad von Empfindlichkeit besitzt.

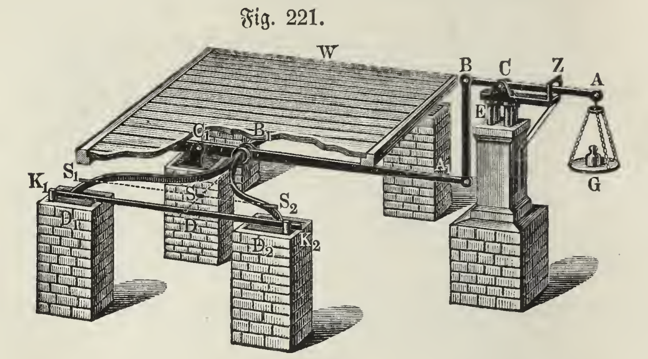
Fig. 220.



Brückenwagen. Zusammengesetzte Gewichtswagen bestehen aus zwei, drei oder noch mehr Hebeln oder Wagebalken. Es gehören hierher die Brücken-, Straßen- und Mauthwagen, die Tafelwagen u. s. w. Sie dienen meist zum Abwiegen größerer Körper und sind deshalb in der Regel verjüngte Wagen. Die Wagschale für die Last wird hier durch eine große Tafel (Brücke) ersetzt, und es ist dieselbe so zu unterstützen und mit den Hebeln zu verbinden, daß das Auf- und Abnehmen des abzuwiegenden Körpers die größte Bequemlichkeit gewährt, und die Angabe der Wage von der Stellung und dem Orte des Körpers auf der Brücke nicht abhängt. **§. 117**

Eine vorzügliche Brückenwage (franz. balance à bascule; engl. weigh-bridge) ist die in Fig. 221 abgebildete Wage von Schwilgue in Straß-

Fig. 221.



burg. Die Brückenwage besteht aus einem doppelarmigen Hebel ACB, aus einem einfachen einarmigen Hebel $A_1 B_1 C_1$ und aus zwei gabelförmigen einarmigen Hebeln $B_1 S_1 D S_2$ u. s. w. Die Drehaxen dieser Hebel sind C, C_1 und D_1, D_2. Die Brücke W ist nur zum Theil abgebildet, und von den beiden gabelförmigen Hebeln ist nur der eine sichtbar. Für gewöhnlich ruht die Brücke auf den vier Bolzen K_1, K_2 u. s. w., während des Abwiegens aber wird dieselbe durch die vier Schneiden S_1, S_2 u. s. w., welche auf den gabelförmigen Hebeln sitzen, unterstützt. Um dies zu können, ist das Gestell E der Wage AB beweglich und durch eine Kurbel mittels gezahnter Räder u. s. w. (hier nicht sichtbar) auf und nieder stellbar. Das Geschäft des Abwägens besteht in dem Auflegen der Last (Auffahren des Lastwagens), in dem Emporheben des Gestelles EC, in dem Auflegen von Gewichten in die Wagschale G und, nach bewirktem Einspielen der Wage, in dem Wiederniederlassen des Gestelles und der Brücke.

Gewöhnlich ist das Hebelarmverhältniß $\frac{CA}{CB} = 2$,

das Hebelarmverhältniß $\frac{C_1 A_1}{C_1 B_1}$ . . . . $= 5$,

und das Armverhältniß $\frac{DB_1}{DS}$ . . . . $= 10$;

ist demnach die leere Wage tarirt, so hat man die Kraft in B oder A_1:

$= 2$ mal Gewicht G in der Wagschale;

die Kraft in B_1:

$= 5$ mal Kraft in $A_1 = 2 . 5 = 10$ mal Gewicht G,

und endlich die Kraft in S:

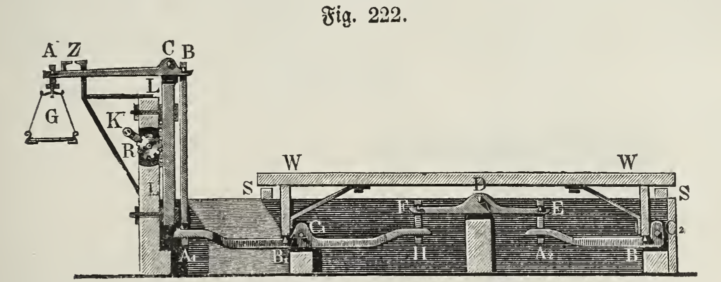
$= 10$ mal Kraft in $B_1 = 10 . 10 = 100$ mal Gewicht G;

es ist also beim Einspielen die aufgelegte Last 100 mal so groß als das

aufgelegte Gewicht G; und die Wage eine Centesimal- oder 100 fach verjüngende Wage.

Eine andere, von W Becker in Straßburg construirte Brückenwage ist in Fig. 222 abgebildet. Die Brücke W dieser Wage ruht mittels vier Säulen in B_1, B_2 u. s. w. auf den gabelförmigen einarmigen Hebeln $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, von denen der letztere durch einen gleicharmigen Hebel DEF mit einer Verlängerung $C_1 H$ des ersteren verbunden ist. Vor dem

Fig. 222.



Abwägen ruht die Brücke auf den Lagern S, S, wenn aber die Last aufliegt, wird das Gestelle LL der Wage AB, sowie auch das ganze Hebelsystem mittels einer Kurbel K, eines gezahnten Rades R u. s. w. emporgehoben, und nun so viel Gewicht G in die Wagschale gelegt, als zum Aequilibriren nöthig ist. Wo und wie auch die Last Q auf der Brücke W aufruhe, immer ist die Summe der Kräfte in B_1, B_2 u. s. w. der Last gleich. Nun ist aber das Verhältniß $\frac{C_2 A_2}{C_2 B_2}$ der Armlängen dem Verhältnisse $\frac{C_1 A_1}{C_1 B_1} = \frac{a_1}{b_1}$ gleich, auch die Armlänge $DE =$ der Armlänge DF, sowie $C_1 H = C_1 A_1$; es kommt daher auf Eins hinaus, ob ein Theil der Last Q von B_2 oder unmittelbar von B_1 aufgenommen werde, oder die Gleichgewichtsverhältnisse des Hebels $C_1 B_1 A_1$ sind dieselben, ob die ganze Last Q in B_1 unmittelbar, oder nur ein Theil in B_1, der andere Theil aber in B_2 aufruhe und erst mittels der Hebel $C_2 B_2 A_2$, EDF und $C_1 H$ auf $C_1 B_1 A_1$ wirke. Ist nun noch $\frac{a}{b}$ das Armverhältniß $\frac{CA}{CB}$ der oberen Wage ACB, so hat man die Kraft in der Zugstange BA_1:

$$Z = \frac{a}{b} \cdot G,$$

und daher die Größe der Belastung der vorher tarirten Brücke:

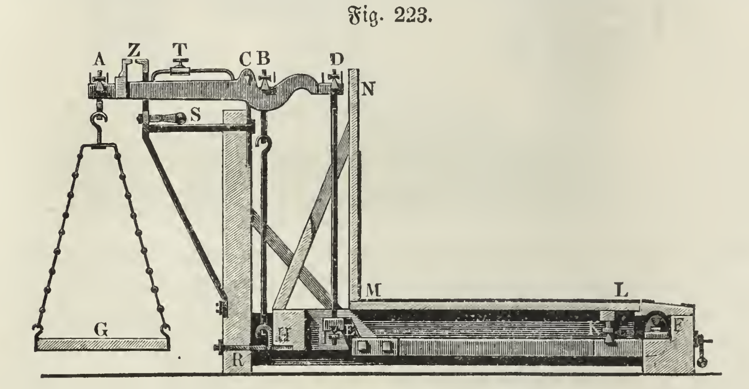
$$Q = \frac{a_1}{b_1} Z = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a}{b} G.$$

Gewöhnlich ist $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = {}^{10}/_1$, daher $Q = 100\, G$, und die Wage eine Centesimalwage.

Anmerkung. Die Straßen- oder Mauthwagen erfordern nur schmale Brücken, wenn man die Lastwagen erst mit den Vorder- und dann mit den Hinterrädern auffährt. Das Gewicht des ganzen Wagens ist hier die Summe der Abwägungsresultate, wie auch die Last auf die beiden Radaxen vertheilt sei.

§. 118 **Tragbare Brückenwagen.** In technischen Werkstätten, Fabriken und Manufacturen findet man die in sehr verschiedenen Größen ausgeführten tragbaren Brückenwagen von Quintenz angewendet. Eine solche, in Fig. 223 abgebildete Wage besteht aus drei Hebeln ACD, EF und HK. An dem ersten Hebel hängen die Wagschale G für die Bestimmungsgewichte

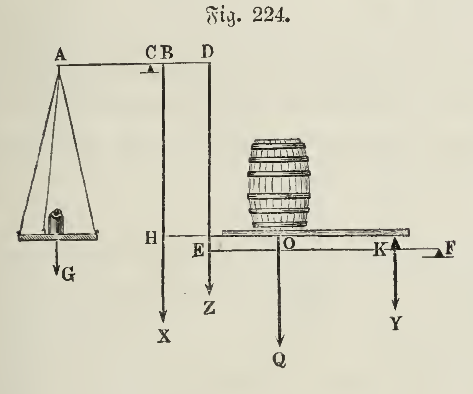
Fig. 223.



und noch zwei Stangen DE und BH herab; die Stange DE trägt den um den festen Punkt F drehbaren Hebel EKF, und die zweite Stange BH trägt den Hebel HK, dessen Drehungsaxe K auf dem Hebel EF aufsitzt. Um den beiden letzten Hebeln eine sichere Lage zu verschaffen, sind dieselben gabelförmig gestaltet, und die Drehaxen F und K derselben durch je zwei Schneiden gebildet. Auf dem Hebel HK sitzt die trapezoidale Brücke ML, welche zur Aufnahme der abzuwiegenden Last bestimmt und noch mit einer Rückwand MN versehen ist, um die verletzlichen Theile der Wage vor Beschädigung zu schützen. Vor und nach dem Abwägen ruht der durch einen Rahmen gebildete Hebel auf drei Stiften, wovon in der Durchschnittszeichnung nur der eine (R) sichtbar ist, der Wagebalken AD aber wird durch eine mit einer Handhabe ausgerüstete hebelförmige Arretirung S unterstützt. Hat man die Waare aufgelegt, so legt man die Arretirung nieder und setzt nun so viel Gewicht auf G, bis AD zum Einspielen kommt. Nach diesem wird die Arretirung wieder gehoben, so daß sich HK wieder auf die drei Bolzen aufsetzt, und die Last, ohne die Wage zu beschädigen, abgenommen werden kann. Den horizontalen Stand von AD erkennt man an dem Zeiger Z und die leere Wage tarirt man durch ein verschiebbares Gewicht T oder durch eine besondere Zulage bei G.

Wie bei allen Wagen, so ist es auch bei dieser Brückenwage nöthig, daß ihre Angabe nicht von der Lage und der Stellung des abzuwiegenden Körpers auf der Brücke abhänge; damit aber dieser Bedingung Genüge geleistet werde, ist es erforderlich, daß das Verhältniß $\frac{EF}{KF}$ der Arme des Hebels EKF, Fig. 224, gleich sei dem Hebelarmverhältniß $\frac{CD}{CB}$ des Wagebalkens AD.

Fig. 224.



Ein Theil X der Last Q auf der Brücke wird durch die Zugstange BH auf den Wagebalken AD übergetragen und wirkt an diesem mit dem statischen Momente $\overline{CB}.X$; ein anderer Theil Y hingegen geht bei K auf den Hebel EF über und wirkt in E mit der Kraft:

$$Z = \frac{KF}{EF} \cdot Y.$$

Nun geht wieder diese Kraft mittels der Stange DE in D auf den Wagebalken über; es wirkt daher der Theil Y mit dem statischen Momente:

$$CD \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y$$

und in B mit der Kraft:

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y$$

am Wagebalken AD. Damit das Gleichgewicht des Wagebalkens weder von X noch von Y allein, sondern nur von der Summe $Q = X + Y$ abhänge, ist nöthig, daß Y in demselben Punkte B genau so wirke, als wenn es unmittelbar von demselben aufgenommen würde, daß also

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} \cdot Y = Y, \text{ d. i.}$$

$$\frac{CD}{CB} \cdot \frac{KF}{EF} = 1,$$

also
$$\frac{CD}{CB} = \frac{EF}{KF} \text{ sei.}$$

Bezeichnen wir nun die Hebelarme CA und CB durch a und b, so haben wir wieder, wie bei der einfachen Wage,

$$G a = (X + Y) b = Q b,$$

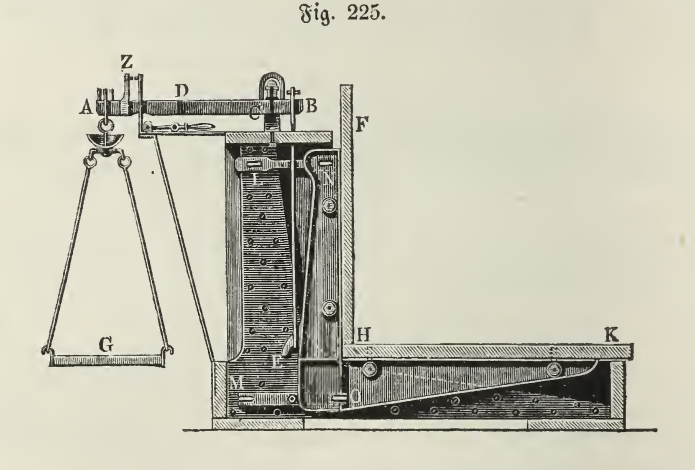
und daher das gesuchte Gewicht:

$$Q = \frac{a}{b} G,$$

z. B. $= 10\, G$, wenn die Armlänge CB in der Armlänge CA, 10 mal enthalten ist. Diese Wage prüft man, indem man zusieht, ob ein nach und nach in mehreren, und zumal in den Eckpunkten der Brücke aufgelegtes Gewicht Q stets einem $\frac{a}{b}$ (10) mal so kleinem Gewichte G in der Wagschale das Gleichgewicht hält.

§. 119 Eine andere eigenthümliche Brückenwage ist die (balance-bascule) von George in Paris, s. Bulletin de la Société d'Encouragement, Avril 1844, oder Dingler's Polyt. Journal, Bd. 93. Die wesentliche Einrichtung einer solchen Wage ist folgende. ACB, Fig. 225, ist eine Decimalwage mit der Wagschale G und dem Zeiger Z, welche rechts von D in zwei

Fig. 225.



Armen ausläuft, wovon jeder mittels einer Schneide C auf dem Gestelle aufruht und mittels einer anderen Schneide B eine Zugstange BE erfaßt, woran die Brücke FHK hängt. Damit sich die letztere nicht um den Aufhängepunkt E drehe und umschlage, ist das Wagegestelle mit zwei Paar horizontalen Schneiden L, M, sowie der Rahmen, welcher die Brücke trägt, mit zwei Paar Schneiden wie N, O ausgerüstet, und sind je zwei dieser Schneiden durch Querstangen LN, MO dergestalt mit einander verbunden, daß die Componenten der aus der excentrischen Belastung der Brücke hervorgegangenen Kräftepaare von N auf L durch Zug und von O auf M durch Druck übergetragen werden.

Denkt man sich im Aufhängepunkte E der Brücke HK, Fig. 226, zwei gleiche Verticalkräfte $+ Q$, $- Q$ angebracht, so bildet die eine ($- Q$) mit der Belastung Q der Brücke ein Kräftepaar, welches von dem Gestelle mittels der Querstangen aufgenommen wird, während die andere Kraft ($+ Q$) mittels der Zugstange BE auf den Wagebalken ACB wirkt. Ist d der Abstand ES des Aufhängepunktes E von der Last Q und e der Abstand NO der Schneiden N und O oder L und M von einander, so hat man der Theorie der Kräftepaare zufolge (s. Bd. I, §. 93) für die Kräfte $+ P$, $- P$, mit welchen die Brücke auf die festen Schneiden L, M wirkt,

Fig. 226.

$$Pe = Qd,$$

und daher:

$$P = \frac{d}{e} Q.$$

Sind ferner a und b die Hebelarme CA und CB des Wagebalkens, und ist G das aufgelegte Gewicht, so hat man für den Gleichgewichtszustand der übrigens tarirten Wage:

$$Ga = Qb,$$

und daher:

$$G = \frac{b}{a} Q.$$

Es hängt also nur die Horizontalkraft $\pm P$, nicht aber das aufgelegte Gewicht G von der Entfernung e oder von der Lage der Last Q auf der Brücke ab.

Schiffswage. Zu den einfacheren Wagen mit verjüngten Gewichten §. 120
gehört die sogenannte schwedische Schiffswage. Dieselbe besteht in der Hauptsache aus zwei übereinander hängenden ungleicharmigen Wagebalken, welche so mit einander verbunden sind, daß die Kraft des unteren Balkens als Last des oberen wirkt. Sind folglich bei beiden Balken die Lastarme 10 mal in den Kraftarmen enthalten, so giebt die Kraft oder das Gewicht G in der Wagschale des langen Armes des oberen Balkens die Last Q in der Wagschale des kürzeren Armes vom unteren Balken hundertfach verkleinert an.

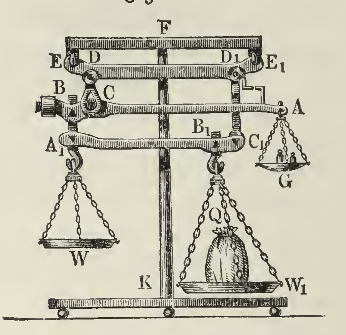
Nach demselben Principe ist auch die Decimal- und Centesimalwage von Joseph Beranger (s. Polyt. Centralblatt, 1850) construirt. Es besteht

dieselbe ebenfalls aus zwei Balken ACB und $A_1 C_1 B_1$, Fig. 227, mit den Armverhältnissen:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{C_1 A_1}{C_1 B_1} = 10.$$

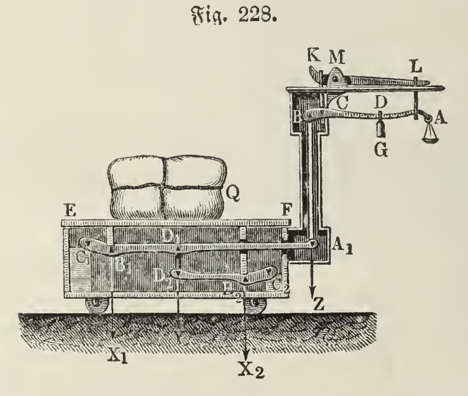
Die Scheeren CD, $C_1 D_1$ derselben sind mit einem dritten Balken DD_1 verbunden, welcher mittels zwei Oesen E und E_1 an das Gestelle FK angehangen wird. Während der obere Wagebalken nur die kleine, zur Aufnahme der Gewichte dienende Wagschale G trägt, sind an den unteren Wagebalken zwei Wagschalen W und W_1 zur Aufnahme der Last oder des abzuwiegenden Körpers angebracht. Je nachdem man nun diese Last Q in die eine oder in die andere Wagschale legt und mit G ins Gleichgewicht setzt, giebt dieses Gewicht die Größe von Q zehn- oder hundertfach an.

Fig. 227.



§. 121 **Tafelwage.** Eine englische auf Rädern ruhende Brücken- oder Tafelwage ist der Hauptsache nach in Fig. 228 abgebildet. Die Brücke oder Tafel EF zur Aufnahme der Last Q bildet hier den Deckel eines Kastens, worin der Hebelmechanismus der Wage eingeschlossen ist und ruht mittels vier Füßen auf den Schneiden B_1, B_2 u. s. w. der um C_1 und C_2 drehbaren Hebel oder Wagebalken $C_1B_1D_1$ und $C_2B_2D_2$, welche unter sich durch eine Hängestange $D_1 D_2$ und mit dem Wagebalken ABC durch eine andere Stange BA_1 verbunden sind.

Fig. 228.



Die Scheere CK des letzteren Wagebalkens hängt an einem um M drehbaren Hebel KL, dessen Ende L niedergedrückt wird, um C und hiermit auch EF zu heben und die Wage ins Spiel zu setzen.

Ist derjenige Theil, welchen die Doppelschneide B_1 trägt, $= X_1$, ferner derjenige Theil, welchen die Doppelschneide B_2 aufnimmt, $= X_2$, und sind

die Hebelarme $C_1 A_1 = a_1$, $C_1 B_1 = C_2 B_2 = b_1$ und $C_1 D_1 = C_2 D_2 = d_1$, so hat man die Zugkraft in $D_1 D_2$:

$$Y = \frac{b_1 X_2}{d_1}$$

und die in $B A_1$:

$$Z = \frac{b_1 X_1}{a_1} + \frac{d_1 Y}{a_1} = \frac{b_1 X_1 + b_1 X_2}{a_1} = \frac{b_1 (X_1 + X_2)}{a_1} = \frac{b_1 Q}{a_1}.$$

Bezeichnet endlich a den veränderlichen Arm CD des Laufgewichtes G, und b den Arm CB der Zugkraft Z, so hat man, unter der Voraussetzung, daß die leere Wage durch ein besonderes Gewicht tarirt ist:

$$G a = Z b = \frac{b_1 b Q}{a_1},$$

und daher die Last:

$$Q = \frac{a a_1}{b b_1} G.$$

Die Einrichtung einer Tafelwage nach Kuppler ist aus Fig. 229 zu ersehen. Die Last Q wird hier auf eine Tafel HK und das Gewicht G auf eine Tafel LM gelegt; während die erstere vorzüglich von den Hebeln ACB und $A_1 C_1 B_1$ unterstützt wird, ruht die letztere zunächst auf den Hebeln DEF und $D_1 E_1 F_1$, welche durch die Zugstangen AE und $A_1 E_1$ mit den ersteren Hebeln verbunden sind. Bezeichnet man die Arme $CA = C_1 A_1$ durch a, die Arme $CB = C_1 B_1$ durch b, ferner die Arme $DF = D_1 F_1$ durch a_1 sowie die Arme $DE = D_1 E_1$ durch b_1, und setzt man die aus Q hervorgehenden Drücke auf B und B_1, $= X$ und X_1, so hat man die hieraus resultirenden Kräfte in den Zugstangen AE und $A_1 E_1$:

Fig. 229.

$$Y = \frac{b}{a} X \quad \text{und} \quad Y_1 = \frac{b}{a} X_1,$$

und die das Gewicht G aufnehmenden Kräfte in den Füßen FM und $F_1 L$ der Tafel LM:

$$Z = \frac{b_1}{a_1}\, Y = \frac{b\, b_1}{a\, a_1}\, X \text{ und } Z_1 = \frac{b_1}{a_1}\, Y_1 = \frac{b\, b_1}{a\, a_1}\, X_1,$$

so daß nun

$$G = Z + Z_1 = \frac{b\, b_1}{a\, a_1}\, (X + X_1) = \frac{b\, b_1}{a\, a_1}\, Q,$$

sowie umgekehrt

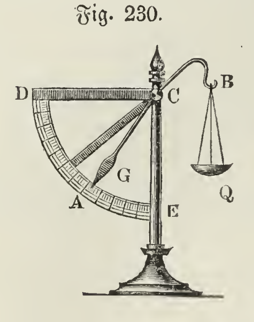
$$Q = \frac{a\, a_1}{b\, b_1}\, G,$$

z. B. für $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b} = 10,\quad Q = 100\, G$ folgt.

Anmerkung. Ueber die Brückenwagen wird ausführlich gehandelt in Hülse's Allgemeiner Maschinenencyclopädie, Bd. II, Art. Brückenwagen; nächstdem auch in Gerstner's Mechanik, Bd. I. Ueber Hofmann's Tafelwagen, welche ebenfalls hierher zu zählen sind, ist in Poggendorff's Annalen 1845 und in Dingler's Polyt. Journal, Bd. 97, nachzusehen. Es gehören hierher auch die Wagen von Kuppler und Baumann, welche im Baierischen Kunst- und Gewerbeblatt, Jahrgang 1845 und dem oben citirten Artikel in der Allgemeinen Maschinenencyclopädie abgehandelt werden. S. auch die Beschreibung der Brückenwage zum Wägen belasteter Wagen von Däntzer und Schmidt in Bd. 27 (1861) des polytechnischen Centralblattes. Eine ausführliche Abhandlung über die Wagen von Burg enthält auch Prechtl's Technologische Encyclopädie Bd. 20. Nächstdem ist Rühlmann's allgemeine Maschinenlehre Bd. I, 1862 zu empfehlen. Eine Brückenwage eigenthümlicher Construction, von Herrn Prof. Schönemann, wird in einer besonderen Monographie, Wien 1855, beschrieben.

§. 122 **Zeigerwage.** Die Zeigerwage (franz. peson ordinaire; engl. bent-lever balance) ist ein ungleicharmiger Hebel ACB, Fig. 230, welcher das Gewicht Q der angehängten Waare mittels eines über einer festen Scala DE weggehenden Zeigers CA angiebt, indem sich das an dem Zeiger befestigte Gewicht G mit Q ins Gleichgewicht setzt. Um die Theorie dieser Wage zu entwickeln, denken wir uns zunächst den einfachen Fall, daß die Zungenaxe CD durch den Aufhängepunkt B der Wagschale, Fig. 231, gehe. Ist die leere Wage im Gleichgewicht, also ihr Schwerpunkt S_0 senkrecht unter der Drehaxe C, so stehe der Zeiger in CD_0, und es befinde sich der Aufhängepunkt der Last in B_0. Legt man aber eine Last Q zu, so komme B_0 nach B, D_0 nach D und S_0 nach S, es erhalte also die Last Q den Hebelarm CK und das Gewicht G der leeren Wage den Hebelarm CH. Es ist für den neuen Gleichgewichtszustand:

Fig. 230.



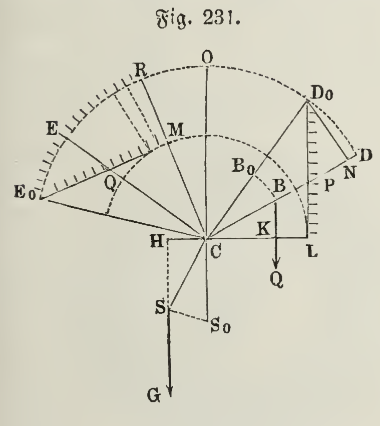
$$Q\,.\,\overline{CK} = G\,.\,\overline{CH}.$$

Fällt man $D_0 N$ winkelrecht gegen CD, so erhält man in $CD_0 N$ und SCH zwei ähnliche Dreiecke, weshalb sich

$$\frac{CH}{CS} = \frac{D_0 N}{CD_0}$$

setzen läßt; da nun auch noch die Dreiecke $D_0 PN$ und CBK einander ähnlich sind, so hat man auch:

Fig. 231.



$$\frac{CK}{CB} = \frac{D_0 N}{D_0 P},$$

und daher:

$$Q \cdot \frac{CB \,.\, D_0 N}{D_0 P} = G \cdot \frac{CS \,.\, D_0 N}{CD_0},$$

d. i.:

$$Q = \frac{CS}{CB} \cdot \frac{D_0 P}{CD_0} G;$$

oder, wenn man $CS = a$, $CB = b$, $CD_0 = CD = d$ und $D_0 P = x$ setzt:

$$Q = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{d} G.$$

Es wächst also Q mit dem Abschnitte $\overline{D_0 P} = x$ der Zunge auf der Verticalen $D_0 L$, und es läßt sich daher $D_0 L$ als eine gleichtheilige Scala gebrauchen. Hat man durch Auflegen einer bekannten Last den entsprechenden Theilpunkt P auf dieser Scala gefunden, so erhält man folglich andere Theilpunkte, wenn man den Raum $D_0 P$ in gleiche Theile theilt.

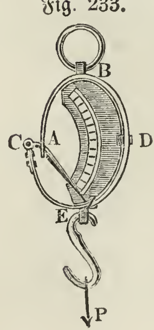
Geht die Zeigerlinie CD_0 nicht über den Aufhängepunkt B weg, sondern hat sie eine andere Richtung CE_0, so findet man die entsprechende gleichtheilige Scala $E_0 M$, wenn man das rechtwinkelige Dreieck $CD_0 L$ als $CE_0 M$ über CE_0 legt. Um endlich eine anders gerichtete oder kreisförmige Scala $E_0 R$ zu erhalten, zieht man aus dem Drehpunkt C gerade Linien durch die Theilpunkte der $E_0 M$ bis zum Kreise, welchen die Zeigerspitze durchläuft.

Anmerkung. Es giebt noch andere Zeigerwagen, z. B. die Zeigerwage von Du Mont, die Zeigerwage von Braby u. s. w.; auch gehört hierher Weber's Kettenwage, sowie Steinhiel's Brückenwage mit Zeiger, welche nicht mittels Schneiden unterstützt, sondern an Fäden oder Bändern aufgehangen ist. Bei diesen Wagen bildet die Scala mit dem Gewichte ein Ganzes, und es dient ein die Wagschale tragendes Loth als Zeiger. Die Zeigerwagen kommen im praktischen Leben als Garn-, Sortir-, Papier-, Briefwagen u. s. w. vor. Siehe den Artikel „Wage" im Band 20 von Prechtl's Technologische Encyclopädie, sowie im Band 10 von Gehler's Physikalischem Wörterbuche.

§. 123 **Federwage.** Federwagen oder Federdynamometer (franz. pesons à ressort; engl. spring-balances, spring-yards) bestehen aus gehärteten Stahlfedern, auf welche die zu messenden Gewichte oder Kräfte wirken, und aus Zeigern, welche auf Scalen hinlaufen, wo sie die von den Kräften hervorgebrachten Formveränderungen anzeigen und dadurch die Größe der Kräfte mittelbar angeben. Diese Stahlfedern müssen vollkommen elastisch sein, d. h. sie müssen nach Wegnahme der Kraft ihre erste Gestalt wieder vollkommen herstellen. Aus diesem Grunde darf man die Federwage auch nur bis zu einem gewissen, ihrer Stärke entsprechenden, Grade belasten; geht man damit über die Elasticitätsgrenze hinaus, so verlieren sie ihre vollkommene Elasticität und werden dadurch ganz unbrauchbar. Die zu diesen Wagen verwendeten Federn sind von sehr verschiedenen Formen. Zuweilen sind diese schraubenförmig gewunden, und in einem cylindrischen Gehäuse eingeschlossen, so daß sie durch ihre Verlängerung oder Verkürzung in der Axenrichtung dieses Cylinders die Größe der in eben dieser Richtung wirkenden Kraft anzeigen. Eine solche Federwage, wie sie in Frankreich gebraucht wird, ist in Fig. 232 abgebildet. Das eingetheilte Stäbchen AB endigt sich oben in einem Ringe C zum Aufhängen und unten in einem Kolben B, und ist mit einer, in der Figur durchschnitten dargestellten, Spiralfeder umgeben, welche nebst dem Kolben B von dem cylindrischen Gehäuse DE umgeben wird. Das letztere hat oben eine rectanguläre Oeffnung für das eingetheilte Stäbchen und trägt unten einen Haken H, woran der abzuwiegende Körper gehangen wird. Da hier das Gewicht des in H hängenden Körpers mittels der Spiralfeder auf den festen Kolben B des Stäbchens AB wirkt, so wird sich natürlich diese Feder um so mehr zusammendrücken, folglich das Gehäuse DE um so tiefer herabsinken und ein um so größerer Theil AD der Scala sichtbar werden, je größer dieses Gewicht ist.

Fig. 232.

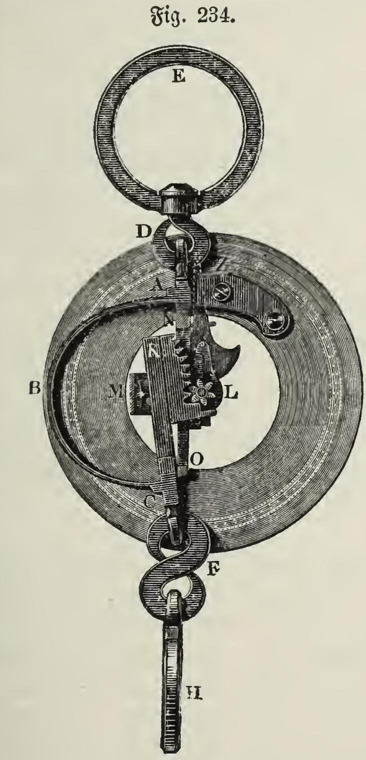
Fig. 233.



Bei anderen Federwagen bildet die Stahlfeder einen offenen Ring $ABDEC$, Fig. 233, und es ist der Zeiger CZ durch ein Scharnier mit einem Ende C derselben verbunden sowie durch das ringförmige Ende A gesteckt. Wird der bei B sitzende Ring festgehalten, während eine Kraft P an dem Haken EP zieht, so gehen die Enden A und C in der Richtung der Kraft aus einander und

es steigt der Zeiger CZ bis zu einer gewissen Stelle an der bei D auf der Feder befestigten Scala in die Höhe. Hat man vorher durch bekannte angehängte Gewichte die Eintheilung der Scala bestimmt, so läßt sich nun an dieser Scala die Größe der unbekannten und auf die Wage wirkenden Kraft P bestimmen.

Fig. 234.



In Fig. 234 ist die hintere Ansicht einer französischen Federwage derselben Art abgebildet. Die Feder ABC ist hier bei A auf der hinteren Seite eines kreisrunden Ziffernblattes befestigt, sowie mit einem Haken D und Ringe E zum Aufhängen verbunden, und trägt mit dem freien Ende C eine Hakenverbindung FH, an welche die abzuwiegende Waare gehangen wird. Auch ist an diesem Federende C ein gezahnter Arm CK angeschlossen, welcher mit seinen Zähnen in ein Zahnrädchen L eingreift, auf dessen Axe der (in der Figur nur zum Theil sichtbare) Zeiger Z sitzt. Dieser gezahnte Arm läßt sich in der Führung MNO verschieben, welche mit A und dem Zifferblatte fest verbunden ist, und auch die Axenlager des Weisers und Zahnrades L trägt. Es ist leicht einzusehen, wie durch die in H angreifende Last der Arm CK abwärts gezogen und dadurch das Zahnrädchen sammt dem Zeiger LZ in Bewegung gesetzt wird, so daß der letztere durch seinen Stand auf dem Zifferblatte die Größe der Last angeben kann.

Fig. 235.

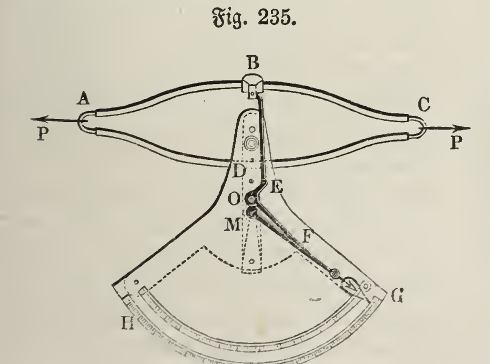
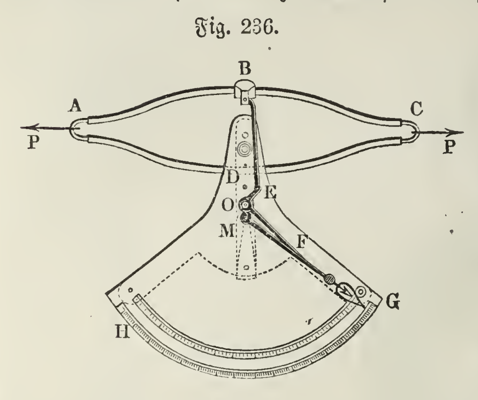


Fig. 235 zeigt einen Kraftmesser oder Dynamometer von Regnier; $ABCD$ ist

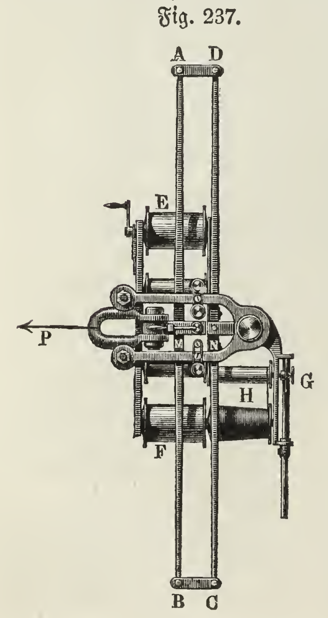
die einen geschlossenen Ring bildende Stahlfeder, die entweder durch Kräfte in *A* und *C* ausgezogen oder durch Kräfte in *B* und *D* zusammengedrückt wird; *DEGH* ist ein mit zwei Kreisscalen versehener und bei *DE* mit der Feder fest verbundener Sector, ferner *MG* ein um *M* drehbarer und auf den Scalen hinlaufender Doppelzeiger, und *EOF* ist ein Winkelhebel, welcher bei Einwirkung der Kräfte und Sichnähern der Punkte *B* und *D* durch eine Stange *BE* um *O* gedreht wird, und den Zeiger *MG* mit Hülfe des Armes *OF* in Bewegung setzt. Damit der Zeiger nach Einwirkung der Kraft seinen Stand behält und dieser bequem abgelesen werden kann, wird der Zeiger auf seiner unteren Seite mit einem sich auf der Zeigerebene reibenden Tuchläppchen versehen.

Fig. 236.



§. 124 **Federdynamometer.** Die vollkommensten und für maschinelle Zwecke brauchbarsten Federdynamometer hat der General Morin bei seinen Versuchen über die Reibung u. s. w. angewendet, und in der besonderen Abhandlung (Description des appareils chronométriques à style et des appareils dynamométriques. Metz 1838) beschrieben. Diese Dynamometer sind aus zwei gleichen Stahlfedern *AB* und *CD*, Fig. 237, von $^1/_4$ bis $^1/_2$ Meter Länge zusammengesetzt, und geben die Größe der in der Mitte *M* der einen Feder angreifenden Kraft *P* durch die bewirkte Vergrößerung der Entfernung *MN* zwischen beiden Federmitten an. Um nun die Größe einer Kraft, z. B. die Zugkraft der Pferde vor einem Wagen, zu finden, wird die Feder *CD* in der Mitte *N* durch einen Bolzen mit dem Wagen fest verbunden, und die Zugkette der Pferde in *M* angeschlossen, und es läßt sich durch einen Zeiger in *M*

Fig. 237.



und an einer mit N verbundenen Scala der die Kraft P messende relative Weg von M beobachten. Sind die Federn parallelepipedisch geformt und von der Länge l, Breite b und Dicke h, so hat man nach Band I, §. 217 die der Kraft P entsprechende Bogenhöhe:

$$a = \frac{1}{48} \cdot \frac{P l^3}{W E} = \frac{1}{4} \cdot \frac{P l^3}{E b h^3};$$

es wächst folglich die Bogenhöhe wie die Kraft und es läßt sich also bei diesem Dynamometer eine gleichtheilige Scala anwenden. Da hier die Ausbiegung s von zwei Federn angegeben wird, so hat man dieselbe doppelt so groß als die einfache Bogenhöhe, d. i.:

$$s = \frac{1}{2} \frac{P l^3}{E b h^3}.$$

Um Material zu ersparen, giebt man lieber diesen Federn die bekannte parabolische Form eines Körpers von gleichem Widerstande, wobei sie zwar eine constante Breite, dagegen eine nach den Enden zu allmälig abnehmende Dicke erhalten (s. Bd. I, §. 253 bis §. 256), und die Durchbiegung doppelt so groß ausfällt, als bei einem Körper von constanter Dicke h. Es ist also für solche parabolische Doppelfedern:

$$s = \frac{P l^3}{E b h^3} = \frac{1}{E b} \left(\frac{l}{h}\right)^3 . P = \nu P,$$

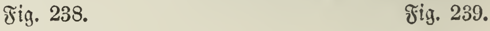
wenn ν eine Erfahrungszahl bezeichnet.

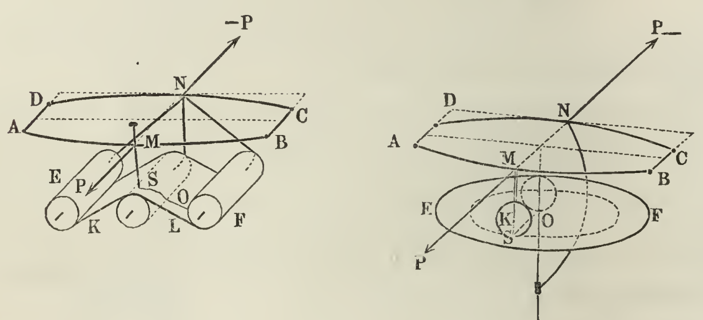
Wenn man vor der Anwendung eines solchen Instrumentes ein bekanntes Gewicht angehängt und die bewirkte Ausbiegung s beobachtet hat, so läßt sich das Verhältniß ν zwischen Ausbiegung und Kraft berechnen, und dieselbe zur Anfertigung der Scala benutzen. Bei Anwendung des besten Stahles hat sich gezeigt, daß die Bogenhöhe bis $\frac{1}{10}$ der Länge ausfallen kann, ehe das Verhältniß zwischen Kraft und Weg ein anderes und die Elasticitätsgrenze überschritten wird.

Zeichnen- und Zählapparate. In der Regel wirken die Kräfte §. 125
nicht immer gleich stark, sondern sie sind steten Schwankungen ausgesetzt, es kann daher meist nur die Frage nach dem mittleren Werthe einer veränderlichen Kraft beantwortet werden. Nun geben aber die gewöhnlichen Zeigerapparate einer Federwage nur die Kraft für einen Augenblick, oder nur den Maximalwerth derselben an; es lassen daher die gewöhnlichen Dynamometer bei größerer Veränderlichkeit der Kräfte, wie z. B. bei Bewegung von Fuhrwerken, noch eine große Unsicherheit zurück. Aus diesem Grunde ist die Anwendung der zuerst von Poncelet vorgeschlagenen und von Morin zur Anwendung gebrachten Totalisirungsapparate von Nutzen. Beide Apparate geben das Product aus Kraft und Weg oder die Arbeit derselben an,

und es läßt sich nun der mittlere Werth der Kraft finden, wenn man die Arbeit durch den Weg der Kraft, z. B. durch den zurückgelegten Weg des Wagens, dividirt.

Bei dem Zeichnenapparate (Dynamomètre à style et à bande de papier) wird das Maß der Kraftleistung von einem durch M gesteckten Stifte MS, Fig. 238, auf einem sich unter ihm wegziehenden Papierstreifen KL aufgezeichnet. Dieser Papierstreifen wird von der Rolle E auf die Rolle F aufgewickelt, die durch die Maschine selbst mittels Schnur ohne Ende und Räder, wie G, H u. s. w., Fig. 237, ihre Bewegung erhält. Ohne Spannung der Federn, und also auch ohne Kraft, würde während der Bewegung der Maschine eine gerade Linie auf dem sich unter dem Zeichnenstifte hinziehenden Papierstreifen entstehen; da aber bei der Bewegung der Maschine die Federn durch die Kraft P gespannt sind, so bildet sich auf dem Papierstreifen in einiger Entfernung von jener Linie eine im Ganzen mit ihr parallellaufende Curve OS ab. Der Flächenraum zwischen diesen beiden Linien ist das Maß von der Arbeit der Kraft, da er zur Basis eine dem Wege der Kraft proportionale Linie und zur Höhe die der Kraft selbst proportionale, übrigens aber mit ihr veränderliche Größe der Ausbiegung der Feder hat.


Fig. 238. Fig. 239.



Der Zählapparat (Dynamomètre à compteur) besteht in der Hauptsache 1) aus einem horizontalen Teller EF, Fig. 239, welcher mit der Mitte N der hinteren Feder CD in fester Verbindung steht und durch die Maschine, an welcher die zu ermittelnde Kraft wirkt, in Umdrehung gesetzt wird, und 2) aus einem verticalen Rädchen KS, welches mit der Mitte M der vorderen Feder AB fest verbunden ist und sanft auf den Teller EF aufdrückt, so daß es in Folge der Reibung von letzteren um seine Axe K umgedreht wird. Macht der Teller pr. Minute u Umdrehungen und ist die Entfernung OS des Berührungspunktes S zwischen dem Rädchen und dem Teller von der Umdrehungsaxe O des letzteren, $= z$, so läßt sich die Geschwindigkeit des Punktes S

$$v = \frac{2\pi z u}{60} = \frac{\pi u z}{30}$$

setzen.

Macht dagegen das Rädchen pr. Minute u_1 Umdrehungen und ist der Halbmesser KS desselben $= r$, so hat man seine Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\pi u_1 r}{30},$$

so daß nun folgt:

$$u_1 r = u z,$$

oder:

$$u_1 = \frac{u z}{r}$$

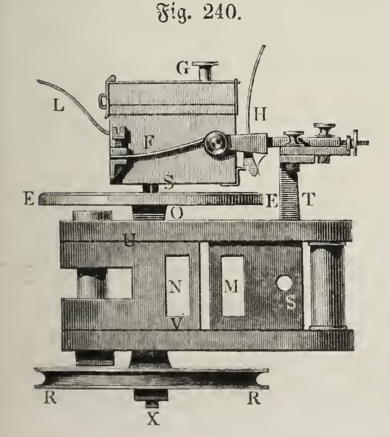
Steht das Rädchen im Mittelpunkte O des Tellers, wenn die Feder noch gar nicht gespannt ist, so rückt es durch die Einwirkung einer Zugkraft P um einen Weg $OS = z$ fort, welcher dieser Kraft P proportional ist, und da nun die Umdrehungszahl u des Tellers durch den Weg der Maschine oder die Kraft P gemessen wird, so folgt, daß die Umdrehungszahl u_1 des Rädchens mit dem Producte aus Kraft P und Weg s gleichmäßig wächst, daß sie daher auch das Maß der Arbeit L der Kraft ist.

Setzt man $z = \alpha P$ und $u = \beta s$, so hat man folglich:

$$L = \frac{\alpha \beta P s}{r} = \mu P s,$$

wenn man noch $\frac{\alpha\beta}{r}$ durch den constanten Coefficienten μ ausdrückt. Die speciellere Einrichtung des Zählapparates ist aus Fig. 240 zu ersehen. EE ist wieder der mittels eines Seilrades RR u. s. w. um die Axe OX umzudrehende Teller und S der sichtbare Theil des Laufrädchens. Der übrige Theil desselben ist in dem Gehäuse FG eingeschlossen, welches zugleich das Uhr- oder Räderwerk enthält, wodurch zwei eingetheilte Scheiben in Umdrehung gesetzt werden, welche die Anzahl der Umdrehungen des Laufrädchens angeben. Ein Paar Federn (F) drückt das Gehäuse sammt Laufrädchen S während der Beobachtung sanft auf den Teller auf, wogegen es mittels der Haken L und H vom Teller abgehoben und über demselben aufgehangen werden kann. Um den Beginn und das

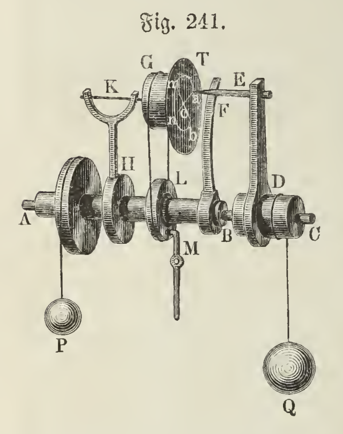
Fig. 240.



Ende der Beobachtung am Zählapparate zu markiren, wird auf einen Knopf G gedrückt, welcher mittels eines einfachen Mechanismus auf jedes der beiden eingetheilten Räder einen Punkt mit Tusche angiebt. Die hintere Hauptfeder des Dynamometers ergreift das mit der Maschine fest verbundene und die Axe des Tellers tragende Gestell UV im Punkte N, wogegen die vordere Hauptfeder in M auf den verschiebbaren Support MST des Zählapparates wirkt.

§. 126 **Rotationsdynamometer.** Wenn es darauf ankommt, die Umdrehungskraft einer umlaufenden Welle zu ermitteln, so müssen die im Vorstehenden beschriebenen Dynamometer modificirt werden. Die wesentliche Einrichtung eines so modificirten Dynamometers ist aus der ideellen geometrischen Darstellung in Fig. 241 zu ersehen. Eine Maschine, deren Umdrehungskraft und Arbeit man ermitteln will, bestehe in der Hauptsache aus der Welle AB mit der Kraft P und aus der Welle BC mit der Last Q, und es sei die Verbindung dieser beiden Wellen mit einander durch eine auf der Welle AB sitzende Stahlfeder BF und einen auf der Welle BC befestigten und mit einem Bolzen E ausgerüsteten Arm DE hergestellt. Wenn man nun an einer am Bolzen E angebrachten Scala die Seitenbiegung der Feder BF abliest, so erhält man dadurch ein Maß der Kraft R, womit die beiden Wellen auf einander wirken, und ist noch der Abstand a des Bolzens E von der gemeinschaftlichen Axenrichtung AC beider Wellen sowie die Umdrehungszahl u der Welle bekannt, so läßt sich nun auch die Arbeit der Kraft P oder Q durch die Formel

Fig. 241.



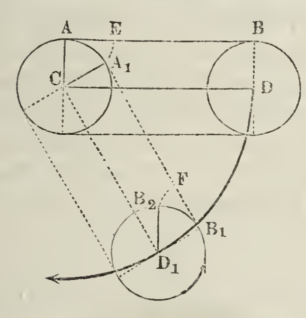
$$L = \frac{\pi u a}{30} R$$

berechnen.

Da von der gedachten Scala immer nur ein Einzel- und nicht der Mittelwerth der Kraft R angegeben wird, so ersetzt man dieselbe durch einen Totalisirungsapparat (s. den vorigen Paragraphen), welcher das Maß der Arbeit der Kraft R angiebt. Ein solcher Totaliseur besteht zunächst in einer Welle oder Trommel G, welche sich nicht allein mit der Welle AB gemeinschaftlich, sondern auch noch um ihre eigene Axe K umdreht, und es ist zu diesem Zwecke die Axe K auf einem Arme HK gelagert, welcher auf

der Welle AB festsitzt; damit sich diese Trommel G auch um ihre eigene Axe drehe, ist sie noch mit einer anderen Trommel L, welche zwar auf der Welle AB aufsitzt, jedoch mit dieser nicht fest verbunden ist und durch einen Arm M an der Umdrehung verhindert wird, durch eine Schnur ohne Ende verbunden. In Folge der Umdrehung der Axe K um AB dreht sich dann auch die Rolle G um K. Es stelle in Fig. 242 AC die feste und BD die um C drehbare, mit AC durch eine Schnur ohne Ende verbundene Rolle von beliebiger Größe vor. Gelangt diese Rolle BD nach B_1D_1, wobei ihre Axe D den Winkel DCD_1 zurücklegt, so legt sich von der Schnur AB ein Stück AE als Bogen AA_1 auf die feste Rolle auf und es wickelt sich ein anderes $B_1B_2 = B_1F$ von der umlaufenden Rolle ab. Da $A_1B_1 = AB$ ist, so muß auch $B_1B_2 = B_1F = AE = AA_1$ sein. Wären nun die Halbmesser der Rollen $CA = r_1$ und $DB = r_2$, sowie die gleichzeitigen Drehungswinkel $ACA_1 = DCD_1 = \varphi_1$ und $B_1D_1B_2 = \varphi_2$, so hätte man:

Fig. 242.



$$AA_1 = r_1\varphi_1 \quad \text{und} \quad B_1B_2 = r_2\varphi_2,$$

und daher das Verhältniß zwischen den Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um D und C:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

Wäre z. B. $r_2 = r_1$, so hätte man dieses Verhältniß:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1,$$

dann würde sich also die Rolle genau ein Mal um ihre Axe D drehen, während die letztere selbst ein Mal um C läuft; wäre dagegen $r_2 = 2r_1$, so hätte man:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = {}^1/_2,$$

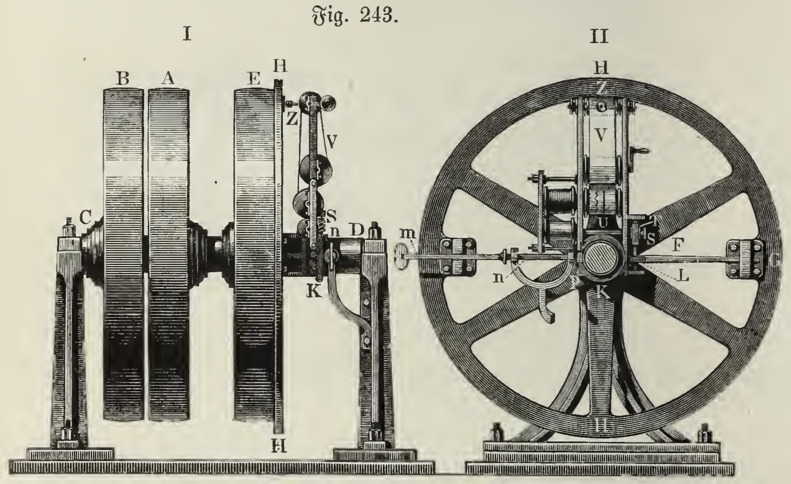
und es würde folglich die Rolle BD zwei Mal um C laufen, während sie sich um ihre eigene Axe D ein Mal umdreht.

Den einfachsten Totaliseur erhält man nun, wenn man die Rolle G, Fig. 241, mit einem Teller T versieht und denselben mit Papier überzieht, auf welches dann der Stift a, in welchem der Bolzen E ausläuft, eine Curve $a\,m\,n\,b$ beschreibt. Nimmt man dann aus den verschiedenen Ab-

ständen *ca*, *cm*, *cn*, *cb* . . . dieses Bogens von dem Mittelpunkte *c* des Tellers, das Mittel, so erhält man dadurch auch das Maß von dem mittleren Werthe der Kraft *R*, mit welcher während Durchlaufung des dem Umdrehungswinkel *acb* entsprechenden Weges, die Feder *F* den Bolzen *E* im Kreise herumführt.

§. 127 Um die Arbeit einer Maschine für größere Wege oder Zeiten zu ermitteln, ersetzt man den Teller *T*, Fig. 241, durch ein Paar Trommeln mit einem Papierstreifen ohne Ende nach der oben beschriebenen Einrichtung, so daß dann die Spitze *a* des Bolzens *E* auf dem unter ihr weggehenden Streifen eine Curve beschreibt, durch deren Quadratur das Maß der mechanischen Arbeit ermittelt wird, welche die Maschine verrichtet, während der Papierstreifen einen gewissen Weg unter dem Stifte *a* zurücklegt. Die Einrichtung eines solchen Rotationsdynamometers nach Morin ist aus zwei Ansichten I und II, Fig. 243, zu ersehen und besteht wesentlich in Folgendem.

Fig. 243.



Auf der horizontalen Welle *CD* sitzen eine feste Riemenscheibe *A* und zwei lose Riemenscheiben *B* und *E*, und es wird durch die erstere die Kraft der Umtriebsmaschine (s. §. 108) auf die Welle *CD*, sowie durch die Rolle *E* von der genannten Welle auf die Arbeitsmaschine übergetragen, deren Kraft und Leistung man durch das Dynamometer ermitteln will. So lange der Riemen auf *B* liegt und *E* nicht mit der Welle in fester Verbindung steht, findet natürlich weder eine Umdrehung der Welle, noch eine Bewegung der Arbeitsmaschine Statt. Um das erstere zu bewirken, hat man dagegen den Riemen von *B* nach *A* zu rücken. Die feste Verbindung der Rolle *E* mit der Welle *CD* erfolgt durch zwei aus dem Obigen bekannte dynamometrische

Federn, wie FG, welche mit der Welle CD fest verbunden sind, mit dem einen Ende F aus derselben radial hervorragen und mit dem anderen Ende G einen an der Rolle E festsitzenden Ring HGH ergreifen. Auf der Welle CD sitzt zugleich noch ein gezahntes Rad K, welches seitwärts eine Nase p hat, womit es während der Messung mittels einer Zugstange mn an der Umdrehung verhindert werden kann. Dieses Zahnrad greift in ein Zahnrädchen L ein, welches auf der Welle einer Schraube S sitzt, die mittels eines anderen Zahnrädchens T die erste Welle U des Trommelsystemes in Umdrehung setzt, wodurch der Papierstreifen V von einer Rolle über eine andere geführt und auf eine dritte Rolle aufgewickelt wird. Während dieser Bewegung drückt ein Stift Z, welcher in einem Arme des Ringes GH sitzt, auf den Papierstreifen und es entsteht dadurch eine Curve, welche, wie aus dem Obigen bekannt, als Maß der Arbeit der Maschine benutzt werden kann.

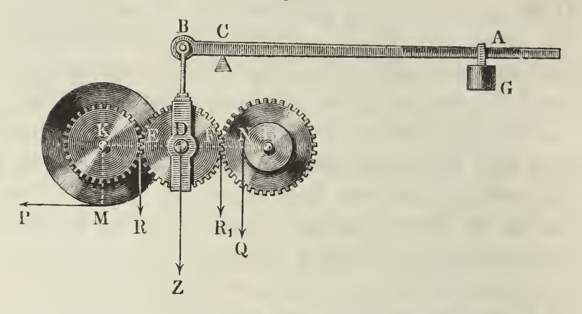
Statt des im Vorstehenden beschriebenen Zeichnenapparates kann man sich auch zur Ausmittelung der Umdrehungskraft einer Maschine eines Zählapparates bedienen, wo der Stift Z durch ein Laufrädchen mit einem Zeigermechanismus und der Papierstreifen V durch einen mittels des Räderwerkes $KL\ldots$ umzudrehenden Teller ersetzt wird (vergl. §. 124, Fig. 240).

Wenn sich die Bewegung des Papierstreifens oder des Tellers nicht unmittelbar von der Maschine ableiten läßt, so kann man auch diese Theile des Instrumentes durch ein besonderes Uhrwerk, welches ungefähr die Einrichtung eines Bratenwenders oder des Schlagwerkes einer Uhr hat, in Bewegung setzen. Das Instrument giebt aber dann nicht ein Product aus Kraft und Weg, sondern ein Product aus Kraft und Zeit an; um daher die mittlere Kraft zu finden, muß man dieses Product durch die Zeit dividiren, und um die Arbeit der Maschine zu bestimmen, ist der letzte Quotient noch durch den Weg zu multipliciren.

Dynamometrische Zapfenlager. Bei einem anderen Dynamometersysteme wird der Druck des Zapfens der umlaufenden Welle gemessen und hieraus die Größe der Umdrehungskraft der Maschine bestimmt. Das einfachste Dynamometer dieser Art ist die dynamometrische Schnellwage von Hachette. Dieselbe besteht aus einer gewöhnlichen Schnellwage ACB, Fig. 244 (a. f. S.), an welcher statt der Wagschale für die Last ein Zahnrad DEF hängt, welches zwischen die Zahnräder KE und LF eingesetzt wird, deren Umdrehungskraft ermittelt werden soll. Ist P die Umdrehungskraft der einen Welle am Hebelarme $KM = a$ und Q der Umdrehungswiderstand der anderen Welle am Hebelarme $LN = b$, sowie r der Halbmesser KE des einen und r_1 der Halbmesser LF des anderen Zahnrades, so hat man die Kräfte, mit welchen beide Räder auf das eingeschaltete Zahnrad in E und F vertical abwärts drücken: §. 128

$$R = \frac{Pa}{r} \text{ und } R_1 = \frac{Qb}{r_1}.$$

Fig. 244.



Da dieselben an gleichen Armen DE und DF wirken, so ist auch

$$R = R_1,$$

und daher die Last oder Zugkraft der Wage ACB in B:

$$Z = R + R_1 = 2R,$$

sowie umgekehrt, der Druck R zwischen den Zähnen oder Zahnrädern:

$$R = \frac{Z}{2}.$$

Hat man die Wage durch Verschiebung des Laufgewichtes G mit der Zugkraft $Z = 2R$ ins Gleichgewicht gebracht, so ist dadurch auch Z und R, sowie

$$P = \frac{r}{a} R = \frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2}, \text{ und}$$

$$Q = \frac{r_1}{b} R = \frac{r_1}{b} \cdot \frac{Z}{2}$$

bestimmt, und ist nun noch die Umdrehungszahl u der Kraft- oder die Umdrehungszahl u_1 der Lastwelle pr. Minute bekannt, so kann man endlich die Arbeit der Maschine mittels einer der Formeln

$$L = \frac{\pi u a}{30} P = \frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2} \text{ und}$$

$$L = \frac{\pi u_1 b Q}{30} = \frac{\pi u_1 r_1}{30} \cdot \frac{Z}{2}$$

berechnen.

Wegen der Reibungen am Zapfen D und zwischen den Zähnen bei E und F fällt, genau genommen, R_1 etwas kleiner als R aus, es ist daher R etwas größer als $\frac{Z}{2}$, und die nach der Formel

$$L = \frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2}$$

berechnete Leistung der Kraft etwas zu klein.

In der Regel wird man

$$R = \frac{Z}{2} (1 + \mu) \text{ und}$$

$$R_1 = \frac{Z}{2} (1 - \mu)$$

setzen können, wo μ eine von den Verhältnissen der Wage abhängige Erfahrungszahl ist. Hiernach hat man:

$$P = (1 + \mu) \frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2}, \text{ sowie:}$$

$$Q = (1 - \mu) \frac{r_1}{b} \cdot \frac{Z}{2}$$

und daher:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \cdot \frac{r}{r_1} \cdot \frac{b}{a},$$

sowie umgekehrt:

$$\mu = \frac{P a r_1 - Q b r}{P a r_1 + Q b r}.$$

Wenn man durch einen Vorversuch zwei Kräfte P und Q ermittelt, welche einander an diesem Mechanismus das Gleichgewicht halten, so kann man hieraus die Erfahrungszahl μ berechnen und nun mit Hülfe derselben in anderen Fällen die Kraft

$$P = (1 + \mu) \frac{r}{a} \cdot \frac{Z}{2},$$

sowie die Arbeit

$$L = (1 + \mu) \frac{\pi u r}{30} \cdot \frac{Z}{2} = (1 + \mu) \frac{\pi u r}{60} Z$$

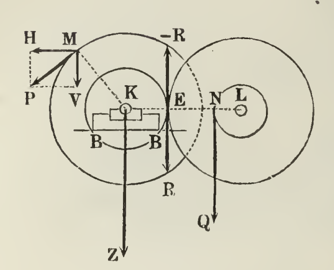
bestimmen.

Das Dynamometer von Schinz (s. Polytechnisches Centralblatt, 1848) ist von der dynamometrischen Schnellwage wesentlich nicht verschieden. Ebenso Rittinger's verbessertes Dynamometer (s. die österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1855).

Das dynamometrische Zapfenlager (s. Rittinger's Abhandlung in der österreichischen Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1856) beruht auf demselben Principe wie die dynamometrische Schnellwage; nur wird hier kein drittes Zahnrad eingeschaltet, sondern gleich der verticale Zapfendruck der einen oder anderen Welle ermittelt und hieraus die Umdrehungskraft derselben berechnet. Zur Bestimmung dieses Zapfendruckes Z der Welle

MKE, Fig. 245, kann man sich am besten einer Brückenwage bedienen, auf deren Brücke *BB* die beiden Zapfenlager *K* der Welle zu stellen sind. Wirkt die Kraft dieser Welle am Hebelarm $KM = a$, weicht die Richtung derselben um den Winkel α vom Horizont ab, ist ferner der Halbmesser *KE* des auf dieser Welle sitzenden Zahnrades, $= r$, und wiegt die ganze armirte Welle *KEM*, $= G$, so hat man den durch die Brückenwage zu bestimmenden verticalen Componenten des Zapfendruckes:

Fig. 245.



$$Z = G + P \sin.\alpha + \frac{a}{r} P = G + \left(\sin.\alpha + \frac{a}{r}\right) P,$$

so daß nun die Umdrehungskraft

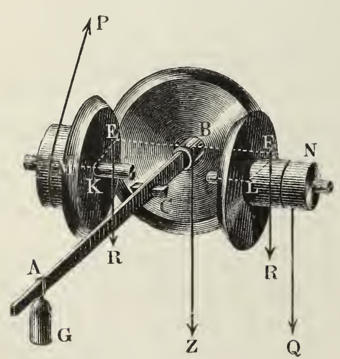
$$P = \frac{Z - G}{\sin.\alpha + \frac{a}{r}}$$

folgt.

Die Bestimmung dieser Kraft fällt natürlich um so schärfer aus, je kleiner das Gewicht *G* der Welle ist.

§. 129 **Differenzialdynamometer.** Wenn die Wellen *K* und *L*, Fig. 244, deren Umdrehungskraft die dynamometrische Schnellwage angeben soll, nicht neben, sondern hinter einander liegen, so daß ihre Axen in eine Linie fallen, wie Fig. 246 monodimetrisch darstellt, so müssen die Zahnräder *KE* und *LF* eine kegelförmige Gestalt erhalten, also sogenannte conische Räder sein, wogegen alles Uebrige, wie z. B. die Wage *ACB*, woran das Mittelrad *EF* hängt, unverändert bleiben kann. Ist auch hier *Z* der von der Wage angegebene Zapfendruck des Rades *EF*, so läßt sich der Zähnedruck bei *E* wieder

Fig. 246.



$$R = (1 + \mu) \frac{Z}{2},$$

und folglich die am Hebelarme a wirkende Umdrehungskraft

$$P = (1 + \mu)\,\frac{a}{r}\,\frac{Z}{2},$$

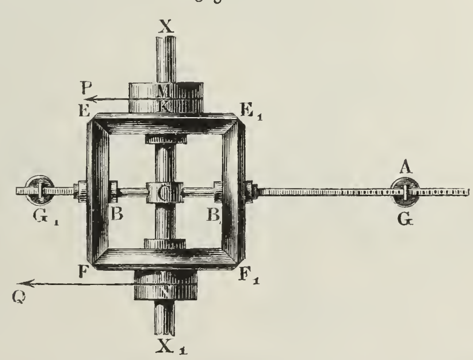
sowie die Arbeit der Welle

$$L = (1 + \mu)\,\frac{\pi u r}{60}\,Z$$

setzen, insofern wieder r den Halbmesser KE des auf KM sitzenden Zahnrades, sowie u die Umdrehungszahl der Welle MK bezeichnet.

Dieses Dynamometer wird dadurch noch vervollkommnet, daß man Hebel oder Wagebalken ACB mit zwei conischen Rädern ausrüstet, so daß das Zahnrad KE der Kraftwelle durch beide Räder auf das Zahnrad LF der Lastwelle wirken kann. Die allgemeine Einrichtung eines solchen Dynamometers ist aus dem Grundrisse desselben in Fig. 247 zu ersehen. Mit der Krafttrommel M ist das conische Zahnrad EE_1 und mit der Lasttrommel N

Fig. 247.

das conische Zahnrad FF_1 fest verbunden; beide Räder sitzen lose auf der festen Welle XX_1 und stehen durch die conischen Zahnräder EF und E_1F_1 mit einander in Verbindung. Durch die Kraft P und die Last Q und mittels der Räder EE_1 und FF_1 wird das Zahnrad EF bei E und F ab- und dagegen das Zahnrad E_1F_1 bei E_1 und F_1 aufwärts gedrückt.

Der abgebildete Rädermechanismus heißt ein Differenzialgetriebe, weshalb dieses Dynamometer auch den Namen Differenzialdynamometer erhalten hat.

Ist R die Größe des Druckes zwischen den Zähnen an jeder dieser vier Stellen, so beträgt daher die Wirkung der Räder EE_1 und FF_1 auf den Hebel ACB aus einem abwärts gerichteten Verticaldruck

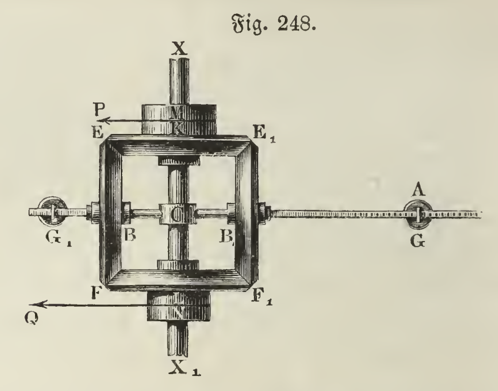
$Z = 2R$ in der Axe B des Rades EF

und aus einem aufwärts gerichteten Verticaldruck

$Z = -2R$ in der Axe B_1 des Rades E_1F_1.

Beide Drücke bilden nun ein Kräftepaar, welchem durch das Laufgewicht G im Punkte A des Hebels und durch den Widerstand ($-G$) der Welle

Fig. 248.



XX_1 in C, wo dieselbe mittels einer Hülse vom Hebel umschlossen wird, das Gleichgewicht zu halten ist. Sind a_1 und b_1 die Hebelarme CA und $CB = CB_1$ des durch ein Gewicht G_1 gehörig tarirten Wagebalkens ACB, so hat man:

$$G a_1 = Z b_1 + Z b_1 = 2 Z b_1 = 4 R b_1;$$

bezeichnet ferner, wie seither, a den Hebelarm der Kraft P und r den Halbmesser eines Zahnrades EE_1 und FF_1, so ist auch:

$$P a = R r + R r = 2 R r,$$

und daher:

$$P = \frac{r}{a} \cdot 2 R = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{G}{2},$$

wobei natürlich nicht auf die Nebenhindernisse Rücksicht genommen wird.

Mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse läßt sich

$$P = (1 + \mu) \frac{a_1}{b_1} \frac{r}{a} \frac{G}{2},$$

sowie die mechanische Arbeit

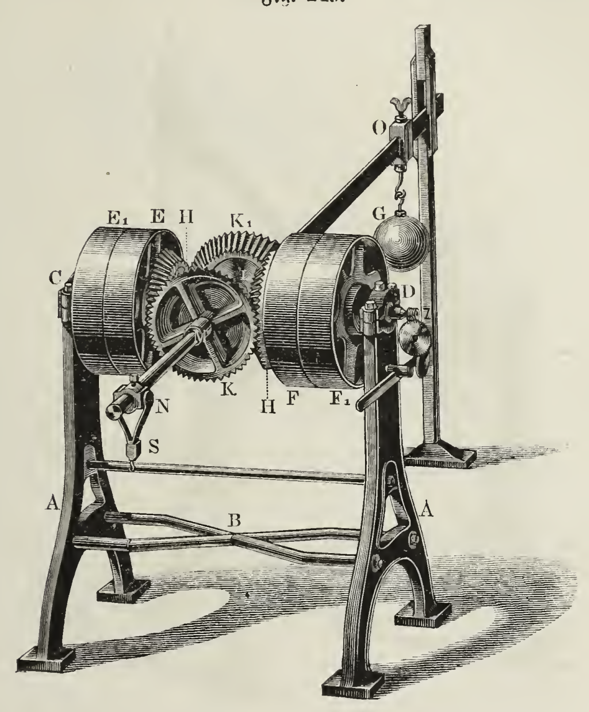
$$L = (1 + \mu) \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{\pi u r}{60} G$$

setzen.

Nach demselben Principe sind die Dynamometer von Batchelder (siehe Dingler's Polytechn. Journal, 1844) construirt, deren wesentliche Einrichtung aus der monodimetrischen Abbildung in Fig. 249 zu entnehmen ist. Zwei durch schmiedeeiserne Stangen B zusammengehaltene gußeiserne Ständer A, A unterstützen die Zapfenlager C, D der horizontalen Welle CD, welche zwei Paar gleich große Riemenscheiben E, E_1 und F, F_1, sowie die coni-

schen Räder H, H_1 trägt. Das Rad H ist mit E, sowie das Rad H_1 mit F fest verbunden, und während die erstere Verbindung fest auf der

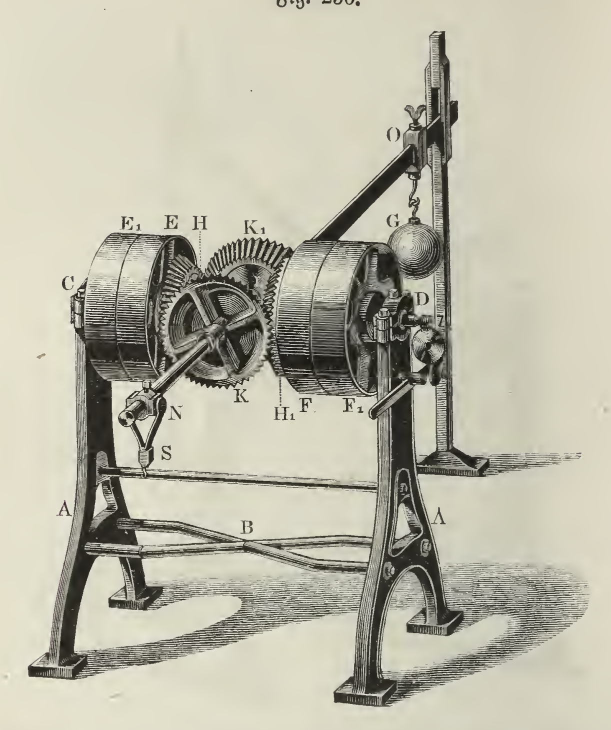
Fig. 249.



Welle CD sitzt, ist die letztere, sowie die Rolle E_1 und die Rolle F_1, lose auf derselben. Zwei andere conische Räder K, K_1, welche mit den ersteren im Eingriff stehen, sitzen lose auf der Welle LM, deren Verlängerung LO den Wagebalken mit dem Laufgewichte G bildet. In der Mitte zwischen den beiden Rädern K und K_1 bildet die Welle LM eine Hülse, durch welche die Welle CD hindurchgeht, und an dem Ende N der ersteren Welle ist ein Haken angebracht, an welchen das diese Welle äquilibrirende Tarirgewicht angehangen wird. Endlich ist Z ein die Anzahl der Umdrehungen angebender Zählapparat, welcher durch das schraubenförmig geschnittene Ende D der Welle CD in Bewegung gesetzt wird. Vor dem Versuche liegt der Riemen, welcher mit der Kraftmaschine in Verbindung steht, auf der losen Rolle E_1, und derjenige Riemen, welcher die Lastmaschine ergreift, auf der losen Rolle F_1; bei Beginn des Versuches werden aber diese Riemen auf die Rollen E und F geschoben, welche mittels der Zahnräder in Verbindung stehen, so daß dadurch die Kraftmaschine in den Stand gesetzt wird, mecha-

nische Arbeit zu verrichten. Wird endlich hierbei durch gehörige Verschiebung des Laufgewichtes *G* der Arm *L O* in horizontaler Lage erhalten, so

Fig. 250.



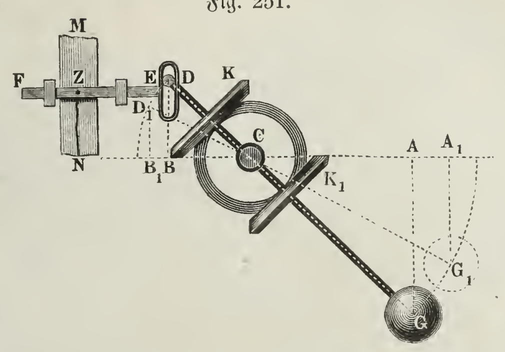
erhält man in *G* das zur Bestimmung der Kraft der Maschine erforderliche Element.

Will man durch dieses Instrument die Arbeit der Maschine, in welche dasselbe eingeschoben worden ist, unmittelbar angeben oder totalisiren, so kann man statt des Laufgewichtes *G* in *N* ein Federdynamometer, wie Fig. 237, anschließen, und von dem Stift desselben auf einen von *Z* in Bewegung zu setzenden Papierstreifen eine Curve aufzeichnen lassen.

Zu diesem Totalisiren ist übrigens ein Federdynamometer nicht unbedingt nöthig; man kann auch den Zeichnenstift durch das Gewicht am Hebel *L O* selbst in Bewegung setzen lassen. Ein solches Dynamometer, bei welchem der Zeichnenstift durch das die Kraft der Maschine bestimmende Gewicht bewegt wird, ist dem Mechaniker J. Wagner in Paris (schon im J. 1837) patentirt worden. Die wesentliche Einrichtung eines solchen Zeichnenapparates ist aus Fig. 251 zu ersehen. Der Wagebalken, welcher eine Verlängerung der Umdrehungsaxe der conischen Räder *K*, K_1 bildet, ist um *C* drehbar und hat eine geneigte

Lage CG, ferner ist an dem anderen Ende der gedachten Drehungsaxe ein Frictionsrädchen D angebracht, welches von dem ringförmigen Kopfe E einer Stange EF, woran der Zeichnenstift Z befestigt ist, ergriffen wird.

Fig. 251.

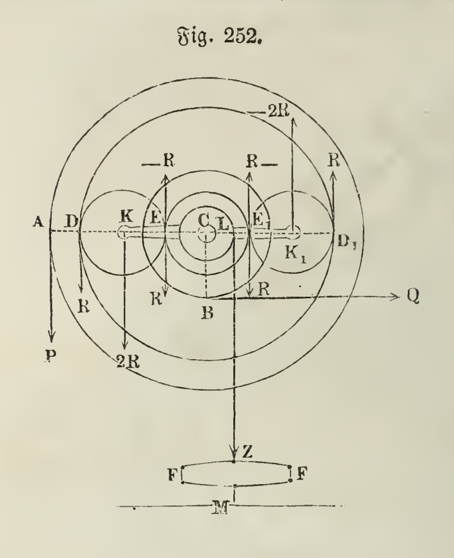


Wenn nun unter dem letzteren der Papierstreifen MN mittels der Maschine oder eines chronometrischen Apparates hinbewegt wird, so zeichnet dieser Stift die Arbeitscurve der Maschine auf, zwischen welche letztere die beiden conischen Räder K, K_1 sammt Hebel DG eingeschaltet sind. Aendert sich die Kraft, so nimmt der Arm CG eine andere Neigung an, wobei der Hebelarm CA in CA_1 übergeht und sich um eine gewisse Größe AA_1 ändert, welche nicht allein der Veränderung der Kraft, sondern auch der Projection BB_1 vom Wege DD_1 des Hebelendes D in der Richtung von CA, proportional ist, so daß folglich auch die Verschiebung der Stange EF sammt Stift Z mit der Aenderung der Kraft gleichmäßig zu= und abnimmt.

Ein, wie es scheint, sehr zweckmäßiges Dynamometer für Arbeitsmaschinen mit Zähl= und Zeichnenapparat beschreibt Herr Dr. E. Hartig im Polytechnischen Centralblatt, 1857. Nro. 1, und es ist das Princip dieses Instrumentes aus Folgendem zu ersehen. Mit dem Rade CA, Fig. 252 (a. f. S.), woran die Umdrehungskraft wirkt, ist ein innen verzahntes Rad DCD_1 fest verbunden, und das letztere greift bei D und D_1 in zwei gleiche Zahnräder DE, D_1E_1 ein, welche gemeinschaftlich auf ein drittes Zahnrad EE_1 wirken. Dieses Rad ruht lose auf der Welle C des Rades DD_1 und ist mit der Trommel BC, woran die Last Q wirkt, in fester Verbindung, wogegen die Räder DE, D_1E_1 mit ihren Axen auf einem Hebel KCK_1 sitzen, welcher sich frei um C drehen läßt. Mit dem letzteren ist eine Rolle CL verbunden, um welche ein Riemen liegt, welcher an das bei M befestigte Federdynamometer FF angeschlossen ist. Es läßt sich leicht einsehen, daß hier der Umdrehungskraft P durch zwei Kräfte, R, — R, das Gleichgewicht gehalten wird, daß aus den letzteren wieder ein Kräftepaar, §. 130

— R, R, entsteht, welches sich mit der Last Q ins Gleichgewicht setzt, und daß in Folge dessen in den Axpunkten K und K_1, die Kräfte $2R$ und $-2R$ wirken und das Federdynamometer mit einer gewissen Kraft Z spannen.

Fig. 252.



Ist a der Hebelarm CA der Kraft,

b der Hebelarm CB der Last,

r der Halbmesser $CD = CD_1$ des größeren,

r_1 der Halbmesser $CE = CE_1$ des kleineren, also

$\frac{r - r_1}{2}$ der Halbmesser $KD = K_1 D_1$ eines der beiden Zwischenräder, und

c der Hebelarm CL der Spannkraft Z, so hat man:

$Pa = 2Rr$, $Qb = 2Rr_1$ und

$$Zc = 2R(r + r_1);$$

daher:

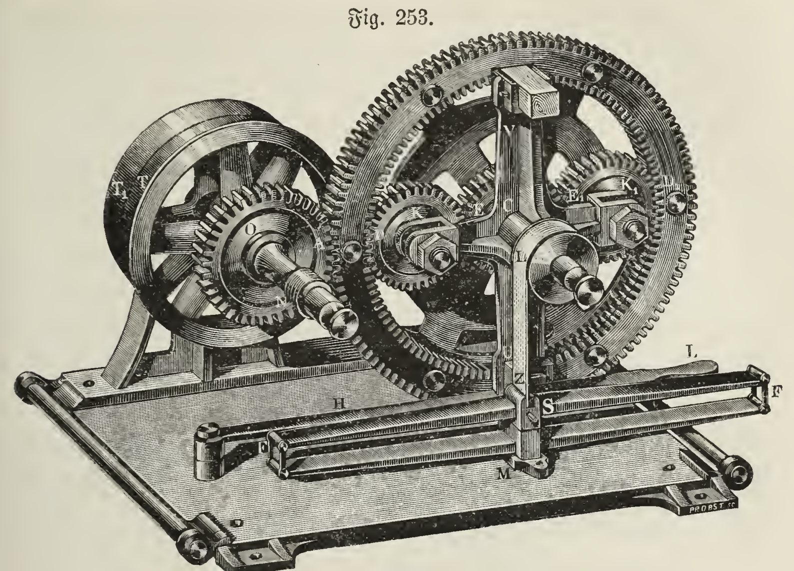
$$\frac{P}{Q} = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{b}{a} \text{ und}$$

$$\frac{P}{Z} = \frac{r}{r + r_1} \cdot \frac{c}{a}.$$

In der monodimetrischen Abbildung, Fig. 253, dieses Instrumentes sieht man noch bei T und T_1 die feste und lose Riemenscheibe, sowie in O das Zahnrad, wodurch die von der letzteren aufgenommene Kraft auf das außen und innen gezahnte Rad ADD_1 übergetragen wird. Auch bemerkt man bei N die Schraube, womit der (nicht abgebildete) Zähl- oder Zeichnenapparat in Bewegung gesetzt wird. Die Arme KC und K_1C, welche die in die Verzahnungen DD_1 und EE_1 eingreifenden Zahnräder DK, D_1K_1 tragen, bilden mit zwei anderen Armen U und V, sowie mit der auf der Welle des Rades EE_1 lose sitzenden Trommel CL ein Ganzes. Letztere ist durch den Riemen LZ mit den dynamometrischen Federn FF verbunden, deren eine den Stift S trägt, welcher auf dem vorbeilaufenden Papierstreifen eine Curve aufzeichnet. Durch den in das Armende U eingreifenden Hebel HL kann die Thätigkeit des Instrumentes nach Belieben hervorgerufen und

aufgehoben werden. Um das übermäßige Anspannen der Federn zu verhindern, ist das Ende des Armes CV mit einem starken Holzdaumen versehen,

Fig. 253.



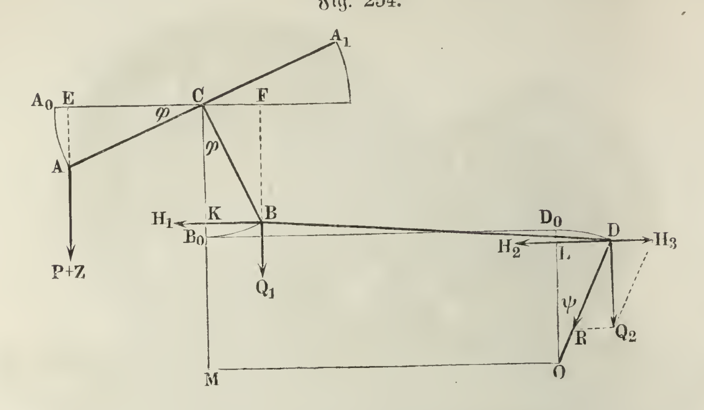
welcher sich bei einer gewissen Stellung des Kreuzes KUK_1V gegen ein festes Hinderniß stemmt.

Anmerkung. Bentall's Dynamometer mit Spiralfedern sind in Dingler's Journal Bd. 167 (1863), vom Herrn M. Eyth beschrieben.

Horizontal-Dynamometer. Zum Messen horizontaler Kräfte von mäßiger Größe läßt sich das vom Herrn Professor Schönemann erfundene Horizontal-Dynamometer mit Vortheil anwenden. Dessen wesentliche Einrichtung besteht in Folgendem: ACA_1 (Fig. 254 a. f. S.) ist ein gewöhnlicher, um C drehbarer Wagebalken und BD ist die zur Aufnahme der zu messenden Kraft dienende Tafel- oder Wagschale, welche mit dem einen Ende B auf dem Ende eines mit dem Wagbalken fest verbundenen Armes CB und mit dem anderen Ende D auf dem Kopfe eines um O drehbaren Tragarmes OD ruht. Natürlich müssen die Stützpunkte A, B, C, D und O in sogenannte Schneiden bestehen. Beim Einspielen der Wage hat die Tafel BD die horizontale Lage B_0D_0 und sind die Arme CB und OD in den verticalen Stellungen CB_0 und OD_0. Bei diesem Stande der Wage werden die verticalen Kräfte und Gewichte der Wage mittels der Arme B_0C und D_0O direct auf die festen Stützpunkte C und O übergetragen, dagegen wirkt die Horizontalkraft der Tafel BD mittels des Hebelarmes CB_0 auf den Wagebalken § 131

$A\,C\,A_1$ und sucht denselben um C zu drehen. Ist nun H die Größe dieser Horizontalkraft, P die Größe des Gewichtes in A_0, welches dieser Kraft das

Fig. 254.



Gleichgewicht hält, und sind b und a die Hebelarme CB_0 und CA_0 dieser Kräfte, so hat man $Pa = Hb$, und daher einfach die Horizontalkraft der Tafel $B_0 D_0$:

$$H = \frac{a}{b} P.$$

Die Zulage Z zu P bewirkt einen Ausschlag $A_0 CA = \varphi$ des Wagebalkens, welcher unter der Voraussetzung, daß er nur wenige Grade beträgt, wie folgt, zu bestimmen ist. Die sämmtlichen Kräfte und Gewichte der armirten Brücke oder Tafel BD kann man auf bekannte Weise auf zwei Verticalkräfte Q_1 und Q_2 und zwei Horizontalkräfte H_1 und H_2 zurückführen, welche in B und D ihre Angriffspunkte haben. Ferner läßt sich der horizontale Ausschub LD des Stützpunktes D gleich dem horizontalen Ausschub KB des Stützpunktes B setzen; bezeichnet man die Armlänge $OD = OD_1$ durch r und den Drehungswinkel $D_0 OD$, welcher dem Ausschlag $B_0 CB = A_0 CA = \varphi$ entspricht, durch ψ, so hat man folglich

$$r \sin. \psi = b \sin. \varphi, \text{ daher}$$

$$\sin. \psi = \frac{b}{r} \sin. \varphi, \text{ auch annähernd } \psi = \frac{b}{r} \varphi.$$

Da beim Ausschlagen der Wage, B_0 um $B_0 K = b\,(1 - \cos. \varphi) = 2\,b \left(\sin. \frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{b\,\varphi^2}{2}$ steigt und D_0 um $D_0 L = r\,(1 - \cos. \psi) = \frac{r\,\psi^2}{2} = \frac{b^2 \varphi^2}{2\,r}$ fällt, so ist bei der Länge $BD = l$ der Tafel, für den Neigungswinkel μ derselben:

$$sin. \mu = \frac{B_0 K + D_0 L}{BD} = \frac{b r \varphi^2 + b^2 \varphi^2}{2 r l} = \frac{(b + r) b}{2 r l} \varphi^2.$$

Wegen des Factors φ^2 läßt sich daher annähernd $\mu = o$ setzen, ist also anzunehmen, daß die Tafel während eines kleinen Ausschlages φ nahe horizontal bleibt. Von der Verticalkraft O_2 des Punktes D nimmt der Stützpunkt O den Componenten $R = \frac{Q_2}{cos. \psi}$ auf, während sich der horizontale Component $H_3 = Q_2 \, tang. \psi$ mit der Horizontalkraft H_2 vereinigt, so daß die ganze Horizontalkraft in D:

$$H_2 - H_3 = H_2 - Q_2 \, tang. \psi \text{ annähernd}$$
$$= H_2 - \frac{Q_2 b \varphi}{r} \text{ übrig bleibt.}$$

Da nun BD annähernd horizontal ist, so kann man auch annehmen, daß diese Kraft von BD aufgenommen und bis B fortgepflanzt werde. Diesem zu Folge wirkt in B am Hebelarm $\overline{CK} = \overline{CB} \, cos. B_0 C B = b \, cos. \varphi$ die gesammte Horizontalkraft $H_1 + H_2 - H_3 = H_1 + H_2 - \frac{Q_2 b \, sin. \varphi}{r}$, sowie am Hebelarm $\overline{CF} = b \, sin. \varphi$ die Verticalkraft Q_1 der am Hebelarm $\overline{CE} = a \, cos. \varphi$ wirkenden Kraft des Wagbalkens $A C A_1$ entgegen, und es ist nun zu setzen:

$$(P + Z) \, a \, cos. \varphi = \left(H_1 + H_2 - Q_2 \frac{b \, sin. \varphi}{r}\right) b \, cos. \varphi + Q_1 b \, sin. \varphi,$$

oder

$$(P + Z) a = (H_1 + H_2) b + Q_1 b \, tang. \varphi - \frac{Q_2 b^2}{r} sin. \varphi \text{ annähernd}$$
$$= (H_1 + H_2) b + \left(Q_1 - \frac{b}{r} Q_2\right) b \varphi.$$

Nun ist aber für $\varphi = 0$,

$$Pa = (H_1 + H_2) \, b = Hb, \text{ daher hat man}$$
$$Za = \left(Q_1 - \frac{b}{r} Q_2\right) b \varphi, \text{ und den gesuchten Ausschlag}$$
$$\varphi = \frac{Za}{\left(Q_1 - \frac{b}{r} Q_2\right) b}.$$

Es wächst also hier wie bei der gemeinen Wage der Ausschlag direct wie die Zulage, wie die Armlänge a u. s. w.

Anmerkung. Die Monographie: Das Horizontal-Dynamometer und seine Anwendung auf die Mechanik von Th. Schönemann, Berlin 1864 giebt eine ausführliche Theorie und Beschreibung dieses Instrumentes, und behandelt auch mehrfache Anwendungen desselben. Vorstehendes ist nur ein kurzer möglichst populär gehaltener Abriß der Theorie desselben.

§. 132 **Bremsdynamometer.** Das Bremsdynamometer, der Prony'sche Zaum (franz. frein dynamométrique; engl. dynamometrical break, Friction Dynamometer), wird angewendet, um die Kraft der Arbeit einer umlaufenden Welle oder einer rotirenden Maschine überhaupt zu ermitteln. In seiner einfachen Gestalt besteht dieses Instrument aus einem Balken AB, Fig. 255, mit einer Wagschale AG, und aus zwei hölzernen Zirkelstücken D und EF, welche durch Schraubenbolzen EH und FK auf die umlaufende Welle C stark aufgedrückt werden. Soll mit Hülfe dieser Vorrichtung die Kraft der Welle C bei einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit oder Umdrehungszahl gefunden werden, so legt man so viel Gewicht G auf die Wagschale und zieht die Schraubenmuttern H und K so stark an, daß nicht allein die Welle die verlangte Umdrehungszahl annimmt, sondern auch der Hebel oder Balken AB horizontal und frei, d. i. ohne auf einem der beiden Böcke L und R zu ruhen, schweben bleibt. Dann wird die ganze Arbeit der Maschine von der Reibung zwischen den Bremsbacken und dem Wellenumfange consumirt, und es ist daher die Arbeit derselben der gesuchten Leistung gleich zu setzen. Da nun noch der Hebel frei hängt, so hält nur die in der Umdrehungsrichtung wirkende Reibung F dem aufgelegten Gewichte das Gleichgewicht, und es läßt sich jene Reibung aus diesem Gewichte leicht finden. Setzen wir den Hebelarm $\overline{CM}$ des Gewichtes G in Hinsicht auf die Wellenaxe, $= a$, so ist das statische Moment des Gewichtes und also auch das Reibungsmoment oder auch die Reibung, wenn man sie am Halbmesser Eins wirksam annimmt, $= Ga$; bezeichnet daher noch ε die Winkelgeschwindigkeit der Welle, so hat man ihre mechanische Arbeit (pr. Secunde):

Fig. 255.

$$L = Pv = Ga.\varepsilon = \varepsilon a G.$$

Ist u die Umdrehungszahl der Welle pr. Minute, so läßt sich

$$\varepsilon = \frac{2\pi u}{60} = \frac{\pi u}{30},$$

daher die gesuchte Arbeit

$$L = \frac{\pi u a}{30} G$$

setzen.

Uebrigens hat man unter G nicht allein das aufgelegte Gewicht, sondern auch noch das auf den Aufhängepunkt der Wagschale reducirte Gewicht des aufgesetzten Apparates zu verstehen. Um das letztere zu ermitteln, legt man den Apparat mit D auf eine scharfe Schneide und hängt denselben bei A mittels einer Schnur an einer Wage auf.

Damit ein Bremsdynamometer wie eine gewöhnliche Gewichtswage Stabilität besitze, soll man den Aufhängepunkt A des Gewichtes G oder der Wagschale in einer Schneide bestehen lassen, und denselben nicht, wie in Fig. 256, über, sondern, wie in Fig. 257, unter die Axe C der Welle legen. Wenn bei der letzteren Anordnung das Gewicht G sinkt oder steigt,

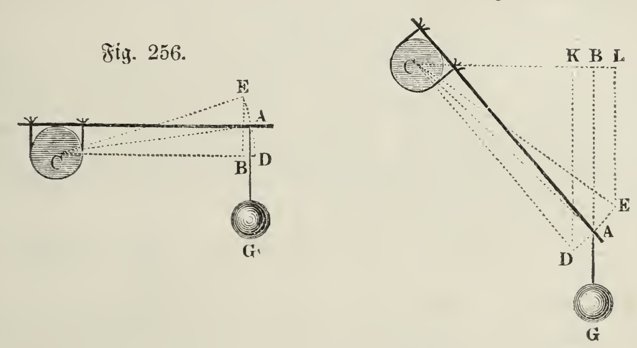


Fig. 256. Fig. 257.

und dabei der Aufhängepunkt A nach D oder E kommt, so nimmt der Hebelarm CB ab oder zu, so daß zuletzt das Plus oder Minus von G durch das Minus BK oder Plus BL von CB ausgeglichen wird, und sich der Hebel CA von selbst ins Gleichgewicht bringt. Bei der ersteren Auflegung (Fig. 256) findet dagegen mit der Zu= oder Abnahme von G auch eine Zu= oder Abnahme vom Hebelarme $\overline{CB} = a$ Statt, und es kann sich daher der Hebel CA nicht von selbst ins Gleichgewicht stellen.

Um den Zapfendruck nicht zu vergrößern, ist es zweckmäßig, zwei Bremsdynamometer AB, $A_1 B_1$, Fig. 258, anzuwenden, oder den einfachen Brems durch eine Kraft $G_1 = G$ in B_1 zu unterstützen.

Zweckmäßiger ist das in Fig. 259 abgebildete Bremsdynamometer mit einem gußeisernen Bremsringe DEF, der durch drei Paar Schrauben S, T, U auf jede Welle, wenn sie nicht sehr stark ist, aufgeschraubt werden

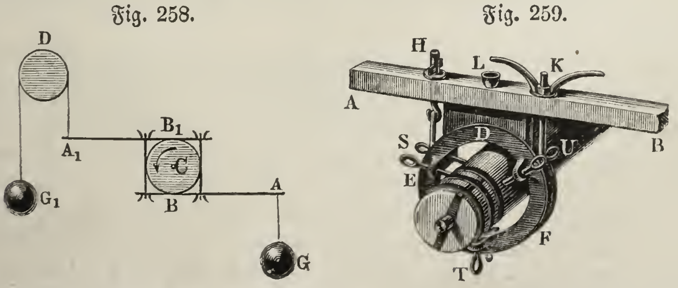


Fig. 258. Fig. 259.

kann. Bei diesem Apparate ist auch das untere Holzstück durch ein eisernes Band ersetzt, das die Hälfte des zu diesem Zwecke rinnenförmig ausgenom=

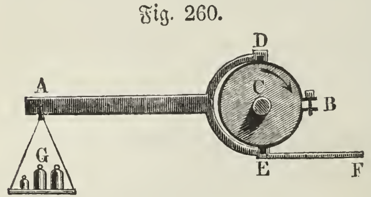
menen Bremsringes umgiebt. Uebrigens endigt sich dieses Band in zwei durch den Balken AB gehenden Bolzen und läßt sich durch eine oder zwei Schraubenmuttern, wie z. B. K, beliebig stark an den Bremsring andrücken. Um das Verkohlen des Holzes oder die allzugroße Erwärmung des Eisens zu verhindern, wird den Reibungsflächen durch das Loch L und mittels eines Trichters Oel oder Wasser zugeführt. Diese Apparate sind in Deutschland unter dem Namen „Egen's Bremsdynamometer" bekannt.

Beispiel. Um die Leistung eines Wasserrades zu finden, hat man auf die Welle desselben ein Bremsdynamometer aufgesetzt, und während der vollkommenen Regulirung des Aufschlagwassers bei der vorgeschriebenen Umdrehungszahl $u = 6$ pr. Minute gefunden: Aufgelegtes Gewicht nebst dem reducirten Gewichte vom Instrumente, $G = 530$ Pfund, Armlänge von diesem Gewichte, $a = 10{,}5$ Fuß. Hieraus berechnet sich nun die effective Leistung dieses Wasserrades bei der verlangten Geschwindigkeit:

$$L = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 10{,}5}{30} \cdot 530 = 3497 \text{ Fußpfund} = 7{,}29 \text{ Pferdekräfte.}$$

§. 133 Man hat in den neueren Zeiten sehr mannigfaltige mehr oder weniger vollkommene und zum Theil sehr complicirte Bremsdynamometer in Anwendung gebracht. Hier sei jedoch nur von den einfachsten Vorrichtungen dieser Art die Rede. Fig. 260 repräsentirt ein von Armstrong angewendetes Dynamometer. Dieses besteht aus einem eisernen Ringe, welcher durch eine Schraube B scharf auf die umschlossene Welle C aufgedrückt wird, und aus einem Hebel ADE, welcher auf der einen Seite eine Wagschale zur Aufnahme von Gewichten G trägt, und auf der anderen Seite in einer Gabel ausläuft, welche zwei aus dem Ringe hervorragenden Nasen ergreift. Um dieses Instrument bequem handhaben zu können, ist der eine Schenkel der Gabel noch um ein Stück EF verlängert. Die Ausführung und Berechnung der Versuche mit diesem Instrumente weichen von denen mit dem einfachen Bremsdynamometer nicht ab.

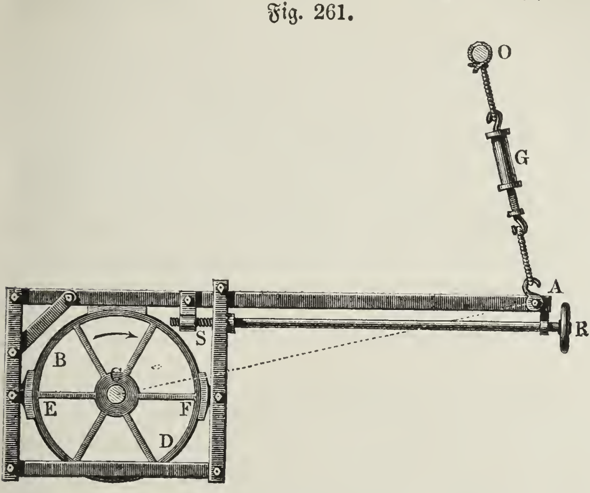
Fig. 260.



Ein kleines aus Walzeisenstäben von $2^3/_4$ Zoll Breite und 1 Zoll Dicke zusammengesetztes Dynamometer, Fig. 261, hat der Herr Oberinspector Tauberth zur Bestimmung der Leistung einer Dampfmaschine von fünf Pferdekräften angewendet. Dieses Dynamometer wurde auf die Riemenscheibe BD aufgelegt, welche auf der $4^1/_8$ Zoll dicken Welle C saß, und das Aufdrücken der Bremsbacken E, F auf die Scheibe BD erfolgte durch Umdrehen der Schraube S mittels der Handhabe R. Die Kraft wurde durch eine Federwage, wie Fig. 232, gemessen, wobei dann CA, $118^3/_4$ Zoll maß (siehe „Civilingenieur", Band III, 1856).

Wenn man die Kraft durch ein Federdynamometer mißt, so kann man auch sehr leicht durch Anwendung eines Zeichnen- oder Zählapparates die Arbeit der Maschine mittels des Bremsdynamometers totalisiren oder unmittelbar angeben. Nach Navier's Vorschlag bestimmt man die Kraft einer umlaufenden Welle auch dadurch, daß man ein eisernes Band um dieselbe legt, das eine Ende desselben an ein Federdynamometer anschließt, das andere Ende aber durch Gewichte so stark spannt und dadurch am Umfange der Welle so viel Reibung erzeugt, bis die Welle eine verlangte Umdrehungsgeschwindigkeit annimmt. Die Differenz zwischen diesem Gewichte Q und der von dem Federdynamometer angegebenen Kraft P ist jedenfalls der Reibung F zwischen der Welle und dem Bande gleich; mißt nun noch der Umfang der Welle, $= p$ und macht die Welle während des Versuches u Umdrehungen pr. Minute, so erhält man die Leistung der Welle:

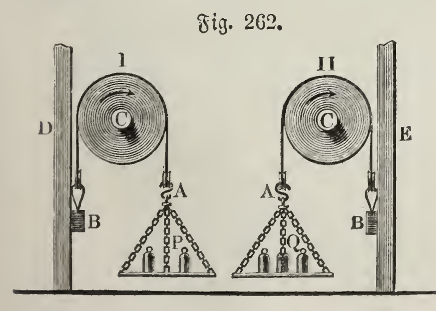
Fig. 261.



$$L = F \cdot \frac{up}{60} = \frac{up}{60}(Q - P).$$

In Ermangelung eines Federdynamometers reicht der einfache Gurt, Fig. 262, zu diesem Zwecke noch aus, wenn man den Versuch doppelt macht, und dabei das eine Ende B des Gurtes bald auf der einen Seite der Welle, bald auf der anderen Seite an einem festen Gegenstande, z. B. an den Säulen D und E befestigt. Hier bekommt man durch den einen Versuch

Fig. 262.



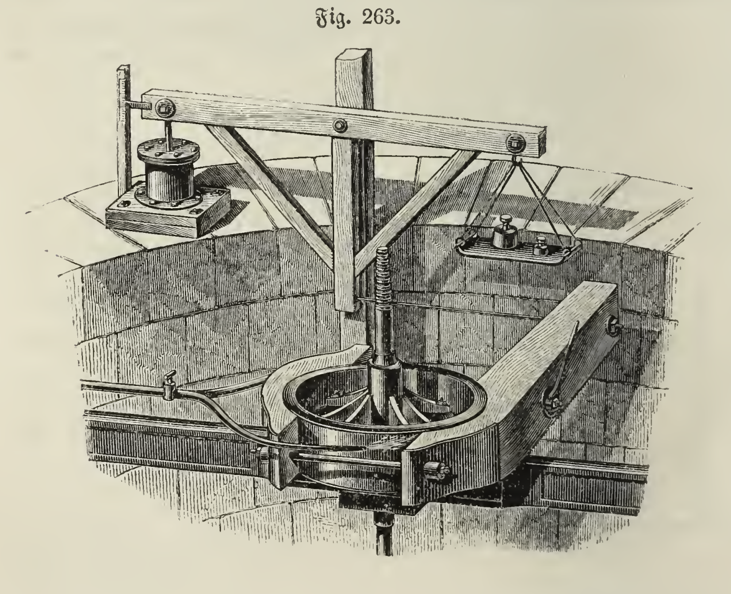
$$Q = P + F,$$

durch den anderen aber P, weil

in dem einen Falle die in der Umdrehungsrichtung der Welle wirkende Reibung F dem Gewichte auf der am Ende A hängenden Wagschale entgegenwirkt, und in dem anderen ihm zu Hülfe kommt. Uebrigens ist bei dieser zuerst vom Verfasser in Anwendung gebrachten Vorrichtung die Bestimmung der Leistung die obige. Diese Vorrichtung läßt sich, weil die Kraft immer nur an einem kleinen Hebelarme wirkt, nur zur Bestimmung kleiner Leistungen anwenden. Um Leistungen stärkerer Maschinen zu finden, hat der Verfasser statt der Wagschale in A den Lastpunkt einer einfachen Decimalwage angeschlossen, und dadurch die Spannung des Gurtes verzehnfacht. Damit durch Auflegen dieses Gurtdynamometers der Zapfendruck nicht zu sehr vergrößert werde, und sich dasselbe auch bei größeren Kräften anwenden lasse, kann man auch den Gurt ganz um die Welle schlingen, und das eine Ende nach oben, das andere aber nach unten richten.

§. 134 Kommt es darauf an, die Umdrehungskraft einer stehenden Welle, z. B. die einer Turbine, durch ein Bremsdynamometer auszumitteln, so kann man natürlich die Schale für die aufzulegenden Gewichte nicht unmittelbar an den Bremshebel hängen, sondern man muß eine Leitrolle oder einen Winkelhebel zwischen einsetzen, wodurch die Verticalkraft, mit welcher diese Gewichte niederziehen, in eine den Bremsarm ergreifende Horizontalkraft verwandelt wird. Eine monodimetrische Projection eines solchen Bremsdynamometers für eine stehende Welle führt Fig. 263 vor Augen. Dieses Dynamometer hat Herr Francis bei seinen hydraulischen Versuchen (Lowell hydraulic

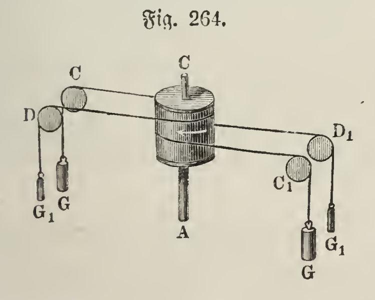
Fig. 263.



experiments) zur Bestimmung der Leistung einer Turbine von 75 Pferdekräften angewendet. (S. die deutsche Bearbeitung der Schrift über diesen Gegenstand im „Civilingenieur" Band II). Es ist AA das gußeiserne Frictions- oder Bremsrad von $5\frac{1}{2}$ Fuß Durchmesser und $2\frac{1}{4}$ Fuß Höhe, welches statt des Vorlegerades auf die Turbinenwelle CD aufgesteckt und mit derselben fest verbunden ist. Die mit Eisen beschlagenen Bremsbacken E, F werden durch zwei Schraubenbolzen von 2 Quadratzoll Querschnitt mittels des Hebels B auf das Bremsrad AA aufgepreßt, und es ist das Ende des längeren Bremsbackens F durch eine eiserne Zugstange KL mit dem Winkelhebel KOH verbunden, an dessen horizontalem Arme OH die Wagschale G zur Aufnahme der Gewichte hängt. Um die großen Schwankungen des Dynamometers u. s. w. zu verhindern, ist an einem dritten Arme OM des Winkelhebels KOH ein hydraulischer Moderator, und, um die Abweichung des Armes HM von der horizontalen Lage anzugeben, ein an einer Scala auf- und niedergehender Zeiger Z angebracht. Der Moderator besteht in der Hauptsache aus einem Teller, welcher in dem mit Wasser angefüllten Gefäße N auf- und niederbewegt wird, wobei das Wasser bald über, bald unter denselben zu treten genöthigt ist. Um der zu großen Erhitzung des Kranzes vorzubeugen, werden mittels der gegabelten Röhre R Wasserstrahlen gegen die freie Außenfläche des Bremsrades AA geführt.

Um die Leistungen kleiner Maschinenkräfte zu ermitteln, kann man auch eine Methode anwenden, welcher sich der Verfasser bei dynamometrischen Messungen an Modellrädern bedient hat (s. meine Versuche über den Stoß des Wassers, berichtet vom Herrn Prof. Zeuner im „Civilingenieur", Bd. I, 1854). Um eine Trommel B, Fig. 264, welche auf der umlaufenden Welle AC, deren Kraft man messen will, sitzt, werden zwei Riemen, Seile oder Schnüre so gelegt, daß die beiden Enden der letzteren entgegengesetzte Richtungen haben. Diese Seilenden laufen außerdem noch über die Leitrollen C, C_1 und D, D_1 und sind durch Gewichte G, G und G_1, G_1 gespannt. Wenn nun die Gewichte G und G_1 einer Schnur in Vereinigung mit der Reibung derselben am Umfange der Trommel einander das Gleichgewicht halten, so ist folglich die ganze Umdrehungskraft der Trommel:

Fig. 264.



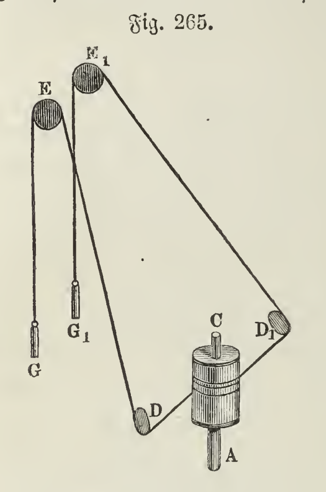
$$P = 2(G - G_1),$$

wobei natürlich G das größere, der Umdrehungsbewegung entgegengesetzt ziehende, und G_1 das kleinere, in der Richtung der Umdrehung wirkende Gewicht bezeichnet.

Anmerkung 1. Man kann auch die Drehungskraft einer Welle unmittelbar durch Gewichte bestimmen, welche man an das Ende eines Seiles oder einer Schnur hängt, welche sich auf die umlaufende Welle aufwickelt. Bei meinen dynamometrischen Versuchen an Modellrädern, (s. Weisbach's Versuche über die Leistung eines einfachen Reactionsrades, Freiberg, 1851) habe ich, um den Seitendruck durch die messende Kraft so viel wie möglich herabzuziehen, von der umlaufenden Welle AC, Fig. 265, zwei gleiche Gewichte G, G_1 auf einmal heben und zu diesem Zwecke die Schnüre, an welchen diese Gewichte hängen, mittels der Rollen D, E und D_1, E_1 auf entgegengesetzten Seiten und in entgegengesetzten Richtungen auf die Trommel B aufwickeln lassen.

Eigentlich ist auch das Dynamometer, womit man die Axenkraft der Schraubendampfschiffe bestimmt, hierher zu rechnen; es stemmt sich hier die Welle der Wasserschraube gegen einen Hebel, dessen längerer Arm mit einem spiralförmigen Federdynamometer und einem Zeichenapparat verbunden ist, welcher die Arbeit der Kraft auf den Mantel eines umlaufenden Cylinders verzeichnet (siehe The indicator and dynamometer etc., London 1847).

Fig. 265.

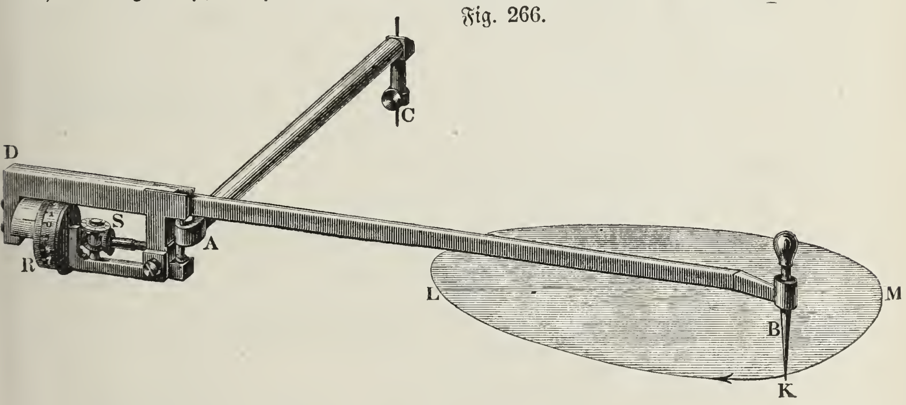


Anmerkung 2. Ueber die verschiedenen Dynamometer zum Messen der Maschinenkräfte handelt Egen in seinen Untersuchungen über den Effect einiger Wasserwerke u. s. w., nächstdem Hülsse im Artikel „Bremsdynamometer" in der allgemeinen Maschinenencyclopädie. Die Literatur über diesen Gegenstand findet man in diesen beiden Abhandlungen vollständig angegeben. Wir haben hier nur noch die neuesten Aufsätze im 88., 92. und 110. Bande von Dingler's Journal anzuführen. Besonders zeichnen sich die sich selbst regulirenden Dynamometer nach Poncelet, Saint-Leger u. s. w. aus, welche durch angebrachtes Räderwerk die Schrauben von selbst anziehen oder lösen, je nachdem der Hebel zu sinken oder zu steigen anfängt. Ueber Federdynamometer ist auch nachzusehen: Notions fondamentales de Mécanique, par Morin, Paris 1855; sowie über Dynamometer überhaupt: Prechtl's Technologische Encyclopädie, ferner Hachette: Traité élémentaire des machines. Besondere Abhandlungen über diesen Gegenstand sind oben an den betreffenden Stellen citirt worden. Ueber die Dynamometer mit Registrirapparat von Moison, Noury und Matter s. Civilingenieur, Bd. VIII, 1862.

§. 135 **Planimeter.** Bei Anwendung des Zeichenapparates zu dynamometrischen Versuchen kann man die Bestimmung der Flächenräume, wodurch die mechanische Arbeit einer Maschine ausgedrückt wird, einfach durch ein sogenanntes Planimeter (franz. planimètre; engl. planimeter) bewirken. Unter den verschiedenen Planimetern von Ernst, Wetli, Hansen, Oppikofer und Amsler ist das letztere oder sogenannte Polarplanimeter von Amsler eines der einfachsten, wenn auch vielleicht weniger schärfsten. Eine monodimetrische Abbildung dieses Planimeters führt Fig. 266 vor Augen.

Es ist C eine Nadel, welche fest in den Tisch eingestoßen wird und um welche sich das Instrument dreht, während man mit dem Stifte B am Umfange der Figur KLM, deren Inhalt durch das Instrument bestimmt werden soll, hinfährt. Die beiden Arme AC und AB, welche die Spitze C und den Stift B tragen, sind durch eine Axe A mit einander vereinigt, und die Verlängerung AD des Armes AB trägt ein Laufrädchen R, welches sich auf dem Papiere fortwälzt, während der Stift am Umfange der Figur hingeführt wird. Um die Umdrehungszahl dieses Rädchens während dieser Umschreibung der Figur ablesen zu können, ist nicht allein auf dem Rädchen R selbst eine Eintheilung, sondern auch noch ein zweites eingetheiltes Rädchen S angebracht, welches mittels einer Schraube ohne Ende von der Welle

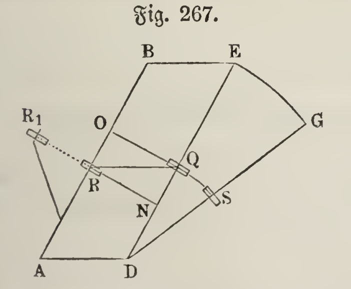
Fig. 266.



des ersteren so umgedreht wird, daß es erst bei zehn Umdrehungen des ersteren eine vollständige Umdrehung macht.

Wie der Inhalt der vom Stifte B umschriebenen ebenen Figur von der Umdrehungszahl des auf der Ebene dieser Figur fortrollenden Rädchens abhängt, läßt sich elementar auf folgende Weise darthun. Wenn eine Gerade $AB = b$, Fig. 267, parallel mit sich selbst fortgeführt wird, und dadurch in die Lage DE kommt, so beschreibt ein auf ihr sitzendes Rädchen R einen Weg $RQ = AD = BE$, welcher aus den Wegen RN und RO zusammengesetzt ist, wovon der erstere auf AB rechtwinkelig steht und der andere die Richtung von AB und DE hat. Vermöge des Fortrollens des Rädchens auf der Ebene von $ABDE$ dreht sich der Umfang dieses Rädchens um $RN = \varphi_1 r$, wo φ_1 den Umdrehungsbogen, und r den

Fig. 267.



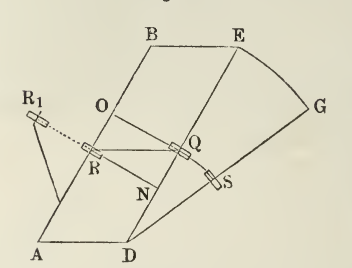
Radius des Rädchens bezeichnet. Nun ist aber $AB \,.\, RN = b\varphi_1 r = \varphi_1 br$ der Inhalt P des Parallelogrammes AE, folglich auch

$$\varphi_1 = \frac{P}{br}$$

ein Maß dieses Inhaltes.

Dreht sich ferner DE noch um D, so durchläuft das Rädchen einen Bogen QS, und es beschreibt hierbei diese Linie den Sector DEG, dessen Inhalt

Fig. 268.



$$S = \frac{DE \,.\, EG}{2}$$
$$= {}^1/_2\, \overline{DE}^2 \,.\, \psi$$
$$= {}^1/_2\, \psi b^2$$

ist, wenn ψ das Bogenmaß des Centriwinkels EDG bezeichnet. Es ist folglich der Inhalt der ganzen Figur $ABEGD$:

$$F_1 = P + S = \varphi_1 br + {}^1/_2\, \psi b^2.$$

Ist der Umdrehungswinkel des Rädchens beim Durchlaufen des Bogens $QS, = \varphi_2$, so hat man den Umdrehungswinkel beim Durchlaufen des Weges $RQ + QS$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \text{ und daher umgekehrt:}$$
$$\varphi_1 = \varphi - \varphi_2,$$

oder da, wenn der Abstand $AR = DQ = DS$ mit c bezeichnet wird,

$$\overline{QS} = \psi c = \varphi_2 r, \text{ also}$$
$$\varphi_2 = \frac{c}{r}\, \psi \text{ ist,}$$
$$\varphi_1 = \varphi - \frac{c}{r}\, \psi \text{ und}$$
$$F_1 = \left(\varphi - \frac{c}{r}\, \psi\right) br + {}^1/_2\, \psi b^2 = \varphi rb + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc),$$

oder:

$$F_1 = bs_1 + \frac{\psi}{2}\,(b^2 - 2bc),$$

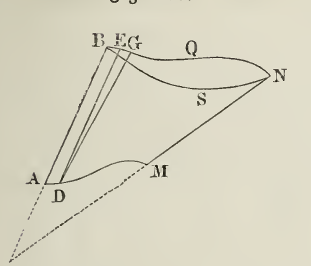
wenn $s_1 = \varphi r$ den ganzen Umdrehungsbogen des Rädchens bezeichnet.

Sind die Wege $AD = BE$ und EG unendlich klein, so ist $ABEGD$ nur das Element einer endlichen Figur $ABNM$, Fig. 269, welche von AB bei beliebiger Verrückung auf der Ebene des Papiers beschrieben wird, und es ist in der Formel

$$F_1 = bs_1 + \frac{\psi}{2}\,(b^2 - 2bc)$$

statt ψ der Bogen des ganzen Winkels BON einzusetzen, welchen die Richtungen der beiden Grenzlagen AB und MN der erzeugenden Linie mit einander einschließen, wenn F_1 den Inhalt der ganzen Figur $ABQNM$ angeben soll. Bewegt man die Linie MN rückwärts nach AB, so beschreibt sie irgend eine Fläche

Fig. 269.



$$F_2 = bs_2 + \frac{\psi}{2}(b^2 - 2bc),$$

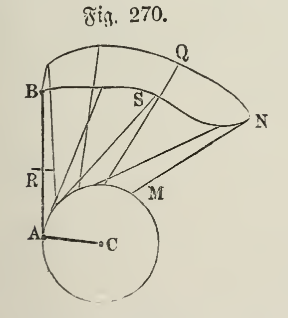
wo s_2 den in umgekehrter Richtung zu messenden Umdrehungsbogen des Rädchens bezeichnet; und bleibt hierbei der untere Endpunkt der Erzeugungslinie auf dem ersten Bogen AM, so liegt zwischen den Wegen BQN und NSB eine Fläche, deren Inhalt F die Differenz von F_1 und F_2 ist, und folglich einfach durch

$$F = F_1 - F_2 = b(s_1 - s_2) = bs$$

ausgedrückt wird, wobei s die von der Eintheilung des Rädchens angegebene Differenz der Umdrehungsbögen s_1 und s_2 oder den algebraischen Umdrehungsbogen bei der Umschreibung der Figur $BQNSB$ bezeichnet.

Bei dem Amsler'schen Planimeter beschreibt der Endpunkt A der Linie oder des Lineales AB einen Kreisbogen AM, Fig. 270; übrigens ist auch hier der Flächenraum der Figur $BQNS$, deren Umfang der Stift B durchläuft, dem Umdrehungsbogen s des Rädchens R proportional und

Fig. 270.



$$\text{I.} \quad F = bs.$$

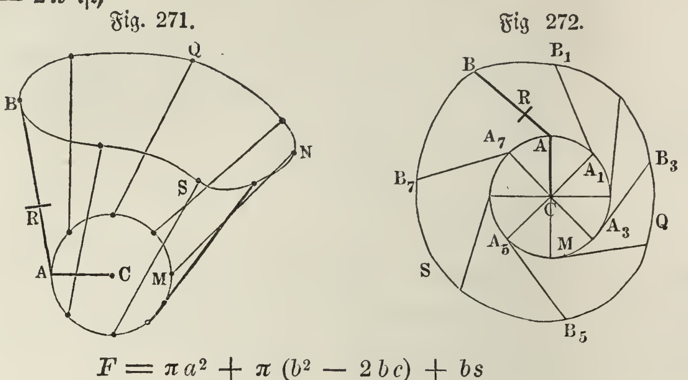
Diese Formeln gelten auch dann noch, wenn das Rädchen nicht auf der Stange AB selbst, sondern wie R_1, Fig. 268, neben derselben angebracht ist, nur hat man dann unter c nicht die Entfernung AR_1, sondern die Projection AR derselben in AB zu verstehen.

Die letzte Formel setzt voraus, daß der Punkt A bei Umschreibung der Figur einen und denselben Kreisbogen AM hin und zurück durchläuft; geht aber dieser Punkt hierbei stetig im Kreise herum, wie die Fig. 271 (a. f. S.) und Fig. 272 vor Augen führen, so ist noch die Fläche πa^2 des Kreises CAM, dessen Halbmesser CA durch a bezeichnet wird, in Betracht zu ziehen. Es ist deshalb in dem Falle von Fig. 271, wo C außerhalb der Figur $BQNS$ liegt,

$$F = \pi a^2 + bs,$$

und im zweiten Falle, Fig. 271, wo C von der Figur BQS umschlossen wird, und AB nach und nach eine vollständige Umdrehung macht, also $\psi = 2\pi$ ist,

Fig. 271. Fig 272.



$$F = \pi a^2 + \pi (b^2 - 2bc) + bs$$
$$= \pi (a^2 + b^2 - 2bc) + bs.$$

Der Fall in Fig. 271 setzt voraus, daß $b > 2a$, also $a < \frac{1}{2} b$ sei. Ist daher, wie gewöhnlich, $a > \frac{1}{2} b$, so kommt derselbe gar nicht vor. Wenn im zweiten Falle die Fläche BQS vom Kreise AM umschlossen wird, so ist bs negativ, und daher:

$$F = \pi (a^2 + b^2 - 2bc) - bs.$$

Anmerkung. Es ist nachzulesen: Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen, von Bauernfeind, München 1853, sowie die unter folgendem Titel erschienene Schrift: Mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes u. s. w. ebener Figuren, von Amsler, Schaffhausen 1856.

Zweites Capitel.

Von den Menschen- und Thierkräften, sowie von den Maschinen zur Aufnahme derselben.

§. 136 **Thierische Kräfte.** Die thierischen Kräfte oder das Arbeitsvermögen der Thiere ist allerdings nicht allein bei Individuen verschiedener Gattungen, sondern auch bei Geschöpfen einer und derselben Species verschieden. Bei Thieren gleicher Art hängt das Arbeitsvermögen von der besonderen Constitution des Individuums, von dessen Alter und Gesundheits-

zustand, von dessen Willen oder Beaufsichtigung, dann aber auch noch davon ab, ob das Thier hinreichend in nahrhaftem Futter erhalten wird, ob es an die Arbeit, welche es verrichtet, gewöhnt ist u. s. w. Auf alle diese Verschiedenheiten können wir, da sie auf unendlich viele Abstufungen führen, nicht Rücksicht nehmen, wir müssen vielmehr bei unseren Berechnungen von jeder Gattung ein Thier von mittlerer Stärke und Behendigkeit voraussetzen, welches an die Arbeit, die es verrichtet, gewöhnt ist, dabei im mittleren Lebensalter steht, sich in gesundem Zustande befindet und in gutem nahrhaften Futter gehalten wird.

Noch hängt aber auch das Arbeitsvermögen eines Thieres von der Kraft, Geschwindigkeit und Arbeitszeit ab; und es fällt dieses bei einer mittleren Kraft, Geschwindigkeit und täglichen Arbeitszeit am größten aus. Je größer die Kraft ist, welche ein Geschöpf ausübt, desto kleiner fällt die Geschwindigkeit aus, und umgekehrt, je größer die Geschwindigkeit ist, desto kleiner stellt sich die damit ausgeübte Kraft heraus; ja es giebt eine Maximalkraft, wo die Geschwindigkeit und also auch die Arbeit Null ist, und ebenso eine Maximalgeschwindigkeit, bei welcher die Kraft und also die Arbeit wiederum Null ausfällt. Man sieht hieraus, daß man die animalischen Motoren nur mit einer mittleren Kraft und einer mittleren Geschwindigkeit arbeiten lassen soll, und kann übrigens noch leicht ermessen, daß man dieselben auch nur auf eine mittlere Zeit in Anspruch nehmen darf, um von denselben ein möglichst großes Arbeitsquantum zu gewinnen. Uebrigens folgt aus unzähligen Erfahrungen, daß kleine Abweichungen von der mittleren Kraft, mittleren Geschwindigkeit und mittleren Arbeitszeit, namentlich wenn die Verrichtung zur Gewohnheit geworden ist, eine beachtungswerthe Verminderung der Leistung nicht verursachen. Auch ist es eine Thatsache, daß es keineswegs vortheilhaft ist, die animalischen Motoren mit constanter Kraft und Geschwindigkeit ohne Unterbrechung wirken zu lassen, sondern daß das animalische Arbeitsvermögen besser benutzt oder weniger Ermüdung herbeigeführt wird, wenn das arbeitende Geschöpf in Pausen arbeitet, die um so öfter zu wiederholen sind, je mehr die wirklich verrichtete Arbeit in der Zeiteinheit von der mittleren Arbeit abweicht.

Das Hauptmoment bei Beurtheilung der Wirkungen animalischer Motoren ist die tägliche Leistung. Vergleicht man dieselbe mit den täglichen Unterhaltungs- und, nach Befinden, mit den täglichen Zinsen der Ankaufskosten, so erhält man ein Maß zur Vergleichung der Werthe verschiedener Motoren unter einander.

Die Art und Weise, wie Menschen und Thiere mechanische Arbeiten ver- §. 137
richten, ist sehr verschieden. Die animalischen Motoren arbeiten entweder mit oder ohne Maschinen; und zwar die Menschen mit den Händen oder mit den

Füßen oder mit beiden zugleich; die Thiere natürlich nur mit den Füßen. Bei den so sehr verschiedenen Verrichtungen ist jedoch der Grad der Ermüdung der geleisteten mechanischen Arbeit nicht proportional, manche Arbeiten scheinen mehr Ermüdung herbeizuführen als andere, oder was dasselbe ist, bei manchen Verrichtungen fällt das mechanische Arbeitsquantum größer oder kleiner aus, als bei anderen Verrichtungen. Auch lassen sich manche Arbeiten gar nicht auf eine und dieselbe Weise messen, wie z. B. das Tragen auf horizontalen Wegen und das Aufheben einer Last. Nach den seither gefaßten Begriffen ist die Arbeit beim Tragen auf horizontalen Wegen Null, weil hierbei in der Richtung der Kraft, d. i. vertical, kein Weg zurückgelegt wird (Bd. I, §. 83), wogegen beim Aufheben oder Aufziehen einer Last die Arbeit bestimmt das Product aus Gewicht und Steighöhe desselben ist. Gleichwohl führt das Gehen oder Tragen ebenfalls zur Ermüdung wie das Aufheben; d. h. es wird durch jenes auch das tägliche Arbeitsvermögen consumirt wie durch dieses; es muß daher auch der einen Thätigkeit ein tägliches Arbeitsquantum zukommen wie der anderen, wenn auch diese Arbeiten selbst wesentlich verschieden sind.

Erfahrungsmäßig geht ein Mensch leer auf horizontalem Wege täglich 10 Stunden lang mit $4^3/_4$ Fuß Geschwindigkeit; nimmt man nun sein Gewicht zu 140 Pfd. an, so erhält man als tägliches Arbeitsquantum den Werth:

$$140 \,.\, 4{,}75 \,.\, 10 \,.\, 60 \,.\, 60 = 23'940000 \text{ Fußpfund.}$$

Trägt der Mensch 80 Pfund auf dem Rücken, so geht er täglich 7 Stunden lang auf horizontalem Wege mit 2,4 Fuß Geschwindigkeit, und leistet daher täglich, wenn man sein Gewicht unbeachtet läßt, die Arbeit:

$$80 \,.\, 2{,}4 \,.\, 7 \,.\, 60 \,.\, 60 = 4'838400 \text{ Fußpfund.}$$

Ein Pferd trägt auf dem Rücken 240 Pfund täglich 10 Stunden lang im Schritt mit $3^1/_2$ Fuß Geschwindigkeit, und leistet folglich in einem Tage:

$$240 \,.\, 3{,}5 \,.\, 10 \,.\, 60 \,.\, 60 = 30'240000 \text{ Fußpfund,}$$

also mehr als sechsmal so viel als ein Mensch beim Tragen. Hat das Pferd nur 160 Pfund auf dem Rücken, so läuft es täglich 7 Stunden im Trabe mit 7 Fuß Geschwindigkeit, und leistet daher nur

$$160 \,.\, 7 \,.\, 7 \,.\, 60 \,.\, 60 = 28'224000 \text{ Fußpfund}$$

täglich.

Viel kleiner fallen die Arbeiten beim Heben von Lasten aus, weil hier mechanische Arbeit im eigentlichen Sinne zu nehmen, also der Weg in Hinsicht auf die Kraftrichtung einzuführen ist.

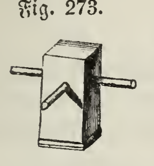
Steigt ein Mensch auf einer Treppe oder Auffahrt leer hinauf, so ist bei einer täglichen Arbeitszeit von 8 Stunden die Geschwindigkeit, in verticaler Richtung gemessen, = 0,48 Fuß, daher sein tägliches Arbeitsquantum:

$$= 140 \,.\, 0{,}48 \quad 8 \,.\, 60 \,.\, 60 = 1'935360 \text{ Fußpfund.}$$

Hiernach kann ein Mensch täglich horizontal $12\frac{1}{2}$ mal so viel Weg zurücklegen als vertical.

Bei dem hiesigen Teichbaue hat der Verfasser beobachtet, daß vier kräftige und eingeübte Arbeiter einen Rammklotz, wie Fig. 273, welcher 112 Pfund wiegt, in jeder Minute genau 34mal 4 Fuß hoch heben, dabei nach 260 Secunden Arbeit jedesmal wieder 260 Secunden Ruhezeit nöthig haben und im Ganzen täglich nur 5 Stunden arbeiten; es stellt sich daher hier die tägliche Arbeit eines Menschen

Fig. 273.



$$= \frac{112}{4} \cdot 4 \cdot 34 \cdot 5 \cdot 60 = 1'142400 \text{ Fußpfund}$$

heraus.

Anmerkung 1. Ausführlichere Zusammenstellungen über die Leistungen animalischer Motoren theilt der „Ingenieur" mit. Uebrigens findet man auch die Leistungen der Thiere bei Maschinen in der Folge bei den betreffenden Maschinen angegeben.

Anmerkung 2. Die Leistungen der Menschen und Thiere sind noch lange nicht vollständig genug bekannt. Die Leistungen ungeübter oder unter ungünstigen Umständen arbeitender Menschen (bei großer Hitze, Regen u. s. w.) können um die Hälfte kleiner ausfallen als die Leistungen tüchtiger und eingeübter Arbeiter. Die erste vollständige Untersuchung über die Leistung der animalischen Motoren lieferte Coulomb (siehe Théorie des machines simples). Vor ihm hatten sich vorzüglich Desaguliers (Cours de Physique expér.) und Schulze (Abhandlungen der Berliner Akademie, 1783) mit der Bestimmung der thierischen Kräfte beschäftigt. In den neueren Zeiten sind die Erfahrungen Coulomb's von Vielen vervollständigt worden. Siehe Hachette, Traité élémentaire des machines. Bouguer, Euler und Gerstner haben versucht, die Wirkungen der animalischen Motoren auf Gesetze zurückzuführen. Man kann jedoch behaupten, daß diese Aufgabe selbst durch Gerstner (Mechanik, Bd. I) noch keineswegs als gelöst anzusehen ist.

Kraftformeln. Kraft und Geschwindigkeit bei der Arbeitsverrichtung animalischer Wesen stehen zwar im genauesten Zusammenhange mit einander, jedoch ist das Gesetz dieses Zusammenhanges keineswegs bekannt, und noch viel weniger aus Vernunftgründen abzuleiten. Die empirischen Formeln, welche Bouguer und Euler angegeben haben, entsprechen der Wahrheit gewiß nur annähernd. Ist K_0 die größte Kraft, welche ein lebendes Wesen ohne Geschwindigkeit ausüben kann, und c_0 die größte Geschwindigkeit ohne Kraftäußerung, so hat man für eine andere Geschwindigkeit v die entsprechende Kraft, §. 138

nach Bouguer:

$$P = \left(1 - \frac{v}{c_0}\right) K_0,$$

nach Euler 1):

$$P = \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) K_0,$$

nach demselben 2):

$$P = \left(1 - \frac{v}{c_0}\right)^2 K_0.$$

Von diesen drei Formeln ist die erste die einfachste, und nach Gerstner auch diejenige, welche mit den Erfahrungen am meisten übereinstimmt. Nach den Beobachtungen Anderer, z. B. Schulze's, scheint sich hingegen die dritte Formel mehr an die Erfahrungen anzuschließen. Sieht man v als Abscisse und P als Ordinate einer Curve an, so entspricht der ersten Formel eine Gerade AB, Fig. 274, der zweiten aber ein concaver Parabelbogen AP_2B und der dritten ein convexer Parabelbogen AP_3B, und es liegt allemal die Ordinate MP_1 der Geraden zwischen den Ordinaten MP_2 und MP_3 beider Parabeln mitten inne, z. B. der Abscisse $OM = v = \frac{1}{2} c_0$ entsprechen die Ordinaten $\overline{MP_1} = \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \overline{OA}$, ferner $\overline{MP_2} = \frac{3}{4} K = \frac{3}{4} \overline{OA}$, und $\overline{MP_3} = \frac{1}{4} K = \frac{1}{4} OA$. Es giebt also die Bouguer'sche Formel Kraftwerthe, welche zwischen den von den Euler'schen Formeln zu erhaltenden Werthen mitten inne liegen, und man kann sich derselben wenigstens so lange bedienen, als keine besonderen Gründe für die Richtigkeit einer der Euler'schen Formeln angegeben werden können. Führen wir in der Bouguer'schen Formel statt der Maximalwerthe K_0 oder c_0 ihre Hälften oder die mittleren Werthe $K = \frac{1}{2} K_0$ und $c = \frac{1}{2} c_0$ ein, so erhalten wir die zuerst von Gerstner angewendete Formel:

Fig. 274.

$$P = \left(1 - \frac{v}{2c}\right) 2K,$$

oder

$$1.)\ P = \left(2 - \frac{v}{c}\right) K,$$

sowie umgekehrt:

$$2.)\ v = \left(2 - \frac{P}{K}\right) c.$$

Fig. 275.

Wenn nun auch diese Formel für Grenzwerthe von v und P weniger Schärfe oder Sicherheit gewährt, so läßt sich wenigstens erwarten, daß sie für Werthe, welche von den mittleren nicht bedeutend abweichen, mit genügender Genauigkeit zu gebrauchen sei, zumal, da bei gleichen Werthen von c und K beide Euler'sche Curven $A_1 P B_1$ und $A_2 P B_2$, Fig. 275, von der Bouguer'schen Geraden APB in P tangirt werden.

Die mechanische Arbeit pr. Secunde ist hiernach:

$$Pv = \left(2 - \frac{v}{c}\right) v K.$$

Da sich $\left(2 - \frac{v}{c}\right) v K$ auch $= (2c - v)\, v \frac{K}{c}$ setzen läßt, so fällt wie in Band I, §. 500 die mechanische Arbeit am größten aus, wenn $v = c$, also auch

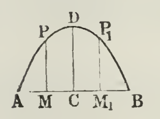
$$P = K,$$

d. i. Geschwindigkeit und Kraft die mittleren sind, nämlich

$$L = Pv = Kc.$$

Sowie man aber mit einer größeren oder kleineren Geschwindigkeit, oder mit einer kleineren oder größeren Kraft arbeiten läßt, erhält man eine Leistung $L = Pv$ kleiner als Kc. Sieht man wieder die Geschwindigkeiten als Abscissen, und die Arbeiten als Ordinaten an, so bekommt man in der sich herausstellenden Curve eine Parabel ADB, Fig. 276, und man sieht nun leicht ein, daß sowohl der Abscisse $AM < AC$ als auch der Abscisse $AM_1 > AC$ eine kleinere Ordinate MP, M_1P_1 zukommt, als der Abscisse $\overline{AC} = c$. Für $v = \frac{c}{2}$, sowie für $v = {}^3/_2\, c$ folgt z. B.:

Fig. 276.



$$L = {}^3/_4\, Kc, \text{ also } \overline{MP} = \overline{M_1P_1} = {}^3/_4\, \overline{CD}.$$

Nach den Angaben von Gerstner gelten, namentlich für Zugkräfte, die in folgender Tabelle enthaltenen Werthe:

Geschöpfe.	Gewicht.	Mittlere Kraft K in Pfund.	Mittlere Geschwindigkeit c Fuß.	Mittlere Arbeitszeit t Stunden.	Leistung pr. Sec. Fußpfund.	Tägliche Leistung Fußpfund.
Mensch. .	140	28	2,5	8	70	2'016000
Pferd . .	750	112	4	8	448	12'902400
Ochs. . .	600	112	2,5	8	280	8'064000
Esel . . .	360	70	2,5	8	175	5'040000
Maulesel .	500	94	3,5	8	329	9'475200

Beispiele. 1. Nach der vorstehenden Tabelle leistet ein Mensch bei einer mittleren Kraft von 28 Pfund und mittleren Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fuß täglich 2'016000 Fußpfund; soll er aber mit 3 Fuß Geschwindigkeit arbeiten, so kann er nur die Kraft

$$P = \left(2 - \frac{3}{2{,}5}\right) . 28 = 22{,}4 \text{ Pfund}$$

ausüben, und es wird seine tägliche Leistung nur

$$22{,}4 . 3 . 8 . 60 . 60 = 1'935360 \text{ Fußpfund}$$

betragen.

2. Wenn ein Zugpferd 150 Pfund Kraft ausüben soll, so kann es nur mit der Geschwindigkeit

$$v = \left(2 - \frac{150}{112}\right) . 4 = 2{,}643 \text{ Fuß}$$

arbeiten, weswegen seine Leistung pr. Secunde nur

$$2{,}643 . 150 = 396{,}5 \text{ Fußpfund}$$

beträgt, also um 448 — 396,5 = 51,5 Fußpfund kleiner ist als bei 4 Fuß Geschwindigkeit.

Anmerkung. Für die Leistungen der Pferde giebt Fourier eine complicirte Formel in Annales des ponts et chaussées, 1836; siehe auch Crelle's Journal der Baukunst. Bd. XII, 1838.

§. 139 **Arbeit beim Steigen.** Noch kann man, nach Gerstner, die Leistungen von animalischen Motoren bei der Bewegung auf schiefen Ebenen berechnen. Bezeichnet G das Gewicht des Motors, Q die von ihm getragene Last und α den Neigungswinkel der schiefen Ebene, auf welcher der Motor mit der Last hinaufsteigt, so ist die Kraft $= (Q + G)\, sin. \alpha$ (s. Theorie der schiefen Ebene, Bd. I, §. 146), und daher zu setzen:

$$\left(2 - \frac{v}{c}\right) K = (Q + G)\, sin. \alpha.$$

Hiernach folgt die Last, mit welcher ein animalischer Motor auf einer schiefen Ebene von gegebener Neigung emporsteigen kann, sowie umgekehrt, der Neigungswinkel, welcher einer gegebenen Last entspricht; es ist nämlich:

$$sin. \alpha = \frac{\left(2 - \frac{v}{c}\right) K}{Q + G},$$

darnach für $Q = 0$, und $v = c$, also leer, und bei der mittleren Geschwindigkeit:

$$sin. \alpha = \frac{K}{G}.$$

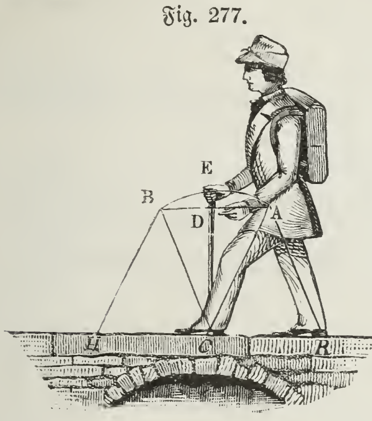
Nun ist aber das Gewicht eines Thieres fast immer fünfmal so groß als seine mittlere Kraft; es ist daher

$$sin. \alpha = \frac{1}{5} \text{ und } \alpha = 11\frac{1}{2}^0$$

der Neigungswinkel derjenigen schiefen Ebene, auf welcher ein Thier bei mittlerer Kraftanstrengung hinaufsteigt.

Anmerkung. Bei dem Ausschreiten auf horizontalem Wege HR, Fig. 277, dreht sich der ganze Körper um den Fußpunkt C, wobei der Schwerpunkt des Körpers um eine Höhe $DE = h$ steigt, die sich aus der Schenkellänge $CA = CB = l$ und der Schrittlänge $CH = CR = s$ durch die bekannte Formel

Fig. 277.



$$DE = \frac{\overline{AD}^2}{2\,AC},$$

d. i.

$$h = \frac{s^2}{8\,l}$$

leicht bestimmen läßt. Ist nun G das Gewicht des Menschen und Q die von demselben getragene Last, so hat man die von demselben bei jedem Schritte zu verrichtende Arbeit:

$$L = (G + Q)\,h = \frac{(G + Q)\,s^2}{8\,l},$$

also die entsprechende Kraft:

$$P = \frac{L}{s} = \frac{(G + Q)\,s}{8\,l}.$$

Setzen wir die Schenkellänge $l = 3$ Fuß und die Schrittlänge $s = 2$ Fuß, so haben wir hiernach die Kraft:

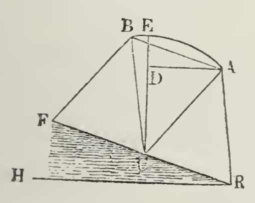
$$P = \frac{2\,(G + Q)}{8\,.\,3} = \tfrac{1}{12}\,(G + Q) = 0{,}08333\,(G + Q),$$

also für $Q = 0$ und $G = 140$ Pfund,

$$P = \tfrac{1}{12}\,G = 11{,}67 \text{ Pfund},$$

Es ist folglich der Arbeitsaufwand beim Ausschreiten einer horizontalen Strecke s gleich dem Arbeitsaufwand beim senkrechten Steigen auf die Höhe $\frac{1}{12}\,s$.

Fig. 278.



Hiernach wäre also die Anstrengung, um sich selbst auf horizontalem Wege fortzubewegen, bei gleichem Wege eben so groß, als diejenige, welche man nöthig hat, ein Gewicht von $11\frac{2}{3}$ Pfund zu heben.

Beim Hinaufsteigen auf einer schwach ansteigenden Ebene FR, Fig. 278, ist, wenn α den Steigwinkel FRH dieser Ebene und β den Drehungswinkel ACB bezeichnen, die Steighöhe eines Schrittes

$$DE = h = CE - CD = CE\,(1 - cos.\,ACD) = l\left[1 - cos.\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\right]$$
$$= l\left(1 - cos.\,\alpha\,.\,cos.\,\frac{\beta}{2} + sin.\,\alpha\,.\,sin.\,\frac{\beta}{2}\right),$$

annähernd, bei kleinem Steigwinkel α:

$$h = l\left(1 - cos.\,\frac{\beta}{2} + sin.\,\alpha\;sin.\,\frac{\beta}{2}\right) = l\left(\frac{s^2}{8\,l^2} + \frac{s}{2\,l}\,sin.\,\alpha\right)$$
$$= \frac{s}{2}\left(\frac{s}{4\,l} + sin.\,\alpha\right).$$

Es ist folglich die mechanische Arbeit bei jedem Schritte:

$$L = (G + Q)\,h = (G + Q)\left(\frac{s}{4\,l} + sin.\,\alpha\right)\frac{s}{2},$$

und die mittlere Kraft:

$$P = \frac{1}{2} (G + Q) \left(\frac{s}{4l} + sin. \alpha\right).$$

Für das Herabsteigen auf der schiefen Ebene ist α negativ, daher die Kraft:

$$P = \frac{1}{2} (G + Q) \left(\frac{s}{4l} - sin. \alpha\right).$$

Hiernach wäre allerdings für $sin. \alpha = \frac{s}{4l}$ die Kraft = Null. Nimmt man wieder $l = 3$ und $s = 2$ Fuß, so erhält man:

$$sin. \alpha = \frac{1}{6} = 0{,}1666, \text{ d. i.}$$
$$\alpha = 9\frac{1}{2} \text{ Grad},$$

den Neigungswinkel, bei welchem wenigstens das Herabsteigen am leichtesten wird.

Ist der Steigwinkel $\alpha = \frac{\beta}{2}$, so hat man die Kraft zum Aufsteigen:

$$P = \frac{(G + Q)\, s}{4l},$$

und ist $\alpha > \frac{\beta}{2}$, d. i. $> \frac{s}{2l}$, in Zahlen $\alpha > \frac{1}{3}$, also $\alpha^0 > 19$ Grad, so fällt einfach:

$$P = (G + Q)\, sin. \alpha \text{ aus.}$$

§. 140 **Arbeit an Maschinen.** Wenn man, nach Gerstner, der Arbeitszeit z denselben Einfluß auf das tägliche Arbeitsquantum beimißt, wie der Geschwindigkeit, so hat man für die Kraft zu setzen:

$$P = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) K,$$

und erhält hiernach die tägliche Leistung:

$$L = \left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) K v z.$$

Jedenfalls ist die Leistung am größten, und zwar $= Kct$, wenn das Thier nicht allein mit der mittleren Geschwindigkeit und Kraft arbeitet, sondern auch die mittlere Arbeitszeit innehält. Uebrigens ist nicht außer Acht zu lassen, daß diese Formel bloß für solche Werthe von v, z und P hinreichende Genauigkeit gewährt, welche nicht sehr von den mittleren Werthen c, t und K abweichen.

Herr Maschek empfiehlt statt der obigen Kraftformel von Gerstner den einfacheren Ausdruck:

$$P = \left(3 - \frac{v}{c} - \frac{z}{t}\right) K,$$

der allerdings zum Rechnen sehr bequem ist. S. Neue Theorie der menschlichen und thierischen Kräfte u. s. w. von F. J. Maschek, Prag u. s. w.

In der Regel wird man die Thiere während der mittleren Arbeitszeit von 8 bis 10 Stunden arbeiten lassen, und daher auf den Factor $\left(2 - \frac{z}{t}\right)$

nicht weiter Rücksicht zu nehmen haben, also die tägliche Leistung

$$L = \left(2 - \frac{v}{c}\right) K v z$$

setzen können. Arbeitet nun aber ein Thier an einer Maschine, so wird sich seine Kraft P in eine Nutzlast P_1 und eine Nebenlast P_2 zerlegen, also

$$P = P_1 + P_2$$

zu setzen sein, wofern wir beide auf den Kraftpunkt reducirt uns denken. Auch wird in der Regel, wie wir in der Folge wiederholt sehen können, die Nebenlast P_2 aus einem constanten und schon bei der unbelasteten Maschine vorkommenden Theile R und aus einem von der Nutzlast abhängigen und dieser genau oder wenigstens annähernd proportionalen Theile δP_1, wo δ einen Erfahrungscoefficienten bezeichnet, bestehen, es wird also

$$P_2 = R + \delta \,.\, P_1,$$

und sonach

$$P = (1 + \delta)\, P_1 + R,$$

also auch

$$\left(2 - \frac{v}{c}\right) K = (1 + \delta)\, P_1 + R$$

zu setzen sein.

Die Totalleistung pr. Secunde ist nun:

$$P v = \left(2 - \frac{v}{c}\right) K v = (1 + \delta)\, P_1 v + R v,$$

und daher die Nutzleistung:

$$P_1 v = \frac{(2K - R)\, v - \frac{K v^2}{c}}{1 + \delta} = \left[\left(2 - \frac{R}{K}\right) c - v\right] v \cdot \frac{K}{(1 + \delta)\, c}.$$

Damit diese Leistung so groß wie möglich ausfalle, muß (s. §. 138)

$$v = \tfrac{1}{2}\left(2 - \frac{R}{K}\right) c = \left(1 - \frac{R}{2K}\right) c,$$

also die Geschwindigkeit kleiner als die mittlere, und zwar um so kleiner sein, je größer der constante Theil R der Nebenlast ist. Die entsprechende Kraft ist hiernach:

$$P = \left(1 + \frac{R}{2K}\right) K = K + \frac{R}{2},$$

also größer als die mittlere Kraft, die Nutzlast hingegen folgt:

$$P_1 = \frac{K - \frac{R}{2}}{1 + \delta},$$

die Totalleistung stellt sich

$$P v = \left[1 - \left(\frac{R}{2K}\right)^2\right] K c,$$

die Nutzleistung aber

$$P_1 v = \left(1 - \frac{R}{2K}\right)^2 \frac{K c}{1 + \delta},$$

und endlich der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{R}{2K}\right)^2}{1 + \delta}$$

heraus.

Beispiel. Wenn bei einer durch zwei Pferde in Umdrehung zu setzenden Maschine die auf den Kraftpunkt reducirte constante oder der unbelasteten Maschine entsprechende Nebenlast 60 Pfund beträgt, so hat man die zu fordernde Geschwindigkeit der Pferde, da $K = 2 . 112 = 224$ Pfund, und $c = 4$ Fuß zu setzen ist:

$$v = (1 - {}^{60}/_{448})\, c = {}^{97}/_{112} \,.\, 4 = 3{,}464 \text{ Fuß},$$

ferner die Kraft der Pferde:

$$P = 224 + {}^{60}/_{2} = 254 \text{ Pfund},$$

also die eines Pferdes:

$$\tfrac{1}{2} P = 127 \text{ Pfund}.$$

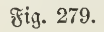
Ist nun noch der veränderliche Theil der Nebenlast 15 Procent der Nutzlast, so hat man $\delta = 0{,}15$ und daher die aufzulegende Nutzlast:

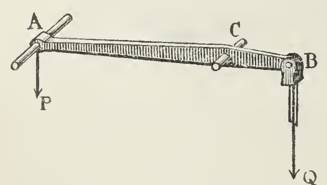
$$P_1 = \frac{224 - 30}{1{,}15} = 169 \text{ Pfund},$$

und endlich den Wirkungsgrad der Maschine:

$$\eta = ({}^{97}/_{112})^2 : 1{,}15 = 0{,}652.$$

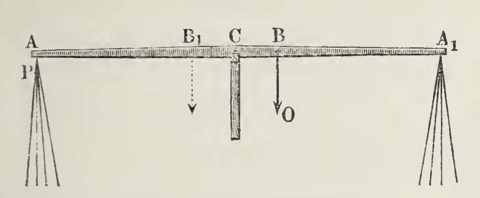
§. 141 **Hebel.** Die animalischen Motoren arbeiten entweder an Hebeln oder an Radwellen. Die letzteren sind entweder liegend, oder stehend, oder gegen den Horizont geneigt. Zunächst ist von dem Hebel als Maschine zur Aufnahme der Menschenkraft die Rede. Die allgemeine Theorie dieser Maschine ist aus Band I, §. 135 und §. 187 bekannt. Der Hebel ist entweder ein einfacher, wie ACB, Fig. 279, oder ein doppelter, wie $ACBA_1$, Fig. 280; jener hat nur einen Kraftarm CA, dieser aber hat deren zwei, nämlich CA und CA_1. Man erzeugt durch den Hebel eine schwingende Bewegung im Kreise, und wendet ihn deshalb vorzüglich in den Fällen an, wo eine auf- und nieder- oder hin- und hergehende Bewegung erzeugt werden soll, wie z. B. bei Pumpen, zumal bei Feuerspritzen. Zur Aufnahme der Menschenkräfte dienen die Handhaben oder Spillen, deren Anzahl und Länge sich nach der Anzahl der Arbeiter richtet, welche den Hebel in


Fig. 279.



Bewegung setzen. Da die Kraftausübung bei der Bewegung von oben nach unten eine leichtere ist als bei der Bewegung von unten nach oben, so läßt man den Arbeiter meist nur beim Niedergange wirken, und bringt zu diesem Zwecke Gegengewichte an, welche dem Aufgange zu Hülfe kommen, oder bedient sich eines doppelten Hebels, an welchem dann die Arbeiter abwechselnd niederzudrücken haben. In dem Falle, wenn die Arbeiter nur beim Niedergange wirken, werden oft die Handhaben durch Seile ersetzt, die vom Hebel niederhängen und von den Menschen ergriffen werden. Zuweilen werden Hebel auch mit den Füßen durch Treten in Bewegung gesetzt.

Fig. 280.



Um eine nicht zu große Richtungsänderung während eines Spieles zu erhalten, läßt man den Hebel in einem nicht sehr großen, wenigstens nicht 60 Grad überschreitenden Bogen schwingen; und um die Ausübung der Kraft nicht zu erschweren, läßt man den Handhaben oder Angriffspunkten der Kräfte nur die der menschlichen Armlänge entsprechenden Wege von $2\frac{1}{2}$ bis $3\frac{1}{2}$ Fuß zurücklegen. Aus dem letzteren Grunde ist es auch angemessen, die Handhaben bei ihrem mittleren Stande um die der menschlichen Länge entsprechenden Höhe von 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß vom Fußboden abstehen zu lassen. Nach gemachten Erfahrungen arbeitet ein Mensch an einem Hebel täglich 8 Stunden lang mit der Kraft $K = 12$ Pfund, und Geschwindigkeit $c = 2,5$ Fuß, es ist daher seine Leistung an dieser Maschine pr. Secunde:

$$L = 12 \,.\, 2,5 = 30 \text{ Fußpfund};$$

und demnach täglich:

$$Kct = 30 \,.\, 8 \,.\, 3600 = 864000 \text{ Fußpfund}.$$

Es ist nöthig, bei der Anordnung eines Hebels dafür zu sorgen, daß die Arbeiter mit der angegebenen mittleren Kraft und Geschwindigkeit arbeiten, oder vielmehr, daß die effective Kraft nur um die halbe constante Nebenlast größer ausfällt als die mittlere Kraft.

An dem Hebel selbst stellt sich nur ein Hinderniß, nämlich dessen Axenreibung, heraus. Ist D der aus dem Gewichte des Hebels und aus der Kraft und Last desselben entspringende Zapfendruck, r der Zapfenhalbmesser und φ der Reibungscoefficient, endlich a der Hebelarm CA der Kraft, so hat man die auf den Kraftpunkt reducirte Zapfenreibung:

$$F = \frac{\varphi r}{a} D;$$

da nun aber φ und in der Regel auch $\frac{r}{a}$ ein kleiner Bruch ist, so fällt

meistens die Reibung F klein genug aus, um sie in Ansehung der übrigen Last vernachlässigen zu können.

Denken wir uns am Lastpunkte B eine Nutzlast Q und eine Nebenlast $\delta\, Q + W$ wirksam, und bezeichnen wir den Hebelarm $\overline{CB}$ dieser Lasten durch b, so haben wir das Kraftmoment zu setzen:

$$P a = [(1 + \delta)\; Q + W]\; b,$$

und daher die Kraft selbst:

$$P = \frac{b}{a}\, [(1 + \delta)\; Q + W].$$

Damit nun die Menschenkraft mit möglichstem Vortheile wirke, ist auch

$$P = K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2},$$ und daher

$$\frac{a}{b}\; K = (1 + \delta)\; Q + \frac{W}{2},$$

also das Hebelarmverhältniß

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 + \delta)\; Q + \frac{1}{2} W}{K}$$

in Anwendung zu bringen.

Anmerkung. Die Hebelarme sind in der Regel während eines Spieles etwas veränderlich, weswegen es wohl nöthig ist, mittlere Werthe für dieselben zu finden und in die Rechnungen einzuführen. Steht der Hebelarm CB, Fig. 281, bei halbem Hube horizontal, und ist der Schwingungswinkel

Fig. 281.

$$B_1 C B_2 = \beta^0,$$

so hat man die Hubhöhe der Last:

$$s = \overline{B_1 B_2} = 2 b\, sin. \frac{\beta}{2},$$

daher die Arbeit für einen Anhub:

$$= 2 b\, sin. \frac{\beta}{2} \cdot Q;$$

wäre aber die Last während des Anhubes unveränderlich am Hebelarme $CB = b$ wirksam, so würde der Weg für jeden Hub $=$ Bogen $B_1 B B_2 = \beta\, b$ sein; und daher die Last

$$Q_1 = \frac{2 b\, sin. \frac{\beta}{2}}{\beta\, b}\; Q = \frac{2\, sin. \frac{1}{2} \beta}{\beta} \cdot Q,$$

also ihr statisches Moment

$$Q_1 b = \frac{2\, sin. \frac{1}{2} \beta}{\beta}\; Q b$$ zu setzen sein.

Umgekehrt können wir nun auch annehmen, daß die Last Q während eines

Spieles am mittleren Hebelarme $\frac{2\, b\, sin.\, \frac{1}{2}\beta}{\beta}$ wirksam sei. Für $\beta^0 = 60^0$ stellt sich dieser Hebelarm

$$= \frac{b}{arc.\, 60^0} = \frac{b}{1{,}0472} = 0{,}955\,.\,b$$

heraus, also um $5\frac{1}{2}$ Procent kleiner als b, und bei kleineren Schwingungswinkeln ist die Abweichung noch bedeutend kleiner.

Beispiel. Welches Armverhältniß ist bei einem Hebel auszuwählen, damit derselbe bei einer Nutzlast $Q = 160$ Pfund und einer Nebenlast

$$Q_2 = 0{,}15\, Q + 55 = 0{,}15\,.\,160 + 55 = 79 \text{ Pfund}$$

durch vier Arbeiter möglichst vortheilhaft in Wirksamkeit gesetzt werde? Es ist:

$$K = 4\,.\,12 = 48 \text{ Pfund},$$

daher:

$$\frac{a}{b} = \frac{1{,}15\,.\,160 + \frac{1}{2}\,.\,55}{48} = \frac{211{,}5}{48} = 4{,}4.$$

Soll nun die Last bei jedem Anhube 1 Fuß Weg durchlaufen, so muß hiernach die Kraft gleichzeitig 4,4 Fuß Weg zurücklegen, und nimmt man nun den Schwingungswinkel $\beta = 50^0$ an, so erhält man die nöthige Armlänge:

$$b = \frac{s}{2\, sin.\, \frac{\beta}{2}} = \frac{0{,}5}{sin.\, 25^0} = 1{,}183 \text{ Fuß},$$

und die Länge des Kraftarmes:

$$a = 4{,}4\,.\,b = 4{,}4\,.\,1{,}183 = 5{,}20 \text{ Fuß}.$$

Der nöthige Kraftaufwand ist nun:

$$P = \frac{160 + 79}{4{,}4} = 54{,}32 \text{ Pfund},$$

folglich die Kraft eines Arbeiters:

$$= 13{,}58 \text{ Pfund},$$

und der Wirkungsgrad des Hebels:

$$\eta = \frac{\left(1 - \frac{55}{2\,.\,4{,}4\,.\,48}\right)^2}{1{,}15} = \frac{(1 - 0{,}13)^2}{1{,}15} = 0{,}658.$$

Wenn also auch die vier Menschen eine tägliche Arbeit von 4 . 864000 = 3'456000 Fußpfund verrichten können, so wird von ihnen an dieser Maschine doch nur 0,658 . 3'456000, also circa = 2'274000 Fußpfund nützliche Arbeit zu verlangen sein.

Haspel. Das vorzüglichste Mittel zur Aufnahme der Menschenkraft ist die liegende Radwelle, welche in diesem Falle den Namen Haspel (franz. treuil, tour; engl. windlass) erhält. Diese Maschine besteht im Allgemeinen aus einer horizontalen Welle, an deren Umfang die Last wirkt, und in einem Systeme von Handhaben oder Spillen zur Aufnahme der Kraft. Man unterscheidet vorzüglich drei Arten von Haspeln, nämlich den Kurbel- oder Hornhaspel, den Kreuz- und den Spillenhaspel, von einander. Bei dem Hornhaspel wirkt die Kraft an der Kurbel (franz. §. 142

manivelle; engl. winch), einem knieförmig gebogenen Aufsatze CAD, Fig. 282, des Zapfens der Welle. Der Kreuzhaspel, Fig. 283, hat statt der Kurbel, durch die Welle CO gesteckte, als Hebel dienende Arme, CA, CA_1 ... und der Spillenhaspel, Fig. 284, ist eine vollständige Radwelle mit ra-

Fig. 282.

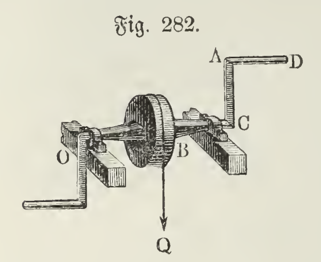


Fig. 283.

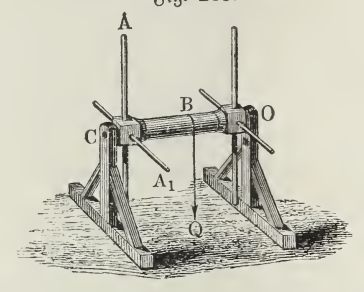
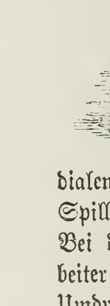


Fig. 284.



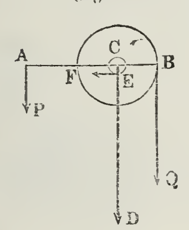
dialen oder axialen Handhaben oder Spillen (franz. chevilles; engl. pins). Bei dem Hornhaspel verändert der Arbeiter seinen Angriffspunkt während einer Umdrehung nicht, bei den Kreuz- und Spillenhaspeln hingegen geht hierbei die Hand des Arbeiters von einem Arme oder von einer Spille zur anderen über. Die letzteren beiden Haspelarten werden angewendet, wenn es darauf ankommt, auf kürzere Zeit und bei längeren Unterbrechungen große Lasten zu überwinden, z. B. Baumaterialien und Maschinentheile beim Aufstellen derselben zu heben u. s. w. Zur gewöhnlichen stetigen Arbeitsverrichtung dienen die Hornhaspel.

Damit der Arbeiter am Hornhaspel seine Arbeit mit möglichstem Nutzen verrichten könne, ist es nöthig, daß die Armlänge oder Kurbel, der menschlichen Armlänge entsprechend, 16 bis 18 Zoll betrage, und daß die Axe der Kurbel, der mittleren Menschenlänge entsprechend, 38 bis 39 Zoll über dem Fußboden stehe. Uebrigens hat man nach der Zahl der Arbeiter, welche sich an einem Haspel anstellen lassen, ein-, zwei- und mehrmännische Kurbeln (Haspeln). Da der Mensch mit weniger Anstrengung drückend und schiebend arbeiten kann, als ziehend und hebend, so wird ihm die Umdrehung der Kurbel an allen Stellen ihrer Spille im Kreise nicht gleich schwer, und es ist deshalb zweckmäßig, bei einem zwei- oder mehrmännischen Haspel die Spillen auf dem Kreise gleichmäßig zu vertheilen, also z. B. beim zweimännischen Haspel die beiden Kurbelhörner einander gegenüber zu stellen.

Man hat die tägliche Leistung eines Menschen an der Kurbel nicht

größer als 1'105920 Fußpfund gefunden, und zwar bei der mittleren Kraft $K = 16$ Pfund, mittleren Geschwindigkeit $c = 2{,}4$ Fuß und Arbeitszeit $t = 8$ Stunden. Die Berechnung des Haspels ist übrigens von der Berechnung einer Radwelle überhaupt nicht verschieden. Wirkt die Last Q, Fig. 285, am Hebelarme $CB = b$, die Kraft P aber am Hebelarme $CA = a$, so hat man:

Fig. 285.



$$Pa = Qb,$$

daher die einer gegebenen Last entsprechende Kraft:

$$P = \frac{b}{a} Q;$$

ist noch D der Zapfendruck und r der Zapfenhalbmesser CE, so hat man vollständiger:

$$Pa = Qb + \varphi D r,$$

und daher:

$$P = \frac{b}{a} Q + \frac{r}{a} \cdot \varphi D.$$

Besteht die Last Q sammt Reibung $\frac{r}{a} \varphi D$ aus der Nutzlast Q_1, der constanten Nebenlast W und der veränderlichen Nebenlast δQ, ist also $Q = (1 + \delta) Q_1 + W$, so gilt die Regel

$$P = \frac{b}{a} [(1 + \delta) Q_1 + W] = K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2},$$

also ist das Verhältniß

$$\frac{a}{b} = \frac{(1 + \delta) Q_1 + \frac{1}{2} W}{K} \text{ zu machen.}$$

Da aber die Kurbel eine vorgeschriebene Höhe von 16 bis 18 Zoll hat, so ist hiernach der Hebelarm b der Last zu bestimmen, nämlich

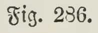
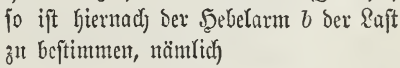
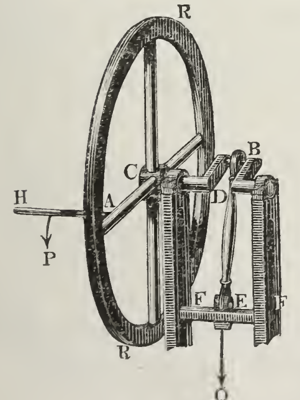


Fig. 286.



$$b = \frac{Ka}{(1 + \delta) Q_1 + \frac{1}{2} W}$$

zu machen, damit die Arbeiter mit möglichstem Vortheile wirken.



Wenn die Last Q an einem Haspel variabel ist, wenn sie z. B. an einem Krummzapfen oder einer anderen Kurbel DB, Fig. 286, wirkt, so ist es zweckmäßig, die Kurbelwelle CD mit einem Schwungrade RR auszurüsten, welches durch seine Trägheit die Veränderlichkeit der nöthigen Kraft P in einem gewissen Grade ausgleicht. Man

kann in diesem Falle die Handhabe oder Spille AH an einem Arme des Schwungrades befestigen, welcher dann mit derselben die eigentliche Kraftkurbel bildet. Die Last oder der Widerstand Q greift hier zunächst an einen Querarm FF an, welcher in einer Geradführung beweglich und durch die sogenannte Kurbelstange BE mit der Lastkurbel verbunden ist.

Fig. 287.

Bezeichnet hier wieder a die Länge des Kraftarmes CA, und b die Länge des Lastarmes DB, so ist während einer halben Umdrehung der Weg der Kraft, $= \pi a$, und der der Last, $= 2b$, und daher, wenn man von den Nebenhindernissen absieht, zu setzen:

$$P \cdot \pi a = Q \cdot 2b,$$

folglich die mittlere Umdrehungskraft:

$$P = \frac{2}{\pi} \frac{b}{a} Q.$$

Beispiel. An einem zweimännischen Haspel wirkt eine Last Q von 200 Pfund, wovon aber nur 150 Pfund Nutzlast, dagegen 30 Pfund constante und 20 Pfund veränderliche Nebenlast sind; der Hebelarm der Last beträgt 4 Zoll, der der Kraft 18 Zoll, der Zapfenhalbmesser $\frac{1}{2}$ Zoll, ferner der Reibungscoefficient $\varphi = 0,1$, und das Gewicht der Maschine, $= 80$ Pfund; man sucht die Leistung dieser Maschine. Die ganze Kraft ist, wenn man den Zapfendruck zu $D = 200 + 80 = 280$ Pfund annimmt:

$$P = \frac{4}{18} \cdot 200 + 0,1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 18} \cdot 280 = 44,44 + 0,78 = 45,22 \text{ Pfund},$$

daher die eines Arbeiters $= 22,61$ Pfund,

und nach der Gerstner'schen Formel die Geschwindigkeit der Kraft oder Haspelspille:

$$v = \left(2 - \frac{P}{K}\right) c = \left(2 - \frac{22,61}{16}\right) \cdot 2,4 = 1,408 \text{ Fuß},$$

also die der Last:

$$w = \frac{a}{b} v = \frac{2}{9} \cdot 1,408 = 0,313 \text{ Fuß},$$

und die Nutzleistung pr. Secunde:

$$Q_1 w = 0,313 \cdot 150 = 46,95 \text{ Fußpfund},$$

und täglich:

$$= 1359160 \text{ Fußpfund};$$

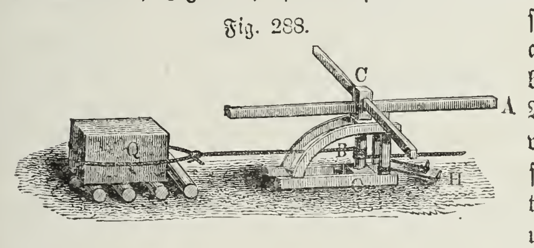
endlich ist der Wirkungsgrad, da beide Arbeiter die Arbeit $2 \cdot 1105920 = 2211840$ Fußpfund verrichten können:

$$\eta = \frac{1359160}{2211840} = 0,615.$$

Anmerkung. Tretthaspel, Zug- und Stoßhaspel u. s. w. sind außer Gebrauch gekommene Vorrichtungen, über die man sich in den älteren Werken von Langsdorf, Gerstner u. s. w. unterrichten kann.

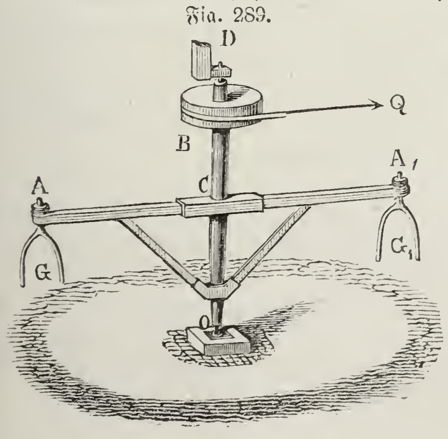
Stehende Welle. Die stehende Welle oder Winde (franz. cabestan; engl. capstan) wird entweder von Menschen oder von Thieren in Umdrehung gesetzt. Man unterscheidet Erdwinden, Schiffswinden und Göpel. Die Erdwinde, Fig. 288, ist transportabel und dient gewöhnlich zum Fortschaffen großer Lasten auf dem Erdboden. Sie besteht aus einer runden Welle CO und aus vier, durch ihren vierseitigen Kopf C gesteckten Armen wie CA u. s. w. Ihr Gestell wird mittels Stricken an eingeschlagene Pfähle H befestigt. Die Schiffswinde ist von der Erdwinde nicht wesentlich verschieden. §. 143

Fig. 288.



Der Göpel (franz. baritel; engl. whim) ist eine größer stehende Welle, welche vorzüglich zum Heben von Lasten, namentlich zum Fördern aus Gruben, dient. Er wird entweder durch Menschen oder durch Pferde in Bewegung gesetzt, und heißt im ersten Falle ein Handgöpel, im zweiten aber ein Pferdegöpel (franz. manége, baritel à chevaux; engl. horse-capstan, whim-gin). Die arbeitenden Geschöpfe setzen denselben in Umdrehung, indem sie selbst auf der sogenannten Rennbahn im Kreise herumgehen und die Arme der Welle (Schwengel) entweder vor sich hinschieben oder mit sich fortziehen. Fig. 289 stellt einen Pferdegöpel neuerer Construction vor. DO ist die Welle, welche bei O auf einem Stifte steht, und ACA_1 ist der Doppelschwengel, durch dessen Enden die bolzenförmigen Köpfe von Gabeln G, G_1 gesteckt werden. Letztere greifen über die Rücken der Pferde weg und werden an die Kummete derselben angeschlossen. Die Last Q wirkt an einer Trommel oder an einem gezahnten Rade B mittel- oder unmittelbar, was wir jetzt unbestimmt lassen müssen. Es ist eine praktische Regel, die Schwengellänge

Fig. 289.



CA oder den Halbmesser der Rennbahn möglichst groß zu machen, damit die Zahl der Umdrehungen der Welle bei Zurücklegung eines gewissen Weges möglichst klein ausfalle, und sich die Bewegung des Geschöpfes so viel wie möglich einer geradlinigen nähere. Bei Handgöpeln macht man diesen Halbmesser nur 8 bis 12 Fuß, bei Pferdegöpeln aber 20 bis 30 Fuß. Auch ist dafür Sorge zu tragen, daß die Kraft möglichst horizontal auf den Schwengel übertragen werde, und daher der Schwengel in einer gewissen Höhe über der Rennbahn anzubringen. Bei der in Fig. 289 abgebildeten Einrichtung mit Gabeln wirkt die Kraft der Pferde ziemlich winkelrecht gegen den Schwengel; werden aber die Pferde an eine Deichsel gespannt (siehe Theil III, Artikel „Förderungsmaschinen"), so ziehen die Pferde etwas schief, indem die Deichsel selbst eine Sehne der Rennbahn bildet. Aus der radial gemessenen Schwengellänge $\overline{CA} = a$, Fig. 290, und aus der Deichsellänge $\overline{AD} = d$, ergiebt sich der Hebelarm der zu beiden Seiten der Deichsel angespannten Pferde:

$$\overline{CN} = a_1 = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}},$$

oder annähernd

$$a_1 = a - \frac{d^2}{8a}.$$

Fig. 290.

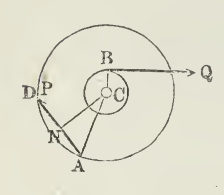
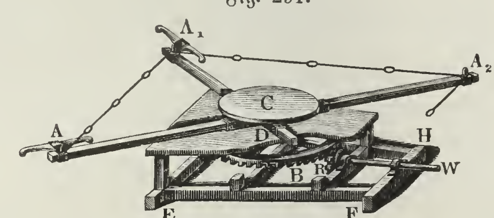


Fig. 291.



In Fig. 291 ist ein **transportabler** Göpel zum Gebrauch in der Landwirthschaft monodimetrisch abgebildet. Derselbe besteht aus vier Schwengeln CA, CA_1, CA_2 ..., wovon jedoch der eine in der Figur abgebrochen ist, und ruht mittels eines einfachen Gestelles auf einem unmittelbar auf der Erde liegenden Balkengeviere EFH. Die Wagen A, A_1, woran die Pferde angespannt werden, sind mittels aufrecht stehender Bolzen mit den Schwengelenden und letztere durch einfache Ketten mit einander in Verbindung gesetzt. Auf der stehenden Welle, mit welcher die Schwengel durch ein eisernes Kreuz verbunden sind, sitzt ein größeres Zahnrad BD, und dieses greift in ein kleineres Zahnrad R, welches auf der horizontalen Welle RW sitzt, wodurch die Kraft auf die Arbeitsmaschine übergetragen wird. Uebrigens ruht die stehende Welle unmittelbar unter dem Armgeviere in einem Halslager und unten in einem auf einer Mittelschwelle befestigten Fußlager.

Erfahrungsmäßig kann man annehmen, daß ein Arbeiter bei täglich 8 Stunden Arbeitszeit am Göpel mit 24 Pfund Kraft und 2,0 Fuß Geschwindigkeit arbeite, also ein tägliches Arbeitsquantum von

$$24 \,.\, 2{,}0 \,.\, 28800 = 48 \,.\, 28800 = 1'382400 \text{ Fußpfund}$$

verrichte; daß dagegen ein Pferd an eben dieser Maschine bei 8 Stunden täglicher Arbeitszeit und bei einer Geschwindigkeit von 2,9 Fuß (im Schritt) eine Kraft von 90 Pfund ausübe, also täglich:

$$90 \,.\, 2{,}9 \,.\, 28800 = 261 \,.\, 28800 = 7'516800 \text{ Fußpfund}$$

Arbeit verrichten könne.

Die Kraft am Göpel ist, wie bei jeder Radwelle, wenn die Last Q am Hebelarme $\overline{CB} = b$ (Fig. 290) wirkt:

$$P = \frac{b}{a}\, Q.$$

Nun entsteht aber noch eine Reibung unten am Stifte und eine Reibung am Umfange des Stiftes und Zapfens, daher fällt mit Berücksichtigung beider Reibungen die Kraft noch etwas größer aus. Ist G das Gewicht der armirten Göpelwelle und r_1 der Halbmesser ihres Stiftes, so hat man das statische Moment der Reibung am Stifte (Band I, §. 188), $= {}^2/_3\, \varphi\, G r_1$. In der Regel liegt der Angriffspunkt B der Last (Fig. 292) nicht mitten zwischen dem Zapfen C und dem Stifte O, sondern er ist dem einen oder dem anderen näher; daher haben denn auch beide ungleiche Theile von der Last Q aufzunehmen und es sind deshalb auch dieselben nicht von gleicher Stärke zu machen. Steht der Lastpunkt vom unteren Zapfen um $BO = l_1$ und vom oberen um $BC = l_2$ ab und bezeichnet man die ganze Länge $CO = l_1 + l_2$ der stehenden Welle durch l, so hat man den Druck am unteren Zapfen:

Fig. 292.

$$D_1 = \frac{l_2}{l}\, Q,$$

und den Druck am oberen:

$$D_2 = \frac{l_1}{l}\, Q,$$

wie leicht zu finden ist, wenn man einmal C und ein anderes Mal O als Stützpunkt eines Hebels CBO ansieht. Deshalb ist denn auch die Summe der statischen Momente der Seitenreibungen am Zapfen und am Stifte:

$$= \varphi D_1 r_1 + \varphi D_2 r_2 = \frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l} \cdot \varphi Q,$$

und die Kraftgleichung des Göpels:

$$Pa = Qb + {}^2/_3\, \varphi\, G r_1 + \varphi Q \cdot \frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l}.$$

Anmerkung 1. Von der Anwendung der Göpel zum Fördern ist im dritten Theile die Rede.

Anmerkung 2. Französische Schriftsteller führen an, daß ein Pferd im Trabe am Göpel täglich $4\frac{1}{2}$ Stunden mit 30 Kilogrammen = 60 Pfund Kraft und 2 Meter = 6,37 Fuß Geschwindigkeit arbeiten kann, und so täglich 6'191640 Fußpfund Arbeit verrichtet. Wenden wir die Gerstner'sche Formel an, setzen wir $K = 112$ Pfund, $c = 4$ Fuß, $v = 6{,}37$ Fuß, $t = 8$ Stunden und $z = 4\frac{1}{2}$ Stunden, so erhalten wir die Kraft:

$$P = \left(2 - \frac{6{,}37}{4}\right)\left(2 - \frac{4{,}5}{8}\right) \cdot 112 = 9{,}37 \,.\, 7 = 65{,}6 \text{ Pfund},$$

und daher die tägliche Leistung:

$$= 65{,}6 \,.\, 6{,}37 \,.\, 4{,}5 \,.\, 3600 = 6'769526 \text{ Fußpfund},$$

also in ziemlicher Uebereinstimmung mit dieser Angabe. Nehmen wir aber die oben angegebene Geschwindigkeit $c = 2{,}9$ Fuß im Schritte an, so erhalten wir, nach Gerstner, die Kraft viel größer, nämlich:

$$\left(2 - \frac{2{,}9}{4}\right) \,.\, 112 = 1{,}275 \,.\, 112 = 142{,}8 \text{ Pfund},$$

und daher die tägliche Leistung:

$$414{,}1 \,.\, 28800 = 11'926080 \text{ Fußpfund}.$$

Anmerkung 3. Die Kräfte der Pferde, wenn diese an gegenüberstehenden Schwengeln wirken, vergrößern den Zapfendruck um nichts, sind aber die Pferde nur an einem Schwengel angespannt, so trägt ihre Kraft etwas zur Vergrößerung des Zapfendruckes bei, es ist nämlich, einer Abhandlung des Verfassers in den polytechnischen Mittheilungen Band I zufolge, statt der Last Q:

$$Q\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{P}{Q}\right)^2\right] = Q\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]$$

einzusetzen, und daher

$$D_1 = \frac{l_2}{l}\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] Q, \text{ sowie}$$

$$D_2 = \frac{l_1}{l}\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right] Q$$

anzunehmen, so daß das Moment der Seitenreibung sich

$$F = \varphi\left[1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\left(\frac{r_1 l_2 + r_2 l_1}{l}\right) Q$$

herausstellt.

Aehnlich verhält es sich auch beim einmännischen Haspel.

§. 144 **Tret- und Laufrad.** Zuweilen werden Maschinen durch die Gewichte von Menschen oder Thieren in Bewegung gesetzt, indem diese an dem Umfange eines Rades emporzusteigen suchen. Solche Maschinen heißen im Allgemeinen Treträder (franz. treuils à tambour; engl. tread-mills); doch hat man dieselben von sehr verschiedenen Constructionen. Das Laufrad (franz. treuil de tambour) besteht sowie das Tretrad (franz. treuil à échelons) aus zwei Radkränzen, welche durch Arme mit der Welle und untereinander durch einen Boden verbunden sind; nur steht bei dem ersten der Arbeiter im Inneren des Rades, und bei dem zweiten auf dem äußeren

Umfange desselben. Um dem Arbeiter einen sicheren Stand zu verschaffen und die Kraft desselben auf das Rad überzutragen, ist der Boden des Laufrades (Fig. 293) in je $1^1/_2$ Fuß Entfernung mit Latten beschlagen, der Raum zwischen den Kränzen des Tretrades (Fig. 294) aber mit Stufen oder Staffeln bildenden Schaufeln ausgerüstet.

Das Sprossenrad (franz. treuil à chevilles), Fig. 295, besteht nur aus einem Kranze und hat, statt der Schaufeln, durch den Kranz ge-

Fig. 293.

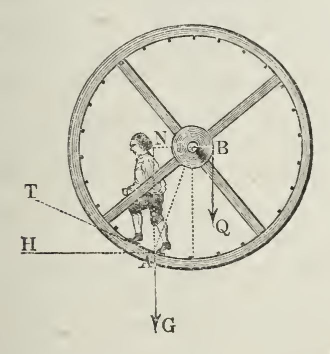


Fig. 294.

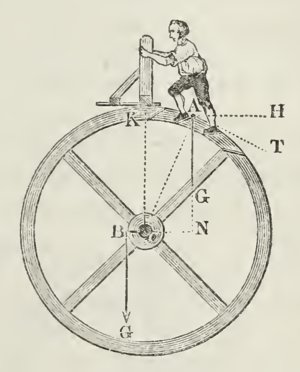
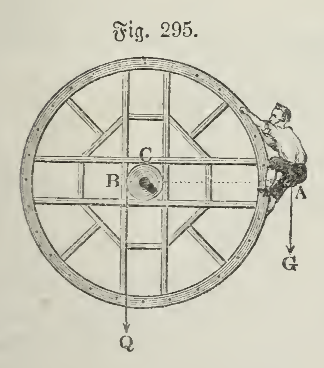


Fig. 295.



steckte Bolzen, an denen sich der Arbeiter anhält wie an den Sprossen einer Leiter. Bei dem letzten Rade steht der Arbeiter ziemlich in der halben Radhöhe, und es wirkt daher derselbe mit seinem ganzen Gewichte G an einem den Radhalbmesser noch übertreffenden Hebelarme $\overline{CA} = a$; bei dem Tret- und Laufrade hingegen steht derselbe um einen spitzen Winkel $ACK = \alpha$ vom Radobersten oder Raduntersten ab, und es ist deshalb der Hebelarm seines Gewichtes G kleiner als der Radhalbmesser $\overline{CA} = a$, nämlich:

$$\overline{CN} = a_1 = \overline{CA}\, sin.\, CAN = a\, sin.\, \alpha.$$

Dafür ist aber auch die Anstrengung des Arbeiters am Sprossenrade größer als die am Tret- oder Laufrade; sie entspricht dort der Kraft zum Hinaufsteigen auf einer verticalen Leiter, hier aber der Kraft zum Aufsteigen auf einer durch die Tangente AT gegebenen schiefen Ebene mit dem Steigwinkel $TAH = CAN = \alpha$. Es ist also die Anstrengung P dort

$$= G, \text{ hier aber}$$
$$= G\, sin.\, \alpha.$$

Wirkt die Last Q am Hebelarme $\overline{CB} = b$, so hat man für das Sprossenrad

$$G a = Q b,$$

und für das Tret- und Laufrad:

$$G a \sin. \alpha = Q b,$$

oder, indem man die Kraft oder Anstrengung P einführt, für beide Maschinen, sowie für den Haspel und Göpel,

$$P a = Q b.$$

Es gewähren also Tretmaschinen in mathematischer Beziehung keinen Vorzug vor den Haspeln und Winden; es verrichtet aber der Mensch an derselben mehr tägliche Leistung als an anderen Maschinen und insofern ist die Anwendung dieser Maschinen immer von Vortheil. Die Anwendung von Thieren bei diesen Maschinen ist nicht von Vortheil, nicht allein weil die vierfüßigen Thiere, und zumal die Pferde, beim Steigen weniger zu leisten vermögen, sondern auch deshalb, weil sich die Thiere hier weniger leicht anstellen lassen und leicht Gefahr laufen, sich zu beschädigen oder zu verunglücken.

Man rechnet, Erfahrungen zufolge, daß ein Mensch bei 8 Stunden Arbeitszeit mit 120 Pfund Kraft und mit 0,48 Fuß Geschwindigkeit am Tretrade arbeite, wenn er in der Nähe des Radmittels wirkt, daß er aber mit 24 Pfund Kraft und $2^1/_4$ Fuß Geschwindigkeit arbeite, wenn sein Standpunkt 24^0 vom Radtiefsten oder Radhöchsten absteht. Es leistet demnach ein Arbeiter täglich auf die erste Weise:

$$120 \, . \, 0,48 \, . \, 28800 = 1'658880 \text{ Fußpfund},$$

und auf die zweite:

$$24 \, . \, 2^1/_4 \, . \, 28800 = 1'555200 \text{ Fußpfund}.$$

Pferde und andere vierfüßige Thiere leisten hier mindestens nicht mehr als an der stehenden Welle.

Ein Theil des Vortheiles, welchen die Tret- und Laufräder vor dem Haspel oder der Winde haben, geht wieder durch die Zapfenreibung verloren, welche bei diesen Rädern größer ist, da sie viel schwerer ausfallen als Haspel und Winden. Ist $n G$ das Gewicht der Arbeiter, G_1 das Gewicht der Maschine, und wirkt die angehängte Last Q vertical abwärts, so hat man den Zapfendruck:

$$D = n G + G_1 + Q,$$

und bezeichnet nun noch r den Zapfenhalbmesser, so hat man das statische Reibungsmoment:

$$= \varphi \, (n G + G_1 + Q) \, r,$$

sowie die Kraftformel:

$$n G a \sin. \alpha = Q b + \varphi \, (n G + G_1 + Q) \, r.$$

Ist die Last gegeben, so kann man hiernach den Steigwinkel α finden, nämlich:

$$sin. \alpha = \frac{Q b + \varphi (n G + G_1 + Q) r}{n G a},$$

oder die nöthige Zahl der Arbeiter:

$$n = \frac{Q b + \varphi (G_1 + Q) r}{G (a \, sin. \alpha - \varphi r)}.$$

Am vortheilhaftesten wirken die Menschen, wenn bei der constanten Nebenlast W ihre Kraft

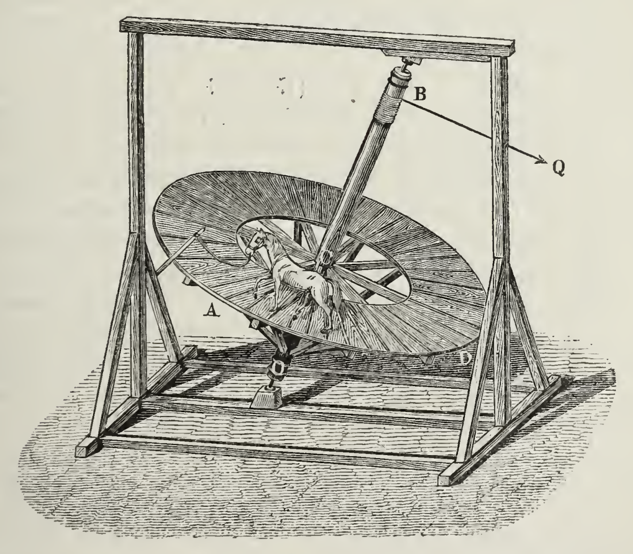
$$n P = n G \, sin. \alpha = n K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2},$$

also

$$sin. \alpha = \left(K + \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{2 n}\right) : G \quad \text{ist.}$$

Tretscheibe. In der Landwirthschaft findet man zuweilen die in Fig. 296 abgebildete Tretscheibe angewendet. Man läßt auf derselben die Pferde §. 145

Fig. 296.



oder Ochsen nur auf kurze Zeit wirken. Sie hat den Vorzug vor anderen Maschinen, daß man das arbeitende Thier ohne Aufsicht lassen kann. Die Wirkung der Thiere ist übrigens genau dieselbe wie bei dem Tret- und Laufrade, wenn man das Thier in der Nähe des horizontalen Halbmessers arbeiten läßt. Diese Maschine besteht aus einer Welle $B\,O$, deren Axe 20 bis 25° von der Richtung der Schwere abweicht, und aus einer mit radial laufenden Latten beschlagenen Scheibe $A\,C\,D$ von 20 bis 25 Fuß Halbmesser, welche winkelrecht auf der Welle aufsitzt, und deshalb eine Neigung von 20 bis 25° gegen den Horizont hat. Steht das arbeitende Thier um den horizontalen Halbmesser

$CA = a$ von der Wellenaxe ab, und ist der Neigungswinkel der Scheibe sowie der Steigwinkel des Pferdes, $= \alpha$, so hat man die Umdrehungskraft:

$$P = G \sin. \alpha,$$

und daher, wie beim Tret- und Laufrade, das Umdrehungsmoment:

$$= Pa = Ga \sin. \alpha.$$

Wirkt nun noch die Last Q am Hebelarme b, so hat man ihr Moment

$$= Qb,$$

ist ferner G_1 das Gewicht der armirten Maschine und bezeichnet r die Halbmesser ihrer Zapfen, so hat man das statische Moment der Reibung an der Basis derselben:

$$= {}^2/_3 \varphi (G + G_1) \cos. \alpha \,.\, r,$$

und das Moment der Seitenreibung:

$$= \varphi [(G + G_1) \sin. \alpha + Q] r,$$

weil sich das Gewicht $G + G_1$ in die Seitenkraft $(G + G_1) \cos. \alpha$ nach der Richtung der Axe, und in die Seitenkraft $(G + G_1) \sin. \alpha$ nach der Fallrichtung der Scheibe zerlegt, und Q in der Richtung der letzten Kraft wirkt. Es folgt hiernach:

$$Ga \sin. \alpha = Q (b + \varphi r) + \varphi (G + G_1) ({}^2/_3 \cos. \alpha + \sin. \alpha) \,.\, r.$$

Da der Component $G \cos. \alpha$ vom Gewichte G, welcher die Richtung der Axe BO hat, excentrisch wirkt, so giebt derselbe nicht allein einen Axendruck, sondern auch ein Kräftepaar (s. Bd. I, §. 133), welches die Tretscheibe in der Ebene ABC umzudrehen sucht, und die Seitenwirkungen in B und O noch etwas vergrößert. Diese Vergrößerung ist jedoch bei den gewöhnlichen Dimensionen und Gewichten klein genug, um sie außer Acht lassen zu können.

Es gehört hierher auch die sogenannte Tretbrücke (engl. horse-power-Engine), wo das arbeitende Pferd auf einer schiefen Ebene steht, welche durch eine Kette ohne Ende gebildet wird. (Siehe den Artikel „Tretrad in Precht's Encyclopädie. Auch Whitworth: Report on the New-York Industrial-Exhibition of 1853.)

Beispiel. Man will durch ein 20 Fuß hohes Tretrad eine an einem Hebelarme von 0,75 Fuß wirkende Last von 900 Pfund heben und sucht die nöthige Zahl der Arbeiter. Schätzen wir das Gewicht des belasteten Rades zu 5000 Pfd., nehmen wir den Zapfenhalbmesser 2 Zoll und den Reibungscoefficienten 0,075 an, so erhalten wir das statische Lastmoment:

$$Qb + \varphi (G + G_1) r = 0{,}75 \,.\, 900 + 0{,}075 \,.\, {}^1/_6 \,.\, 5000 = 675 + 62^1/_2$$
$$= 737^1/_2 \text{ Fußpfund},$$

und daher die nöthige Kraft am Umfange des Rades:

$$P = \frac{737{,}5}{10} = 73{,}75 \text{ Pfund}.$$

Nun übt aber ein Arbeiter bei circa 24° Abstand vom Radscheitel eine Kraft von 24 Pfund aus; es wird daher die nöthige Arbeiterzahl

$$n = \frac{73{,}75}{24} = 3$$

ausreichend, und nun zu erwarten sein, daß dieselben eine tägliche Leistung von

$$3 \,.\, 1555200 = 4665600 \text{ Fußpfund}$$

liefern und demnach in dieser Zeit die Last Q von 900 Pfund

$$\frac{4665600}{900} = 5184 \text{ Fuß}$$

hoch heben, oder z. B. täglich

$$\frac{5184}{200} = 26 \text{ mal } 900 \text{ Pfund}$$

auf die Höhe von 200 Fuß fördern.

Drittes Capitel.

Von dem Ansammeln, sowie von dem Zu- und Abführen des Aufschlagewassers.

Wasserleitungen. Das Aufschlagewasser (franz. l'eau motrice; §. 146 engl. the moving water), d. i. das Wasser, wodurch Maschinen in Bewegung gesetzt werden, nimmt man meistens aus Bächen und Flüssen, oft aber auch aus Seen und Teichen, und nur selten unmittelbar aus Quellen. In den meisten Fällen kann die Maschine nicht unmittelbar am Fassungspunkte des Wassers aufgestellt werden, sondern es ist dieselbe hiervon mehr oder weniger entfernt, und daher fast immer eine Wasserleitung (franz. conduite d'eau; engl. conduit of water) nöthig, um das Aufschlagewasser vom Fassungspunkte nach der Maschine zu führen. Die Wasserleitungen sind entweder oben offen oder ringsum verschlossen. Zu den offenen Wasserleitungen gehören die Canäle, Gräben und Gerinne, zu diesen aber die Röhrenleitungen. Canäle (franz. und engl. canals) sind die größeren, meist schiffbaren, Gräben (franz. fosses; engl. ditches) aber die kleineren, stets unschiffbaren, aus Mauern, Steinen, Erde oder Sand gebildeten, Gerinne (Spundstücke) franz. auges, rigoles; engl. channels) endlich die aus Holz, Eisen oder Steinen künstlich zusammengesetzten oben offenen Wasserleitungen. Die Röhrenleitungen (franz. tuyaux de conduite; engl. pipes, conduits) bestehen aus cylindrisch oder prismatisch geformten Röhren von Eisen, Holz, Thon, Steinen, Glas u. s. w. In ihnen führt man meist nur kleinere Wasserquanta ab. Uebrigens haben sie vor den offenen Wasserleitungen den Vorzug, daß sie mit beliebigem Steigen und Fallen angelegt werden können, während die offenen Wasserleitungen vom Fassungspunkte aus stets fallen müssen. Es lassen sich daher durch Röhrenleitungen Thäler, Schluchten und Anhöhen überschreiten, ohne Ueberbrückungen oder Unterfahrungen nöthig zu haben. Um dagegen mit oben offenen Wasserleitungen große Umwege zu vermeiden, ist es nöthig, bei Ueberschreitung von Vertiefungen oder Erhöhungen der Erdoberfläche, in welcher diese Leitungen gewöhnlich eingeschnitten sind, sogenannte Aquäducte oder Röschen (unterirdische Canäle) anzulegen.

§. 147 **Wehre.** Die fließenden Wasser, aus denen man den Aufschlag für eine Maschine nimmt, sind Bäche (franz. ruisseaux; engl. brooks) oder Flüsse (franz. rivières; engl. rivers). Die lebendige Kraft der fließenden Wasser ist — bei der mäßigen Geschwindigkeit von 1 bis 7 Fuß — meist nicht hinreichend, um sie zum Umtriebe von Maschinen benutzen zu können; um dieselbe zu erhöhen, oder um das Wasser durch sein Gewicht wirken lassen zu können, ist es daher nöthig, das Wasser aufzustauen und ein Gefälle (franz. chut; engl. head) zu erzeugen. Dieses Aufstauen des Wassers erfolgt durch Wehre (franz. barrages; engl. bars, weirs), d. i. durch quer über einen Bach oder Fluß weggehende Dämme (franz. digues; engl. dams). Man unterscheidet Ueberfallwehre oder Ueberfälle und Durchlaß- oder Schleusenwehre von einander. Während bei jenen das Wasser frei über der höchsten Schwelle oder Kappe wegfließen kann, wird es bei diesen durch aufgestellte Schutzbretter (Fallschützen) noch über der Wehrkappe aufgestaut. In der Regel will man durch die Ueberfallwehre das aufgestaute Wasser oder einen Theil desselben zum Eintritt in einen nahe oberhalb des Wehres einmündenden Canal nöthigen, um es durch diesen nach der Umtriebsmaschine zu führen, wogegen man mit den Durchlaßwehren beabsichtigt, dem Wasser eine erhöhte lebendige Kraft zu ertheilen und dadurch die unmittelbar unter dem Wehre befindliche Maschine in Bewegung zu setzen.

Bei größeren Flüssen und Strömen wendet man oft Dämme an, welche nicht über die ganze Breite des fließenden Wassers weggehen, um eine Aufstauung zu bewirken. Solche Dämme nennt man lichte Wehre, während man die den ganzen Strom absperrenden Wehre dichte Wehre zu nennen pflegt. Brückenpfeiler, Buhnen und andere das Querprofil eines fließenden Wassers verengende Einbaue sind ebenfalls als lichte Wehre (franz. barrages discontinus) anzusehen.

Was die am häufigsten vorkommenden Ueberfallwehre betrifft, so unterscheidet man vollkommene Ueberfälle (franz. déversoirs complets; engl. complete overfalls) von den unvollkommenen Ueberfällen oder Grundwehren (franz. déversoirs incomplets; engl. incomplete overfalls). Bei jenen Wehren liegt die Ueberfallschwelle noch über der Oberfläche des Unterwassers, und es findet daher hier ein freier Ausfluß Statt, bei diesen hingegen liegt diese Schwelle unter dem Spiegel des abfließenden Wassers, es erleidet also hier ein Theil des überfließenden Wassers eine Rückwirkung vom Unterwasser.

§. 148 **Stauung.** Durch alle eben angeführte Einbaue erleidet das fließende Wasser eine Stauung (franz. remou; engl. swell), d. i. eine Erhöhung seines Wasserspiegels und eine damit nothwendigerweise verbundene Ge-

schwindigkeitsverminderung. Von besonderer Wichtigkeit sind die Stauhöhe und Stauweite (franz. hauteur et amplitude du remou; engl. hight and amplitude of swell). Jene ist die Höhe der Oberfläche des aufgestauten Wassers über dem ersten Wasserspiegel oder der Oberfläche des frei abfließenden Wassers unmittelbar vor dem Wehre, diese hingegen ist die Längenerstreckung des Aufstauens, vom Wehre aus aufwärts gemessen. Es ist nun eine wichtige Aufgabe für uns, zu ermitteln, in welchem Verhältnisse die Stauhöhe zu den Dimensionen des Wehres steht, und nach welchem Gesetze die Stauung von der Entfernung vom Wehre abhängt, und wo dieselbe als verschwindend klein angesehen werden kann.

Die Kenntniß dieser Verhältnisse ist aber nicht allein deshalb nothwendig, weil durch zu große oder zu weit sich erstreckende Stauungen leicht Ueberschwemmungen herbeigeführt, sondern auch weil durch dieselben die am fließenden Wasser aufwärts liegenden Etablissements durch Entziehung von Gefälle in ihrem Gange gestört werden können. Aus diesem Grunde werden denn auch neben den Wehren die sogenannten Aichpfähle oder Pegel (franz. marqueurs; engl. water-markers) eingesetzt, an welchen die Lage der Ueberfallschwelle angegeben wird, und deren Verrückung bei Strafe verboten ist. Oft versieht man die Pegel mit einer Scala zum Ablesen der Wasserstände.

Das mit erhöhter Geschwindigkeit von einem dichten Wehre herab- oder zwischen den Pfeilern eines lichten Wehres hindurchfließende Wasser nimmt, ehe es in die dem Gefälle des Flußbettes entsprechende gleichförmige Bewegung übergeht, eine wellenförmige und zum Theil eine wirbelnde Bewegung an, wodurch ihm sein Ueberschuß an bewegender Kraft entzogen wird. Durch die erhöhte Geschwindigkeit und durch die wirbelnde Bewegung des Wassers wird eine Reaction auf das Grundbett herbeigeführt, die oft sehr nachtheilige Folgen haben würde, wenn man das Grundbett zunächst unterhalb des Wehres nicht durch ein Steinpflaster u. s. w. schützte.

Das Wasserquantum eines Baches oder Flusses ist zu verschiedenen Zeiten verschieden, und man kann unterscheiden: Großwasser, welches nur auf kurze Zeit, nach starken Regengüssen u. s. w. eintritt, Mittelwasser, welches zumal im Herbst und Frühjahr und im Ganzen mindestens die Hälfte des Jahres vorzufinden ist, Kleinwasser, welches nur auf kurze Zeit im Sommer vorkommt, und endlich Immerwasser, die kleinste, nur in sehr trockenen Jahren (z. B. in Deutschland im Sommer 1842) zu beobachtende Wassermenge. Es ist nun sehr zweckmäßig, wenigstens das Mittel- und Kleinwasser des Baches zum Umtriebe einer Maschinenanlage zu kennen, um hiernach nicht nur die Maschine, sondern auch das Wehr und die Gräben anordnen und construiren zu können. Aus diesem Grunde sind denn vor Allem nach einer der in Band I, §§. 480, 481 u. s. w. angegebenen Me-

thoden zu verschiedenen Zeiten Wassermessungen anzustellen. Es ist nun eine Regel, das Wasser durch Wehre nur so hoch aufzustauen, daß es zur Zeit des Großwassers nicht übertrete und die Umgegend überschwemme.

§. 149 **Wehrbau.** Für das Maschinenwesen sind die Ueberfallwehre die wichtigsten. Sie bilden entweder einen geraden, meistens winkelrecht gegen den Stromstrich gerichteten Damm, oder sie bestehen aus zwei gegen den Strom gerichteten und in der Mitte zusammenstoßenden Dämmen, deren Spitze nach Befinden durch einen kurzen Zwischendamm abgeschnitten oder abgerundet ist, oder sie sind kreisbogenförmige, mit der Convexität der Bewegung des Wassers entgegengerichtete Dämme. Die Wehre werden von Holz, oder von Steinen, oder von beiden zugleich erbaut. Sie können selten auf festes Gestein gegründet werden, sondern man muß dieselben meist auf einen Pfahlrost betten. Die Querprofile ganz oder theilweise hölzerner Wehre haben mehr oder weniger die Form eines Fünfeckes $ABCDE$, Fig. 297, bei welchem AB die Brust, BC die Vordecke, CD die Abschußdecke, DE der Rücken, EA sowie die Sohle und C die Ueberfallsschwelle oder der Sattel-, auch Wehrbaum genannt wird. Die Querprofile steinerner Wehre werden in der Regel von oben durch krumme Linien gebildet, die sich an das Fünfeck mehr oder weniger anschließen, um den Abfluß des Wassers zu erleichtern.

Fig. 297.

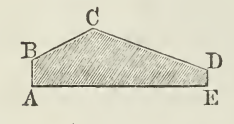
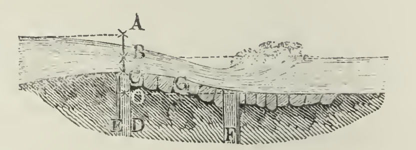


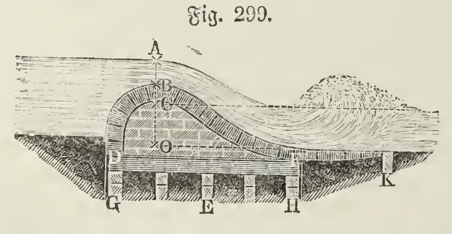
Fig. 298.



Ein unvollkommener Ueberfall, wie Fig. 298, besteht aus einer Reihe von quer über das Bett weggehenden Pfählen D mit dem darüber liegenden Fachbaume C, ferner aus einer Spundwand E vor der Pfahlreihe, aus einer zweiten, tiefer unten eingerammten Pfahlreihe F und aus einem Steinpflaster G zwischen beiden Pfahlreihen.

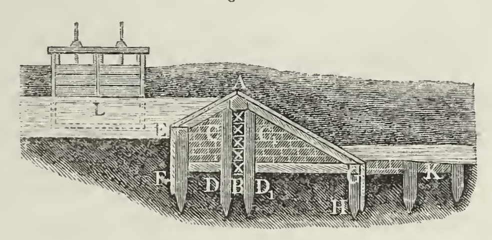
Das vollkommene Ueberfallwehr in Fig. 299 ruht auf einem Pfahlroste DEF mit zwei Spundwänden G und H, und ist aus großen Steinen gewölbförmig mit hydraulischem Mörtel aufgemauert. Um das Schußbett HK vor dem Ausspülen sicher zu stellen, ist es mit großen Steinen gepflastert und unten noch durch eine Pfahlreihe K begrenzt.

Fig. 299.



Die Construction eines hölzernen Wehres ist in Fig. 300 ersichtlich. Hier ist AB eine aus über einander liegenden Balken bestehende Wand, A der Wehrbaum, CD und $C_1 D_1$ sind Pfahlreihen zu beiden Seiten dieser

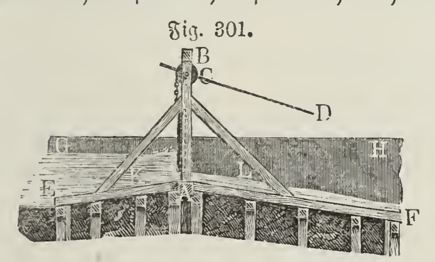
Fig. 300.



Wand, EF und GH zeigen zwei andere, außen mit Spundwänden bekleidete und oben durch Schwellen E und G bedeckte Pfahlreihen, CE und $C_1 G$ stellen Streben vor, welche den Wehrbaum A mit den Schwellen E und G verbinden und noch mit Bohlen überdeckt sind. Die inneren Räume werden ausgemauert oder mit Thon ausgeschlagen. Das Sturzbett K unterhalb des Wehres ist noch ausgepfählt und mit großen Steinen gepflastert. Bei L sind die Schutzbretter an dem Kopfe des Aufschlagewassergrabens ersichtlich.

Ein Schleusenwehr ist endlich noch in Fig. 301 abgebildet. A ist der Fachbaum, AB sind die in ihm eingezapften Griessäulen, zwischen welchen sich die Schützen in Falzen bewegen. Die Vorrichtungen zum Aufziehen der Schützen sind sehr mannigfaltig. In der Figur besteht dieselbe in einer

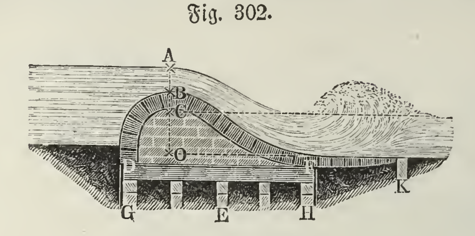
Fig. 301.



Art Kreuzhaspel CD, und es hängt hier das Schutzbrett mittels Ketten an demselben. Von dem Fachbaume A aus neigen sich das Vor- und Hinterfluther AE und AF abwärts, beide ruhen aber auf einem Pfahlroste, sowie der Fachbaum auf einer Reihe von Grundpfählen; um das Eindringen des Wassers zu verhüten, ist dieser Pfahlrost durch ein Paar Spundwände geschlossen. Zu beiden Seiten stehen noch die aus starken Bohlen gebildeten und sich gegen lange Pfähle stützenden Seitenwände GH. Noch sind die mittleren Griessäulen mit Streben K, L gestützt, wovon die oberen (K) zugleich mit als Eisbrecher dienen.

§. 150 **Stauhöhe bei Ueberfällen.** Mit Hülfe der in der Hydraulik vorgetragenen Lehren lassen sich nun die Stauverhältnisse bei Wehren ohne Schwierigkeiten ermitteln. Ist bei dem vollkommenen Ueberfalle (Fig. 302) h die Druckhöhe AB, b die Breite und k die der Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers entsprechende Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$, so

Fig. 302.



hat man die Wassermenge des Ueberfalles (Bd. I, §. 416):

$$Q = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2g}\, [(h + k)^{3/2} - k^{3/2}];$$

ist umgekehrt diese Wassermenge Q bekannt, so folgt die entsprechende Druckhöhe über der Ueberfallschwelle:

$$h = \left(\frac{{}^3/_2\, Q}{\mu b \sqrt{2g}} + k^{3/2}\right)^{2/3} - k.$$

Um nun die einer gegebenen Stauhöhe $AC = h_1$ entsprechende Wehrhöhe $BO = x$ zu finden, setzen wir:

$$AC + CO = AB + BO,$$

oder wenn wir die alte Wassertiefe oder die Tiefe CO des Unterwassers durch a bezeichnen,

$$h_1 + a = h + x,$$

und es ergiebt sich nun:

$$x = a + h_1 - h.$$

Bei etwas hoher Aufstauung, wo x mindestens zwei Fuß beträgt, kann man die Geschwindigkeitshöhe k des ankommenden Wassers unbeachtet lassen und daher

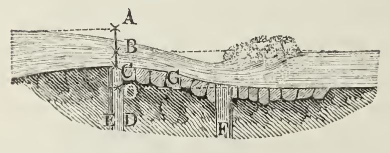
$$x = a + h_1 - \left(\frac{{}^3/_2\, Q}{\mu b \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

setzen, und es ist, vorläufigen Berechnungen der hierüber vom Verfasser angestellten Versuche zufolge,

$$\mu = 0{,}80$$

anzunehmen.

Fig. 303.



Bei dem unvollkommenen Ueberfall, Fig. 301, ist die Rechnung complicirter, weil sich hier zwei verschiedene Ausflußverhältnisse mit einander combiniren. Es ist nämlich hier die Wasserhöhe $\overline{AC} = h$ über der Schwelle größer als die Stauhöhe $\overline{AB} = h_1$, und es fließt daher nur das Wasser oberhalb

B frei aus, dagegen das Wasser unterhalb B mit der Druckhöhe $\overline{AB} = h_1$. Deshalb ist die durch AB fließende Wassermenge:

$$Q_1 = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right],$$

dagegen das durch $\overline{BC} = h - h_1$ strömende Wasserquantum:

$$Q_2 = \mu b (h - h_1) \sqrt{2g} (h_1 + k)^{1/2},$$

und hiernach das ganze Abflußquantum $Q_1 + Q_2$ zu setzen:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left(\frac{2}{3}\left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + (h - h_1)(h_1 + k)^{1/2}\right).$$

Aus dem Wasserquantum Q und der Stauhöhe h_1 folgt nun die Höhe des oberen Wasserspiegels über dem Fachbaume:

$$h = h_1 + \frac{Q}{\mu b \sqrt{2g(h_1 + k)}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}}{(h_1 + k)^{1/2}},$$

woraus sich dann die Wehrhöhe

$$\overline{CO} = x = a + h_1 - h$$

ergiebt.

Für kleinere Werthe von k läßt sich daher einfacher

$$x = a + \frac{2}{3} h_1 - \frac{Q}{\mu b \sqrt{2 g h_1}}$$

setzen. Es ist übrigens $h > h_1$, also der Ueberfall ein unvollkommener, wenn

$$Q > \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[(h_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] \text{ ausfällt.}$$

Ist die Längenaxe des Wehrdammes kreisbogenförmig, so muß man statt b, die Bogenlänge der Dammkappe einführen, und in

$$k = \frac{c^2}{2g},\ c = \frac{Q}{6(a + h_1)} \text{ setzen.}$$

Beispiel. Ein Bach von 30 Fuß Breite und 3 Fuß Tiefe führt 310 Cubikfuß Wasser pr. Secunde und soll durch ein Ueberfallwehr $4\frac{1}{2}$ Fuß höher aufgestaut werden; man sucht die erforderliche Wehrhöhe. Da die Aufstauung ziemlich groß ist, so können wir erwarten, daß zur Berechnung der gesuchten Höhe die einfache Formel

$$x = a + h_1 - \left(\frac{3Q}{2 \mu b \sqrt{2g}}\right)^{2/3}$$

genügen werde. Es ist in dieser Formel $a = 3$, $h_1 = 4{,}5$, $Q = 310$, $b = 30$, $\mu = 0{,}80$ und $\sqrt{2g} = 7{,}906$ einzusetzen, weshalb daher die Wehrhöhe folgt:

$$x = 3 + 4{,}5 - \left(\frac{3 \,.\, 310}{2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 30 \,.\, 7{,}906}\right)^{2/3} = 7{,}5 - \left(\frac{31}{12{,}65}\right)^{2/3} = 7{,}5 - 1{,}82$$
$$= 5{,}68 \text{ Fuß},$$

und daher der Ueberfall wirklich ein vollkommener, wie vorausgesetzt wurde. Sollte das Wasser nur 2 Fuß aufgestaut werden, so hätte man der letzten Formel zufolge

$$x = 3 + 2 - 1{,}82 = 3{,}18 \text{ Fuß},$$

also den Ueberfall noch vollkommen. Um endlich nur $1\frac{1}{2}$ Fuß aufzustauen, ist auf jeden Fall nun nur ein unvollkommener, d. h. nicht aus dem Niveau des Unterwassers hervorragender Wehrdamm nöthig. Wenden wir die vollständige Formel an, und setzen wir in ihr

$$k = \frac{c^2}{2g} = 0{,}016 \left(\frac{Q}{(a + h_1) b}\right)^2 = 0{,}016 \left(\frac{310}{4{,}5 \,.\, 30}\right)^2 = 0{,}016 \,.\, 5{,}27$$
$$= 0{,}084 \text{ Fuß, und } \mu \text{ wieder } = 0{,}80,$$

so erhalten wir:

$$h - h_1 = \frac{310}{0{,}8 \,.\, 30 \,.\, 7{,}906 \sqrt{1{,}584}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(1{,}584)^{3/2} - (0{,}084)^{3/2}}{1{,}584^{1/2}}$$
$$= 1{,}30 - 1{,}06 + 0{,}01 = 0{,}25 \text{ Fuß.}$$

Es muß also die Ueberfallschwelle $1/4$ Fuß oder 3 Zoll unter der Oberfläche des Unterwassers stehen und demnach das Wehr selbst die Höhe

$$x = a + h_1 - h = 3 - 0{,}25 = 2{,}75 \text{ Fuß}$$

erhalten.

§. 151 **Stauhöhe bei Durchlässen.** Die Stauverhältnisse bei einem Durchlaßwehre sind nach der Theorie des Ausflusses durch Schutzöffnungen zu beurtheilen. Es können hier drei Fälle vorkommen; entweder fließt das Wasser frei aus, oder es fließt unter Wasser aus, oder es fließt theils frei, theils unter Wasser aus. Beim freien Ausfluß, wie er z. B. bei dem in Fig. 301 abgebildeten Schleusenwehre vorkommt, hängt die Ausflußgeschwindigkeit nur von der Druckhöhe h ab, welche von der Mitte der Schutzöffnung bis zum Wasserspiegel zu messen ist. Ist dann noch a_0 die Oeffnungshöhe und b die Oeffnungsbreite, so hat man:

$$Q = \mu a_0 b \sqrt{2 g h},$$

und daher umgekehrt:

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu a_0 b}\right)^2,$$

oder mit Berücksichtigung der Geschwindigkeitshöhe k des ankommenden Wassers:

$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{\mu a_0 b}\right)^2 - k.$$

Für die Oeffnungshöhe folgt hieraus die Formel:

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2 g h}},$$

oder wenn die Stauhöhe h_1 über der Schwelle gegeben ist,

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2 g \left(h_1 - \frac{a_0}{2}\right)}}.$$

Versuchen des Verfassers zufolge, läßt sich hier $\mu = 0{,}60$ setzen. Staut das Unterwasser bis zur Schütze zurück, wie z. B. in Fig. 304 vorgestellt wird, so hat man den Niveauabstand $AB = h$ als Druckhöhe einzuführen und die obige Formel zu gebrauchen. Es ist also auch hier die einer gegebenen Stauhöhe h entsprechende Oeffnungshöhe:

$$a_0 = \frac{Q}{\mu b \sqrt{2 g h}}.$$

Wenn endlich das Niveau des Unterwassers innerhalb der Mündung liegt, so fließt ein Theil des Wassers frei, und ein anderer Theil unter

Fig. 304.

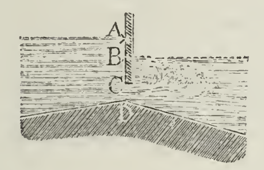
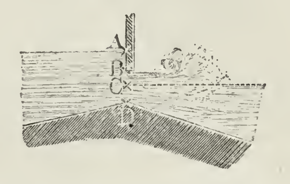


Fig. 305.



Wasser aus. Ist die Stauhöhe oder der Niveauabstand $\overline{AC}$ zwischen beiden Wasserspiegeln, Fig. 303, $= h$, die Höhe $\overline{BC}$ des über dem Unterwasserspiegel befindlichen Theiles der Mündung, $= a_1$, und die Höhe $\overline{CD}$ des unter diesem Spiegel liegenden Mündungsstückes, $= a_2$, so hat man die Wassermenge für den ersten Theil:

$$Q_1 = \mu a_1 b \sqrt{2g\left(h - \frac{a_1}{2}\right)},$$

und für den zweiten:

$$Q_2 = \mu a_2 b \sqrt{2gh};$$

daher die ganze Abflußmenge:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \mu b \sqrt{2g}\left(a_1 \sqrt{h - \frac{a_1}{2}} + a_2 \sqrt{h}\right).$$

Aus der Ausflußmenge Q, Stauhöhe h und der Tiefe a_2 der Wehrkappe unter dem Unterwasserspiegel ergiebt sich der Abstand des Schutzbrettes von eben diesem Spiegel:

$$a_1 = \left(\frac{Q}{\mu b \sqrt{2g}} - a_2 \sqrt{h}\right) : \sqrt{h - \frac{a_1}{2}}.$$

Beispiele. 1. Wie hoch sind die Schutzbretter eines Schleusenwehres, Fig. 301, zu ziehen, welches eine Wassermenge von 250 Cubikfuß abführen soll, bei einer Breite $b = 24$ Fuß und einem Wasserstande $h_1 = 5$ Fuß über der Ueberfallsschwelle? Bei freiem Abflusse ist:

$$a_0 = \frac{250}{0{,}6 \,.\, 24 \,.\, 7{,}906 \sqrt{5 - \frac{a_0}{2}}} = \frac{2{,}196}{\sqrt{5 - \frac{a_0}{2}}},$$

annähernd ist $a_0 = 1$, daher:

$$\sqrt{5 - \frac{a_0}{2}} = \sqrt{4{,}5} = 2{,}121,$$

und genauer die gesuchte Oeffnungshöhe:

$$a_0 = \frac{2{,}196}{2{,}121} = 1{,}035 \text{ Fuß} = 12{,}4 \text{ Zoll}.$$

2. Welcher Schützenzug ist bei dem in Fig. 304 abgebildeten Wehre nöthig, um 120 Cubikfuß Wasser pr. Secunde unter einer Druckhöhe von 1,5 Fuß bei 30 Fuß Mündungsweite abfließen zu lassen. Hier findet Ausfluß unter Wasser Statt (Fig. 304), und es ist daher:

$$a_0 = \frac{120}{0,6 \,.\, 30 \,.\, 7,906 \sqrt{1,5}} = 0,689 \text{ Fuß} = 8^1/_4 \text{ Zoll.}$$

3. Man will die Wassermasse bestimmen, welche durch eine Schutzöffnung, wie Fig. 305, strömt, deren Weite $b = 18$ Fuß und Höhe $\overline{BD} = a_1 + a_2 = 1,2$ Fuß ist, wenn die Druckhöhe $\overline{AC} = h = 2$ Fuß, und der Wasserstand über der Schwelle, $a_2 = 0,5$ Fuß beträgt. Man hat hier:

$$\mu b \sqrt{2g} = 0,6 \,.\, 18 \,.\, 7,906 = 85,38,$$

ferner:

$$a_2 \sqrt{h} = 0,5 \sqrt{2} = 0,707$$

und

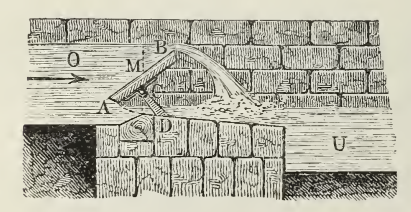
$$a_1 \sqrt{h - \frac{a_1}{2}} = 0,7 \sqrt{1,65} = 0,899,$$

daher die gesuchte Wassermenge:

$$Q = 85,38\,(0,707 + 0,899) = 85,38 \,.\, 1,606 = 137,1 \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung. Setzt man ein Schützenwerk über die Kappe eines Ueberfallwerkes, so erhält man einen vereinigten Schleusenüberfall. Auch hat man noch sogenannte bewegliche Wehre, wo die Höhe der Ueberfallschwelle nach Bedürfniß verändert, und zwar bei Hochwasser verkleinert und bei Niederwasser vergrößert werden kann. Die einfachsten Wehre dieser Art sind die Balkenwehre, wo die den Aufstau bewirkende Wand aus lose über einander liegenden Balken oder Pfosten besteht, nächstdem gehören auch hierher die sogenannten Nadelwehre, wo diese Wand aus aufrecht stehenden Pfosten, den sogenannten Nadeln, gebildet wird, welche an ihren oberen Enden mit einander durch ein starkes Seil verbunden sind, und sich übrigens gegen einen festen Rahmen stemmen. Die beweglichen Wehre im eigentlichen Sinne bestehen aus Schützen oder Fallthüren, welche sich bei hohem Wasserstande von selbst öffnen und bei niedrigem Wasserstande von selbst verschließen. Ein einfaches Wehr dieser Art ist in Fig. 306 abgebildet, O ist das Ober- sowie U das Unterwasser, und AB eine um C drehbare Fallthür, welche eine verticale Stellung annimmt und sich mit ihrem Fuße A gegen die Schwelle D stemmt, wenn der Oberwasserspiegel bis auf eine gewisse Höhe herabsinkt, und dagegen sich dreht und öffnet, wenn der Wasserspiegel auf eine gewisse Höhe steigt. Steht dieser Wasserspiegel an der oberen Kante B der Klappe, so befindet sich (nach Band I, §. 358) der Mittelpunkt M des Wasserdruckes auf AB um $BM = {}^2/_3\, BA$ unter B; es ist daher auch die Drehaxe C so anzubringen, daß sie, in der Richtung von AB, von B doppelt so viel absteht als von A. Man kann nun leicht ermessen, daß sich die Klappe von links nach rechts drehen und folglich öffnen muß, wenn der Wasserspiegel über B

Fig. 306.



steigt, und daß sie sich von rechts nach links und folglich schließen muß, wenn der Wasserspiegel unter B herabsinkt. Es gehört hierher auch die selbstwirkende Schütze von Chaubart, welche sich wälzend dreht (s. „Civilingenieur" Bd. III, 1857).

Die beweglichen Wehre haben mit den Schleusenwehren vor den einfachen Ueberfällen den Vorzug, daß durch sie beim Eintritt des Hochwassers der übermäßige Aufstau, wobei leicht Ueberschwemmungen eintreten und ein starkes Ablagern von Schlamm verkommt, verhindert wird.

Aufstau bei lichten Wehren. Die Stauverhältnisse bei lichten Wehren, Brückenpfeilern und Buhnen sind fast ebenso zu ermitteln, wie die bei Ueberfällen. Bei dem lichten Wehre BE, Fig. 307, erfolgt dadurch eine Auffstauung, daß die Flußbreite AC hinter dem Wehrdamme in die kleinere Breite CB übergeht. Wenn nun der Seitencanal D ganz geschlossen ist (was wir der Sicherheit wegen voraussetzen wollen), so muß das ganze Wasser Q durch den verengten Raum CB hindurchfließen. Setzt man nun die Breite $\overline{CB} = b$, die Stauhöhe $\overline{AB_1}$, Fig. 308, $= h$, und §. 152

Fig. 307.

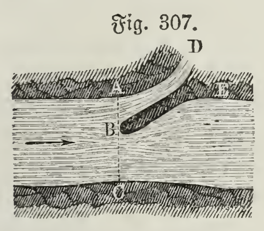
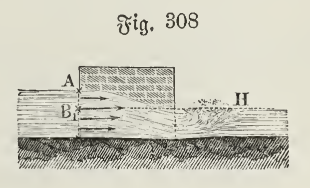


Fig. 308



die Höhe $\overline{B_1 C_1}$ des Unterwassers $= a$, so hat man die frei über dem Unterwasser ausfließende Wassermenge:

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2gh^3},$$

und das im Unterwasser abfließende Wasserquantum:

$$Q_2 = \mu b a \sqrt{2gh},$$

daher das ganze Abflußquantum:

$$Q = \mu b \sqrt{2gh}\, ({}^2/_3 h + a).$$

Umgekehrt folgt daher die einer gegebenen Stauhöhe h entsprechende Breite des Abflußwassers:

$$b = \frac{Q}{\mu\, ({}^2/_3\, h + a) \sqrt{2gh}}.$$

Ist die Auffstauung (h) klein, oder die Geschwindigkeit des Wassers groß, so muß man noch die Geschwindigkeit des ankommenden Wassers berücksichtigen. Bezeichnet wieder k die Geschwindigkeitshöhe des ankommenden Wassers, so hat man:

$$Q_1 = {}^2/_3\, \mu b \sqrt{2g}\, [(h + k)^{3/2} - k^{3/2}]$$

sowie

$$Q_2 = \mu b a \sqrt{2g\,(h + k)},$$

und daher:

$$Q = \mu b \sqrt{2g} \left(\tfrac{2}{3} \left[(h + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + a\,(h + k)^{1/2}\right),$$

also umgekehrt:

$$b = \frac{Q}{\mu \sqrt{2g} \left(\tfrac{2}{3} \left[(h + k)^{3/2} - k^{3/2}\right] + a\,(h + k)^{1/2}\right)}.$$

Während bei der freien Bewegung des Wassers in Flußbetten die Geschwindigkeit im Wasserspiegel am größten ist und dieselbe nach dem Boden zu immer mehr und mehr abnimmt (Bd. I, §. 470), findet bei dem durch irgend eine Ursache aufgestauten Wasser ein anderes Verhältniß Statt, es nimmt nämlich hier die Geschwindigkeit von der Oberfläche des Oberwassers allmälig zu bis zur Oberfläche des Unterwassers, und von da an bis zur Sohle wieder, jedoch nur wenig, ab; es findet also eine Geschwindigkeitsveränderung Statt, wie sie durch die Länge der Pfeile in Fig. 308 angedeutet wird. Die Richtigkeit dieses Verhältnisses folgt daraus, daß das Wasser über dem Unterwasserspiegel unter einer von o bis h wachsenden, unter demselben aber unter der constanten Druckhöhe h abfließt, während bei der ungehinderten Bewegung die Druckhöhe in allen Tiefen = Null ist.

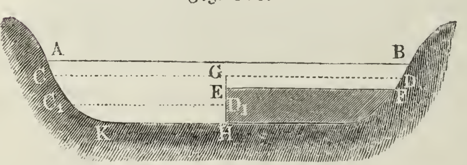
Diese Formel findet ihre Anwendung auch bei Brückenpfeilern, wenn man hier unter b die Summe der Strombreiten zwischen den Pfeilern versteht. Um die den Pfeilern und dem Grundbette nachtheilige Wellen- und Wirbelbewegung des Wassers zwischen den Pfeilern und hinter denselben so viel wie möglich zu vermeiden, sind Vorder- und Hintertheil der Brückenpfeiler AB, Fig 309, zuzuschärfen oder abzurunden. Ist der Vordertheil stumpf zugeschärft, so hat man $\mu = 0,90$ anzunehmen, ist er aber spitz zugeschärft oder halbcylindrisch geformt, so kann man $\mu = 0,95$ setzen, und ist derselbe gar elliptisch geformt, oder, wie in Fig. 309, aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt, so fällt μ sogar 0,97 oder nahe 1 aus (s. Gauthey's Traité de la construction de ponts, T. I.).

Fig. 309.



Anmerkung. Wenn der das Querprofil eines fließenden Wassers verengende Einbau, z. B. eine Buhne, nicht aus dem Wasser hervorragt, so kann man das ganze Wasserquantum Q aus drei Theilen zusammensetzen. Liegt die Dammkappe EF, Fig. 310, unter dem Unterwasserspiegel CD, und bezeichnet h die Stauhöhe, sowie b die Breite $\overline{AB}$ des ganzen Querprofiles, so haben wir das durch das Querprofil $ABDC$ abfließende Wasserquantum:

Fig. 310.



$$Q_1 = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}],$$

ferner das durch das übrige über dem Einbaue und unter constantem Drucke h abfließende Wasserquantum, wenn a die Tiefe GH des Unterwassers, b_1 die Breite EF des Einbaues, und a_1 die Höhe EH des Einbaues bezeichnet:

$$Q_2 = \mu b_1 (a - a_1)\sqrt{2g(h+k)},$$

und endlich das übrige neben dem Einbau unter dem constanten Drucke h abfließende Wasser:

$$Q_3 = \mu b_2 a \sqrt{2g(h+k)},$$

es ist also:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$= \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}] + \mu(ba - b_1 a_1)\sqrt{2g(h+k)},$$

und es läßt sich hiernach auch die einer gegebenen Stauhöhe entsprechende Höhe oder Breite des Einbaues berechnen. Ist hingegen $C_1 D_1$ der Unterwasserspiegel, steht also die Dammkappe über dem Unterwasser, so hat man:

$$Q = \frac{2}{3}\mu b_1 \sqrt{2g}\,[(a + h - a_1 + k)^{3/2} - k^{3/2}]$$
$$+ \frac{2}{3}\mu b_2 \sqrt{2g}\,[(h+k)^{3/2} - k^{3/2}] + \mu a b_2 \sqrt{2g(h+k)}.$$

Beispiel. Welche Länge ist dem Damme BE (Fig. 307) zu geben, damit durch ihn der 550 Fuß breite, 8 Fuß tiefe und 14000 Cubikfuß liefernde Fluß AC um $\frac{3}{4}$ Fuß höher gestaut werde? Es ist:

$$k = 0{,}016\left(\frac{14000}{550\,.\,8}\right)^2 = 0{,}016\,.\,3{,}18^2 = 0{,}162,$$

nehmen wir nun noch $\mu = 0{,}9$ an, so erhalten wir die Breite des verengten Wasserstromes:

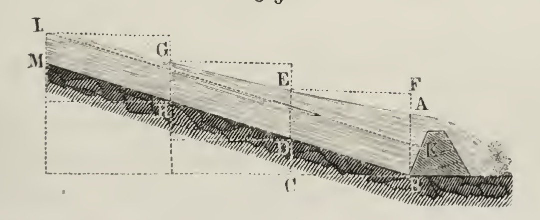
$$BC = b = \frac{14000}{0{,}9\,.\,7{,}906\,[\frac{2}{3}\,(0{,}912^{3/2} - 0{,}162)^{3/2} + 8\,.\,0{,}912^{1/2}]}$$
$$= \frac{14000}{7{,}1\,(0{,}537 + 7{,}639)} = \frac{14000}{7{,}1\,.\,8{,}176} = 240{,}7 \text{ Fuß},$$

daher die gesuchte Dammerstreckung

$$AB = b_1 = 550 - 240{,}7 = 309{,}3 \text{ Fuß}.$$

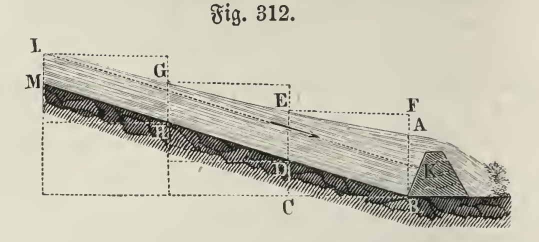
Stauweite. Wir haben nun die andere wichtige Frage zu beantworten: §. 153
Nach welchem Gesetze nimmt die Stauhöhe oberhalb des Wehres mit der Entfernung ab? Ohne uns auf besondere Formeln oder Theorien einzulassen, können wir bei Lösung dieser Aufgabe die in Bd. I., §. 477 und §. 478 abgehandelte Theorie der ungleichförmigen Bewegung des Wassers in Flußbetten sogleich zur Anwendung bringen. Zu diesem Zwecke denken wir uns von dem Wehre ABK, Fig. 311, aus die aufgestaute Strecke in

Fig. 311.



Stücke zerschnitten, und führen dann die Rechnung für jedes Stück einzeln durch. Ist nun a_0 die Wassertiefe AB am Wehre, a_1 die Tiefe DE am

Fig. 312.



Anfange eines solchen Stückes $ABDE$, F_0 der Querschnitt des fließenden Wassers am Wehre, F_1 der Querschnitt desselben bei DE, Q das Wasserquantum, p der mittlere Umfang des Querprofiles auf dieses Streckenstück, und α der Neigungswinkel DBC des Grundbettes, so hat man nach Bd. I, §. 478 die entsprechende Länge BD des Stückes, wenn man dort a_0 und a_1, sowie F_0 und F_1 unter einander vertauscht:

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{sin.\, a - \zeta \cdot \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}.$$

Bezeichnet a_2 die Wassertiefe GH am Anfange eines zweiten Stückes $DEGH$, F_2 den Querschnitt desselben und p_1 den mittleren Umfang des Wasserprofiles dieses Stückes, so hat man für die Länge DH dieses Stückes:

$$l_1 = \frac{a_1 - a_2 - \left(\frac{1}{F_2^2} - \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}{sin.\, a - \zeta\, \frac{p_1}{F_1 + F_2}\left(\frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2}\right)\frac{Q^2}{2g}}.$$

Wenn man nun so fortfährt, nämlich willkürliche Abnahmen $a_0 - a_1$, $a_1 - a_2$, $a_2 - a_3$ u. s. w. der Wassertiefen annimmt, und hieraus die Querschnitte F_1, F_2, F_3 u. s. w., sowie die mittleren Umfänge berechnet, so bekommt man durch diese Formel die entsprechenden Abstände l, l_1, l_2, und also auch die Entfernungen l, $l + l_1$, $l + l_1 + l_2$ u. s. w. vom Damme.

Um die einer gegebenen Entfernung x entsprechende Wassertiefe y zu finden, kann man entweder auf die nach der eben gezeigten Methode gefundenen Werthe l, $l + l_1$, $l + l_1 + l_2$ u. s. w. das Interpolationsverfahren anwenden, oder sich folgender, ebenfalls in Bd. I, §. 478 gegebenen Näherungsformel bedienen:

$$a_0 - a_1 = \frac{\left(sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p_0}{a_0\, b_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}\right)}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}}\, l.$$

Führt man hierin für b_0 die Breite, für p_0 den Umfang und für v_0 die Geschwindigkeit am Wehre ein, so giebt diese Formel die Abnahme $(a_0 - a_1)$ der Stauhöhe auf die erste kurze Strecke l über dem Wehre; ebenso erhält man für eine folgende kurze Strecke l_1 diese Abnahme:

$$a_1 - a_2 = \frac{\left(sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p_1}{a_1\, b_1} \cdot \frac{v_1^2}{2\,g}\right)}{1 - \frac{2}{a_1} \cdot \frac{v_1^2}{2\,g}}\, l_1 \text{ u. s. w.,}$$

und es läßt sich endlich für eine gegebene Entfernung $l + l_1 + l_2 + \cdots$ die entsprechende Wassertiefe

$$a_0 - (a_0 - a_1) - (a_1 - a_2) - \cdots$$

berechnen.

Beispiele. 1. In einem 80 Fuß breiten und 4 Fuß tiefen Flusse, welcher 1400 Cubikfuß Wasser führt, soll ein Wehr eingebaut werden, um das Wasser 3 Fuß hoch aufzustauen; man sucht nun die Stauverhältnisse oberhalb des Wehres. Ohne Aufstauung ist die Geschwindigkeit des Wassers:

$$c = \frac{1400}{80\,.\,4} = \frac{35}{8} = 4{,}375 \text{ Fuß},$$

daher nach der Tabelle in Bd. I, §. 476, der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = 0{,}00775,$$

und die Neigung des Grundbettes:

$$sin.\,\alpha = 0{,}00775 \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{c^2}{2\,g}.$$

Setzen wir nun $p = 84$, $F = 80\,.\,4 = 320$, $c = 4{,}375$ und $\frac{1}{2\,g} = 0{,}016$ ein, so folgt die Neigung:

$$sin.\,\alpha = 0{,}00775 \cdot \frac{84}{320} \cdot 0{,}016\,.\,(4{,}375)^2 = 0{,}0006230.$$

Die Wassertiefe unmittelbar am Wehre ist $4 + 3 = 7$ Fuß, bestimmen wir nun aber die Entfernungen, wo diese Tiefe nur $6\frac{1}{2}$, 6, $5\frac{1}{2}$, 5 Fuß u. s. w. beträgt. Setzen wir zunächst in der Formel

$$l = \frac{a_0 - a_1 - \left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\frac{Q^2}{2\,g}}{sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F_0 + F_1}\left(\frac{1}{F_0^2} + \frac{1}{F_1^2}\right)\frac{Q^2}{2\,g}},\ a_0 - a_1 = 0{,}5,\ F_0 = 80\,.\,7 = 560,$$

$F_1 = 80\,.\,6{,}5 = 520$, $Q = 1400$, $sin.\,\alpha = 0{,}000623$, p etwa $= 89$, und, der mittleren Geschwindigkeit $\frac{2\,Q}{F + F_1} = \frac{2800}{1080} = 2{,}59$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}00796$, so erhalten wir die entsprechende Entfernung:

23*

$$l = \frac{0,5 - (0,0000036982 - 0,0000031888) \,.\, 31360}{0,000623 - 0,00796\,\frac{89}{1080}\,(0,0000036982 + 0,0000031888) \,.\, 31360}$$

$$= \frac{0,5 - 0,0160}{0,000623 - 0,0001417} = \frac{484000}{481,3} = 1005,6 \text{ Fuß.}$$

Um nun die einer Senkung des Wasserspiegels von 1 Fuß zukommende Erstreckung zu finden, setzen wir zwar wieder $a_0 - a_1 = 0,5$, aber dagegen $F_0 = 520$, $F_1 = 80 \,.\, 6 = 480$, $p = 88$, und, der mittleren Geschwindigkeit $\frac{2800}{1000} = 2,80$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0,00792$. Hiernach folgt durch die nämliche Formel die Länge der Flußstrecke, innerhalb welcher die Wassertiefe von 6,5 auf 6 Fuß sinkt,

$$l = \frac{0,5 - 0,0000006421 \,.\, 31360}{0,000623 - 0,00792 \cdot \frac{88}{1000} \cdot 0,0000080385 \,.\, 31360}$$

$$= \frac{480000}{447,31} = 1073,1 \text{ Fuß.}$$

Es ist also 1005,6 + 1073,1 = 2078,7 Fuß oberhalb des Wehres das Wasser nur noch 6 Fuß tief, oder es beträgt die Stauung daselbst nur noch 2 Fuß.

Setzen wir nun wieder $a_0 - a_1 = 0,5$, $F_0 = 480$, $F_1 = 440$, $p = 87$ und $\zeta = 0,00787$, so erhalten wir die entsprechende Längenerstreckung

$$l = \frac{0,5 - 0,0258}{0,000623 - 0,00022185} = \frac{474200}{401.15} = 1182,1 \text{ Fuß.}$$

Ebenso erfolgt für eine weitere Senkung von ½ Fuß die entsprechende Strecke

$$l = \frac{465980}{335,65} = 1388,3 \text{ Fuß.}$$

Es ist also 2078,7 + 1182,1 + 1388,3 = 4649,1 Fuß oberhalb des Wehres die Aufstauung noch 1 Fuß, oder die Wassertiefe 5 Fuß. Für 4½ Fuß Wassertiefe bestimmt sich die Entfernung

$$l = \frac{454000}{240,47} = 1888,0 \text{ Fuß;}$$

für 4¼ Fuß Wassertiefe ist ferner

$$l = \frac{220710}{140,97} = 1565,6 \text{ Fuß;}$$

für 4,1 Fuß Wassertiefe

$$l = \frac{129785}{55,53} = 2331,8 \text{ Fuß,}$$

und für 4,0 Fuß Tiefe

$$l = \infty;$$

es ist also 4649,1 + 1888,0 + 1565,6 + 2331,8 = 10434,5 Fuß oberhalb des Wehres die Stauhöhe noch $^1/_{10}$ Fuß, und nimmt weiter hinauf unendlich langsam ab.

2. Wie groß ist die Stauhöhe 2500 Fuß oberhalb des im vorigen Beispiele behandelten Wehres? Nach der vorigen Rechnung ist 2078,7 Fuß oberhalb des Wehres noch 2 Fuß Stauhöhe, es fragt sich also, wie viel auf 2500 — 2078,7 = 421,3 Fuß Erstreckung die Stauhöhe abnimmt. Nun beträgt aber nach

oben, die einer ferneren Senkung von 0,5 Fuß entsprechende Erstreckung = 1182,1 Fuß, es läßt sich daher für jeden Fuß Länge

$$\frac{0,5}{1182,1} \text{ Fuß Senkung,}$$

also für 421,3 Fuß Länge dieselbe

$$= \frac{0,5 \,.\, 421,3}{1182,1} = 0,178 \text{ Fuß,}$$

und folglich 2500 Fuß oberhalb des Wehres, die Stauhöhe

$$= 2 - 0,178 = 1,822 \text{ Fuß,}$$

sowie Wassertiefe

$$= 5,822 \text{ Fuß annehmen.}$$

Rechnen wir nach der zweiten Formel

$$a_0 - a_1 = \frac{\left(sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p_0}{a_0\, b_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}\right)}{1 - \frac{2}{a_0} \cdot \frac{v_0^2}{2\,g}}\, l,$$

und setzen wir hierin erst $l = 800$, $p_0 = 89$, $a_0 = 7$, $a_0\, b_0 = 560$, $v_0 = \frac{1400}{560} = 2,5$ und $\zeta = 0,007985$, so erhalten wir die entsprechende Senkung:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0,000623 - 0,007985 \cdot \frac{89}{560} \cdot 0,1}{1 - \frac{2}{7} \cdot 0,1}\right) \cdot 800 = \frac{0,0004961 \,.\, 800}{0,9714}$$
$$= 0,409 \text{ Fuß.}$$

Führen wir nun wieder $l = 800$, $p = 88$, $a_0 = 7 - 0,409 = 6,591$, $a_0\, b_0 = 527,3$, $v_0 = \frac{1400}{527,3} = 2,655$ und $\zeta = 0,00795$ ein, so finden wir die Senkung:

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{0,000623 - 0,00795 \,.\, \frac{88}{527,3} \cdot 0,1128}{1 - \frac{2}{6,591} \cdot 0,1128}\right) . \; 800$$

$$= \frac{0,000623 - 0,00014964}{0,9658} \cdot 800 = \frac{0,0004735 \,.\, 800}{0,9658} = 0,392 \text{ Fuß.}$$

Fahren wir so fort, und setzen wir jetzt

$l = 900$, $p = 87$, $a_0 = 6,591 - 0,392 = 6,199$, $a_0\, b_0 = 496$, $v_0 = \frac{1400}{496} = 2,82$ und $\zeta = 0,00791$, so erhalten wir die Senkung:

$$a_0 - a_1 = \frac{0,0004464 \,.\, 900}{0,959} = 0,419 \text{ Fuß;}$$

es ist also 800 + 800 + 900 = 2500 Fuß oberhalb des Wehres die Wassertiefe noch 6,199 — 0,419 = 5,780 Fuß. Nach der vorigen Rechnung ist sie 5,822 Fuß, d. i. 0,042 Fuß = ½ Zoll größer.

Wasserschwelle. Wenn wir die Gleichung für die von dem verticalen Längendurchschnitt des aufgestauten Wasserspiegels gebildete **Staucurve**, nämlich: §. 154

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2\,g}}{1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2\,g}}\right) l$$

etwas näher betrachten, so werden wir mit mehreren merkwürdigen Verhältnissen des Aufstauens bekannt. In dem Bruche

$$\frac{sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g}}$$

nähern sich Zähler und Nenner immer mehr und mehr der Null, je größer die Geschwindigkeit v ist, und je nachdem nun der erstere oder letztere zuerst Null wird, stellt sich

$$l = \frac{(a_0 - a_1)\left(1 - \frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g}\right)}{0} = \infty,$$

oder

$$l = \frac{(a_0 - a_1) \,.\, 0}{sin.\,\alpha - \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}} = 0$$

heraus. Man sieht hieraus, daß im ersten Falle der Theil l, und also auch die ganze Stauweite unendlich groß wird, daß dagegen im zweiten Falle der Theil l Null ausfällt, und also mit ihm die ganze Aufstauung beendigt ist. Das erste Nullwerden tritt aber ein, sowie

$$\zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g} = sin.\,\alpha,$$

also die Geschwindigkeit des aufgestauten Wassers unendlich wenig von der Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,F\,sin.\,\alpha}{\zeta p}}$$

des unaufgestauten gleichförmig zufließenden Wassers verschieden ist, und das zweite stellt sich heraus, sowie

$$\frac{2}{a} \cdot \frac{v^2}{2g} = 1,$$

oder

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2},$$

also die Geschwindigkeitshöhe der halben Wassertiefe gleich wird. Es findet also die erste Art des Anschlusses Statt, wenn die Geschwindigkeitshöhe des unaufgestauten Wassers kleiner als die halbe Tiefe des unaufgestauten Wassers ist, und dagegen die zweite Art, wenn die Geschwindigkeitshöhe die halbe Wassertiefe übertrifft. Während dort der Wasserspiegel eine hohle Fläche wie $AEGL$, Fig. 313, bildet, hat er hier eine erhabene Gestalt wie AEG, Fig. 314, und bildet bei EG einen Sprung oder eine sogenannte Schwelle.

Setzen wir nun in

$$sin. \alpha = \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad \frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2}, \; F = ab \text{ und } p,$$

Fig. 313.

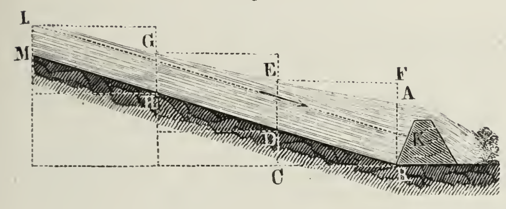
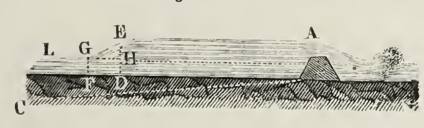


Fig. 314.



wenn auch nur annähernd, $= b$, so erhalten wir:

$$sin. \alpha = \frac{1}{2} \zeta;$$

es ist also ein Sprung zu erwarten, wenn der Abhang α größer ist als der halbe Reibungscoefficient, oder $\zeta = 0{,}008$ gesetzt, wenn $\alpha > 0{,}004$ oder $\alpha > \frac{1}{250}$. In der Regel haben Flüsse und Canäle einen kleineren Abhang, daher kommt denn auch bei ihnen die gedachte Wasserschwelle nicht leicht vor.

Die Höhe $EH = x$ des Sprunges (Fig. 314) ergiebt sich aus der Geschwindigkeit v des ankommenden und aus der Geschwindigkeit v_1 des fortfließenden Wassers, indem man setzt:

$$x = \frac{v^2 - v_1^2}{2g},$$

oder da $av = (a + x)\, v_1$, also

$$v_1 = \left(\frac{a}{a + x}\right) v \text{ ist,}$$

$$x = \left[1 - \left(\frac{a}{a + x}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g},$$

und die Auflösung vollkommen beendigt:

$$x = \frac{v^2}{4g} - a + \sqrt{\frac{v^2}{2g}\left(a + \frac{v^2}{8g}\right)}.$$

Hiernach fällt sehr richtig, für $\frac{v^2}{2g} = \frac{a}{2}$

$$x = -\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a = 0$$

aus, dagegen ist für $\frac{v^2}{2g} = a$,

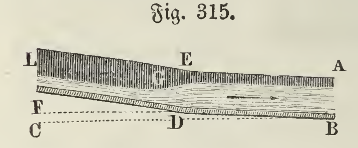
$$x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = 0{,}618\, a,$$

für $\frac{v^2}{2g} = 2a$,

$$x = a\sqrt{3} = 1{,}732\, a \text{ u. s. w.}$$

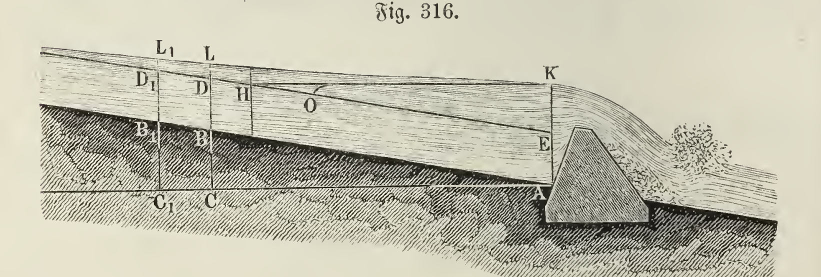
Anmerkung. Die eben behandelte Wasserschwelle beobachtete zuerst Bidone in einem nur 12 Zoll breiten Gerinne mit dem mittleren Neigungsverhältnisse $\alpha = 0{,}033$. Es bildet sich dieselbe aber nicht allein beim aufgestauten Wasser, sondern auch in dem Falle, wenn, wie Fig. 315 vor Augen führt, die Neigung des Gerinnes oder Flußbettes sich ändert, wie der Verfasser oft Gelegenheit gehabt hat, zu beobachten. Ist das Neigungsverhältniß des oberen Theiles größer als $\frac{1}{2}\zeta$ und das Neigungsverhältniß des unteren kleiner, so bildet sich an dem Wechsel oder der Uebergangsstelle stets ein Sprung, in welchem die der größeren Neigung entsprechende kleinere Wassertiefe in die der kleineren Neigung entsprechende größere Wassertiefe übergeht.

Fig. 315.



(§. 155) **Staucurve.** Die Gleichung der Staucurve, welche von dem verticalen Längendurchschnitt der Oberfläche des aufgestauten Wassers gebildet wird, läßt sich mit Hülfe des höheren Calculs, wie folgt, ermitteln. Es bezeichne a die Höhe $AE = BD$, Fig. 316, des freifließenden Wassers AD, h die

Fig. 316.



Stauhöhe EK des Flusses in der Nähe des Wehres, y die Stauhöhe DL desselben im Abstande $ED = x$ vom Wehre, ferner sei α der Neigungswinkel BAC des Flußbettes, c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im Querschnitt $AE = BD$ vor der Aufstauung, sowie v die mittlere Geschwindigkeit desselben im Querschnitt BL; setzt man noch $l = DD_1 = dx$, $a_0 - a_1 = DL - D_1L_1 = -dy$ und führt statt a, $a + y$, statt $\frac{p}{F}$ annähernd $= \frac{1}{a+y}$ und $v = \frac{ac}{a+y}$ ein, so geht die Grundformel

$$a_0 - a_1 = \left(\frac{sin.\ \alpha - \xi\ \frac{p}{F}\ \frac{v^2}{2g}}{1 - \frac{2}{a}\ \frac{v^2}{2g}}\right)$$

in folgende über

$$- dy = \left(\frac{sin\ \alpha - \xi\ \frac{a}{(a+y)^2}\ \frac{c^2}{2g}}{1 - \frac{2a^2}{(a+y)^3}\ \frac{c^2}{2g}}\right) dx.$$

Benutzt man dann noch die Formel

$$sin.\alpha = \alpha = \xi\ \frac{1}{a}\ \frac{c^2}{2g},\ \text{und setzt hiernach}$$

$$\xi\ \frac{c^2}{2g} = \alpha a,\ \text{so erhält man}$$

$$\alpha dx = -\left(\frac{(a+y)^3 - 2a^2\ \frac{c^2}{2g}}{(a+y)^3 - a^3)}\right) dy.$$

Führt man zur Abkürzung $a + y = y_1$, $dy = dy_1$, und $\frac{c^2}{2g} = k$ ein, so wird einfacher

$$\alpha dx = -\left(\frac{y_1^3 - 2a^2k}{y_1^3 - a^3}\right) dy_1 = - dy_1 - \left(\frac{a^3 - 2a^2k}{y_1^3 - a^3}\right) dy_1,$$

wonach dann

$$\alpha x = - y_1 - a^2 (a - 2k) \int \frac{dy_1}{y_1^3 - a^3}$$

$$= - y_1 + (a - 2k) \int \frac{d\left(\frac{y_1}{a}\right)}{1 - \left(\frac{y_1}{a}\right)^3}$$

$$= - y_1 + (a - 2k) \int \frac{dZ}{1 - Z^3}$$ folgt, wenn man noch $\frac{y_1}{a}$ durch Z bezeichnet, also $y_1 = aZ$ setzt.

Es ist

$$\frac{1}{1 - Z^3} = \frac{1}{(1 - Z)(1 + Z + Z^2)} = \frac{A}{1 - Z} = \frac{B + CZ}{1 + Z + Z^2},$$

also $1 = A(1 + Z + Z^2) + (B + CZ)(1 - Z)$, oder

$0 = A + B - 1 + (A - B + C) Z + (A - C) Z^2$;

daher $A + B = 1$, $A + C = B$ und $A = C$,

und es folgt $A = C = 1/3$ und $B = 2/3$, sowie

$$\frac{1}{1 - Z^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - Z} + \frac{2 + Z}{1 + Z + Z^2}\right).$$

Hiernach ist

$$\int\frac{dZ}{1 - Z^3} = \frac{1}{3}\left(\int\frac{dZ}{1 - Z} + \int\frac{(2 + Z)\,dZ}{1 + Z + Z^2}\right) \text{ zu setzen.}$$

Nach III. des Artikels 22 in Bd. I, ist

$$\int\frac{dZ}{1 - Z} = -\int\frac{d(1 - Z)}{1 - Z} = - Log.\,nat.(1 - Z),$$ um

aber $\frac{(2 + Z)\,dZ}{1 + Z + Z^2}$ zu integriren, schreibe man

$$1 + Z + Z^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + Z\right)^2 = \frac{3}{4}\left[1 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + Z\right)^2\right] = \frac{3}{4}(1 + u^2),$$

indem man $\sqrt{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{2} + Z\right) = \frac{1 + 2Z}{\sqrt{3}} = u$, also

$$Z = \frac{u\sqrt{3} - 1}{2} \text{ und } dZ = \frac{du\sqrt{3}}{2} \text{ setzt.}$$

Dann folgt

$$\frac{(2 + Z)\,dZ}{1 + Z + Z^2} = \frac{\left(2 + \frac{u\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}(1 + u^2)} \cdot \frac{du\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{u\,du}{1 + u^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{du}{1 + u^2};$$

da aber

$$\int\frac{u\,du}{1 + u^2} = \frac{1}{2}\int\frac{2\,u\,du}{1 + u^2} = \frac{1}{2}\int\frac{d\,(1 + u^2)}{1 + u^2} = \frac{1}{2}\,Ln\,(1 + u^2)$$

und

$$\int\frac{du}{1 + u^2} = arc.\,(tang. = u)$$ ist (s. VI, Artikel 26, Bd. I), so hat man

$$\int\frac{(2 + Z)\,dZ}{1 + Z + Z^2} = \frac{1}{2}\,Ln\left(1 + \frac{(1 + 2Z)^2}{3}\right)$$

$$+ \sqrt{3}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{1 + 2Z}{\sqrt{3}}\right) + Const.,$$ und

$$\alpha x = - y_1 + \left(\frac{a - 2k}{3}\right)\Big[- Log.\,nat.(1 - Z)$$

$$+ \frac{1}{2}\,Ln\left(1 + \frac{(1 + 2Z)^2}{3}\right) + \sqrt{3}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{1 + 2Z}{\sqrt{3}}\right)\Big]$$

$$+ Const.$$

$$= -y_1 + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(\frac{1+Z+Z^2}{(1-Z^2)}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,.\,arc.\left(tang. = \frac{1+2Z}{\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= -y_1 + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(1 + \frac{3Z}{(1-Z^2)}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,arc.\left(tang. = \frac{1+2Z}{\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= -y_1 + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(1 + \frac{3ay_1}{(a-y_1)^2}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,arc.\left(tang. = \frac{a+2y_1}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

$$= -y + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(1 + \frac{3a(a+y)}{y^2}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,arc.\left(tang. = \frac{3a+2y}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

Anfangs ist $x = 0$ und $y = h$, daher auch

$$0 = -h + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(1 + \frac{3a(a+h)}{h^2}\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\,arc.\left(tang. = \frac{3a+2h}{a\sqrt{3}}\right)\right] + Const.$$

und schließlich

$$\alpha x = h - y + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(\frac{1 + \frac{3a(a+y)}{y^2}}{1 + \frac{3a(a+h)}{h^2}}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{3}\left(arc.\left(tang. = \frac{3a+2h}{a\sqrt{3}}\right) - arc.\left(tang. = \frac{3a+2y}{a\sqrt{3}}\right)\right)\right]$$

oder

$$\alpha x = h - y + \frac{a-2k}{3}\left[\frac{1}{2} Log.\,nat.\left(\frac{y^2+3a(a+y)}{h^2+3a(a+h)}\cdot\frac{h^2}{y^2}\right)\right.$$

$$\left. - \sqrt{3}\,arc.\left(tang. = \frac{a(h-y)\sqrt{3}}{6a^2+3a(h+y)+2hy}\right)\right].$$

Mit Hülfe dieser Formel läßt sich die Entfernung x der Stelle des Flusses vom Wehre finden, wo die Aufstauung den Werth y hat.

Für einen kleinen Werth von h und einen sehr kleinen Werth von y, in Hinsicht auf a, ist einfach

$$\alpha x = h + \frac{a - 2k}{3} \, Log. nat. \left(\frac{h}{y}\right) \text{ zu setzen.}$$

Ist $a = 2k = \frac{c^2}{g}$, so fällt $\alpha x = h - y$ aus, und es wird die Staucurve von einer horizontalen Linie HK gebildet; ist $a < 2k$, so fällt αx kleiner als $h - y$, also y auch kleiner als $h - \alpha x$ aus, und man hat es dann mit der von Bidone zuerst beobachteten Wasserschwelle OK zu thun.

Beispiel. Für $a = 4$, $h = 3$, $c = 4,375$ Fuß, ferner $\alpha = 0,000623$ und $y = 0,1$ Fuß ist die Stauweite annähernd

$$x = \frac{3 + \frac{1}{3}(4 - 0,6125) \, Log. \; nat. \; 30}{0,000623} = \frac{3 + 1,1292 \, . \, 3,4012}{0,000623}$$

$$= \frac{68406}{6,23} = 10980 \text{ Fuß.}$$

Im Beispiele (1) des vorigen Paragraphen wurde $x = 10434,5$ Fuß gefunden.

(Anmerkung 1.) Die Wassermenge, welche vor dem Wehre aufgestaut ist, läßt sich setzen:

$$V = \int b y dx; \text{ nun ist aber annähernd}$$

$$\alpha x = h - y + \left(\frac{a - 2k}{3}\right) Log. nat. \left(\frac{h}{y}\right) \text{ und hiernach}$$

$$\alpha dx = - dy - \frac{a - 2k}{3} \frac{dy}{y}, \text{ daher folgt}$$

$$V = - \frac{b}{\alpha} \int \left(y dy + \frac{a - 2k}{3} dy\right) = - \frac{b}{\alpha} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{(a - 2k)}{3} y\right) + Const.$$

Da für $y = h$, $V = o$ ist, so folgt

$$V = \frac{b}{\alpha}\left(\frac{h^2 - y^2}{2} + \frac{(a - 2k)}{3}(h - y)\right) = \frac{b(h - y)}{\alpha}\left(\frac{h + y}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right);$$

und für $y = o$,

$$V = \frac{bh}{\alpha}\left(\frac{h}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right).$$

Fließt dieses Wasserquantum in der Zeit t zu, so hat man auch $V = abct$, und daher

$$t = \frac{h}{\alpha a c}\left(\frac{h}{2} + \frac{a - 2k}{3}\right).$$

Für $a = 2k$ fällt

$$V = \frac{bh^2}{2\alpha} \text{ und } t = \frac{h^2}{2\alpha a c} \text{ aus.}$$

Anmerkung 2. Vorstehende Formel hat der Verfasser schon im Artikel „Bewegung des Wassers" in der allgemeinen Maschinenencyclopädie, Bd. II, 1844 veröffentlicht. Wenn man in derselben das Glied $2k = \frac{c^2}{g}$ vernachlässigt, so er=

hält man eine Formel, welche Herr Heinemann in Berlin in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, Berlin 1855 (s. auch polyt. Centralblatt, 1855) die Hagen'sche nennt. Dasselbe gilt auch von der Formel, welche Herr Gödecker in Band VII der Zeitschrift des Architecten- und Ingenieurvereins für das Königreich Hannover mittheilt. Diese Formeln geben natürlich über die Entstehung der Wasserschnelle gar keine Auskunft.

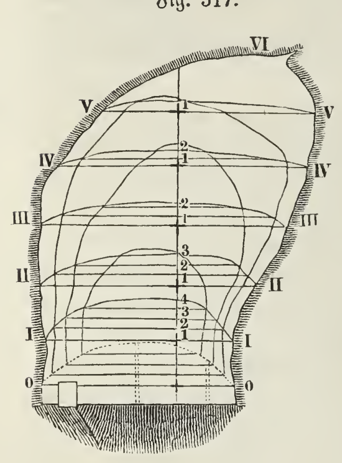
Sehr ausführlich wird die Staucurve behandelt im zweiten Theile des Cours de Mécanique appliquée par Bresse, Paris 1860. Nächstdem auch in Rühlmann's Hydromechanik, Leipzig 1857. Ueber Saint-Guilhem's empirische Formel zur Berechnung der Stauweite siehe Annales des ponts et chauss. 1838, und über Dupuit's Formel dessen Etudes théoretiques et practiques sur les mouvement des eaux courantes.

Teiche. In wasserarmen Gegenden und an Orten, wo große Maschinenkräfte in Anspruch genommen werden, wie z. B. in Bergwerksrevieren, ist die Anlegung von Teichen (franz. étangs; engl. store-reservoirs, ponds, pools), d. i. von großen Wasserbehältern, die sich zur Zeit des Wasserüberflusses von selbst füllen, und bei eintretendem Wassermangel geleert werden können, von der größten Wichtigkeit. Man legt in der Regel Teiche in Schluchten und Thälern an, um nicht allein das Fluth- und Regenwasser, sondern auch die in diesen Vertiefungen fließenden Quellen und Bäche aufnehmen zu können. Dann läßt sich auch die künstliche Umschließung des Teichraumes durch einen einzigen Damm bewirken, den man quer über das Thal von einem Gehänge bis zum anderen führt, indem die ansteigende Thalsohle und die beiden Thalgehänge die übrige Umfassung des Teiches abgeben. Ein Teich hat um so mehr Nutzen, je kleiner die Oberfläche und je kürzer der Damm desselben bei bestimmtem Fassungsraume ist. Es ist daher für den Teichraum diejenige Stelle im Thale auszusuchen, wo die Gehänge mehr steil als flach sind und für den Damm der Ort, wo das Thal mehr eng als weit ist. Nur in weiten Thälern hat man die Teiche zuweilen mit zwei Dämmen, oder mit einem Hauptdamme und zwei Flügeldämmen zu umschließen. Localverhältnisse bestimmen zwar in der Regel den Ort für eine Teichanlage, jedoch ist zu berücksichtigen, daß tieferliegenden Teichen ein größeres Sammelrevier, und daher auch ein größerer Wasserzufluß zukommt, dieselben aber auch weniger Gefälle für die Maschinen übrig lassen, daß dagegen hochliegenden Teichen weniger Wasser zufließt, sie dafür aber mehr Gefälle gewähren. Derjenige Teich ist auf jeden Fall der vollkommenste, bei welchem das Product aus dem Wasserzufluß und dem Gefälle zwischen dem Teiche und der tiefer unten im Thale stehenden Maschinenanlage ein Maximum ist. Uebrigens kann man durch Anlegung von Gräben und Röschen das Sammelrevier eines Teiches erweitern. Noch hat man bei einer Teichanlage auf die Beschaffenheit des Teichgrundes Rücksicht zu nehmen, und dabei den Grund zu vermeiden, welcher das Wasser nicht hält, z. B. zerklüftetes Gestein, Kalkschlotten, Flug- und Triebsand, tiefen Sumpf, §. 156

Morast u. s. w. Durch Aussetzen mit Lehm und Rasen oder Ausrammen mit einem Gemenge aus feinem Sande und gutem Thon kann man oft die Wasserdichtigkeit eines Teichgrundes hervorbringen. Sind die Gehänge nicht wasserdicht oder leisten sie dem Wasser nicht hinreichenden Widerstand, so muß man sie durch Thon- oder Rasenschichten, Mauern u. s. w. schützen.

Der Werth eines Teiches hängt noch vorzüglich von dem Flächen- und Fassungsraume desselben ab. Um Beides zu finden, ist eine besondere Aufnahme nöthig. Hierzu gehört aber, daß man mit Hülfe eines Meßtisches die Endpunkte I, II, III u. s. w., Fig. 317, von im Teichspiegel anzunehmenden Parallelen abschneidet, und nun mit einer Stange und mit Hülfe eines Nivellirinstrumentes mehrere Tiefen in durch diese Parallelen zu legenden Querprofilen abmißt. Durch jene Endpunkte bestimmen sich die Parallelen und durch diese Tiefen die entsprechenden Querprofile selbst, und hieraus lassen sich die in Frage stehenden Räume berechnen. Sind b_0, b_1, $b_2 \ldots b_n$ die n Breiten 0 — 0, I — I, II — II u. s. w., und ist der Abstand zwischen je zwei Parallelen $= a$, so hat man die Oberfläche des Teiches:

Fig. 317.



$$G = [b_0 + b_n + 4(b_1 + b_3 + \cdots + b_{n-1}) + 2(b_2 + b_4 + \cdots + b_{n-2})] \cdot \frac{a}{3}.$$

Sind ebenso F_0, F_1, F_2 u. s. w. die den Breiten b_0, b_1, b_2 u. s. w. entsprechenden Querprofile, so hat man das Teichvolumen:

$$V = [F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{n-2})] \cdot \frac{a}{3}.$$

Uebrigens lassen sich auch mit Hülfe dieser Regeln die jeder Wassertiefe entsprechenden Fassungsräume berechnen, indem man sich den ganzen Teich durch Horizontalebenen in Schichten zerlegt denkt.

Anmerkung. Von der Aufnahme und Berechnung der Teiche handelt speciell der „Ingenieur" sowie die neue Markscheidekunst des Verfassers; einen besonderen Aufsatz hierüber findet man aber in der gleichbenannten Zeitschrift „Der Ingenieur", Heft I, 1846, Freiberg ꝛc.

§. 157 **Teichdämme.** Die Teichdämme führt man in der Regel aus Erde, selten aber aus Steinen auf. Man versieht sie mit einer dicken Lehmbrust, um das Eindringen des Wassers zu verhindern, und bekleidet diese wohl noch mit einer Mauer, der sogenannten Terrassenmauer, um die nachtheiligen

Wirkungen des Wellenschlages auf den Damm zu schwächen. Außerdem erhält der Teichdamm noch einen mit Lehm oder Rasen dicht auszuschlagenden Grundgraben, welcher vorzüglich dazu dient, das Wasser zurückzuhalten. Man geht mit diesem Graben bis auf festen Grund, z. B. bis auf festes Gestein oder dichten Lehmboden herab, oder, wenn dieser nicht zu erlangen ist, wie z. B. bei sandigem oder grandigem Erdboden, verschafft man sich durch einzuschlagende Pfähle einen festen Grund. Die Tiefe eines Grundgrabens hängt von der Beschaffenheit des Erdbodens ab, bei festem und dichtem Gestein reichen oft 5 Fuß Tiefe hin, wogegen man bei zerrissenem oder lockerem Boden 20 Fuß Tiefe nöthig haben kann. Nachtheilig können zumal Klüfte, Gesteinschichtungen und Steinscheidungen werden, indem sie das Wasser unter oder neben dem Damme durchlassen. Um dieses zu verhindern, hat man den Grundgraben sehr tief auszuheben, und ihn an den Gehängen weit hinauszuführen. Die Hauptform eines Teichdammes stimmt mit dem in Fig. 318 abgebildeten Körper von trapezoidalem Querschnitt $HKEN$ oder $GLMF$ überein. Die obere Fläche AC ist die Dammkappe, die dem Wasser zugekehrte Seite $ABGH$ die Brust und die gegenüberliegende Seite der Rücken; es ist ferner KMN das Mittelstück, sowie ANH der eine und BMC der andere Dammflügel. Was die Dimensionen des Dammes betrifft, so macht man die obere Dammbreite $AD = BC$ nicht unter 10 Fuß, und wenn ein Weg über sie gelegt ist, nicht unter 20 Fuß, es ist aber auch Regel, diese Breite mindestens der Dammhöhe gleich zu machen. Giebt man nun der Brust und dem Rücken 45° Böschung, so fällt die untere Dammbreite dreimal so groß aus als die Dammhöhe oder obere Dammbreite. Manchen Dämmen giebt man aber 30 bis 40° Böschung, weshalb bei ihnen ein noch größeres Verhältniß der unteren Breite zur Höhe sich herausstellt. Die Dammhöhe ist sehr verschieden; man hat im hiesigen Bergreviere 15 bis 35 Fuß hohe Dämme. Wegen des Wellenschlages ist es nothwendig, die Dämme 2 bis 3 Fuß höher zu machen als der Wasserspiegel zu stehen kommt. In Fig. 319 ist das Querprofil eines Teichdammes abgebildet. $ABCE$ ist die bis auf festen Grund herabgehende festgestampfte

Fig. 318.

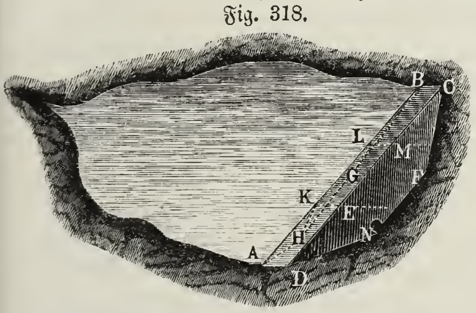
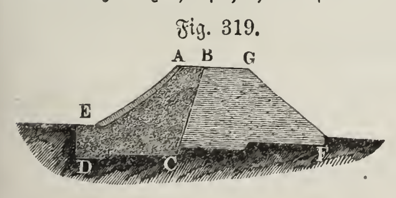


Fig. 319.



Lehmbrust, sowie $BGFC$ der aus Schutt bestehende Hinterdamm, und AE die oben 2 Fuß und unten 4 Fuß dicke und ausgebauchte Terrassenmauer.

Anmerkung 1. Bezeichnet l die obere und l_1 die untere Länge, b die obere und b_1 die untere Breite, sowie h die Höhe eines Teichdammes, wie Fig. 318, so ist das Volumen desselben:

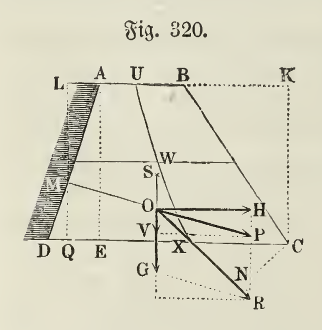
$$V = [l b_1 + l_1 b + 2(l b + l_1 b_1)] \frac{h}{6} \text{ (s. Bd. I, §. 121).}$$

Bei Anwendung dieser Formel zur Berechnung der Dammmasse ist zu berücksichtigen, daß die festgestampfte Erde noch nicht ganz die Hälfte des Volumens der lockeren Erde einnimmt.

Anmerkung 2. Einer der größten Teiche im Freiberger Bergreviere ist der untere Großhartsmannsdorfer Teich. Er hat einen Flächenraum von 32692 Quadratruthen (sächs. Maaß) und einen Fassungsraum von 60,669000 Cubikfuß oder 60,19 wöchentliche Rad Wasser, jedes Rad zu 100 Cubikfuß pr. Minute; d. h. dieser Teich gewährt ohne allen Zufluß 60 Wochen lang in jeder Minute 100 Cubikfuß Wasser. Der Damm dieses Teiches ist 1276 Ellen lang, oben 30, unten 82 Ellen breit und $14^3/_4$ Ellen hoch, doch beträgt die höchste Anspannung nur 13 Ellen 7 Zoll. In Rußland, und namentlich am Ural, hat man jedoch noch viel größere Teichanlagen.

§. 158 **Stabilität der Teichdämme.** Die Teichdämme sind dem Drucke und zuweilen sogar dem Stoße des Wassers ausgesetzt, es ist daher nöthig, ihnen hinreichende Dimensionen zu ertheilen, damit sie durch ihr Gewicht diesen Wirkungen widerstehen und weder umgestürzt noch fortgeschoben werden. Die Verhältnisse des Fortschiebens haben wir schon früher (Bd. I, §. 360) kennen gelernt; es bleibt daher nur noch die Stabilität eines Teichdammes in Hinsicht auf das Kippen zu untersuchen übrig. Das Wasser übt gegen die Brustfläche AD eines Teichdammes $ABCD$, Fig. 320, einen Normaldruck $\overline{OP} = P$ aus, dessen Angriffspunkt M um LM oder $^2/_3$ der Tiefe $\overline{CK} = {}^2/_3 h$ vom Wasserspiegel absteht (Band I, §. 358). Für ein Dammstück von der Länge $= 1$ ist dieser Druck

Fig. 320.



$$P = \overline{AD} \, . \, 1 \, . \, \gamma \, . \, \frac{h}{2},$$

wenn γ die Dichtigkeit des Wassers bezeichnet. Der horizontale Component dieses Druckes ist

$$H = h \, . \, 1 \, . \, \gamma \, . \, \frac{h}{2} = {}^1/_2 \, h^2 \gamma,$$

und der verticale Component, wenn m die relative, also mh die absolute Böschung DE der Brustfläche bezeichnet,

$$V = mh \, . \, 1 \, . \, \gamma \, . \, \frac{h}{2} = {}^1/_2 \, m h^2 \gamma.$$

Das im Schwerpunkte S des trapezoidalen Querschnittes $ABCD$ angreifende Gewicht des Dammstückes von der Länge $= 1$ ist, wenn γ_1 die Dichtigkeit der Dammmasse, b die Kappenbreite AB und n die relative, also nh die absolute Hinterböschung bezeichnet,

$$G = \left(b + \frac{m+n}{2} h\right) h \gamma_1.$$

Aus P und G oder H, V und G entspringt aber eine Mittelkraft $\overline{OR} = R$, deren statisches Moment $\overline{CN} . R$ in Hinsicht auf die Hinterkante C des Dammes die Stabilität desselben ausdrückt. Denken wir uns P, und also auch H und V in M angreifend, so erhalten wir das statische Moment von $P =$ statisches Moment von H minus statisches Moment von V:

$$= \frac{1}{2} h^2 \gamma . \overline{MQ} - \frac{1}{2} m h^2 \gamma . \overline{CQ} = \frac{1}{2} h^2 \gamma (\overline{MQ} - m . \overline{CQ})$$
$$= \frac{1}{2} h^2 \gamma \left[\frac{1}{3} h - m \left(n h + b + \frac{2}{3} m h\right)\right].$$

Nun ist aber das in entgegengesetzter Richtung wirkende statische Moment von G:

$$= \frac{1}{2} n h^2 \gamma_1 . \frac{2}{3} n h + b h \gamma_1 \left(n h + \frac{b}{2}\right) + \frac{1}{2} m h^2 \gamma_1 \left(n h + b + \frac{1}{3} m h\right)$$
$$= h \gamma_1 \left(\frac{1}{3} n^2 h^2 + n b h + \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} m n h^2 + \frac{1}{2} m b h + \frac{1}{6} m^2 h^2\right)$$
$$= h \gamma_1 \left[\left(\frac{m^2 + 2 n^2}{3} + m n\right) \frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right) b h + \frac{1}{2} b^2\right];$$

es folgt daher die Stabilität des Teichdammes:

$$S = h \left(\left[\left(\frac{m^2 + 2 n^2}{3} + m n\right) \frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2}\right) b h + \frac{1}{2} b^2\right] \gamma_1 - \left[\frac{1}{3} h - m \left(n h + b + \frac{2}{3} m h\right)\right] \frac{h}{2} \gamma\right).$$

Um nun den Punkt X anzugeben, in welchem die **Widerstandslinie** UWX die Sohle CD des Dammes durchschneidet, bestimmen wir die Entfernung CX dieses Punktes von der Kante C, indem wir in Hinsicht auf den Punkt C das Moment $R . \overline{CN}$ der Mittelkraft R gleich dem Moment $(G + V) . \overline{CX}$ ihres verticalen Componenten $G + V$ setzen.

Es ist hiernach $\frac{CX}{CN} = \frac{OR}{HR} = \frac{R}{G + V}$,

und daher

$$\overline{CX} = a = \frac{\overline{CN} . R}{V + G} = \frac{S}{G + V}$$

$$= \left(\left[\left(\frac{m^2 + 2n^2}{3} + mn \right) \frac{h^2}{2} + \left(n + \frac{m}{2} \right) b h + \frac{1}{2} b^2 \right] \gamma_1 + \left[\left(\frac{2m^2 - 1}{3} + mn \right) h + m b \right] \frac{h}{2} \gamma \right)$$

$$: \left(\left[\left(\frac{m + n}{2} \right) h + b \right] \gamma_1 + \frac{1}{2} m h \gamma \right);$$

oder:

$$a = \frac{[(m^2+2n^2+3mn)h^2+(2n+m) . 3bh+3b^2]\gamma_1+[(2m^2-1+3mn)h+3mb]h\gamma}{3([(m+n)h+2b]\gamma_1+mh\gamma)}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man auch andere Punkte W u. s. w. in der Widerstandslinie finden, wenn man für h beliebige Dammhöhen einführt, also die Stabilität einzelner, durch Horizontalebenen begrenzter Dammstücke ins Auge faßt.

Für einen Damm ohne Böschung ist $m = n = o$, daher:

$$a = \frac{3b^2\gamma_1 - h^2\gamma}{6b\gamma_1} = \frac{1}{2} b - \frac{h^2\gamma}{6b\gamma_1} \text{ (vergl. Bd. II, §. 12).}$$

Bei einem Damme mit 45^0 Böschung zu beiden Seiten ist $m = n = 1$, daher:

$$a = \frac{3(2h^2 + 3bh + b^2)\gamma_1 + (4h + 3b)h\gamma}{3[2(b + h)\gamma_1 + h\gamma]};$$

ist nun noch $b = h$, so hat man:

$$a = \frac{18\gamma_1 + 7\gamma}{4\gamma_1 + \gamma} \cdot \frac{h}{3},$$

nimmt man endlich $\gamma_1 = 2\gamma$ an, so erhält man:

$$a = \frac{43}{27} h = \frac{43}{27} b,$$

oder, da dann die untere Dammbreite $b_1 = 3b$, also $b = \frac{1}{3} b_1$ ist,

$$a = \frac{43}{81} b_1.$$

Nach Vauban ist hinreichende Sicherheit vorhanden, wenn

$$a = \frac{5}{9} \cdot \frac{b_1}{2} = \frac{5}{18} b_1 \text{ ausfällt (s. Bd. II, §. 14);}$$

im letzten Falle wäre also eine übermäßige Sicherheit vorhanden. Am angemessensten für Teichdämme möchte es jedoch sein, mindestens $a = 0{,}4\, b_1$ zu machen, also die Widerstandslinie 4 Zehntel der unteren Breite von der Hinterfläche abweichen zu lassen.

Beispiel. Man soll die Widerstandslinie für einen Teichdamm angeben, dessen vordere Böschung $m = 1$, hintere Böschung $n = \frac{1}{2}$ und Dammkappenbreite $b = 10$ Fuß ist, vorausgesetzt, daß die Dammmasse das specifische Gewicht $= 2$ hat. Hier ist

$$a = \frac{2(3h^2 + 60h + 300) + (\frac{5}{2}h + 30)h}{3(3h + 40 + h)} = \frac{1200 + 300h + 17h^2}{24(10 + h)};$$

es stellt sich daher heraus:

für $h = 0$, $a = 5$ Fuß; für $h = 5$ Fuß, $a = \frac{3125}{360} = 8{,}68$ Fuß;

für $h = 10$ Fuß, $a = \frac{5900}{480} = 12{,}29$ Fuß; für $h = 15$ Fuß, $a = \frac{9525}{600} = 15{,}87$ Fuß;

für $h = 20$ Fuß, $a = \frac{14000}{720} = 19{,}44$ Fuß u. s. w.

Für eine sehr große Dammhöhe läßt sich

$$a = \frac{17h}{24} \text{ und } b = \tfrac{3}{2}h, \text{ also } \frac{a}{b} = \tfrac{17}{36}$$

setzen. Da $\frac{17}{36}$ schon größer als 0,4 ist, so würde dieser Damm selbst bei einer unendlichen Höhe sicher vor dem Kippen sein.

Anmerkung. Nach der Formel $b = \frac{3h - a}{2}$ im Beispiele Bd. I, §. 360 ist, wenn man $a = mh$ setzt,

$$2b = (3 - m)\, h, \text{ daher:}$$

$$h = \frac{2b}{3 - m},$$

also im letzten Beispiele, wo $m = 1$ ist,

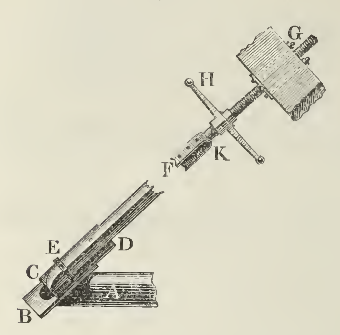
$$h = b = 10 \text{ Fuß zu machen.}$$

Ablassen der Teiche. Zum Ablassen des Wassers aus den Teichen §. 159 dienen die Teichgerinne und die Fluther. Jene gehen durch den Teichdamm hindurch und dienen zum regelmäßigen Abzapfen, diese aber sind bloße Einschnitte im Damme und haben den Zweck, das im Uebermaß zufließende Wasser eines bereits gefüllten Teiches abzuleiten. Zuweilen hat ein Teich mehrere Teichgerinne und mehrere Fluther. Das tiefste oder im tiefsten Punkte des Teiches einmündende Gerinne wird in der Regel nur beim gänzlichen Ablassen und Fischen des Teiches geöffnet, und heißt deshalb das Schlämm- oder Fischgerinne; das höher liegende Gerinne hingegen endigt sich in dem Graben, durch welchen das Wasser auf die Maschinen geführt wird, und heißt deshalb das Mühl- oder Maschinengerinne. Bei tiefen Teichen ist es sehr zweckmäßig, zwei oder mehrere, in verschiedenen Höhen einmündende Maschinengerinne anzuwenden, und das Wasser, so lange es geht, immer durch das höhere Gerinne abzulassen, um so viel wie möglich Gefälle für die Maschinen übrig zu behalten. Auch kann man, um denselben Zweck zu erreichen, das durch das Teichgerinne abgeführte Wasser außerhalb des Teiches in einem hohen Behälter auffangen, und aus demselben durch mit Schiebern oder Schützen zu versehenden Mündungen in das eine oder andere Aufschlaggerinne fließen lassen.

Die Teichgerinne sind entweder hölzern, oder steinern, oder eisern; die letzten sind die besten. Man verwendet dazu gußeiserne Röhren von 1 bis $2\frac{1}{2}$ Fuß Weite. Zum Reguliren des Abflusses dient der Zapfen oder Striegel. Die in neuerer Zeit hier in Anwendung gebrachten Striegel

haben eine Einrichtung, wie sie Fig. 321 vor Augen führt. Es ist hier A der Kopf des Teichgerinnes mit der außen abgeschliffenen Kopfplatte B, CD ein innen abgeschliffener gußeiserner Schieber, EF die bis auf die Dammkappe hinaufführende Striegelstange oder der Striegelschaft, E eine mit dem Schieber fest verbundene und über die Kopfplatte weggreifende Schiene, wodurch der Schieber gegen die Kopfplatte gedrückt wird; es ist ferner G ein starker Steg über der Teichkappe und innerhalb des Teichhäuschens, GK eine Schraubenspindel, welche durch eine in dem Stege festsitzende Mutter hindurchgeht, bei K durch ein Gewinde mit dem Zapfenschaft verbunden ist, und durch einen Schlüssel H in Umdrehung gesetzt werden kann. Man kann nun leicht ermessen, wie durch diese Umdrehung der Schieber mittels seines Schaftes gehoben oder gesenkt, oder die Eintrittsöffnung in das Teichgerinne vergrößert oder verkleinert werden kann.

Fig. 321.



Das Teichgerinne muß einen Querschnitt erhalten, welcher selbst bei dem niedrigsten Wasserstande und bei vollständiger Eröffnung noch das erforderliche Wasserquantum hindurchläßt. Ist Q die pr. Secunde abzulassende Wassermenge, h die gegebene kleinste Druckhöhe, l die Länge, d die Weite des Teichgerinnes, ζ_0 der Widerstandscoefficient für den Eintritt und ζ der Reibungscoefficient für die Bewegung in dem Teichgerinne, so hat man nach Bd. I, §. 430:

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d + \zeta\, l}{2\, g\, h} \cdot \left(\frac{4\, Q}{\pi}\right)^2},$$

oder einfacher:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{[(1 + \zeta_0)\, d + \zeta\, l]\, \frac{Q^2}{h}} \text{ Fuß}.$$

Wenn man nun ζ_0 aus der Tabelle in Bd. I, §. 423 und ζ aus der Tabelle in Bd. I, §. 429 wählt, so läßt sich hiernach auf dem Wege der Näherung die gesuchte Gerinnweite berechnen. Bei höherem Wasserstande wird ein Theil der Eintrittsmündung durch den Schieber verschlossen, weshalb nun nach Bd. I, §. 443 ein größerer Widerstandscoefficient für den Eintritt einzuführen ist. Ist die Eintrittsöffnung sehr klein, so füllt endlich das Wasser das Teichgerinne gar nicht mehr aus, und es ist dann einfach der Inhalt dieser Einmündung:

$$F = \frac{Q}{\mu \sqrt{2gh}} = \frac{(1 + \sqrt{\zeta_0})\, Q}{\sqrt{2gh}},$$

wo ζ_0 ebenfalls aus §. 443 genommen werden muß. Mit Hülfe der S. 152 u. s. w. im „Ingenieur" mitgetheilten Kreissegmententabelle läßt sich hieraus die Schieberstellung selbst finden.

Die Fluther oder Fluthbetten werden wegen der leichteren Ableitung des Wassers nahe an den Gehängen in den Damm eingeschnitten. Sie sind höchstens 5 Fuß tief, 10, 20 und mehr Fuß lang und erhalten, wie die Wehre, ein steinernes Bette. Uebrigens rüstet man sie noch mit Schützen und Rechen aus.

Beispiele. 1. Welche Weite ist einem Teichgerinne von 100 Fuß Länge zu ertheilen, welches bei 1 Fuß Druckhöhe noch 10 Cubikfuß Wasser pr. Secunde abführt? Führen wir den einer Dammneigung von 40^0 entsprechenden Coefficienten $\zeta_0 = 0{,}870$, und den einer Geschwindigkeit von 5 Fuß entsprechenden Reibungscoefficienten $\zeta = 0{,}022$ ein, so erhalten wir die Formel:

$$d = 0{,}4817 \sqrt[5]{(1{,}870\, d + 2{,}2) . 100},$$

welcher $d = 1{,}7$ so ziemlich entspricht, denn setzt man rechts $d = 1{,}7$, so folgt links:

$$d = 0{,}4817 . \sqrt[5]{537{,}9} = 1{,}694 \text{ Fuß}.$$

Es ist also hiernach ein Gerinne von $1{,}7 . 12 = 20{,}4$ Zoll anzuwenden.

2. Wie tief ist der Schieber zu stellen, damit das vorige Gerinne bei 16 Fuß Druckhöhe ebenfalls nur 10 Cubikfuß Wasser liefert? Nehmen wir an, daß hier das Gerinne nicht vollfließt, so haben wir:

$$F = \frac{(1 + \sqrt{\zeta_0})\, Q}{\sqrt{2gh}} = \frac{(1 + \sqrt{0{,}87}) . 10}{7{,}906 . \sqrt{16}} = \frac{19{,}327}{7{,}906 . 4} = 0{,}611 \text{ Quadratfuß}.$$

Dieses Segment vom Halbmesser $\frac{1{,}7}{2}$ auf den Halbmesser 1 reducirt, fällt nun

$$F = 0{,}611 \cdot \frac{4}{2{,}89} = 0{,}846$$

aus, und es giebt nun die Segmententabelle im „Ingenieur" die entsprechende Bogenhöhe oder Schieberstellung:

$$s = 0{,}629 \cdot \frac{1{,}7}{2} = 0{,}535 \text{ Fuß} = 6{,}42 \text{ Zoll}.$$

Canäle. Man führt das Aufschlagwasser in Canälen, Gräben und Gerinnen aus den Wehren, Teichen und anderen Sammelapparaten nach dem Punkte des Bedarfes, d. i. nach den Maschinen, welche es in Bewegung setzen soll. Die Canäle werden in der Regel in die natürliche Erdoberfläche eingeschnitten, zuweilen aber auch in einen künstlich aufgeworfenen Damm gebettet; sie werden ferner mittels Brücken (Aquäducte) in größerer Höhe über der Erdoberfläche oder unterirdisch (in Röschen) unter derselben fortgeführt. Das Bett wird entweder durch natürliche Erde, Sand oder Steine, oder durch künstlichen Mörtel gebildet, oder es wird ausgemauert, §. 160

oder es besteht dasselbe in einem hölzernen, steinernen oder eisernen Gerinne. Das Querprofil eines Canales ist ein geradliniges oder wenig gebauchtes Trapez, das eines Gerinnes aber in der Regel ein Rechteck. Das Nöthigste über die zweckmäßigste Form der Querprofile ist bereits in Bd. I, §. 472 u. s. w. abgehandelt worden. Die Querprofile bei Aufschlagecanälen sind meistens im Mittel $1\frac{1}{2}$= bis 3mal so lang als tief, bei Schifffahrts=canälen aber ist ihre Tiefe 5= bis 10mal in ihrer mittleren Länge enthalten. Mit Mörtel ausgemauerten Canälen giebt man wenig oder gar keine Böschung, Canälen mit Trockenmauerung giebt man $\frac{1}{2}$ Böschung, in dichter Erde ausgehobene Canäle erhalten aber die Böschung 1 und in Sand und lockere Erde ausgehobene Canäle die Böschung 2. Die Construction eines Canales in einem nicht wasserdichten Boden führt Fig. 322 vor Augen. Hier sind die Seiten und der Boden 1 bis 2 Fuß dick mit Lehm ausgerammelt, und wenig geböschte Seitenmauern AD und BC von $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß

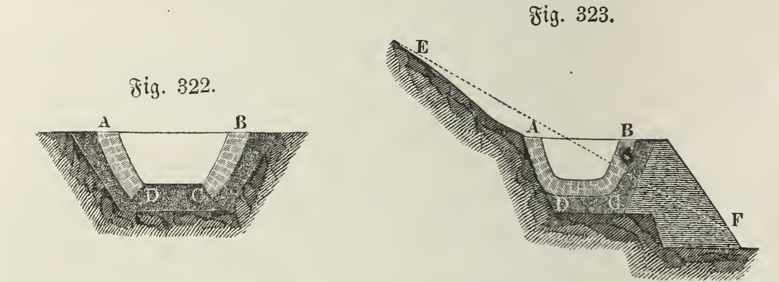


Fig. 322. Fig. 323.

Dicke angesetzt. Wird der Canal an einem Gehänge EF, Fig. 323, hingeführt, so schneidet man ihn nur zum Theil ein und benutzt die ausgehobene Erde zur Bildung des übrigen Theiles. Um die Sohle CD zu schützen ist dieselbe, wie die Seiten, ausgemauert. Höhere Dämme, auf welchen Canäle fortgeführt werden, versieht man mit Futtermauern AB und CD, Fig. 324. Unterirdische Canäle stehen entweder in festem Gesteine oder sind ausgemauert, wie Fig. 325 vor Augen führt. Um Röschen

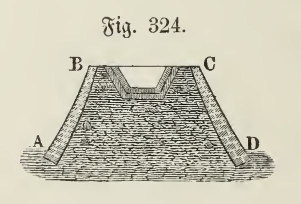
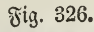


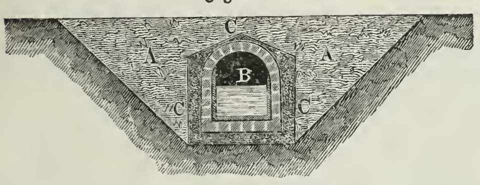
Fig. 324.



Fig. 325.

begehen zu können, erhalten dieselben eine angemessene Höhe und ein auf Stegen AB liegendes Laufbrett C. Die in einem Gebirgseinschnitt AA (Fig. 326) liegende Wasserleitung B ist rund herum ausgemauert, innen mit Cement überzogen, und außen mit einer Lehmhülle umgeben.


Fig. 326.



Ein hölzernes Gerinne oder Spundstück ist in Fig. 327 abgebildet. Dasselbe besteht aus den durch Pfosten gebildeten Borden oder Seitenwänden AA, aus dem durch Bretter gebildeten und auf Tragleisten CC ruhenden Boden B, und wird durch Geviere, wie $DEFG$, zusammengehalten. Die Verdichtung in den Stoßfugen wird durch feines Moos oder durch Kitt u. s. w. bewirkt. Die Construction gußeiserner Gerinne ist aus Fig. 328 ersichtlich. Hier sind die Seitenwände mit Lappen, wie AB, BC u. s. w., versehen, und es erfolgt die Zusammensetzung durch Schrauben, welche durch je zwei Lappen hindurchgehen.

Fig. 327.

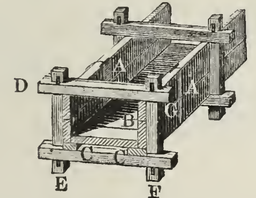
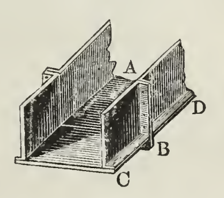
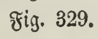
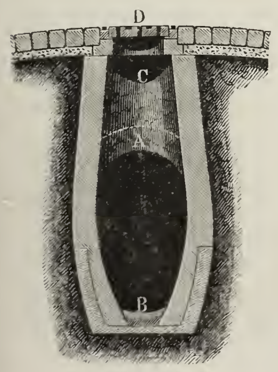


Fig. 328.



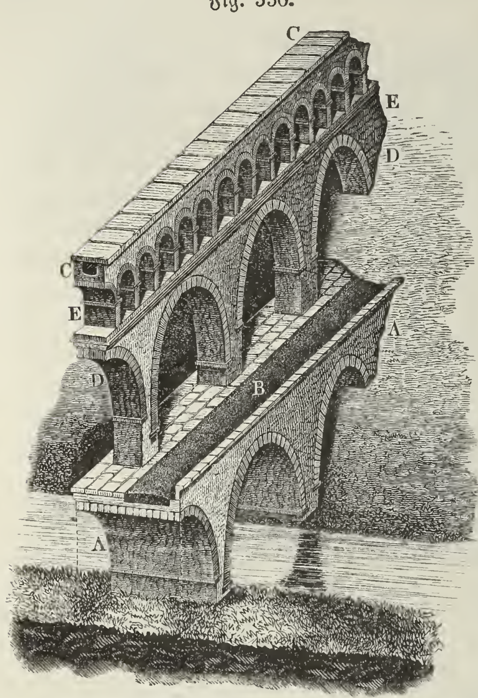
Zu den unterirdischen Wasserleitungen gehören auch die Straßenschleusen oder verdeckten Abzugscanäle unter den Straßen (franz égouts; engl. sewers). Sie unterscheiden sich von den gewöhnlichen unterirdischen Wasserleitungen nur dadurch, daß das Wasser, welches dieselben fortführen, sehr unrein und mit vielen fremden Stoffen angefüllt, und daß die Menge desselben innerhalb weiter Grenzen sehr veränderlich ist. Deshalb erhalten dieselben ein großes Gefälle von mindestens $^1/_{50}$ der Länge. Damit sie dem Erddruck hinreichend widerstehen können, giebt man diesen Schleusen eine eiförmige Umfangsmauer AB, Fig. 329, und damit sie die nöthige Wasserdichtigkeit erhalten, verwahrt man die Sohle derselben durch eine Betonschicht B u. s. w. Noch versieht man diese Schleusen mit Lichtlöchern, wie z. B. C, welche mittels durchlöcherter eiserner Deckel DD verschlossen werden.


Fig. 329.



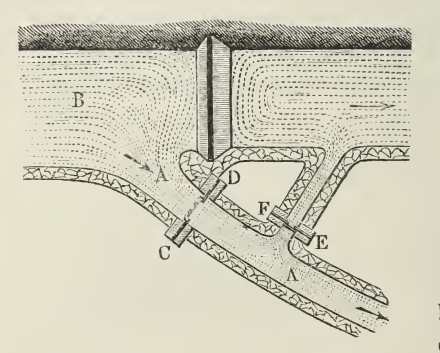
Anmerkung. Ein Beispiel von einem antiken Aquäduct führt Fig. 330 vor Augen. Es ist dies eine monodimetrische Abbildung von dem 160 Fuß hohen Aquäduct du Gard bei Nismes. Der Canal *CC*, in welchem das Wasser floß, ist $4\frac{1}{2}$ Fuß breit und 5 Fuß hoch; er ruht auf drei übereinander stehenden Bogenreihen und ist durch steinerne Platten bedeckt. Die untere Bogenreihe *AA* besteht aus sechs Halbkreisbögen von 55 bis 77 Fuß Spannung und trägt zugleich eine gewöhnliche Fahrstraße *B*. Die mittlere Bogenreihe *DD* besteht aus zehn Bögen und die oberste Bogenreihe *EE* aus einer sehr großen Anzahl kleiner Bögen, ist aber an den Enden bereits eingestürzt.

Fig. 330.



§. 161 Die Einmündung eines Canales *AA*, Fig. 331, in einen Fluß *B* ist durch allmälige Erweiterung und Abrundung zu bewirken, die Ufer sind durch Mauerung und durch eine zwischen Lehmrammelung stehende Spundwand *CD* vor den zerstörenden Wirkungen des fließenden Wassers zu schützen. Uebrigens läßt sich das Schützenwerk, welches zum Reguliren des Wassers dient, gleich in das Bundwerk der Spundwand oder der sogenannten Verheerdung einsetzen. Um das durch besondere Umstände, z. B. durch starke Regengüsse, Thaufluthen u. s. w.

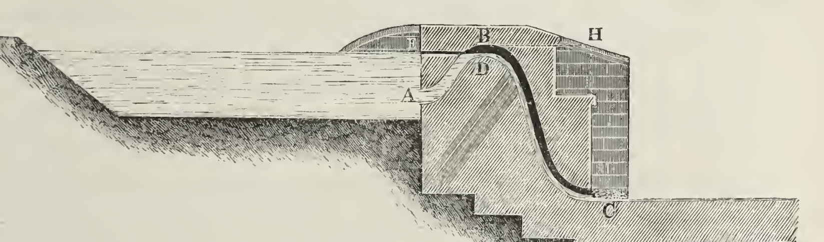
Fig. 331.



herbeigeführte Ueberlaufen oder Ueberfüllen der Canäle zu verhindern, sind noch Ablässe, Abschläge oder Fluther anzubringen. Diese sind kurze, seitwärts einmündende Canäle mit einem starken Gefälle. Man schützt dieselben durch Mauerung, Lehmrammelung und Verheerdung, wie *EF*, Fig. 331 zeigt, und sperrt sie für gewöhnlich durch eingesetzte Pfosten oder bewegliche Schützen. Auch versieht man wohl zu demselben Zwecke den Wehrdamm mit einem Fluther.

Um endlich noch das nöthige Ablassen des Wassers aus Canälen von selbst, ohne Beihülfe eines Aufsehers zu bewirken, wendet man besondere Mechanismen, wie z. B. Schwimmer, an, welche beim Anschwellen des Wassers im Canale steigen und dabei die meist in einer Klappe oder Thür bestehende Schütze öffnen, oder man bedient sich eines Kastens, in welchen Wasser einfließt, wenn dasselbe im Canale eine gewisse Höhe überschritten hat, und welcher beim Niedersinken die Abflußklappe öffnet. Am einfachsten ist aber der Heber *ABC*, Fig. 332, mit einer Luftröhre *DE*. Sowie der Wasserspiegel im Canale in das Niveau des Heberscheitels *B* kommt, so füllt sich

Fig. 332.

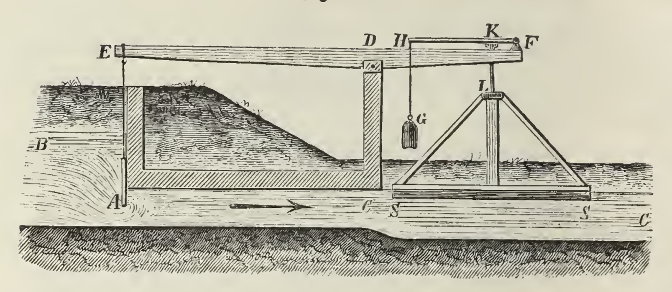


der letztere ganz mit Wasser und es fließt dasselbe bei *C* mit gefülltem Querschnitte und unter einer Druckhöhe ab, welche der Tiefe *CH* der Ausmündung *C* unter dem Wasserspiegel gleichkommt. Sinkt aber das Wasser wieder bis zur Luftröhre, so dringt Luft ein, und es endigt sich dadurch der Ausfluß. Füllt das Wasser nur einen Theil des höchsten Röhrenquerschnittes *BD* aus, so tritt natürlich nur das Ausflußverhältniß eines Ueberfalles ein.

Eine sich selbst stellende Schütze ist in Fig. 333 (a. f. S.) abgebildet. Es ist hier die Schütze *A*, welche das aus *B* nach *C* abfließende Wasser reguliren soll, an einem um *D* drehbaren Hebel *EF* aufgehangen, der mit einem auf dem abfließenden Wasser *CC* ruhenden Schwimmer *SS* in Verbindung steht. Steigt das Wasser *CC* und mit ihm *SS*, so sinkt die Schütze *A*, und fällt *CC*, so wird *A* mittels *SS* gehoben; im ersten Falle wird aber die Ausflußmenge bei *A* vermindert, und im zweiten vergrößert,

jedenfalls also die dem Steigen oder Sinken von SS entsprechende Zu- oder Abnahme des Abflußwassers wieder aufgehoben. Um dem Steigen des

Fig. 333.



Schwimmers kein Hinderniß entgegenzusetzen, wenn die Schütze A geschlossen und CC in Folge von Regengüssen angeschwollen ist, läßt man die Schwimmer mittels eines Bolzens KL auf einen Hebel FH wirken, der durch ein Gewicht G niedergezogen wird.

§. 162 **Canalgefälle.** Die Geschwindigkeit des Wassers in einem Canale soll eine mittlere sein; nicht zu klein, weil sich außerdem derselbe leicht verschlämmt oder versandet, und nicht zu groß, weil sonst das Bett nicht hinreichenden Widerstand leistet, und weil eine große Geschwindigkeit ein zu großes Gefälle für den Canal in Anspruch nimmt und es den Maschinen entzieht. Um das Absetzen von Schlamm zu verhindern, soll die mittlere Geschwindigkeit mindestens 7 bis 8 Zoll übertreffen, da, wo aber das Absetzen von Sand zu befürchten ist, soll man dieselbe nicht unter $1^1/_4$ Fuß zulassen. Was die Maximalgeschwindigkeit des Wassers in Canälen anlangt, so hängt diese von der Beschaffenheit des Bettes ab; damit dieses nicht angegriffen wird, darf die Geschwindigkeit am Boden nicht überschreiten:

bei schlammigem Boden $^1/_4$ Fuß,
" thonigem Boden $^1/_2$ Fuß,
" sandigem Boden 1 Fuß,
" kiesigem Boden 2 Fuß,
" grobsteinigem Boden 4 Fuß,
" einem Boden von Conglomerat oder Schiefergestein 5 Fuß,
" einem Boden von geschichtetem Gesteine 6 Fuß,
" einem Boden von hartem und ungeschichtetem Gesteine 10 Fuß.

Wenn nun auch die Geschwindigkeit am Boden kleiner ist als die mittlere Geschwindigkeit im ganzen Querprofile, so wird es doch der Sicherheit wegen gut sein, selbst mit der letzteren die eben angegebenen Grenzen nicht zu überschreiten.

Aus der angenommenen mittleren Geschwindigkeit c und aus dem fortzuführenden Wasserquantum Q ergiebt sich nun der Inhalt des Querprofiles

F, und hieraus wieder der Umfang p des Wasserprofiles; setzt man nun diese Werthe in die Formel

$$\delta = \frac{h}{l} = \zeta \cdot \frac{p}{F} \cdot \frac{c^2}{2g} \text{ (s. Bd. I, §. 475 u. s. w.)}$$

ein, so bekommt man den erforderlichen Abhang δ des Canales, aus dem sich wieder das Gefälle auf die ganze Canallänge l, $h = \delta l$ ergiebt.

Hiernach erhält man allerdings unter verschiedenen Verhältnissen sehr verschiedene Abhänge; da indessen, ζ im Mittel $= 0{,}007565$, c in der Regel zwischen 1 und 5 Fuß und bei Aufschlagecanälen, $\frac{p}{F}$ zwischen $^1/_5$ und 2 gelegen ist, so folgen die Grenzen der Abhänge bei diesen Canälen:

$$0{,}007565 \,.\, {}^1/_5 \,.\, 1 \,.\, 0{,}016 = 0{,}000024 \text{ und}$$
$$0{,}007565 \,.\, 2 \,.\, 25 \,.\, 0{,}016 = 0{,}00605.$$

Den Abzugscanälen giebt man in der Regel ein größeres Gefälle, um eine größere Geschwindigkeit zu erzeugen und das Wasser, nachdem es gewirkt hat, schnell von der Umtriebsmaschine zu entfernen.

Da nach Bd. I, §. 474 für Canäle mit ähnlichen Querprofilen $\frac{p}{F} = \frac{m}{\sqrt{F}}$ ist, so folgt die Neigung der Canalsohle $\delta = \zeta \frac{m}{\sqrt{F}} \cdot \frac{c^2}{2g}$; und es fällt also hiernach dieselbe um so größer aus, je kleiner das Querprofil des Canales ist.

Aus demselben Grunde haben bei gleicher Geschwindigkeit große Flüsse und Ströme einen kleineren Fall als Bäche und Canäle. Beziehen sich p, F, l und c auf einen Graben und p_1, F_1, l_1 und c_1 auf eine Flußstrecke, neben welcher der Graben hinläuft, ist folglich $h = \zeta \frac{pl}{F} \frac{c^2}{2g}$ das Gefälle des ersteren und $h_1 = \zeta \frac{p_1 l_1}{F_1} \frac{c_1^2}{2g}$ das der letzteren, so fällt das durch die Grabenführung gewonnene nutzbare Gefälle

$$h_2 = h_1 - h = \zeta \frac{p_1 l_1}{F_1} \frac{c_1^2}{2g} - \zeta \frac{pl}{F} \frac{c^2}{2g} \text{ aus.}$$

Da in der Regel $\frac{p_1}{F_1} < \frac{p}{F}$ ausfällt, so ist zu fordern, daß $l c^2 < l_1 c_1^2$, daß also die Grabenstrecke kürzer sei als die Flußstrecke, und daß die Geschwindigkeit des Wassers in der ersteren kleiner ausfalle als in der letzteren.

Anmerkungen. 1. Hiesigen Aufschlagegräben giebt man 0,00025 bis 0,0005, den Abzugsgräben aber 0,001 bis 0,002 Abhang. Die ursprünglich römische Wasserleitung zu Arcueil bei Paris hat $\delta = 0{,}000416$, die New-River-Wasserleitung in London aber $\delta = 0{,}00004735$ u. s. w.

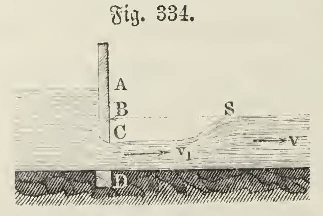
2. Plötzliche Richtungs- und Querschnittsveränderungen sind bei einem Canale zu vermeiden, weil dadurch nicht nur Gefälle verloren geht, sondern auch nachtheilige Wirkungen auf das Bett desselben entstehen. Wenn man Canäle an Gehängen hinführt, so sind Krümmungen nicht zu vermeiden, und es ist dann wenigstens dafür zu sorgen, daß dieselben große Halbmesser oder wenigstens größere Querschnitte erhalten.

3. Durch das Ansetzen von Schlamm, Sand und Eis, sowie durch Einwachsen von Wasserpflanzen, wie Schilf u. s. w., wird das Querprofil der Canäle verengt, und dadurch ebenfalls ein Gefällverlust herbeigeführt. Man soll daher die Canäle von Zeit zu Zeit von solchen Hindernissen befreien, übrigens aber die Bildung derselben, zumal durch Bedeckung der Canäle, zu verhindern suchen. Endlich verliert ein Canal auch Wasser durch Verdunstung und Versickerung, gewinnt aber auch wieder durch Quellen und Regen. Sichere Angaben lassen sich jedoch hierüber nicht machen.

4. Wenn man in der Formel $h = \zeta \frac{ml}{\sqrt{F}} \frac{c^2}{2g} = \zeta \frac{ml\,Q^2}{2\,g F^{5/2}}$, F um $\triangle F$ zunehmen läßt, so nimmt h um $\triangle h = {}^5/_2\, \zeta \frac{ml Q^2 \triangle F}{2\,g F^{7/2}}$ ab, und es ist $\frac{\triangle h}{h} = - {}^5/_2 \frac{\triangle F}{F}$ sowie $\frac{\triangle F}{F} = - {}^2/_5\, \frac{\triangle h}{h}$. Es ist also die relative Gefällvergrößerung $= {}^5/_2$mal der relativen Querschnittsverminderung, sowie die relative Querschnittsvergrößerung $= {}^2/_5$mal der relativen Gefällverminderung. Die Wassermenge bleibt z. B. dieselbe, ob man den Querschnitt des Grabens um 2 Procent größer oder kleiner, oder ob man das Gefälle desselben um 5 Procent kleiner oder größer macht.

§. 163 **Schützen.** Der Eintritt des Wassers in einen Canal ist entweder frei oder durch eine Schütze zu reguliren. Tritt das Wasser frei aus dem Wehrteiche oder einem Reservoir, worin es als stillstehend anzunehmen ist, so bildet sich eine Senkung des Wasserspiegels, welche auf die Erzeugung der Geschwindigkeit v des Wassers im Canale verwandt wird, daher $= \frac{v^2}{2g}$ ist, und allemal vom ganzen Canalgefälle abgezogen werden muß. Bei mittleren Geschwindigkeiten von 3 bis 4 Fuß beträgt jedoch diese Senkung nur $1^1/_2$ bis 3 Zoll. Wird der Eintritt des Wassers in einen Canal durch ein Schutzbrett regulirt, so sind zwei Fälle von einander zu unterscheiden. Entweder fließt das Wasser frei durch die Schutzöffnung, oder es fließt unter dem die Vorderfläche des Schutzbrettes zum Theil bedeckenden Unterwasser aus. In der Regel ist die Höhe des im Graben fortfließenden Wassers größer als die Oeffnungshöhe und es bildet sich deshalb in einer gewissen Entfernung vor der Schütze $A\,C$, Fig. 334, ein Sprung S. Die Höhe $B\,C = x$ dieses Sprunges bestimmt sich aus der Geschwindigkeit v des fortfließenden und

Fig. 334.



aus der Geschwindigkeit v_1 des ankommenden Wassers mittels der Formel:

$$x = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g},$$

und zieht man diese Höhe von der die Geschwindigkeit v_1 erzeugenden Druckhöhe

$$AC = h = \frac{v_1^2}{2g}$$

ab, so bleibt das zur Erzeugung der Anfangsgeschwindigkeit v verwendete Gefälle

$$AB = h_1 = h - x = \frac{v_1^2}{2g} - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v^2}{2g};$$

und zwar genau so groß wie beim freien Eintritt. Da die Mündung nie vollkommen glatt und abgerundet ist, so wird sie allerdings noch ein Hinderniß darbieten und das Gefälle noch um 10 oder mehr Procent vergrößern.

Setzen wir den Inhalt des Querschnittes vom fortfließenden Wasser $= G$ und den der Oeffnung CD, $= F$, sowie den Contractionscoefficienten $= \alpha$, so erhalten wir:

$$Gv = \alpha F v_1,$$

und daher die Sprunghöhe:

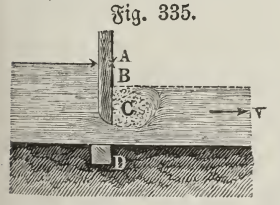
$$x = a - a_1 = \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g}.$$

Statt $\frac{v_1^2}{2g}$ die Geschwindigkeits- oder Druckhöhe $\overline{AC} = h$ und den Widerstandscoefficienten ζ_0 eingeführt, sowie $h = (1 + \zeta_0)\,\frac{v_1^2}{2g}$ gesetzt, folgt

$$x = \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{h}{1 + \zeta_0}.$$

Ist anfänglich die Differenz $a - a_1$ der Wasserhöhen a und a_1 kleiner als $= \left[1 - \left(\frac{\alpha F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g}$, so zieht sich der Sprung bis zu einer gewissen Stelle S stromabwärts; ist sie hingegen größer, so zieht er sich aufwärts, so daß zuletzt der in Fig. 335 abgebildete Ausfluß unter Wasser eintritt. Hier wird die Druckhöhe $AB = h$ nicht allein auf die Erzeugung der Geschwindigkeit v des fortfließenden Wassers, sondern auch auf die Ueberwindung des Hindernisses verwendet, welches sich herausstellt, wenn die Geschwindigkeit v_1 in der Mündung plötzlich in die Geschwindigkeit v im Canale verwandelt wird. Setzen wir den Inhalt der Mündungsfläche $\overline{CD} = F$ und den Querschnitt des Canales, $= G$, so haben wir die durch diesen Uebergang verlorene Druckhöhe

Fig. 335.



$$h_1 = \frac{(v_1 - v)^2}{2g} = \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

und daher das erforderliche Gefälle:

$$AB = h = \frac{v^2}{2g} + \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

d. i.:

$$h = \left[1 + \left(\frac{G}{\alpha F} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Man sieht, daß dieses Gefälle oder der Niveauabstand des Wassers vor und hinter dem Schutzbrette um so größer ausfällt, je kleiner die Schutzöffnung F in Ansehung des Canalquerschnittes G ist.

Beispiel. Ein Canal hat 5 Fuß mittlere Breite und liefert bei 3 Fuß Tiefe 45 Cubikfuß Wasser pr. Secunde; wenn nun seine Speisung durch eine 4 Fuß weite und 1 Fuß hohe Schutzöffnung erfolgt, um wie viel wird das Wasser hinter dem Schutzbrette tiefer stehen als vor demselben? Es ist:

$G = 5.3 = 15$ Quadratfuß und $F = 4.1 = 4$ Quadratfuß; ferner:

$v = {}^{45}/_{15} = 3$ Fuß und $v_1 = \dfrac{3\,.\,15}{4} = {}^{45}/_4 = 11^1/_4$ Fuß.

Da nun $\left[1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g} = [1 - ({}^4/_{15})^2]\,.\,2{,}02 = 1{,}88$ Fuß kleiner als $a - a_1 = 3 - 1 = 2$ Fuß ist, so wird ein freier Ausfluß nicht stattfinden können. Die Formel

$$h = \left[1 + \left(\frac{G}{F} - 1\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}$$

giebt den gesuchten Niveauabstand:

$$h = (1 + 2{,}75^2)\,.\,0{,}144 = 8{,}56\,.\,0{,}144 = 1{,}23 \text{ Fuß},$$

welcher jedoch wegen der Hindernisse in der Mündung mindestens noch 10 Proc. größer sein kann.

§. 164 **Leitungsröhren.** Röhrenleitungen dienen in der Regel nur zur Fortleitung kleiner Wassermengen, wie sie etwa zum Speisen einer Wassersäulenmaschine mit hohem Gefälle nöthig sind. Da sie rings umschlossen sind, so kann man sie nicht bloß fallend, sondern auch steigend legen. Auch kann das Neigungsverhältniß ein ganz beliebiges sein, wenn nur die Ausmündung unter, und der höchste Punkt der Leitung noch nicht 1 Atmosphäre (32,84 Fuß) über, besser aber ebenfalls unter der Einmündung liegt. Durch Röhrenleitungen lassen sich also Thäler und Anhöhen überschreiten, ohne Brücken und Röschen zu erfordern. Die Leitungsröhren sind aus Holz oder gebranntem Thon, Stein, Glas, Eisen, Blei u. s. w. Am häufigsten kommen die Holz- und Eisenröhren vor, nächstdem aber die Steinröhren.

Zu den hölzernen Leitungsröhren verwendet man gewöhnlich Nadelholz, weil sich daraus leicht gerade Röhren von 12 bis 20 Fuß Länge schneiden lassen. Die Weite der Bohrung beträgt $1^1/_2$ bis 8 Zoll, sie soll übrigens

ein Drittel des Röhrendurchmessers nicht übertreffen. Die Verbindungsweisen der Röhren untereinander sind aus den Figuren 336 und 337 zu ersehen. Fig. 336 zeigt eine conische Verzapfung mit einem eisernen Ringe

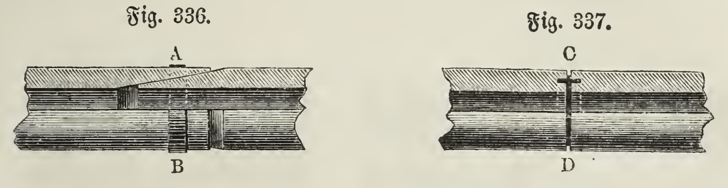


Fig. 336. Fig. 337.

AB und einer Einlage von getheertem Hanf oder getheerter Leinwand. Fig. 337 zeigt eine Verbindung mit einer eisernen Büchse *CD*, welche mit ihren schneidigen Ringen in beide Röhrenenden 1 bis 2 Zoll tief eindringt.

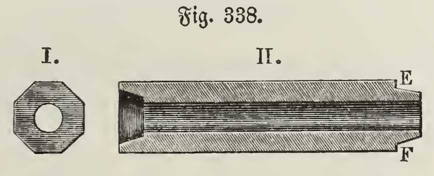
Die steinernen Röhren sind 5 bis 6 Fuß lang, sie werden stumpf zusammengestoßen, mit einem Kitte oder hydraulischem Mörtel und einem über beide Röhrenenden weggreifenden eisernen Ringe verbunden.

Es gehören hierher auch die sogenannten Steinzeugröhren, Portlandcementröhren u. s. w.

In manchen Fällen lassen sich auch Asphaltröhren mit Vortheil anwenden. Ebenso gezogene Bleiröhren, sowie zusammengelöthete Zinkröhren u. s. w.

Einen Quer- und einen Längendurchschnitt einer steinernen Röhre mit conischer Verzapfung *EF* zeigt Fig. 338, I und II.

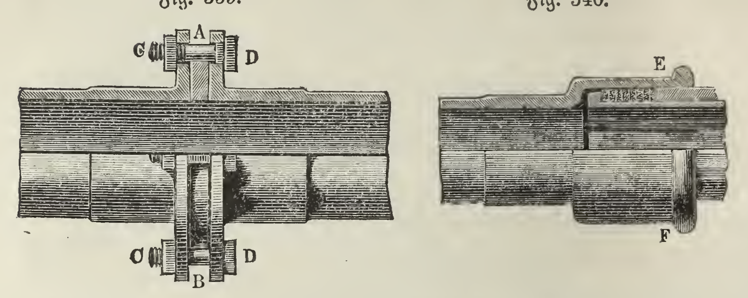
Fig. 338.



Die eisernen Röhren zeichnen sich durch große Festigkeit und Dauerhaftigkeit vor allen anderen Röhren aus. Sie werden von sehr verschiedenen Weiten und bei mindestens $1/2$ Zoll Stärke, 5 bis 10 Fuß lang gegossen. Man muß sie vor dem Gebrauche einer hydrostatischen Prüfung unterwerfen. Um sie vor der Oxydation von innen zu schützen, werden dieselben ausgepicht, oder überfirnißt, oder gar mit hydraulischem Mörtel bestrichen. Uebrigens ist die Wandstärke von der Weite und vom Drucke abhängig und nach Band I, §. 363 zu bestimmen. Die Zusammensetzung der eisernen Röhren erfolgt entweder mittels Kränzen *AB* und Schrauben *CD*, wie Fig. 339 (a. f. S.) vor Augen führt, oder mittels Schnauzen *EF*, wie Fig. 340 zeigt, oder mittels Ringen (Sätteln) *GH*, welche, wie Fig. 341 andeutet, über die stumpf zusammengestoßenen Enden von je zwei Röhren weggreifen. Zur Verdichtung dient Leder, Filz, Kautschuk, Blei,

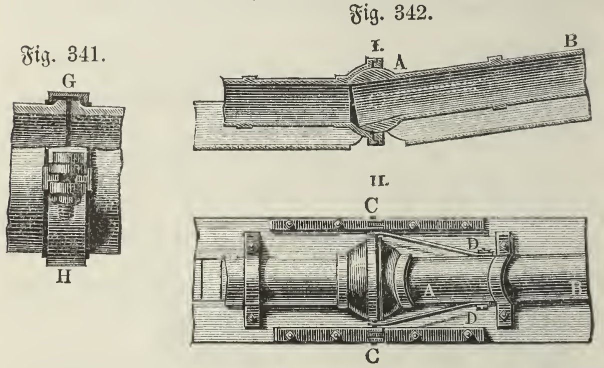
Eisenkitt oder Holz, welches letztere in Keilform in die Fugen einzutreiben ist. Zuweilen setzt man auch noch schwache Eisen- oder Kupferringe so inwendig

Fig. 339. Fig. 340.



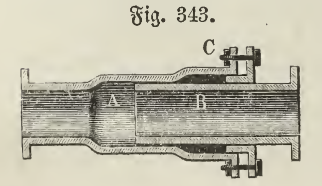
an, daß sie über beide Röhrenenden weggreifen. Hölzerne und steinerne Röhren lassen sich ebenfalls durch Schnauzen mit eisernen Röhren verbinden. Noch hat man auch Verbindungen mit der Nuß *A*, wie Fig. 342 I und II zeigt, durch welche sich die Röhren unter beliebigen Winkeln zusammenstoßen lassen. Diese Nußverbindung ist noch mit einer Drehaxe *CC* und zwei Armen *CD*, *CD* ausgerüstet, welche um die Axe *CC* drehbar und mit der Röhre *AB* fest verbunden sind.

Fig. 341. Fig. 342.



Liegen die gußeisernen Röhren nicht tief unter oder wohl gar über der Erde, so erleiden dieselben mit dem Wetter Temperaturveränderungen, die wieder eine Ausdehnung oder Verkürzung der Röhren zur Folge haben. Um nun aber die nachtheiligen Folgen dieser Veränderung, wie z. B. das Zersprengen, sowie auch das Zufrieren der Röhren, zu vermeiden, müssen sogenannte Compensationsröhren, wie Fig. 343, in die Leitung eingesetzt werden. Die Längenausdehnung des Gußeisens beträgt bei jedem Grad Wärmezunahme = 0,0000111; folglich die Längenausdehnung bei 50° Temperaturzunahme (vom tiefsten Winterfroste bis zur höchsten

Fig. 343.

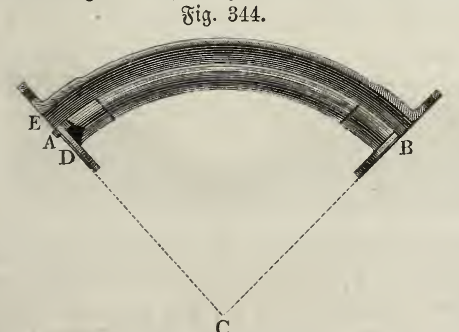


Sommerhitze) = 50 . 0,0000111 = 0,000555; ist nun die Leitungsröhre $^1/_{0,000555}$ = 1800 Fuß lang, so nimmt dieselbe folglich bei dieser Temperaturveränderung um 1 Fuß an Länge zu. Diese Ausdehnung wird nun durch die Compensationsröhre A wieder ausgeglichen, indem sich die folgende Röhre B in ihr verschiebt. Damit dies ungehindert geschehen könne, wird das Ende dieser Röhre abgedreht, und der Verschluß durch eine mit einem Polster gefüllte Stopfbüchse C hervorgebracht. In der Regel bringt man auf 300 Fuß Länge eine Compensationsröhre an.

Um das schon bei Null Grad Wärme eintretende Zufrieren der Röhren zu verhindern, legt man die Röhren mindestens 3 Fuß tief in die Erde, wobei natürlich auch die Zusammenziehung derselben durch die Kälte im Winter wegfällt.

Regulirung des Wassers in Leitungsröhren. Nicht immer §. 165 lassen sich Röhrenleitungen gerade fortführen, sondern man muß sie bald zur Seite, bald auf- bald abwärts steigend legen. Es ist hierbei aber stets die Regel zu befolgen, plötzliche Richtungsänderungen, also Knieröhren, gänzlich zu vermeiden, krummen Röhren aber große Krümmungshalbmesser oder auch eine größere Weite zu geben. Ein solches gußeisernes Kropfstück ist in Fig. 344 abgebildet. Es ist hier der Ablenkungswinkel $ACB = 90^0$ und das Verhältniß der Röhrenweite DE zum Krümmungshalbmesser CA, $= {}^1/_6$. Uebrigens sind plötzliche Querschnittsveränderungen ebenfalls zu vermeiden und, sowie bei Ein- und Ausmündungen der Röhrenleitung, durch Abrundungen allmälige Uebergänge aus einem Querschnitt in einen anderen zu bewirken. Aufwärtsgehende Krümmlinge, Fig. 345 (a. f. S.), haben den Nachtheil, daß sich in ihnen die Luft L ansammelt, die den Querschnitt verengt, und wenn sie sich in großer Menge angehäuft hat, denselben ganz einnimmt, und dadurch die Bewegung des Wassers ganz verhindert. Um diese Anhäufung zu verhindern, setzt man senkrechte Röhren AL, sogenannte Luftständer, Windstöcke (franz. ventouses; engl. wind-pipes), Fig. 345, auf, durch die sich die Luft oder andere sich aus dem Wasser entwickelnde Gase entfernen können. Um sie nicht zu lang machen zu dürfen, verschließt man dieselben mit einem Hahne, der von dem Röhrenwärter von Zeit zu Zeit und jedes Mal so lange zu öffnen ist, bis sich alle Luft entfernt hat und nur Wasser ausströmt. Um

Fig. 344.



selbst dieses Oeffnen durch Menschenhände unnöthig zu machen, wendet man **Windstöcke mit Schwimmer** wie Fig. 346 an. Hier ist das abschließende Ventil V mit einem hohlen Schwimmer S aus Blech verbunden, der,

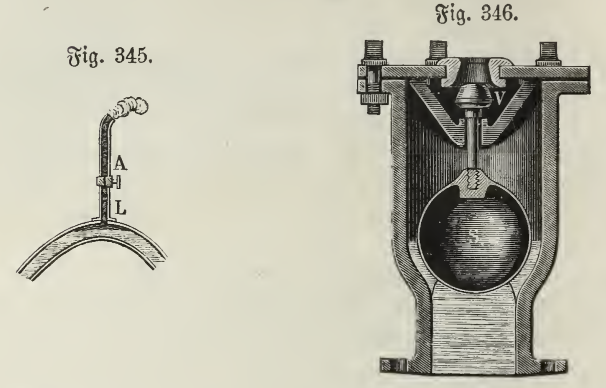
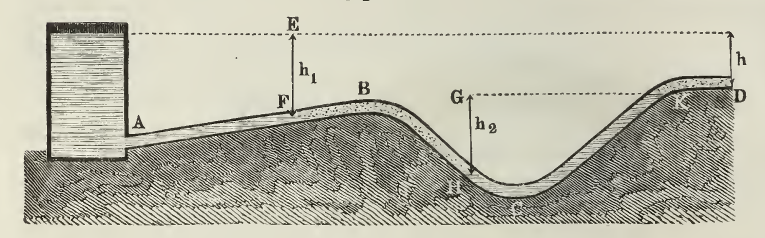


Fig. 345. Fig. 346.

so lange Wasser im Raume über dem Röhrenscheitel ist, nach oben zu steigen sucht und das Ventil zuhält, dagegen aber niederfällt und das Ventil öffnet, wenn dieser Raum mit Luft ausgefüllt ist.

Wenn eine Röhrenleitung $ABCD$, Fig. 347, in der Kröpfung B

Fig. 347.

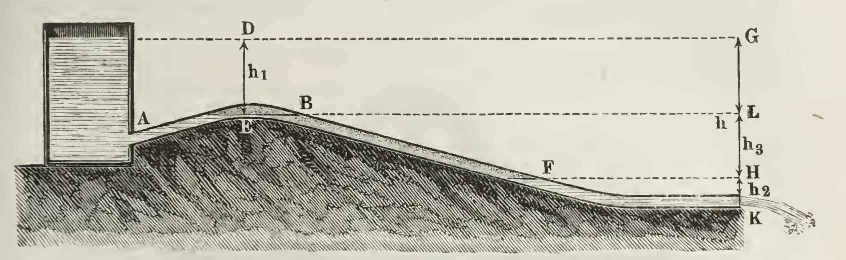


keinen Windstock hat, so wird die eingeschlossene Luft einerseits durch eine Wassersäule von der Höhe $EF = h_1$ und anderseits durch eine solche von der Höhe $GH = h_2$ gedrückt; ist daher $h_2 = h_1$, und reicht der Wasserspiegel K nicht bis zur Mündung D, so setzt sich der Luftdruck in FBH mit diesen beiden Wassersäulen ins Gleichgewicht, ohne daß ein Ausfluß bei D erfolgt.

Der Mangel eines Windstockes kann den Abfluß des Wassers durch eine Röhrenleitung zuweilen auch bloß vermindern. Einen solchen Fall stellt die Leitung ABC, Fig. 348, dar, wo die Höhe z der Wassersäule, welche den Druck der in EBF eingeschlossenen Luft mißt, nur wenig kleiner ist als die Druckhöhe $DE = h_1$ des zufließenden Wassers, und deshalb auch die Geschwindigkeit des letzteren sehr klein ausfällt. Von E aus fließt dann

das Wasser bis zu einer Stelle F auf dem Boden der Röhre hin, ohne eine Druckveränderung zu erleiden, und von F aus strömt es bis zur Mündung

Fig. 348.



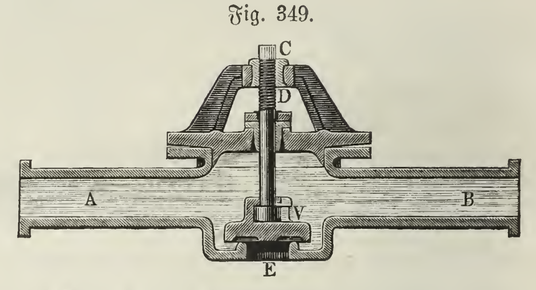
K mit gefülltem Querschnitt. Es ist also dann die Druckhöhe in der Ausmündung K nicht $\overline{GK} = h$, sondern $\overline{HK} = h_2$ plus z, oder nahe $= h_1 + h_2$, und daher das Gefälle $\overline{HL} = h_3$ zwischen E und F ganz verloren.

Sowie sich an den höchsten Stellen einer Röhrenleitung Luft ansammelt, ebenso setzt sich an den tiefsten Punkten derselben Schlamm, Sand u. s. w. nieder. Um diese Niederschläge von Zeit zu Zeit zu entfernen, bringt man an diesen Stellen Ausgußröhren oder Schlammkästen (Wechselhäuschen) an. Die Ausgußröhren münden seitwärts in die Röhre ein, und sind für gewöhnlich durch Hähne oder Stöpsel verschlossen. Die Schlammkästen sind Gefäße, in welche die beiden Theile der Röhrenleitung einmünden, durch die also das Wasser mit verminderter Geschwindigkeit hindurchströmen muß. Das Absetzen des Schmandes wird nicht allein durch die langsame Bewegung des Wassers, sondern wohl auch durch eingesetzte Siebe oder Scheidewände erleichtert. Durch Oeffnen eines Spundes im Boden lassen sich diese Kästen von Zeit zu Zeit vom Bodensatze reinigen. Ueberdies ist es nöthig, in Distanzen von 100 oder mehr Fuß Spunde an der Röhrenleitung anzubringen, um das Untersuchen und Reinigen der Röhren zu erleichtern. Das Reinigen erfolgt durch Auslassen des Wassers, durch Einführen von Gestängen aus Holz oder Eisen, und das Ablösen von Kalkkrusten durch Salzsäure und durch Einführen eines birnförmigen Eisens, der sogenannten Rohrbirne. Die Anwendung von Piezometern (s. Bd. I, §. 435) ist ebenfalls zu empfehlen.

Zur Regulirung des Wassers in Röhren sind noch Hähne, Schieber oder Ventile nöthig. Ein einfaches Sperrventil ist in Fig. 349 (a. f. S.) abgebildet. Dieses Ventil V sitzt an einem Schraubenbolzen CDV, und bedeckt eine Seitenöffnung E der Röhre AB. Wenn es darauf ankommt, das Wasser durch E abzulassen, so wird CD durch einen Schlüssel umgedreht, wobei sich dann der Bolzen in Folge seiner schraubenförmigen Gestalt

bei D und seiner Lagerung in der festen Mutter CD hebt. Die Wirkungen dieser Regulirungsapparate haben wir in Bd. I, §. 443 u. s. w. kennen gelernt. Um endlich noch die Wirkungen der Stöße beim schnellen Schließen einer solchen Vorrichtung zu schwächen, ist es nützlich, durch Gewichte be-

Fig. 349.



schwerte Ventile anzubringen, die sich nach außen öffnen, sowie der Druck eine gewisse Grenze überschreitet.

Anmerkung. Ausführlich über Wasserleitungen wird gehandelt in Genieÿ's Essai sur les moyens de conduire, d'élever et de distribuer les eaux, sowie im Traité théoretique et pratique de la conduite et de la distribution des eaux etc. par Dupuit, Paris 1854 und in der Schrift: Les Fontaines publiques de la ville de Dijon, par Henry Darcy, Paris 1856, ferner über Röhrenleitungen insbesondere in Hagen's Wasserbaukunst, Theil I, in Gerstner's Mechanik, Theil II und in Eytelwein's Hydraulik. Auch in Bornemann's Hydrometrie, Freiberg 1849.

§. 166 **Bewegung des Wassers in zusammengesetzten Röhren.** Die Bewegungsverhältnisse des Wassers in einer Röhrenleitung haben wir bereits kennen gelernt. Ist h das Gefälle, l die Länge, d die Weite einer Leitung, ζ_0 der Widerstandscoefficient beim Eintritt, ζ der Reibungscoefficient, sind ferner ζ_1 u. s. w. die übrigen Widerstandscoefficienten beim Durchgange durch Krümmungen, Hähne u. s. w. zusammen genommen, und ist endlich v die Ausflußgeschwindigkeit, so hat man:

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1 + \cdots\right) \frac{v^2}{2g},$$

oder, wenn Q die Wassermenge bezeichnet,

$$h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d} + \zeta_1 + \cdots\right) \left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\,g\,d^4}.$$

Man sieht hieraus, daß zum Fortführen einer gewissen Wassermenge Q um so weniger Gefälle erfordert wird, je größer die Weite der Leitung ist. Wendet man statt einer Röhre deren zwei an, welche zusammen ebenso viel Querschnitt haben als die einfache, und lassen wir von jeder die halbe Wassermenge der einfachen fortführen, so ist das erforderliche Gefälle:

$$h_1 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d\sqrt{1/2}} + \zeta_1 + \cdots\right)\left(\frac{2\,Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\,g\,(d\sqrt{1/2})^4}$$

$$= \left(1 + \zeta_0 + \zeta \cdot \frac{l\sqrt{2}}{d} + \zeta_1 + \cdots\right)\left(\frac{4\,Q}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\,g\,d^4},$$

also größer als im ersten Falle. Es ist daher mechanisch vollkommener statt mehrerer Röhren nur eine anzuwenden, deren Querschnitt so groß ist als die Querschnitte der einzelnen Röhren zusammen.

Sehr zusammengesetzt fallen die Rechnungen für ganze Wasserleitungssysteme aus, wo sich die Röhrenleitungen in Zweige theilen, die sich nach Befinden wieder weiter verzweigen u. s. w. Auch kommt es vor, daß sich zwei oder mehrere Zweige einer Wasserleitung vereinigen, wenn sie z. B. das Wasser von verschiedenen Quellen auf eine Maschine führen. Der Gang bei diesen Rechnungen ist wenigstens im Allgemeinen aus Folgendem zu ersehen. Erfolgt die Theilung des Wassers in einem Reservoir, welches viel weiter als die Hauptröhre ist, so kommt das Wasser in demselben wieder zur Ruhe und es wird also hier die ganze lebendige Kraft desselben getödtet, die gleichwohl beim Eintritt in die Zweigröhren wieder nöthig ist. Derselbe Kraftverlust tritt auch ein, wenn sich mehrere Zweige in einem Sammelreservoir vereinigen, aus dem das Wasser wieder durch eine Hauptröhre fortgeführt wird. In diesem Falle läßt sich die Rechnung für die Haupt- und für jede Zweigröhre besonders machen, weshalb etwas Weiteres hierüber nicht zu sagen ist. Damit das Theilen oder Ansammeln des Wassers in solchen Zwischenreservoiren nur zu mäßigen Gefälleverlusten führe, ist es nöthig, diese Behälter so hoch zu stellen, daß die Geschwindigkeit des Wassers in jeder der Röhren eine mittlere bleibe.

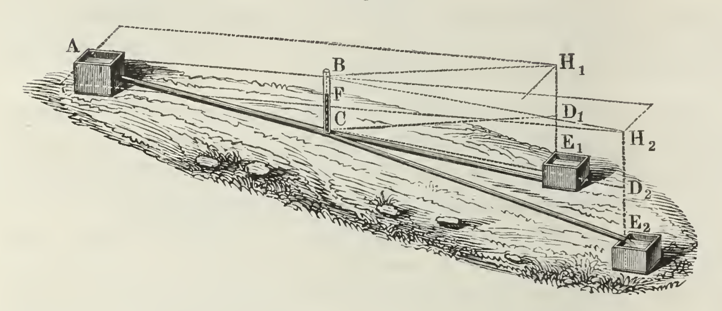
Bei der einfachen Verzweigung oder Gabelung ist es mechanisch vortheilhaft, die Anordnung so zu treffen, daß sich das Wasser in allen Röhren mit einerlei Geschwindigkeit bewege. Wenn nun noch die Gabelung im richtigen Verhältnisse gekrümmt ist, so daß eine plötzliche Richtungsänderung bei dem Uebertritte des Wassers aus der Hauptröhre in eine Zweigröhre nicht vorkommt, so läßt sich annehmen, daß hierbei ein namhafter Verlust an Druck oder lebendigem Gefälle nicht stattfinde.

In dem in Fig. 350 (a. f. S.) abgebildeten Falle sei h das Gefälle $\overline{BC} = \overline{H_1 D_1} = \overline{H_2 D_2}$, l die Länge und d die Weite der Hauptröhre AC, ferner h_1 das Gefälle $\overline{D_1 E_1}$, l_1 die Länge und d_1 die Weite der einen, sowie h_2 das Gefälle $\overline{D_2 E_2}$, l_2 die Länge und d_2 die Weite der anderen Zweigröhre, ferner seien c, c_1, c_2 die Geschwindigkeiten des Wassers in diesen drei Röhren, und endlich sei ζ_0 der Widerstandscoefficient für den Eintritt, sowie ζ der Reibungscoefficient des Wassers.

Bezeichnet nun noch z den Piezometerstand oder die Druckhöhe $\overline{CF}$ am Ende des Hauptstranges, so läßt sich setzen:

$$\text{I. } \overline{BF} = \overline{CB} - \overline{CF} = h - z = \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g},$$

Fig. 350.



ferner:

$$\text{II. } \overline{CF} + \overline{D_1 E_1} = z + h_1 = \frac{c_1^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} + \zeta \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{c_1^2}{2g},$$

$$\text{III. } \overline{CF} + \overline{D_2 E_2} = z + h_2 = \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c^2}{2g} + \zeta \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{c_2^2}{2g}.$$

Da die Wassermenge

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c$$

der Hauptröhre gleich ist der Summe der Wassermengen

$$Q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} c_1 \text{ und } Q_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} c_2$$

der beiden Zweigröhren, so gilt noch folgende Gleichung:

$$\text{IV. } d^2 c = d_1^2 c_1 + d_2^2 c_2.$$

Mit Hülfe dieser vier Gleichungen lassen sich natürlich auch vier Größen berechnen. In den gewöhnlichen Fällen sind die Gefälle, Röhrenlängen und Wassermengen gegeben und es wird nach den erforderlichen Röhrenweiten u. s. w. gefragt. Nehmen wir die Geschwindigkeit c des Wassers in der Hauptröhre als gegeben an, so können wir zunächst die Weite dieser Röhre mittels der Formel:

$$1)\quad d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi c}} = 1{,}1284 \sqrt{\frac{Q}{c}}$$

berechnen, und hiernach wieder, mit Hülfe von I. die Piezometerhöhe an dem Theilungspunkte C:

$$2)\quad z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g}$$

bestimmen.

Setzt man diesen Werth für z in die Gleichungen II. und III., so erhält man, nach gehöriger Umformung, folgende Bestimmungsgleichungen für die Weiten d_1 und d_2 der Zweigröhren:

$$3)\quad d_1 = \sqrt[5]{\frac{\zeta l_1 + d_1}{2g(z + h_1) + c^2} \left(\frac{4 Q_1}{\pi}\right)^2}$$

und

$$4)\quad d_2 = \sqrt[5]{\frac{\zeta l_2 + d_2}{2g(z + h_2) + c^2} \left(\frac{4 Q_2}{\pi}\right)^2}.$$

Um die ersten Näherungswerthe zu erhalten, können wir anfangs d_1 und d_2 unter dem Wurzelzeichen vernachlässigen. Fallen c_1 und c_2 sehr verschieden von c aus, so hat man noch auf die Veränderlichkeit des Reibungscoefficienten ζ Rücksicht zu nehmen, demselben also für jede der drei Röhren besondere Werthe beizulegen und hiermit die Bestimmung von d_1 und d_2 zu wiederholen.

Beispiel. Eine Röhrenfahrt, welche aus einer Haupt- und zwei Zweigröhren bestehen soll, ist dazu bestimmt, in einem Zweige 15 und im anderen 24 Cubikfuß Wasser pr. Minute fortzuleiten, und es hat sich durch ein Nivellement ergeben, daß die Hauptröhre bei 1000 Fuß Länge, 4 Fuß, die erste Zweigröhre bei 600 Fuß Länge, 3 Fuß und die andere Zweigröhre bei 200 Fuß Länge, 1 Fuß Gefälle erhalten kann; welche Weiten muß man einzelnen Röhren geben? Wenn wir dem Wasser in der Hauptröhre $2\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit ertheilen wollen, so müssen wir dieser Röhre die Weite:

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi c}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 39}{\frac{5}{2} \cdot 60 \pi}} = \sqrt{\frac{26}{25 \pi}} = 0{,}5754 \text{ Fuß} = 6{,}9 \text{ Zoll}$$

geben. Nehmen wir nun (nach Band I, Seite 821) den Widerstandscoefficienten für den Eintritt, $\zeta_0 = 0{,}505$, und den Reibungscoefficienten (nach Band I, Seite 835), der Geschwindigkeit $c = 2{,}5$ Fuß entsprechend, $\zeta = 0{,}0253$ an, ferner $2g = 62{,}5$ und $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1{,}621$, so erhalten wir für den Piezometerstand an dem Theilungspunkte:

$$z = h - \left(1 + \zeta_0 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{c^2}{2g} = 4 - \left(1 + 0{,}505 + 0{,}0253 \cdot \frac{12000}{6{,}9}\right) \frac{6{,}25}{62{,}5}$$

$$= 4 - (1{,}505 + 44) \cdot \tfrac{1}{10} = 4 - 4{,}5505 = - 0{,}5505 \text{ Fuß. (Nicht gut.)}$$

Nimmt man vorläufig auch für die Zweigröhre $\zeta = 0{,}0253$ an, und vernachlässigt man anfangs die Glieder d_1 und d_2 auf der rechten Seite, so erhält man:

$$z + h_1 = - 0{,}5505 + 3 = 2{,}4495,$$
$$z + h_2 = - 0{,}5505 + 1 = 0{,}4495,$$
$$\left(\frac{4 Q_1}{\pi}\right)^2 = 1{,}621 \cdot \left(\frac{15}{60}\right)^2 = \frac{1{,}621}{16} = 0{,}10131$$

und

$$\left(\frac{4\,Q_2}{\pi}\right)^2 = 1{,}621 \cdot \left(\frac{24}{60}\right)^2 = 1{,}621 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}25936,$$

sowie

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0253\,.\,600\,.\,0{,}10131}{62{,}5\,.\,2{,}4495 + 6{,}25}} = \sqrt[5]{\frac{15{,}18\,.\,0{,}10131}{159{,}34}} = 0{,}395 \text{ Fuß}$$

und

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0253\,.\,200\,.\,0{,}25936}{62{,}5\,.\,0{,}4495 + 6{,}25}} = \sqrt[5]{\frac{5{,}06\,.\,0{,}25936}{34{,}34}} = 0{,}520 \text{ Fuß}.$$

Diesen Durchmessern entsprechen die Geschwindigkeiten:

$$c_1 = \frac{4\,Q}{\pi\,d_1^2} = \frac{4\,.\,15}{60\,\pi\,(0{,}395)^2} = 2{,}04 \text{ Fuß}$$

und

$$c_2 = \frac{4\,Q}{\pi\,d_2^2} = \frac{4\,.\,24}{60\,\pi\,(0{,}520)^2} = 1{,}88 \text{ Fuß},$$

welchen (wieder nach Band I, Seite 835) die Widerstandscoefficienten

$$\zeta = 0{,}0262 \text{ und } \zeta = 0{,}0268$$

angehören.

Es ist hiernach schärfer die Weite der ersten Zweigröhre:

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0262\,.\,600 + 0{,}395}{159{,}34} \cdot 0{,}10131} = 0{,}400 \text{ Fuß} = 4{,}8 \text{ Zoll},$$

und die der zweiten Zweigröhre:

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{0{,}0268\,.\,200 + 0{,}520}{34{,}34} \cdot 0{,}25963} = 0{,}537 \text{ Fuß} = 6{,}44 \text{ Zoll}.$$

§. 167 **Zusammengesetzte Leitungsröhren.** Wenn die Theilung der Hauptröhre in zwei Röhren in einem besonderen Behälter erfolgt, worin das Wasser eine freie Oberfläche annimmt, so gehen die obigen Gleichungen unter I., II. und III. in folgende über:

$$\text{I. } h = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l}{d}\right)\frac{c^2}{2\,g},$$

$$\text{II. } h_1 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l_1}{d_1}\right)\frac{c_1^2}{2\,g}$$

und

$$\text{III. } h_2 = \left(1 + \zeta_0 + \zeta\frac{l_2}{d_2}\right)\frac{c_2^2}{2\,g},$$

wobei h den senkrechten Abstand des Wasserspiegels A im oberen Reservoir über dem im mittleren bezeichnet, und h_1 sowie h_2 von dem letzteren Wasserspiegel entweder bis zum Wasserspiegel E_1 im unteren Gefäße oder bis zur Mündungsmitte E_2 der Zweigröhre $C\,E_2$ gemessen wird, je nachdem das Wasser unter Wasser oder frei ausfließt.

Giebt man auch hier c, oder $d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi\,c}}$, so kann man mittels der ersten Gleichung zuerst den Niveauabstand h berechnen, und zieht man den-

selben von dem ganzen Gefälle zwischen A und E_1, sowie zwischen A und E_2 ab, so erhält man die Gefälle h_1 und h_2 der Zweigröhren CE_1 und CE_2, deren Durchmesser d_1 und d_2 sich dann durch die Formeln

$$d_1 = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d_1 + \zeta l_1}{2 g h_1} \cdot \left(\frac{4\, Q_1}{\pi}\right)^2}$$

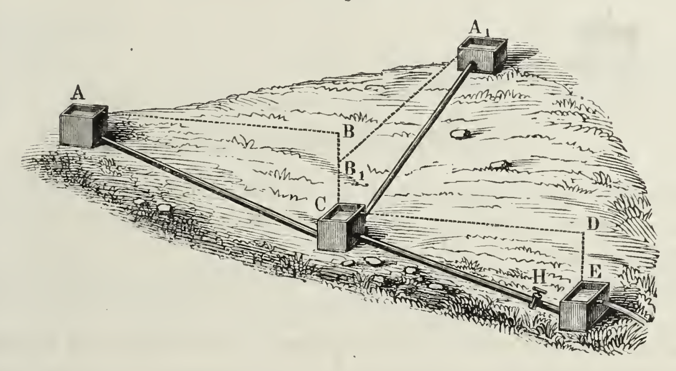
und

$$d_2 = \sqrt[5]{\frac{(1 + \zeta_0)\, d_2 + \zeta l_2}{2 g h_2} \cdot \left(\frac{4\, Q_2}{\pi}\right)^2}$$

berechnen lassen.

Vorstehende Formeln finden auch dann ihre Anwendung, wenn, wie Fig. 351

Fig. 351.



darstellt, sich zwei Röhrenstränge $A\,C$ und $A_1\,C$ in einem Reservoir C vereinigen und das von beiden gelieferte Wasser in einem Hauptstrange CE weiter fortgeführt wird. Es bezeichnen dann h das Gefälle (DE), l die Länge, d die Weite u. s. w. der Hauptröhre CE, ferner h_1 das Gefälle $\overline{B\,C}$, l_1 die Länge, d_1 die Weite u. s. w. der einen Zweigröhre $A\,C$, sowie h_2 das Gefälle $\overline{B_1\,C}$, l_2 die Länge, d_2 die Weite u. s. w. der anderen Zweigröhre $A_1\,C$. Auch finden bei einer solchen Confluenz die Formeln des vorigen Paragraphen ihre Anwendung, wenn statt des Sammlers C eine einfache Gabelröhre angebracht ist, wie in Fig. 350.

Kommen in der Leitung noch Kröpfe oder Kniestücke vor, so muß natürlich der Widerstand, welchen das Wasser beim Durchgange durch dieselben zu überwinden hat, in Betracht gezogen werden, und ebenso ist es, wenn Regulirungsapparate, z. B. Stellhähne wie H, in der Röhrenleitung angebracht sind. Ist ζ_2 der Widerstandscoefficient für eine gewisse Stellung eines solchen Apparates (s. Band I, §. 443), so hat man in demjenigen der obigen Ausdrücke, welcher der Leitröhre entspricht, worin dieser Apparat vorkommt, den Widerstandscoefficienten ζ_0 für den Eintritt in die Röhre noch um ζ_2 zu vergrößern, also statt ζ_0, $\zeta_0 + \zeta_2$

zu setzen, um dem obigen Ausdrucke auch in diesem Falle Gültigkeit zu verschaffen.

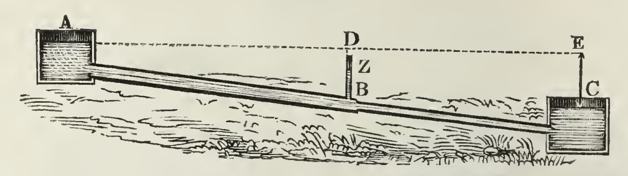
Kommt in einer Leitungsröhre eine kantige Querschnittsveränderung vor, welche eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung des Wassers zur Folge hat, so tritt noch ein Widerstand hinzu, welcher durch die Druckhöhe

$$h_1 = \frac{(c_1 - c)^2}{2g}$$

gemessen wird, wenn c_1 und c die beiden Geschwindigkeiten des Wassers bezeichnen.

Wenn ein Röhrenstrang ABC, Fig. 352, aus einem weiteren und einem

Fig. 352.



engeren Röhrenstück zusammengesetzt ist, so fällt natürlich auch der Widerstand in demselben anders aus, als wenn derselbe an allen Stellen eine und dieselbe Weite hat.

Ist l die Länge, d die Weite und h die Druckhöhe der unteren Röhre BC, sowie c die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, ferner l_1 die Länge, d_1 die Weite und h_1 die Druckhöhe der oberen Röhre AB, sowie c_1 die Geschwindigkeit des Wassers in derselben, und bezeichnet h das ganze Gefälle CE, sowie z den Piezometerstand BZ an der Stelle B, wo die Querschnittsveränderung eintritt, so hat man:

$$h_1 - z = \left(1 + \zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{c_1^2}{2g}$$

sowie

$$z + h - h_1 = \frac{c^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} + \frac{(c - c_1)^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g},$$

und es folgt durch Addition:

$$h = \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right) \frac{c_1^2}{2g} + \frac{c^2}{2g} + \frac{(c - c_1)^2}{2g} + \zeta \frac{l}{d} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Da $\frac{c_1}{c} = \frac{d^2}{d_1^2}$ ist, so läßt sich

$$c_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 c$$

einführen, und wenn man nun nach Band I, §. 436 u. s. w.

$$\frac{(c - c_1)^2}{2g} = \left(1 - \frac{c_1}{c}\right)^2 \frac{c^2}{2g} = \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^2\right]^2 \frac{c^2}{2g} = \zeta_2 \frac{c^2}{2g}$$

setzt, so erhält man folgende Bestimmungsgleichung:

$$2gh = \left[1 + \zeta_2 + \zeta \frac{l}{d} + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right] c^2.$$

Ist das ganze Gefälle gegeben, so erhält man hiernach die Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_2 + \zeta \frac{l}{d} + \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\left(\frac{d}{d_1}\right)^4}},$$

woraus sich dann das Wasserquantum

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c$$

berechnen läßt.

Giebt man das letztere, so hat man hingegen für die erforderliche Röhrenweite:

$$d = \sqrt[5]{\frac{\zeta l + (1 + \zeta_2) d}{2gh\left(\frac{\pi}{4Q}\right)^2 - \left(\zeta_0 + \zeta_1 \frac{l_1}{d_1}\right)\frac{1}{d_1^4}}}.$$

Beispiel. Wenn die Wasserleitung in Fig. 352 aus einer Röhre BC von 200 Fuß Länge und 3 Zoll Weite und aus einer Röhre AB von 300 Fuß Länge und 5 Zoll Weite besteht, und das Totalgefälle derselben 5 Fuß beträgt, so kann man, da sich $\zeta_0 = 0{,}505$ und $\zeta_2 = \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^2\right]^2 = (1 - 0{,}36)^2 = 0{,}410$, sowie vorläufig $\zeta = 0{,}024$ und $\zeta_1 = 0{,}030$ annehmen läßt, die Geschwindigkeit des Wassers in der engeren Röhre:

$$c = \sqrt{\frac{62{,}5 \,.\, 5}{1{,}410 + 0{,}024 \,.\, 800 + (0{,}505 + 0{,}03 \,.\, 300 \,.\, {}^{12}/_5)\,({}^3/_5)^4}}$$

$$= \sqrt{\frac{312{,}5}{23{,}475}} = 3{,}65 \text{ Fuß},$$

und folglich die in der weiteren Röhre

$$c_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 c = 0{,}36 \,.\, c = 1{,}314 \text{ Fuß}$$

setzen.

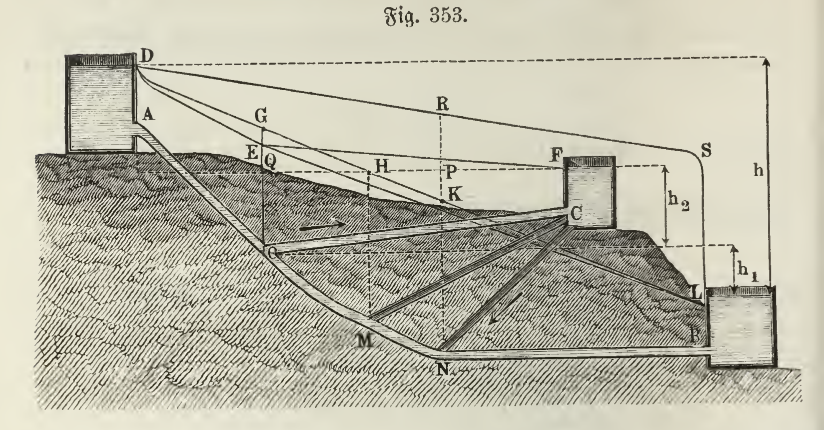
Nimmt man hiernach $\zeta = 0{,}0233$ und $\zeta_1 = 0{,}0291$ an, so folgt genauer die Geschwindigkeit $c = 3{,}70$ Fuß, und das entsprechende Wasserquantum pr. Sec.:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3{,}70}{16} = 0{,}1816 \text{ Cubikfuß}.$$

Drucklinie einer Röhrenleitung. Die durch die Piezometerstände einer Röhrenleitung AMB, Fig. 353 (a. f. S.), gehende Drucklinie $DGHKL$ giebt eine vollständige Uebersicht über den Druck des Wassers an jeder Stelle der Leitung. Z. B. in O wird der Druck §. 168

des Wassers durch den Piezometerstand OG, in M durch den Piezometerstand MH gemessen u. s. w. Bei Röhrenleitungen mit Querschnitts-

Fig. 353.



und Richtungsänderungen ist die Drucklinie gekrümmt; sie zieht sich z. B. an den Stellen, wo die Röhre eng ist, und folglich das Wasser schnell fließt, nach unten, dagegen an den Stellen, wo dieselbe einen größeren Querschnitt hat, folglich das Wasser langsam fließt, nach oben. Wenn die Röhrenleitung AMB, welche zwei Behälter A und B in Verbindung setzt, durch eine zweite Röhre mit einem dritten Behälter C communicirt, so entsteht zunächst die Frage, ob das Wasser aus C nach AB, oder ob es aus AB nach C fließt. Schneidet die Ebene des Wasserspiegels in C die Drucklinie $DGHKL$ in H, so ist jedenfalls die senkrecht unter H liegende Stelle M der Röhre AMB diejenige, wo eine von C nach AB führende Seitenröhre CM in AMB einmünden kann, ohne daß Wasser aus C heraus oder in C hineinströmt. Legt man die Einmündung nach dem Punkt N, dessen Tiefe NP unter dem Wasserspiegel in C größer ist als der Piezometerstand NK, so fließt Wasser aus C nach N und von da weiter nach B; läßt man dagegen die Communicationsröhre im Punkte O einmünden, dessen Tiefe OQ unter dem Wasserspiegel in C kleiner ist als der Piezometerstand OG, so fließt das Wasser aus A nicht allein nach B, sondern zum Theil nach C; es sind also dann beide Behälter B und C Sammelbehälter, wogegen im ersten Falle nur B ein solcher ist.

Bezeichnen wieder, wie in §. 166, l, l_1 und l_2 die Längen; sowie d, d_1 und d_2 die Weiten und h, h_1 und h_2 die Gefälle der Leitungsstücke AO, OB und OC, setzen wir ferner den Piezometerstand im Knotenpunkt $O, = z$, und berücksichtigen wir nur die Reibungswiderstände der Röhren, so hat man einfach

$$h - z = \zeta \frac{l}{d} \frac{c^2}{2g}$$
$$z + h_1 = \zeta \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{c_1^2}{2g}$$
$$z - h_2 = \zeta \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{c_2^2}{2g},$$

oder, wenn man die Wassermengen $Q = \frac{\pi d^2}{4} c$, $Q_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} c_1$ und $Q_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} c_2$ einführt, und zur Vereinfachung $\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\zeta}{2g} = \psi$ setzt,

$$h - z = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \frac{\zeta}{2g} \frac{l Q^2}{d^5} = \frac{\psi l Q^2}{d^5},$$
$$z + h_1 = \frac{\psi l_1 Q_1^2}{d_1^5} \text{ und } z - h_2 = \frac{\psi l_2 Q_2^2}{d_2^5}.$$

Nun ist aber $Q = Q_1 + Q_2$, daher folgt

$$\sqrt{\frac{(h - z) d^5}{l}} = \sqrt{\frac{(z + h_1) d_1^5}{l_1}} + \sqrt{\frac{(z - h_2) d_2^5}{l_2}},$$

oder, wenn die Röhrenleitung überall gleich weit ist,

$$\sqrt{\frac{h - z}{l}} = \sqrt{\frac{z + h_1}{l_1}} + \sqrt{\frac{z - h_2}{l_2}}.$$

Es ist folglich im letzteren Falle der Piezometerstand z im Knotenpunkt O weder von der Röhrenweite d noch vom Wasserquantum Q abhängig.

Wäre das Reservoir C von der Röhrenleitung AB abgesperrt, so würde das Abflußquantum nach C

$$Q_0 = \sqrt{\frac{(h + h_1) d^5}{\psi (l + l_1)}} \text{ betragen, und es wäre}$$
$$Q_0^2 (l + l_1) = Q^2 l + Q_1^2 l_1 = (Q_1 + Q_2)^2 l + Q_1^2 l_1, \text{ daher}$$
$$Q_1^2 + \frac{2 Q_2 l}{l + l_1} Q_1 = Q_0^2 - \frac{Q_2^2 l}{l + l_1}.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt die Wassermenge, welche durch OB in den Behälter B geführt wird.

$$Q_1 = - \frac{Q_2 l}{l + l_1} + \sqrt{Q_0^2 - Q_2^2 \frac{l l_1}{(l + l_1)^2}}, \text{ oder annähernd,}$$

wenn Q_2 nicht groß ist gegen Q_0,

1) $Q_1 = Q_0 - \frac{l}{l + l_1} Q_2$, und

2) $Q = Q_1 + Q_2 = Q_0 + \frac{l_1}{l + l_1} Q_2$.

Durch das Hinzutreten der Röhre OC geht die Drucklinie $DGHKL$ in DEL über und kommt die Drucklinie EF hinzu; jedenfalls ist dann der Piezometerstand in O, $\overline{OE} > \overline{OQ} < \overline{OG}$, sowie die Druckhöhendifferenz von $\overline{AO}$ kleiner als $h - h_2$, dagegen die Druckhöhendifferenz von $\overline{OB}$ größer als $h_1 + h_2$.

Es läßt sich daher auch setzen:

$$Q < \sqrt{\frac{(h - h_2)\,d^5}{\psi\, l}} \text{ und}$$

$$Q_1 > \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\,d^5}{\psi\, l_1}}, \text{ sowie}$$

$$Q_2 = Q - Q_1 < \sqrt{\frac{(h - h_2)\,d^5}{\psi\, l}} - \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\,d^5}{\psi\, l_1}}.$$

Nehmen wir nun vorläufig

$Q_2 = \sqrt{\frac{(h - h_2)\,d^5}{\psi\, l}} - \sqrt{\frac{(h_1 + h_2)\,d^5}{\psi\, l_1}}$ an, so können wir mittels der obigen Formeln 1) und 2) annähernd auch Q und Q_1 berechnen, woraus dann genauer $Q_2 = Q - Q_1$ folgt. Durch wiederholte Anwendung der gedachten Formeln kann man so Q, Q_1 und folglich auch Q_2 immer genauer und genauer bestimmen.

Wenn man bei B durch Stellung eines Hahnes oder anderen Regulators den Druck in der Röhre AMB vergrößert, so daß die Drucklinie in $DRSL$ übergeht, so steigt der Piezometerstand NR im Knotenpunkte N über den Wasserspiegel von C, und es fließt dann durch die Röhre NC ebenfalls Wasser aus A nach C. Um nach Bedürfniß mehr oder weniger Wasser nach B zu leiten, bedarf es daher nur einer größeren oder kleineren Eröffnung des Regulators bei B.

Viertes Capitel.

Von den verticalen Wasserrädern.

§. 169 **Wasserkraft.** Das Wasser wirkt als Motor oder setzt Maschinen in Bewegung, entweder durch sein Gewicht oder durch seine Trägheit (lebendige Kraft). Bei der Wirkung durch sein Gewicht sinkt das Wasser allmälig und langsam in der Maschine von einer gewissen Höhe, dem sogenannten

Gefälle (franz. chute; engl. fall) herab, wogegen es bei der Wirkung durch seine lebendige Kraft mit allmälig abnehmender Geschwindigkeit an Flächen oder in Canälen hinläuft, welche mit den umlaufenden Maschinen ein Ganzes ausmachen.

Ist Q das Wasserquantum (also $Q\gamma$ das Gewicht desselben), welches pr. Secunde zur Wirkung kommt, und h das Gefälle oder die senkrechte Höhe, von welcher dasselbe bei der Wirkung durch sein Gewicht herabsinkt, so verrichtet das Rad die mechanische Arbeit oder Leistung

$$L = Q\gamma . h = Qh\gamma.$$

Ist hingegen c die Geschwindigkeit, mit welcher es der Maschine zufließt, so hat man die Leistung, welche es durch seine lebendige Kraft verrichten kann:

$$L = Q\gamma \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} Q\gamma.$$

Damit das Wasser aus der Ruhe in die Geschwindigkeit c versetzt werde, erfordert es ein Gefälle oder eine Geschwindigkeitshöhe $h = \frac{c^2}{2g}$; und man kann daher auch im zweiten Falle:

$$L = Qh\gamma$$

setzen. Es ist also stets das Arbeitsvermögen des Wassers, sowie das eines starren Körpers, ein Product aus seinem Gewicht und aus der Höhe, von welcher es herabsinkt.

Zuweilen wirkt das Wasser durch sein Gewicht und durch seine lebendige Kraft zugleich, indem es während seiner Wirkung von der Höhe h herabsinkt und seine Geschwindigkeit c zusetzt. Dann ist natürlich auch die mechanische Arbeit desselben:

$$L = Q\gamma . h + Q\gamma \cdot \frac{c^2}{2g} = \left(h + \frac{c^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Die effective Leistung Pv einer hydraulischen Maschine ist allerdings stets kleiner als die eben angegebene disponible mechanische Arbeit $Qh\gamma$, weil noch manche Verluste vorkommen. Erstens kommt oft nicht alles Wasser zur Wirkung, zweitens geht in der Regel ein Theil von dem Gefälle verloren; drittens hält das Wasser, indem es die Maschine verläßt, noch eine gewisse lebendige Kraft zurück, und viertens treten noch andere Nebenhindernisse, wie Reibung u. s. w., hinzu. Es ist hiernach der Wirkungsgrad einer hydraulischen Umtriebsmaschine:

$$\eta = \frac{Pv}{Qh\gamma}$$

zu setzen, und nun die Güte oder Zweckmäßigkeit einer solchen Maschine um so größer, je mehr sich diese Verhältnißzahl der Einheit nähert.

Aus der allgemeinen Formel $L = Qh\gamma$ ist übrigens zu ersehen, daß

Gefälle und Wasserquantum gleichen Antheil an der Leistung einer Maschine haben, daß z. B. das doppelte Gefälle ebenso gut die Leistung verdoppelt als das zweifache Wasserquantum, auch daß von zwei Maschinen einerlei Wirkung zu erwarten ist, wovon die eine dreimal so viel Aufschlagewasser hat als die andere, welche wieder dreimal so viel Gefälle benutzt als diese.

Beispiel. Einer Maschine stehen 12 Cubikfuß Wasser pr. Secunde und 10 Fuß Gefälle zu Gebote, sie benutzt aber von demselben nur 8,5 Fuß, und das Wasser verläßt dieselbe mit 9 Fuß Geschwindigkeit, endlich verliert dieselbe noch 750 Fußpfund durch die Reibung. Man soll den Wirkungsgrad dieser Maschine angeben. Es ist die disponible Leistung

$$L = 12 . 10 . 61{,}75 = 7410 \text{ Fußpfund},$$

ferner die Leistung, welche dem benutzten Gefälle entspricht,

$$= 12 . 8{,}5 . 61{,}75 = 6298{,}5 \text{ Fußpfund},$$

die durch die lebendige Kraft des fortfließenden Wassers verlorene Arbeit

$$= 0{,}016 . 9^2 . 12 . 61{,}75 = 960{,}2 \text{ Fußpfund},$$

die durch die Reibung consumirte Arbeit war aber

$$= 750 \text{ Fußpfund};$$

es ist daher die effective Leistung dieser Maschine:

$$Pv = 6298{,}5 - (960{,}2 + 750) = 6298{,}5 - 1710{,}2 = 4588{,}3 \text{ Fußpfund},$$

und der Wirkungsgrad derselben

$$\eta = \frac{4588{,}3}{7410} = 0{,}619.$$

§. 170 **Wasserräder.** Die hydraulischen Umtriebsmaschinen sind entweder Radmaschinen (Wasserräder) oder Kolbenmaschinen (Wassersäulenmaschinen). Die Wasserräder (franz. roues hydrauliques; engl. water-wheels) sind durch Wasserkraft in Bewegung gesetzte Radwellen (s. Band I, §. 165). Die Wassersäulenmaschinen (franz. machines à colonne d'eau; engl. pressure-engines) bestehen im Wesentlichen in einer Wassersäule (mit Wasser angefüllten Röhre) und in einem Kolben, welcher durch den Druck der Wassersäule gegen seine Grundfläche in Bewegung gesetzt wird.

Man unterscheidet verticale Wasserräder (franz. roues hydrauliques verticales; engl. vertical water-wheels), d. h. solche mit horizontaler Axe, von den horizontalen Wasserrädern (franz. roues hydrauliques horizontales; engl. horizontal water-wheels), oder den Wasserrädern mit verticaler Axe.

Die verticalen Wasserräder, von denen zunächst die Rede ist, sind entweder oberschlägige (franz. roues en dessus; engl. overshot water-wheels), oder mittelschlägige (franz. roues de côté; engl. middleshot water-wheels), oder unterschlägige Wasserräder (franz. roues en dessous; engl. undershot water-wheels). Bei den Rädern der ersteren Art trifft das Wasser die höheren Punkte des Rades, bei denen der zweiten Art fällt es in der Nähe des Radmittels ein, und bei den unterschlägigen

Rädern kommt das Wasser nahe am Fuße bei dem Rade an. Noch unterscheidet man rückenschlägige Wasserräder, bei welchen das Wasser zwischen dem Scheitel und dem Mittel des Rades einfällt, und welche daher zwischen den ober- und mittelschlägigen Rädern innestehen. Bei den oberschlägigen Wasserrädern wirkt das Wasser vorzüglich durch sein Gewicht, bei den unterschlägigen Rädern aber in der Regel durch seine, der Trägheit entsprechende lebendige Kraft, und bei den mittelschlägigen Rädern wirkt es meist durch Gewicht und Trägheit zugleich. Die unterschlägigen Wasserräder hängen entweder frei im unbegrenzten Wasser, oder sie sind von Gerinnen eingeschlossen. Zu den im unbegrenzten Wasser hängenden Rädern gehören die Schiffmühlenräder (franz. roues pendantes; engl. ship-mills wheels). Die übrigen unterschlägigen Wasserräder hängen entweder im geraden Gerinne (franz. coursier rectiligne; engl. strait channel) oder in einem (kreisförmigen) Kropfgerinne (franz. coursier circulaire; engl. circular channel breast-trough).

Uebrigens giebt es auch mittelschlägige Räder im Kropfgerinne, und diese heißen dann gewöhnlich Kropfräder (franz. roues de côté; engl. breast wheels).

Endlich sind noch von den übrigen Wasserrädern die Ponceleträder zu unterscheiden, bei welchen das Wasser nur durch seine lebendige Kraft wirkt, indem es an krummen Flächen auf- und hinabsteigt.

Zellenräder. Ein gewöhnliches verticales Wasserrad besteht aus einer §. 171
hölzernen oder eisernen Welle mit zwei Zapfen, ferner aus zwei (seltener ein, drei oder mehreren) ringförmigen Kränzen, und aus mehr oder weniger radiallaufenden Armen, welche die Kränze mit der Welle verbinden, ferner aus den Schaufeln zwischen den Kränzen und endlich, nach Befinden noch, aus einem Boden, der sich an die inneren Kranzumfänge cylindrisch anschließt. Die Schaufeln theilen den von den Kränzen und dem Boden gebildeten ringförmigen Raum in Abtheilungen, und wenn die Schaufeln mehr tangential als radial gestellt sind, so bilden diese Abtheilungen wasserhaltende Tröge oder sogenannte Zellen. Hiernach hat man auch in Hinsicht auf Construction zweierlei Wasserräder, nämlich Schaufelräder (franz. roues à aubes; engl. wheels with floats) mit mehr radial gestellten Schaufeln, und Zellenräder (franz. roues à augets; engl. wheels with buckets) mit trogförmigen Zellen. Die letzteren kommen in allen den Fällen vor, wenn das Wasser durch sein Gewicht wirkt, also bei den ober-, rücken-, und nach Befinden, mittelschlägigen Wasserrädern.

Zunächst ist die Rede von den oberschlägigen Wasserrädern. Das Wasser wird dem Rade durch ein Gerinne zugeführt, und sein Ausfluß durch eine Schütze am Ende des letzteren regulirt; es fällt hier in der Nähe des Radscheitels, nämlich in der ersten, zweiten oder dritten Zelle, vom Scheitel ausgegangen,

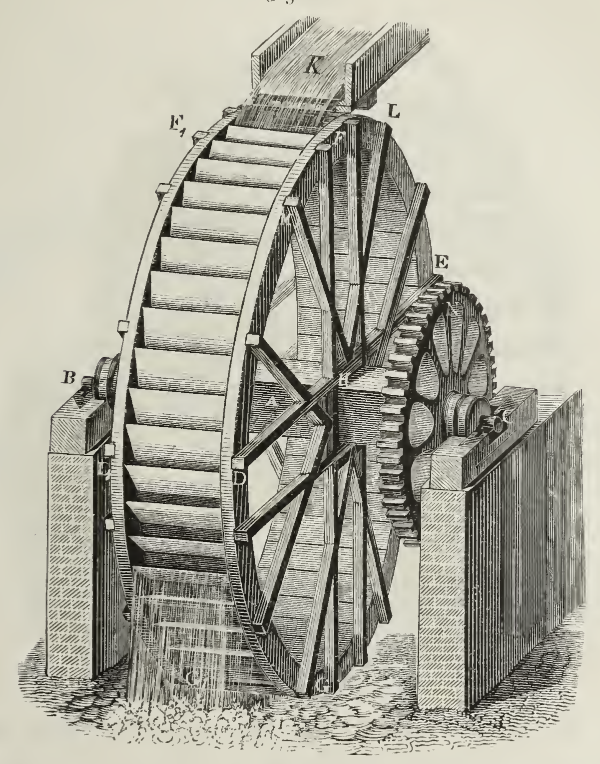
ein. Ist nun das Rad einmal in Umdrehung gesetzt, so füllen sich alle unter der Schützenmündung vorbeigehende Zellen zum Theil mit Wasser, welches erst in der Nähe des Radfußes wieder aus den Zellen heraustritt, so daß immer auf der einen Seite des Rades eine gewisse Anzahl von Zellen mit Wasser gefüllt ist, das nun durch sein Gewicht die stete Umdrehung des Rades im Kreise unterhält. Die oberschlägigen Räder kommen bei 8 bis 50 Fuß Gefälle und 3 bis 25 Cubikfuß Aufschlagewasser pr. Secunde vor. Dem kleinsten Gefälle und kleinsten Wasserquantum entspricht die kleinste Leistung von 3 bis 5 Pferdekräften, dem größten Gefälle und größten Aufschlage aber die größte Leistung von 130 Pferdekräften; im letzteren Falle ist es jedoch zweckmäßiger, zwei Räder anzuwenden, weil Wasserräder über 80 Pferdekraft zu schwerfällig ausfallen.

Das Gefälle eines Wasserrades ist vom Wasserspiegel im Aufschlaggerinne, oder vor der Schütze, bis zur Oberfläche des Unterwassers zu nehmen, dessen Höhe von dem Wasserquantum, der Breite und dem Gefälle des Abzugsgrabens abhängt. Um an Wirkung so wenig wie möglich zu verlieren, soll das Radtiefste unmittelbar über dem Unterwasserspiegel stehen, weshalb denn auch das Gefälle von der Oberfläche des Oberwassers bis zum Radtiefsten gemessen wird. Nur dann, wenn der Rückstau und das Waten des Rades zu befürchten ist, hängt man das Rad etwas höher, so daß sein Tiefstes noch $1/2$ bis 1 Fuß von dem Unterwasser absteht oder, wie man sagt, freihängt.

§. 172 **Radconstructionen.** Man baut die Wasserräder aus Holz, oder aus Eisen, oder theils aus Holz, theils aus Eisen. Die Art und Weise, wie die Radarme mit der Welle verbunden sind, ist sehr verschieden. Bei den ganz hölzernen Rädern hat man gewöhnlich sogenannte Armgeviere, welche die zu diesem Zwecke vierkantig gearbeitete Welle umfassen; seltener sind die Arme durch die zu diesem Zwecke durchlochte Welle hindurchgesteckt. Die erste Art von Rädern nennt man Sattelräder, die zweite Art Sternräder. Letztere Construction kommt nur bei leichten oder schwachen Rädern vor. Bei hohen Rädern reichen die Armgeviere nicht aus, es müssen daher noch andere Arme, sogenannte Helfarme, zwischen die die Armgeviere bildenden Arme, oder sogenannte Hauptarme, eingesetzt werden. Die letztere Construction kommt bei dem in Fig. 354 abgebildeten Rade vor. Man baut beim sächsischen Bergbau solche Räder zum Umtriebe der Pochwerke, Kunstgezeuge u. s. w. von 20 bis 50 Fuß Höhe. In dieser Zeichnung ist A die Welle, B und C sind deren Zapfen, DE, FG u. s. w. die Hauptarme, HM, HL u. s. w. aber die Helfarme, welche bei H in den sogenannten Viertelstöcken eingesetzt sind. Ferner sind DFG und $D_1 F_1 G_1$ die Radkränze, und K ist das Aufschlaggerinne. Die Kränze sind aus zwei Holzringen

zusammengesetzt, die aus 8 bis 16 einzelnen, 3 bis 5 Zoll dicken bogenförmig gearbeiteten Pfostenstücken, den sogenannten Felgen, bestehen. Die

Fig. 354.



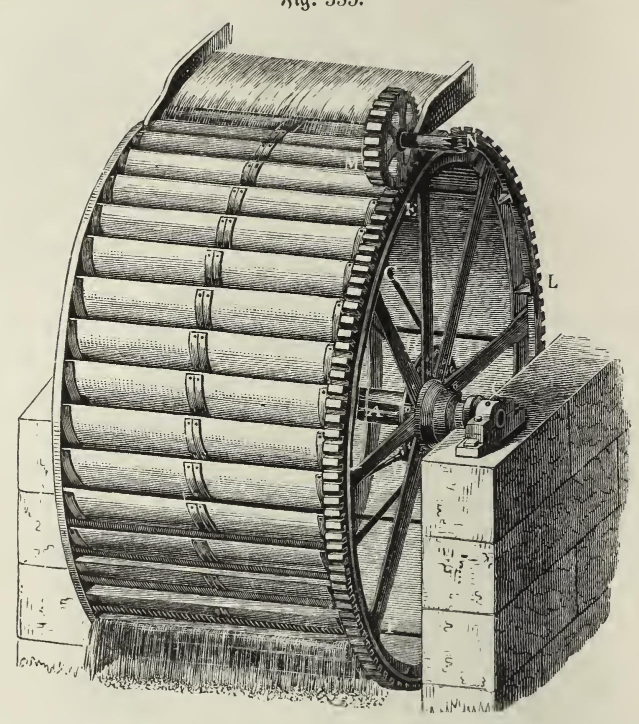
Arme sind unter sich und mit den Kränzen durch Schrauben verbunden. Zur festen Verbindung der Kränze mit einander dienen die Hängenägel oder lange Schraubenbolzen, welche durch beide Kränze und durch je zwei Radarme zugleich hindurchgehen. Um die Schaufeln einsetzen zu können, sind in die Innenflächen der Kränze sogenannte Larven eingeschnitten. Das Zahnrad *N* dient zur Transmission der Bewegung.

In Fig. 355 (a. f. S.) ist ein eisernes Rad neuerer Construction abgebildet. Hier sind die Radarme *BE*, *DF*... durch Schrauben mit Scheiben oder Rosetten, wie *BD*, fest verbunden, welche auf der Welle *AC* aufsitzen. Diese Räder werden in der Regel sehr weit gemacht, und erhalten deshalb außer den beiden Seitenkränzen noch einen dritten, mitten zwischen jenen. Dieser dritte Kranz ist nun noch durch Diagonalarme, wie *BG* u. s. w., gestützt. Zur Befestigung des Ganzen sind noch Ankerstangen durch je zwei Haupt-

26*

arme hindurchgezogen. Mit einem der äußeren Kränze ist das Zahnrad *ELF* verbunden, das in ein anderes Zahnrad *M* eingreift und dadurch

Fig. 355.



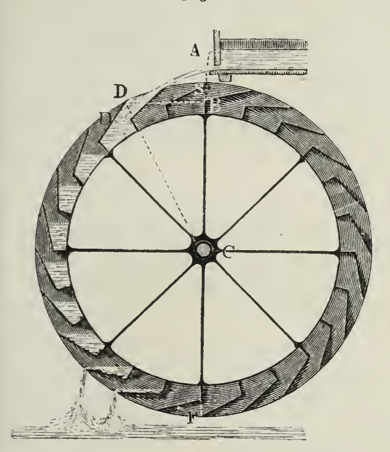
eine Welle *MN* in Umdrehung setzt. Die Schaufeln bestehen hier aus Eisenblech, und werden mittels Schrauben auf Rippen befestigt, die an den inneren Seiten der Radkränze angegossen sind.

§. 173 **Radhalbmesser.** Das erste Hauptelement eines Wasserrades ist die Umfangsgeschwindigkeit v, oder Umdrehungszahl u desselben. Aus einem oder dem anderen dieser beiden Elemente läßt sich zunächst der Radhalbmesser bestimmen. Wir werden weiter unten sehen, daß wir oberschlägigen Wasserrädern eine kleine Umfangsgeschwindigkeit geben müssen. Bei hohen Rädern steigt dieselbe bis auf 10 Fuß, Räder von mittlerer Höhe haben nur 5 Fuß Geschwindigkeit und selbst bei den niedrigsten Rädern läßt man diese Geschwindigkeit nicht unter $2^1/_2$ Fuß herabgehen. Die Geschwindigkeit c des eintretenden Wassers hängt von der Radgeschwindigkeit v ab, und ist in einem bestimmten Verhältnisse größer als diese. Zur Erzeugung der Geschwindigkeit c ist ein Gefälle nöthig, wie in Fig. 356,

$\overline{AB} = h_1 = \frac{c^2}{2g}$, welches vom Totalgefälle $AF = h$ nur noch das eigentliche Radgefälle

$$\overline{BF} = h_2 = h - h_1 = h - \frac{c^2}{2g}$$

Fig. 356.



übrig läßt. Da selbst bei dem vollkommensten Ausfluß noch 5 Procent an lebendiger Kraft verloren gehen (s. Band I, §. 405), so möchte es rathsam sein, denselben hier zu 10 Procent anzunehmen, und daher das effective Gefälle für den Eintritt,

$$h_1 = 1{,}1 \,.\, \frac{c^2}{2g},$$

also

$$h_2 = h - 1{,}1 \,.\, \frac{c^2}{2g}$$

zu setzen. Aus dem Radgefälle h_2 ergiebt sich nun noch die Radhöhe oder der Radhalbmesser $\overline{CF} = \overline{CS} = a$, indem wir den Winkel $SCD = \theta$, um welchen die Eintrittsstelle D vom Radscheitel S abweicht, als gegeben ansehen können. Es ist nämlich:

$$h_2 = \overline{CF} + \overline{CB} = a + a\cos.\theta = (1 + \cos.\theta)\, a,$$

daher umgekehrt, der Radhalbmesser:

$$a = \frac{h - h_1}{1 + \cos.\theta}.$$

Aus dem Radhalbmesser a und der Umfangsgeschwindigkeit v ergiebt sich die Anzahl der Umdrehungen des Rades pr. Minute:

$$u = \frac{30\,v}{\pi\,a}.$$

In der Regel giebt man die Umdrehungszahl u und hat hieraus a und v zu berechnen. Setzen wir hiernach

$$v = \frac{\pi u a}{30} \text{ und } c = \varkappa \cdot \frac{\pi u a}{30},$$

wo $\varkappa$ ein gegebenes Verhältniß, der sogenannte Geschwindigkeitscoefficient $\frac{c}{v}$ ist, so erhalten wir:

$$(1 + \cos.\theta)\, a = h - \frac{1{,}1}{2g} \cdot \left(\frac{\varkappa \,.\, \pi u a}{30}\right)^2,$$

und hieraus, wenn man $g = 31{,}25$ und $\pi = 3{,}1416$ einführt,

$$a = \frac{h - 0{,}000193\ (\varkappa u a)^2}{1 + cos.\ \theta}.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt den **Radhalbmesser:**

$$1)\quad a = \frac{\sqrt{0{,}000772\ (\varkappa u)^2\ h + (1 + cos.\ \theta)^2} - (1 + cos.\ \theta)}{0{,}000386\ (\varkappa u)^2},$$

oder annähernd:

$$a = \frac{h\ [1 - 0{,}000048\ (\varkappa u)^2\ h]}{1 + cos.\ \theta}\ \text{Fuß}.$$

Hiernach folgt dann die **Umfangsgeschwindigkeit** des Rades:

$$2)\quad v = \frac{\pi u a}{30} = 0{,}1047\,.\,u a.$$

Beispiele. 1. Für ein Gefälle von 30 Fuß ist ein Rad zu construiren, welches 8 Fuß Umfangsgeschwindigkeit hat, und das noch einmal so schnell eintretende Wasser 12 Grad unter dem Scheitel aufnimmt, wie groß ist der erforderliche Radhalbmesser und die Umdrehungszahl? Es ist:

$$c = 2\,.\,8 = 16\ \text{Fuß},$$

daher:

$$h_1 = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,16^2 = 4{,}5\ \text{Fuß},$$

und

$$a = \frac{30 - 4{,}5}{1 + cos.\,12^0} = \frac{25{,}5}{1{,}978} = 12{,}9\ \text{Fuß},$$

endlich:

$$u = \frac{30\,.\,8}{\pi\,.\,12{,}9} = 5{,}92.$$

2. Ist die Umdrehungszahl $u = 5$ gegeben, so folgt bei dem nämlichen Gefälle und dem gegebenen Verhältnisse $\varkappa = 2$, der Radhalbmesser

$$a = \frac{\sqrt{2{,}316 + 3{,}9125} - 1{,}978}{0{,}0386} = \frac{0{,}5177}{0{,}0386} = 13{,}41\ \text{Fuß};$$

ferner die Umfangsgeschwindigkeit:

$$v = 0{,}1047\,.\,5\,.\,13{,}41 = 7{,}02\ \text{Fuß},$$

die Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = 14{,}04\ \text{Fuß},$$

und endlich das Gefälle zur Erzeugung der letzteren Geschwindigkeit:

$$h_1 = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,14{,}04^2 = 3{,}47\ \text{Fuß}.$$

§. 174 **Kranzbreite und Radweite.** Wichtige Radverhältnisse sind ferner noch die **Kranzbreite** und die **Radweite**. Die **Kranzbreite** (Radtiefe) oberschlägiger Wasserräder macht man gewöhnlich 10 bis 12 Zoll, selten 14 bis 15 Zoll, und zwar nur deshalb, weil das Wasser bei einem Rade mit schmalem Kranze an einem größeren Hebelarme wirkt, als bei einem gleich hohen Rade mit breitem Kranze. Was dagegen die Radweite oder Radbreite anlangt, so hängt diese von dem dem Rade zu gebenden Fassungsraume ab. Ist d die Kranzbreite oder Radtiefe und e die Radweite, so hat

man für den Querschnitt des vom Boden und von den Radkränzen gebildeten ringförmigen Fassungsraumes, $= de$; und ist noch v_1 die Radgeschwindigkeit im Mittel der Kranzbreite, so hat man den in der Secunde dem eintretenden Wasser dargebotenen Fassungsraum, $= de . v_1$. Dieser Raum kann jedoch dem Aufschlagquantum Q pr. Secunde nicht gleich sein, weil der Fassungsraum einer Radzelle nicht so groß ist als der ganze zwischen je zwei Schaufeln befindliche Raum, und es auch wegen des zu zeitigen Ausfließens nicht zweckmäßig ist, die Zellen ganz mit Wasser anzufüllen; es ist daher $\varepsilon d e v_1 = Q$, und $\varepsilon < 1$ zu setzen. In der Regel nimmt man diesen Coefficienten, den man auch den Füllungscoefficienten nennt, $\varepsilon = 1/4$ bis $1/3$ an. Jedenfalls bestimmt sich nun die gesuchte Radweite durch die Formel

$$e = \frac{Q}{\varepsilon d v_1},$$

oder, wenn man annähernd

$$v_1 = v = \frac{\pi a u}{30}$$

einführt,

$$e = \frac{30\, Q}{\varepsilon \pi u a d} = 9{,}55\, \frac{Q}{\varepsilon u a d},$$

oder für ε den mittleren Werth $1/4$ angenommen,

$$e = 38{,}2\, \frac{Q}{u a d}.$$

Damit sehr hohe Räder nicht zu schmal ausfallen, nimmt man für sie ε wohl gar $1/5$.

Schaufelzahl. Die Schaufelzahl n ist ein weiteres wichtiges Rad- §. 175
element. Es ist leicht einzusehen, daß eine kleinere Wassermenge in einer Radzelle länger beharrt als ein größeres Wasserquantum, und da nun dieses letztere unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen um so kleiner ausfällt, je größer die Anzahl der Schaufeln des Rades ist, so folgt, daß im Allgemeinen eine große Schaufelzahl auf eine größere Ausnutzung der Wasserkraft führt, und daher eine größere Leistung des Wasserrades verspricht als eine kleine Schaufelzahl. Jedoch hat diese Zahl auch ihre Grenzen, und zwar nicht allein deshalb, weil die Schaufeln in Folge ihrer Dicke einen gewissen Theil vom Fassungsraum des Rades in Anspruch nehmen, wonach man also Rädern mit dünneren eisernen Schaufeln eine größere Schaufelzahl geben müßte, als Rädern mit dickeren Holzschaufeln, sondern auch deshalb, weil es zwecklos und nachtheilig ist, die Schaufeln so nahe an einander zu rücken, daß die eine Zelle in den Fassungsraum der anderen tritt, welche daher nicht soviel Wasser zu fassen vermag, als wenn diese Schaufeln mehr von einander abstehen. Einen wesent-

lichen Einfluß auf die Anzahl der Schaufeln eines Rades hat auch noch die Gestalt der Schaufeln, sowie die Art und Weise der Einführung des Wassers in das Rad, da dem Wasserstrahl zum Eintritt in das Rad ein hinreichender Querschnitt dargeboten werden muß.

Hat man den Abstand zwischen je zwei Schaufeln festgesetzt, so ist die Anzahl n der Schaufeln dem Radumfang oder Halbmesser a proportional wachsend anzunehmen, und zwar im Mittel bei der gewöhnlichen Radtiefe von 10 bis 12 Zoll, $n = 5\,a$ bis $6\,a$ zu setzen, wenn a in Fußen ausgedrückt wird.

Räder von größerer Radtiefe erhalten eine kleinere Schaufelzahl als solche von kleinerer Tiefe.

Aus der Schaufelzahl n folgt der sogenannte Theilwinkel, d. i. der Winkel zwischen zwei benachbarten Schaufeln:

$$\varphi = \frac{360^0}{n}.$$

Beispiel. Wenn ein oberschlägiges Wasserrad bei 15 Fuß Halbmesser, 1 Fuß Kranzbreite und 10 Cubikfuß Aufschlag pr. Secunde, fünf Umdrehungen pr. Minute machen soll, so hat man ihm die Weite

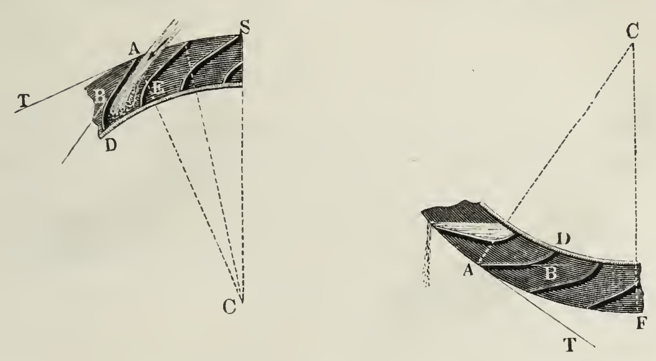
$$e = 38{,}2 \cdot \frac{10}{5\,.\,15\,.\,1} = 5{,}1 \text{ Fuß}$$

zu geben; und es ist die Schaufelzahl $n = 5\,a = 5\,.\,15 = 75$, oder, wegen der leichteren Vertheilung, $n = 72$, in Anwendung zu bringen, endlich ist der Theilungswinkel $\varphi = {}^{360}/_{72} = 5^0$ zu machen.

§. 176 **Schaufelungsmethoden.** Von großem Einflusse auf die Wirkung eines Wasserrades sind die sogenannten Schaufelungsmethoden oder die Formen der durch den Boden und durch die Schaufeln des Rades gebildeten Radzellen (franz. augets; engl. buckets). Die Schaufeln müssen so geformt und so gestellt sein, daß sie das Ausschlagewasser (franz. eau motrice; engl. moving water) nicht allein ungehindert in die Radzelle eintreten lassen, sondern auch darin soviel wie möglich zum tiefen Punkte des Rades zurückhalten. Viele von den verschiedenen Schaufelungsmethoden entsprechen diesen Forderungen nur sehr unvollkommen. Bei gleicher Schaufelzahl, gleicher Wassermenge u. s. w. hängt jedenfalls der Ein- und Austritt des Wassers von der Lage des äußeren Schaufelendes AB, Fig. 357, ab. Dasselbe schließt mit dem äußeren Radumfange einen gewissen Winkel $BAT = \beta$ ein, welchen wir in der Folge den Eintrittswinkel des Wassers nennen wollen. Dieser Winkel ergänzt den Winkel BAC, welchen das Schaufelende mit dem Radhalbmesser CA einschließt und gewöhnlich der Dockungs- oder Deckungswinkel genannt wird, zu einem Rechten (90^0). Das äußere Schaufelend AB bildet die äußere Seitenwand einer Zelle, deren veränderlicher Fassungsraum daher auch von der Lage und Ausdehnung dieses Begrenzungselementes abhängt. Wenn beim Niedergehen der Zelle das Schaufelende in eine horizontale Lage AB, Fig. 358, gelangt, so ver-

liert es die Eigenschaft einer Seitenwand vollständig und es fällt der Fassungsraum der Zelle Null aus. In diesem Augenblicke steht das Schaufelende

Fig. 357. Fig. 358.



noch um den Winkel $ACF = BAT = \beta$ von dem Radtiefsten F ab; damit folglich das Wasser so lange wie möglich in der niedergehenden Zelle zurückgehalten werde, ist dieser Winkel so klein wie möglich zu machen. Da nun aber zur Einführung des Wassers in das Rad ein gewisser Zellenquerschnitt AE, Fig. 357, nothwendig ist, welcher von der Größe des Eintrittswinkels abhängt und mit demselben gleichzeitig Null ausfällt, so ist zur Erzielung einer vortheilhaften Leistung des Wasserrades erforderlich, daß der Eintrittswinkel des Wassers zwar klein sei, jedoch unter eine gewisse und noch zu bestimmende Grenze nicht herabkomme.

Außerdem hängt der Fassungsraum einer Radzelle auch noch von der Form und Ausdehnung der Schaufeln ab, und es ist leicht zu ermessen, daß derselbe um so größer ausfällt, je breiter die Schaufeln sind und je mehr dieselben im Mittel vom inneren Radumfange oder von dem als innere Seitenwand der Zellen dienenden Radboden abstehen. Wenn es nun auch zum längeren Zurückhalten des Wassers in den Zellen erforderlich ist, den Fassungsraum der letzteren so viel wie möglich zu vergrößern, so ist doch auch hierin die Grenze nicht zu überschreiten, wobei entweder die Fassungsräume der benachbarten Zellen in einander eindringen oder die Zellen Dimensionen annehmen, welche dem Ein- und rechtzeitigen Austritt des Wassers hinderlich sind. Aus diesem Grunde sind auch die einfachen ebenen Schaufeln, wie AB, Fig. 359 (a. f. S.), entweder gar nicht anwendbar oder wenigstens ganz unzweckmäßig, und man ersetzt dieselben durch zusammengesetzte oder krumme Schaufeln, welche sich zwar an den äußeren Radumfang unter dem gegebenen Eintrittswinkel β anschließen, dagegen aber auf dem inneren Radumfang oder Radboden ganz oder nahe rechtwinkelig stehen.

Die hölzernen Schaufeln läßt man gewöhnlich aus zwei Theilen AB und

BD, Fig. 360, bestehen, welche natürlich unter einem stumpfen Winkel aneinander stoßen. Der äußere Theil der Schaufel heißt die Stoß- oder

Fig. 359.

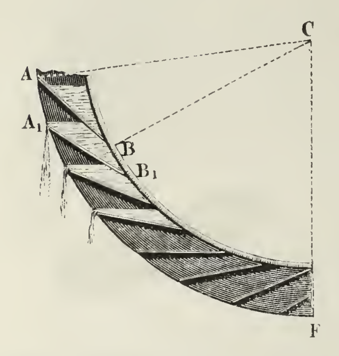
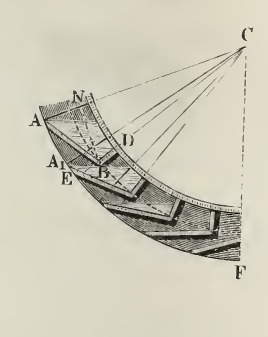


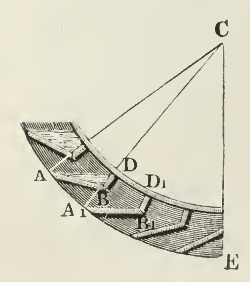
Fig. 360.



Setzschaufel, und der innere die Riegel- oder Kropfschaufel; die erstere trifft den äußeren Radumfang unter dem Eintrittswinkel β und die letztere wird radial, zuweilen auch, jedoch mit Nachtheil, rechtwinkelig gegen die erstere gelegt. Man nennt den Kreis, welcher durch die Punkte bestimmt ist, worin diese Schaufeln zusammenstoßen, den Theilkreis des Wasserrades, weil auf ihm die Eintheilung des Rades in Zellen vorgenommen wird. Diesen Kreis legt man bei einem kleineren Eintrittswinkel ins Mittel, wie Fig. 360, und bei einem größeren Eintrittswinkel ins Drittel der Kranzbreite, wie Fig. 361, so daß er im ersteren Falle von beiden Radumfängen gleich und im zweiten vom äußeren Radumfange noch ein Mal so viel absteht als vom inneren.

Eine gewöhnliche und sehr einfache Schaufelconstruction besteht darin, daß man die Stoßschaufel AB, Fig. 361, von den Schenkeln CA und CB des Theilwinkels $ACB = \varphi$ einschließen und folglich in einem und demselben Radius CD eine Stoßschaufel $A_1 B_1$ anfangen und eine andere Stoßschaufel AB auslaufen läßt. Um einen kleineren Eintrittswinkel zu erhalten, macht man auch den Winkel $ACB = \psi$, Fig. 360, welcher eine Stoßschaufel zwischen seine Schenkel faßt, noch größer als den Theilwinkel ACA_1, z. B. Fünfviertel dieses Winkels.

Fig. 361.



Ist a der äußere Halbmesser CA, und a_1 der Halbmesser CB des Theilkreises, so hat man für den dem Schaufelwinkel ψ entsprechenden Eintrittswinkel $EAB = ABN = \beta$

$$tang.\beta = \frac{AN}{BN} = \frac{a - a_1 \cos.\psi}{a_1 \sin.\psi},$$

in welchem Ausdrucke φ statt ψ einzusetzen ist, wenn die gewöhnliche einfache Schaufelconstruction angewendet wird. Bezeichnet nun d die Kranzbreite $\overline{DE}$, so hat man, jenachdem man den Theilkreis ins Mittel oder ins Drittel legt,

$$a_1 = a - \frac{1}{2} d \text{ oder } a_1 = a - \frac{2}{3} d$$

in die letzte Formel einzusetzen.

Die Stoß- und Riegelschaufeln aus Gußeisen oder Eisenblech gehen in einem Bogen allmälig in einander über und bestehen nur aus einem Stücke (Fig. 358). Da bei diesen eisernen Schaufeln die Verengung der Zelle durch die Ecke zwischen den beiden Schaufeln wegfällt, so gewähren diese Schaufeln eine bessere Einführung des Wassers als die zweitheiligen Holzschaufeln. Um auch den aus Holzschaufeln gebildeten Radzellen eine größere Weite zu verschaffen, kann man die Kante zwischen der Stoß- und Riegelschaufel abstumpfen und statt derselben ein drittes Schaufelstück BD, Figur 362, einsetzen.

Fig. 362.



Noch kann man den Fassungsraum einer Zelle dadurch vergrößern, ohne die Zelle, zum Nachtheil der Einführung des Wassers in dieselbe, zu verengen, daß man die Riegelschaufel BD, Fig. 363, nicht rechtwinkelig gegen den Radboden, sondern so stellt, daß sie innerlich mit demselben einen spitzen Winkel BDE, z. B. einen solchen von 45 Grad einschließt. Um diesen schrägen Anschluß bei eisernen Schaufeln zu erhalten, kann man diese Schaufeln ganz oder zum Theil nach einem Kreisbogen krümmen, welcher unter einem spitzen Winkel von circa 45 Grad an den Radboden anstößt. Den Mittelpunkt M eines solchen Kreisbogens AD, Fig. 364, hat man in einer Linie

Fig. 363.

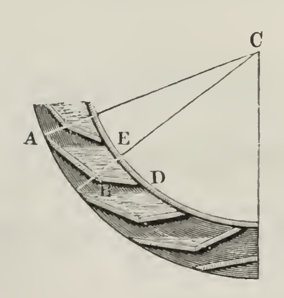
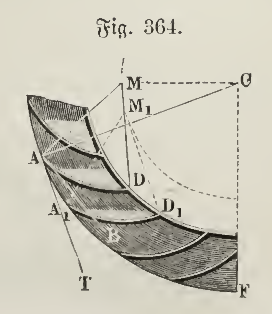


Fig. 364.



AM anzunehmen, welche mit dem Radhalbmesser CA den Eintrittswinkel

$$CAM = BAT = \beta$$

einschließt. Die Mittelpunkte M_1, M_2... der übrigen Schaufeln $A_1 D_1$, $A_2 D_2$... liegen in einem mit CM aus C beschriebenen Kreise.

Beispiel. Bei einem Rade von $2a = 30$ Fuß Höhe und $d = 10$ Zoll Kranzbreite, welches nach der in §. 175 vorläufig angegebenen Regel

$$5a = 5.15 = 75,$$

oder, der leichten Vertheilung wegen, 72 Radschaufeln erhalten soll, ist der Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{360^0}{n} = {}^{360}/_{75} = {}^{24}/_5 = 4^4/_5 \text{ Grad};$$

macht man die Schaufelwinkel $\psi = {}^5/_4\, \varphi$ und legt den Theilungskreis in die Kranzmitte, so hat man:

$$\psi = {}^{24}/_5 \cdot {}^5/_4 = 6^0;$$

ferner den Theilkreishalbmesser

$$a_1 = a - \frac{d}{2} = 15 - {}^5/_{12} = 14{,}5833 \text{ Fuß}$$

und für den Eintrittswinkel β:

$$tang.\,\beta = \frac{a - a_1 \cos.\psi}{a_1 \sin.\psi} = \frac{15 - 14{,}5833 \cos.6^0}{14{,}5833 \sin.6^0} = \frac{0{,}496}{1{,}527} = 0{,}325;$$

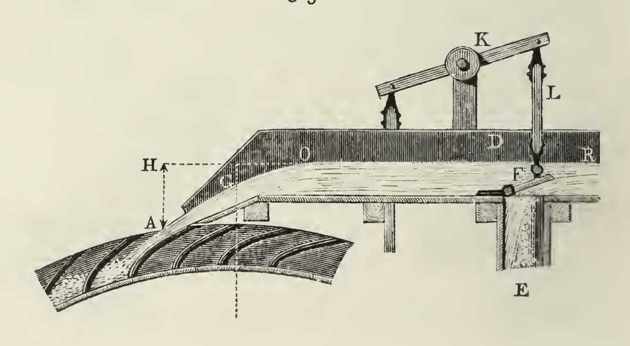
hiernach ist dieser Winkel selbst: $\beta = 18^0\,1'$

und der Deckungswinkel $90 - \beta = 71^0\,59'$,

wofür man 72 Grad annehmen kann.

§. 177 **Schützen.** Von nicht unbedeutender Wichtigkeit ist die Art und Weise, wie das Wasser auf ein Rad geführt wird. Man läßt entweder das Wasser aus dem Gerinne frei einfallen in das Rad, oder man spannt dasselbe durch eine sogenannte Spannschütze an, ehe es in das Rad tritt. Im ersten Falle hängt die Einfallsgeschwindigkeit fast nur von der Fallhöhe ab, im zweiten hingegen kann diese durch die Druckhöhe regulirt werden. Aus dem letzteren Grunde zieht man daher auch die Anwendung eines Schutzbretes dem freien Eintritte oder der Einführung durch ein sogenanntes Schußgerinne vor. In Fig. 365 ist ein Wassereinlauf ohne Schütze abgebildet.

Fig. 365.



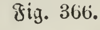
Das durch das Gerinne DO zugeführte Wasser wird durch ein Schußgerinne G in bestimmter Richtung auf das Rad geführt. Um wenigstens den Zufluß zu reguliren, ist vor dem Rade ein Abfallutten E angebracht, durch den das überflüssige Wasser abfließt und über welchem eine Fallklappe F liegt, welche sich mittels Hebel K, Stange L u. s. w. beliebig eröffnen und verschließen läßt. Fließt das Wasser im Gerinne mit der Geschwindigkeit c_0 zu und ist die Fallhöhe $\overline{AH}$, vom Wasserspiegel OR bis Eintrittspunkt A gerechnet, $= h_1$, so hat man die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers beinahe

$$c = \sqrt{2gh_1 + c_0^2} = \sqrt{2gh_1 + \left(\frac{Q}{G}\right)^2},$$

wenn Q das Wasserquantum und G den Inhalt des Querschnittes vom zufließenden Wasser bezeichnen.

Die Spannschützen (franz. vannes; engl. sluices, hatches, penstocks, shuttles) sind entweder horizontal, oder vertical, oder geneigt. Die Anordnung und Stellvorrichtung eines horizontalen Schutzbretes BC ist aus Fig. 366, und die eines verticalen Schutzbretes aus Fig. 367 ersichtlich. Dort wird das Bret durch Zugstange DE und Hebel KD u. s. w., und durch Zahnstange Z und Getriebe R in Bewegung gesetzt.

Die Construction von einer schiefstehenden Spannschütze ist in Fig. 368 abgebildet. Bei dieser in Freiberg angewendeten Spannschütze


Fig. 366.

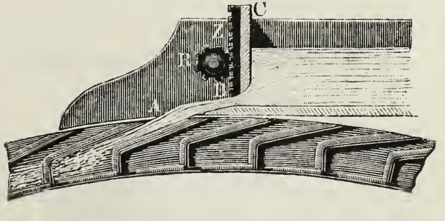


Fig. 367.

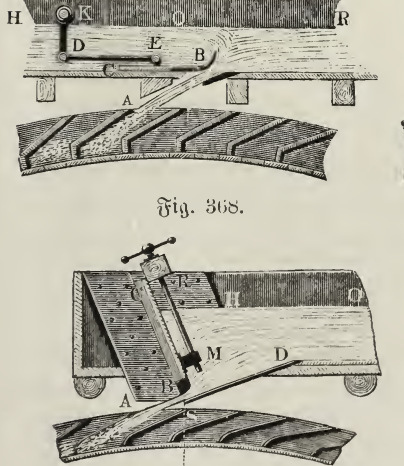


Fig. 368.

erfolgt die Stellung durch eine Schraube RM, welche oben durch eine über dem Gerinne wegliegende Schwelle R und unten durch eine an dem Schutzbrete BC vorstehende Nase M hindurchgeht.

Es ist bei allen Constructionen dieser Art, Regel, die Mündung im Inneren so viel und so glatt wie möglich abzurunden oder nach der Gestalt des contrahirten Wasserstrahles zu formen, damit die äußere Con-

traction des Wasserstrahles vermieden und dem Wasser so wenig wie möglich Hindernisse in den Weg gelegt werden. Fällt das Wasser, nachdem es aus der Mündung herausgetreten ist, ganz frei, und kann man die Mündungsebene winkelrecht gegen die Richtung des Strahles legen, so ist es auch zweckmäßig, die Mündung einer dünnen Wand anzuwenden; nur muß dann auch dafür gesorgt werden, daß nicht partielle, einen schiefen Strahl gebende Contraction eintrete (s. Bd. I, §. 414).

Bei dem Ausflusse durch Spannschützen bestimmt sich aus der Druckhöhe $= h_0$ die Ausflußgeschwindigkeit

$$c_0 = \mu \sqrt{2 g h_0};$$

ist nun noch z die freie Fallhöhe von Schutzmündung bis Eintrittspunkt gerechnet, so hat man die Einfallsgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{c_0^2 + 2 g z} = \sqrt{2 g (\mu^2 h_0 + z)}.$$

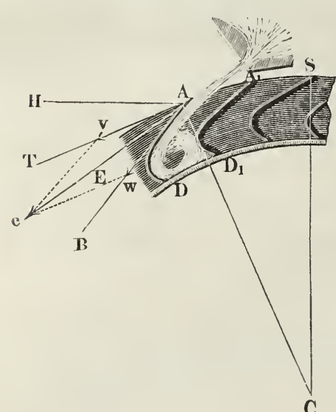
Nehmen wir den Ausflußcoefficienten $\mu = 0,95$ an, so bekommen wir demnach:

$$c = \sqrt{2 g (0,9 h_0 + z)}.$$

Man ersieht hieraus, daß bei gleichem Einlaßgefälle die Einfallsgeschwindigkeit ziemlich dieselbe ist, das Wasser mag frei einfallen oder aus einer Schutzöffnung in das Rad gelangen.

§. 178 **Eintritt des Wassers.** Damit das Wasser ungehindert in die Radzellen eintrete, darf es nicht am äußeren Radumfange mit den Schaufeln zusammenstoßen, sondern es muß der Zusammenstoß erst nahe am inneren Umfange erfolgen. Aus diesem Grunde ist nicht nur die äußere Schaufelkante A möglichst zuzuschärfen, sondern auch noch der Wasserstrahl $\overline{Ac}$, Fig. 369, so zu richten, daß sich seine Geschwindigkeit in zwei Componenten zerlegen läßt, wovon der eine mit der Umfangsgeschwindigkeit $\overline{Av} = v$ zusammenfällt und der andere die Richtung AB der Stoßschaufel oder des äußeren Schaufelendes überhaupt hat. Da man die Richtung AB der Stoßschaufel als gegeben ansehen kann, ebenso die gegen den Radhalbmesser CA rechtwinkelig gerichtete Geschwindigkeit v am äußeren Radumfange bekannt und die Größe der Geschwindigkeit c des einfallenden Wassers eine bestimmte ist, so findet man

Fig. 369.



die erforderliche Richtung des letzteren, wenn man durch (v) eine Parallele zu AB legt, mit c, als Halbmesser, aus A einen Kreisbogen beschreibt und nun von A nach dem Durchschnitte (c) dieses Bogens mit jener Parallelen eine Gerade $\overline{Ac}$ zieht.

Führt man endlich noch durch den Endpunkt (c) eine Parallele zu $\overline{Av}$, so schneidet diese von AB die relative Geschwindigkeit $\overline{Aw} = w$ ab, mit welcher das Wasser in das Rad eintritt. Durch Rechnung findet man Folgendes: Ist α der Zutrittswinkel EAT, unter welchem der zufließende Wasserstrahl den äußeren Radumfang trifft, und β der gegebene Eintrittswinkel, unter welchem sich die Schaufeln an diesen Radumfang anschließen, so gelten für dieselben die bekannten Proportionen (s. Bd. I, §. 33):

$$\frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta} = \frac{w}{c} \text{ und } \frac{sin.\,(\beta - \alpha)}{sin.\,\beta} = \frac{v}{c}.$$

Die letztere Proportion führt auf die Formel

$$sin.\,(\beta - \alpha) = \frac{v}{c}\, sin.\,\beta = \frac{sin.\,\beta}{\varkappa},$$

wonach sich aus dem Eintrittswinkel β und dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\varkappa = \frac{c}{v}$, der Winkel $\beta - \alpha = EAB$ bestimmen läßt, um welchen die Richtung AE des Wasserstrahles von der Richtung AB des Schaufelendes abweichen muß, und wodurch auch der Zutrittswinkel

$$\alpha = \beta - (\beta - \alpha)$$

gefunden wird.

Mit Hülfe der ersteren Proportion folgt dann aus dem letzteren Winkel die relative Eintrittsgeschwindigkeit:

$$w = \frac{c\, sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}.$$

Man kann diese Geschwindigkeit auch mittels der bekannten Formel

$$w = \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\,\alpha} = v\sqrt{1 - 2\,\varkappa\,cos.\,\alpha + \varkappa^2}$$

berechnen, auch läßt sich, da α stets nur ein kleiner Winkel und folglich $cos.\,\alpha$ nahe $=$ Eins ist, annähernd, jedoch für den praktischen Gebrauch genau genug,

$$w = c - v = (\varkappa - 1)\,v, \text{ und ebenso}$$

$$sin.\,\alpha = \frac{c - v}{c}\, sin.\,\beta = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right) sin.\,\beta,$$

oder einfacher,

$$\alpha = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right) \beta \text{ setzen.}$$

Hiernach kann man also mittels des gegebenen Geschwindigkeitsverhältnisses $\varkappa = \frac{c}{v}$ aus dem Eintrittswinkel β der Zutrittswinkel α berechnen. Man ersieht auch hieraus, daß $\varkappa > 1$, und also auch $c > v$ sein muß.

Da das in eine Radzelle eintretende Wasser in Folge des Stoßes gegen die Kropfschaufel u. s. w. eine entgegengesetzte Bewegungsrichtung annimmt, so würde dasselbe, wenigstens theilweise, wieder aus der Zelle heraustreten, wenn die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers eine sehr große wäre und wenn nicht das Wasser durch den Stoß gegen die Außenfläche der folgenden Schaufel eine andere Richtung bekäme. In dieser Hinsicht ist daher auch die Schaufelconstruction in Fig. 360 der in Fig. 363 vorzuziehen und die Anwendung von Schaufeln AD, wie Fig. 369, welche sich mit ihrer Außenfläche unter einem spitzen Winkel an den Radboden anschließen, in allen den Fällen zu rechtfertigen, wo das Wasser mit einer großen relativen Geschwindigkeit in das Rad eintritt.

Da die relative Eintrittsgeschwindigkeit $w = c - v = (\varkappa - 1)\, v$ nicht allein mit v, sondern auch mit $\varkappa$ wächst, so soll aus diesem Grunde das Verhältniß $\varkappa$ nie einen großen, meistens nur zwischen $^3/_2$ und 2 liegenden Werth annehmen.

Giebt man noch den Winkel $SCA = \theta$, um welchen der Eintrittspunkt A vom Radscheitel abweicht, so kann man nun auch den Neigungswinkel $EAH = \nu$ des einfallenden Wasserstrahles gegen den Horizont AH angeben; es ist nämlich

$$\nu = TAH + EAT = \theta + \alpha.$$

Beispiel. Wenn ein 36 Fuß hohes verticales Wasserrad in der Minute vier Umdrehungen machen und folglich mit der Geschwindigkeit

$$v = \frac{\pi u a}{30} = 0{,}1047 \,.\, 4 \,.\, 18 = 7{,}54 \text{ Fuß}$$

umlaufen soll, so ist bei dem Verhältnisse $\varkappa = \frac{c}{v} = 2$ die erforderliche absolute Geschwindigkeit des zufließenden Wassers:

$$c = \varkappa \,.\, v = 2 \,.\, v = 15{,}08 \text{ Fuß}.$$

Macht man nun den Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad, so ist für den Zutrittswinkel α:

$$sin.\,(\beta - \alpha) = \frac{sin.\,\beta}{\varkappa} = \tfrac{1}{2}\, sin.\,\beta = \tfrac{1}{2} \,.\, 0{,}3420 = 0{,}1710, \text{ daher:}$$

$\beta - \alpha = 9^0\, 51'$, so daß nun der Zutrittswinkel

$\alpha = 20^0 - 9^0\, 51' = 10^0\, 9'$,

und die relative Geschwindigkeit des eintretenden Wassers

$$w = \frac{sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}\, c = \frac{0{,}1762}{0{,}3420} \cdot 15{,}08 = 7{,}78 \text{ Fuß folgt.}$$

Nach den Näherungsformeln wäre

$$w = c - v = (\varkappa - 1)\, v = v = 7{,}54 \text{ Fuß und}$$

$$\alpha = \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\right) \beta = \tfrac{1}{2}\, \beta = 10 \text{ Grad.}$$

Steht die Eintrittsstelle um den Winkel $\theta = 12$ Grad vom Radscheitel ab, so ist folglich die erforderliche Neigung des Wasserstrahles gegen den Horizont:

$$\nu = \theta + \alpha = 12^0 + 10^0\,9' = 22^0\,9'.$$

Ist b die Länge des Bogens AK, Fig. 370, welchen der eintretende Wasserstrahl am äußeren Radumfange einnimmt, so beträgt die Dicke des Strahles unmittelbar vor dem Eintritte: §. 179

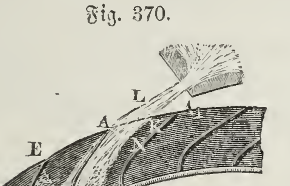


Fig. 370.

$$\overline{KL} = \overline{AK} sin. KAL = b\, sin.\, \alpha;$$

dagegen die Dicke desselben unmittelbar nach seinem Eintritte:

$$\overline{AN} = \overline{AK} sin. AKN = b\, sin.\, \beta,$$

und ist nun noch e die der Radweite gleichzusetzende Strahlbreite, so hat man die entsprechenden Querschnitte des Strahles: $e\,b\, sin.\, \alpha$ und $e\,b\, sin.\, \beta$, und folglich das Aufschlagwasserquantum:

$$Q = e\,b\, sin.\, \alpha\,.\,c = e\,b\, sin.\, \beta\,.\,w.$$

Nun ist aber dem Obigen zufolge,

$$Q = \varepsilon\, d\, e\, v,$$

wenn ε den Füllungscoefficienten und d die Radtiefe DE bezeichnen, daher hat man auch:

$$sin.\, \alpha = \frac{v}{c}\,\frac{\varepsilon d}{b} \text{ und } sin.\, \beta = \frac{v}{w}\,\frac{\varepsilon d}{b}.$$

Umgekehrt, ist die Länge des Bogens, welchen der Wasserstrahl am Radumfang einnimmt,

$$b = \frac{v}{c}\cdot\frac{\varepsilon\, d}{sin.\, \alpha} = \frac{v}{w}\cdot\frac{\varepsilon\, d}{sin.\, \beta}.$$

Annähernd, $w = c - v = (\varkappa - 1)\, v$ eingesetzt, folgt:

$$b = \frac{\varepsilon\, d}{(\varkappa - 1)\, sin.\, \beta}.$$

Da die oberschlägigen Wasserräder nicht ventilirt werden, d. i. keine Oeffnungen im Radboden zum Austritt der vom eintretenden Wasser vertriebenen Luft haben können, so darf die Einmündung einer Radzelle nicht einen Augenblick lang von dem Querschnitt des eintretenden Wassers ausgefüllt sein, sondern es muß dieser Querschnitt noch einen zum Entweichen der verdrängten Luft nöthigen Raum übrig lassen. Wenn nun die Strahlbreite nur wenig kleiner ist als die Radweite e, so muß die Luft längs der ganzen Radweite austreten können, und es ist daher nöthig, daß der im Vorstehenden gefundene Bogen, welchen das eintretende Wasser am äußeren Radumfange

einnimmt, noch kleiner sei als der an eben diesem Umfange von einer Radzelle eingenommene Bogen $A A_1$.

Ist n die Anzahl der Radschaufeln und a der äußere Radhalbmesser, so mißt dieser letztere Bogen: $b_1 = \frac{2 \pi a}{n}$, und setzen wir ihn nun der Bogenlänge b gleich, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die zulässige Schaufel- oder Zellenzahl des Rades:

$$n = \frac{2 \pi a}{b} = (\varkappa - 1) \cdot \frac{2 \pi a \sin. \beta}{\varepsilon d}.$$

Der Sicherheit wegen ist diese Zahl noch kleiner, je nach Befinden, nur halb so groß, d. i.

$$n = (\varkappa - 1) \cdot \frac{\pi a \sin. \beta}{\varepsilon d}$$

anzunehmen.

Man ersieht aus dieser Formel, daß die Anzahl der Schaufeln eines Rades um so größer ausfallen kann, je größer der Radhalbmesser a, der Eintrittswinkel β und das Geschwindigkeitsverhältniß $\varkappa = \frac{c}{v}$, sowie je kleiner der Füllungscoefficient ε und je kleiner die Breite d des Radkranzes ist.

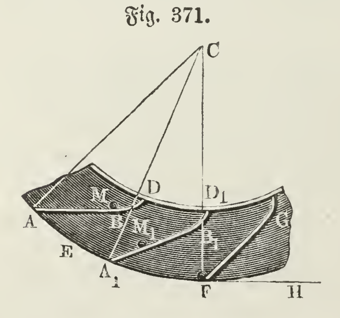
Beispiel. Für ein oberschlägiges Wasserrad von 24 Fuß Höhe und 1 Fuß Kranzbreite ist bei dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\varkappa = \frac{c}{v} = 2$, dem Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und dem Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad die größte Schaufelzahl:

$$n = (\varkappa - 1) \cdot \frac{2 \pi a \sin. \beta}{\varepsilon d} = \frac{2 \pi . 12 \sin. 20^0}{\frac{1}{4}} = 96 \pi \sin. 20^0$$
$$= 96 . 3{,}14 . 0{,}342 = 103{,}1,$$

wofür jedoch der Sicherheit wegen nur zwei Drittel dieses Werthes, etwa 72, anzunehmen sein möchte.

(§. 180) **Anzahl der Zellen.** Wir haben im Obigen angenommen, daß das Wasser eine Zelle vollständig verlassen habe, wenn die Stoßschaufel AB, Fig. 371, oder wenigstens das äußerste Schaufelende eine horizontale Lage angenommen hat; dies ist jedoch nur annähernd richtig; denn die letzten Wassertheile, wie z. B. M, welchen der Druck mangelt, fallen erst allmälig von der Schaufel AB herab, während dieselbe fortrückt und eine größere und größere Neigung annimmt. Die Zeit, welche hierzu nöthig ist, läßt sich wie folgt ermitteln.

Fig. 371.



Hat sich die anfangs horizontale Schaufel AB um den Winkel $ACA_1 = \psi$ gedreht, ist also auch ihre Neigung gegen den Horizont $= \psi$ geworden, so beträgt die Beschleunigung des Wassertheilchens M_1 auf derselben: $p = g \sin. \psi$; nun ist aber nach Bd. I, (§. 20) für die entsprechende Fallgeschwindigkeit w, $\partial w = p \partial t$, daher hat man hier:

$$\partial w = g \sin. \psi . \partial t.$$

Dreht sich das Rad, und also auch die Schaufel mit der Geschwindigkeit v herum, so haben wir auch:

$$a \psi = v t, \text{ sowie } a \partial \psi = v \partial t, \text{ daher läßt sich}$$

$$\partial w = g \sin. \psi \cdot \frac{a \partial \psi}{v} = \frac{g a}{v} \sin. \psi \partial \psi,$$

und die relative Geschwindigkeit des auf der Schaufel herabfallenden Wasser-Elementes

$$w = \frac{g a}{v} \int \sin. \psi \partial \psi = \frac{g a}{v} (1 - \cos. \psi)$$

setzen.

Nach derselben Stelle in Band I ist auch für den Raum $B_1 M_1 = s$, welchen das Element in der Zeit t auf der Schaufel zurückgelegt hat:

$$\partial s = w \partial t = \frac{w a \partial \psi}{v} = \frac{g a^2}{v^2} (1 - \cos. \psi) \partial \psi;$$

es folgt daher der Weg selbst

$$s = \frac{g a^2}{v^2} \int (1 - \cos. \psi) \partial \psi = \frac{g a^2}{v^2} (\psi - \sin. \psi).$$

Geht das Rad schnell um, so wird die Schwerkraft noch durch die ansehnliche Centrifugalkraft unterstützt, und man hat daher, wenn auch nur annähernd, statt $g, g + \frac{v^2}{a}$ (s. Band I, §. 42), wo a den Radhalbmesser bezeichnet, zu setzen.

Hiernach ist nun:

$$s = \frac{a^2}{v^2} \left(g + \frac{v^2}{a}\right) (\psi - \sin. \psi),$$

und umgekehrt:

$$\psi - \sin. \psi = \frac{v^2 s}{(g a + v^2) a}.$$

Da der Inhalt eines Kreissegmentes $= \frac{\psi - \sin. \psi}{2}$ für den Radius $= 1$ ist, so läßt sich daher ψ als der Centriwinkel eines Kreisabschnittes vom Inhalt $\frac{1/_2 v^2 s}{(g a + v^2) a}$ ansehen.

Damit sich alles Wasser aus der Zelle entfernt hat, wenn das äußere Schaufelende A am Fußpunkte F des Rades ankommt, muß dieser Formel auch entsprochen werden, wenn man statt s die ganze Schaufelbreite $AB = FG$, und für ψ den Aus- oder Eintrittswinkel, d. i. den Winkel $BAE = GFH = \beta$ einführt, um welchen die Schaufel AB oder FG vom äußeren Radumfange abweicht.

Mit Hülfe der Formel

$$\beta - sin.\beta = \frac{v^2 s}{(ga + v^2)a}$$

oder annähernd, mittels der Formel

$$sin.\beta = \sqrt[3]{\frac{6\,v^2 s}{(ga + v^2)a}},$$

läßt sich die Größe des zulässigen Eintrittswinkel β bestimmen, den wir im Vorstehenden immer als gegeben oder bekannt angenommen haben. Auch ersieht man aus ihr, daß der Eintrittswinkel β um so kleiner, also der Deckungswinkel um so größer angenommen werden kann, je größer der Radhalbmesser a, sowie je kleiner die Umfangsgeschwindigkeit v und die Schaufelbreite s ist.

Beispiele. 1. Für die Stoßschaufelbreite $s = 1$ Fuß, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 5$ Fuß und den Radhalbmesser $a = 10$ Fuß hat man:

$$\beta - sin.\beta = \frac{25}{(31{,}25\,.\,10 + 25)\,.\,10} = \frac{2{,}5}{337{,}5} = \frac{5}{675} = \frac{1}{135} = 0{,}0074074,$$

folglich:

$$\frac{\beta - sin.\beta}{2} = 0{,}0037037.$$

Nach dem „Ingenieur“, Seite 152, ist der entsprechende Winkel $\beta = 20^1/_3$ Grad. Die Näherungsformel giebt

$$sin.\beta = \sqrt[3]{6\,.\,0{,}0074074} = \sqrt[3]{0{,}04444} = 0{,}354,$$

und hiernach $\beta = 20^2/_3$ Grad.

2. Für ein hohes Rad von 20 Fuß Halbmesser und 10 Fuß Umfangsgeschwindigkeit ist, wenn man wieder $s = 1$ Fuß annimmt,

$$\frac{\beta - sin.\beta}{2} = \frac{50}{(31{,}25\,.\,20 + 100)\,.\,20} = \frac{2{,}5}{725} = \frac{1}{290} = 0{,}0034483,$$

und hiernach β nahe $= 20$ Grad.

3. Für ein sehr schnell umlaufendes niedriges Rad von 5 Fuß Halbmesser und 8 Fuß Umfangsgeschwindigkeit ist:

$$\frac{\beta - sin.\beta}{2} = \frac{32}{(31{,}25\,.\,5 + 64)\,.\,5} = \frac{6{,}4}{220{,}25} = 0{,}029058,$$

folglich $\beta =$ nahe 40 Grad.

Es folgt aus diesen Beispielen, daß sich die Schaufeln unter einem Winkel von 20 bis 40 Grad an den äußeren Radumfang anschließen müssen, und zwar ersteres bei hohen und langsam und letzteres bei niedrigen und schnell umlaufenden Rädern.

Einführung des Wassers. Damit das Wasser in der gegebenen §. 181
Richtung an das Rad gelange, legt man entweder die Schützenmündung ganz nahe an die Eintrittsstelle und stellt das Schutzbrett rechtwinkelig zur Strahlrichtung, oder man bringt ein Schußgerinne in der geforderten Richtung des Strahles an, oder man stellt das Schutzbrett so, daß das Wasser bei seinem freien Falle in einer Parabel die gegebene Richtung beim Eintritt von selbst annimmt.

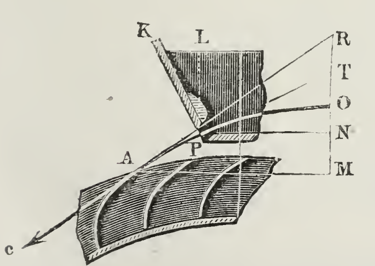
Um die Richtung des Schutzbrettes in dem Falle zu finden, wenn das Wasser zum Theil frei auf das Rad fällt, hat man von der in Band I, §. 39 u. s. w. abgehandelten Theorie der Wurfbewegung Gebrauch zu machen. Aus der Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 372, und dem Neigungswinkel $RAM = \nu$ der geforderten Strahlrichtung gegen den Horizont folgt die verticale Coordinate des Parabelscheitels:

$$\overline{MO} = x = \frac{c^2\, sin.\, \nu^2}{2g},$$

und dagegen die horizontale Coordinate:

$$\overline{AM} = y = \frac{c^2\, sin.\, 2\nu}{2g}.$$

Fig. 372.



Will man nun die Schutzöffnung nach irgend einem Punkte P dieser parabolischen Bahn verlegen, und giebt man etwa die Höhe $MN = z$ dieser Mündung über der Eintrittsstelle A, so hat man für die Coordinaten $\overline{ON} = x_0$ und $\overline{NP} = y_0$ dieses Punktes die Formeln:

$$x_0 = x - z$$

sowie

$$y_0 = y\sqrt{\frac{x-z}{x}} = y\sqrt{1 - \frac{z}{x}},$$

und für den Neigungswinkel $TPN = \nu_0$, welchen die Parabel an dieser Stelle mit dem Horizonte einschließt,

$$tang.\, \nu_0 = \frac{TN}{PN} = \frac{2\,\overline{ON}}{PN} = \frac{2\,x_0}{y_0} = \frac{2\sqrt{x\,(x-z)}}{y}.$$

Die Ebene PK des Schutzbrettes muß nun winkelrecht auf der Tangente PT stehen. Wir finden hiernach also die erforderliche Lage des Schutzbrettes, wenn wir die Abscisse ON umgekehrt als OT auftragen, nun PT ziehen, und hierauf wieder ein Perpendikel PK errichten.

Legen wir die Schutzmündung in den Parabelscheitel, so kommt natürlich das Schutzbrett vertical zu stehen.

Die Ausflußgeschwindigkeit bei P ist nun:

$$c_0 = \sqrt{c^2 - 2gz},$$

und die entsprechende theoretische Druckhöhe

$$h_0 = \frac{c^2}{2g} - z,$$

oder effectiv:

$$h_0 = 1{,}1 \left(\frac{c^2}{2g} - z\right),$$

wenn die Ausmündung glatt abgerundet und vielleicht gar mit Eisenblech bekleidet ist. Die Weite der Schutzmündung soll man nur wenig kleiner machen als die Radweite.

Beispiel. Für die Geschwindigkeit $c = 15$ Fuß und den Neigungswinkel $\nu = 20\frac{1}{4}^0$ hat man die Coordinaten des Parabelscheitels:

$$x = 0{,}016 \,.\, 15^2 \,(sin.\, 20\tfrac{1}{4}^0)^2 = 0{,}4312 \text{ Fuß},$$

und

$$y = 0{,}016 \,.\, 15^2 \,.\, sin.\, 40\tfrac{1}{2}^0 = 2{,}338 \text{ Fuß}.$$

Will man nun die Mitte der Schutzmündung um $z = 4$ Zoll $= 0{,}3333$ Fuß über die Eintrittsstelle legen, so hat man die Coordinaten von der Mitte der Mündung:

$$x_0 = 0{,}4312 - 0{,}3333 = 0{,}0979, \text{ und}$$

$$y_0 = 2{,}338 \sqrt{\frac{979}{4312}} = 1{,}114 \text{ Fuß}.$$

Für die Neigung des Strahles gegen den Horizont ist

$$tang.\, \nu_0 = \frac{1958}{11140},$$

hiernach diese Neigung selbst:

$$\nu_0 = 9^0 58,$$

und folglich die des Schutzbrettes:

$$90^0 - \nu_0 = 80^0 2'.$$

§. 182 Bei der in §. 178 angegebenen Einführung des Wassers in die Radzellen erleidet die parabolische Bahn des Wasserstrahles innerhalb des Rades nicht eher eine Veränderung, als bis der Strahl auf die Riegelschaufel oder auf das bereits in der Zelle befindliche Wasser aufschlägt; es lassen sich auch für den Punkt W, Fig. 373, in welchem der Strahl auftrifft, die im vorigen Paragraphen gefundenen Formeln anwenden. Bezeichnet z_1 den senkrechten Abstand $\overline{MN}$ des Eintrittspunktes A von der Oberfläche W des Wassers im Augenblicke, wenn der Zufluß in die entsprechende Zelle beendigt ist, so haben wir die Abscisse des Endpunktes A_1 des Strahles:

$$\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN}, \text{ d. i. } x_1 = x + z_1,$$

ferner die Ordinate desselben:

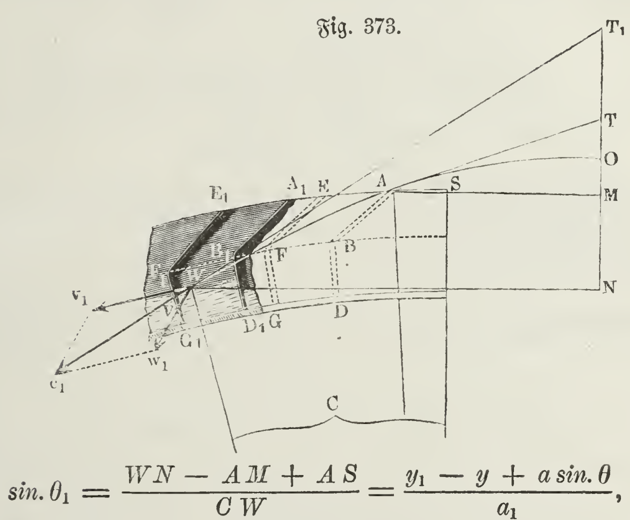
$$\overline{NW} = y_1 = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}}$$

und endlich für den Neigungswinkel $T_1 W N = \nu_1$ des Wasserstrahles gegen den Horizont an eben dieser Stelle:

$$tang.\, \nu_1 = \frac{2\, x_1}{y_1} = \frac{2\sqrt{x\,(x + z_1)}}{y}.$$

Noch ist für den Winkel $W C S = \theta_1$, um welchen der Endpunkt W vom Radscheitel S abweicht,

Fig. 373.



$$sin.\, \theta_1 = \frac{WN - AM + AS}{CW} = \frac{y_1 - y + a\, sin.\, \theta}{a_1},$$

wobei a_1 den Halbmesser $C W$ bezeichnet; und hieraus folgt nun der Winkel, um welchen die Richtung der Endgeschwindigkeit c_1 von der Richtung der Umdrehungsgeschwindigkeit v_1 in W abweicht:

$$\alpha_1 = \nu_1 - \theta_1.$$

Die Geschwindigkeit c_1, mit welcher endlich das Wasser in W aufschlägt, ist durch die bekannte Formel $\frac{c_1^2}{2\,g} = \frac{c^2}{2\,g} + z_1$ bestimmt, also:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2\,g\,z_1},$$

oder nach §. 177:

$$c_1 = \sqrt{2\,g\,(0{,}9\,h_0 + z + z_1)}.$$

Beispiel. Bei dem im letzten Beispiele behandelten Falle ist, wenn man $z_1 = 9$ Zoll $= 0{,}75$ Fuß annimmt, für den Angriffspunkt W die Abscisse:

$$\overline{ON} = x_1 = x + z_1 = 0{,}4312 + 0{,}75 = 1{,}1812 \text{ Fuß},$$

die Ordinate:

$$\overline{NW} = y_1 = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}} = 2{,}338\sqrt{1 + \frac{0{,}75}{0{,}4321}}$$

$$= 2{,}338\,\sqrt{2{,}7356} = 3{,}867 \text{ Fuß}.$$

Ferner ist für den Neigungswinkel des Strahles an eben dieser Stelle:

$$tang.\nu_1 = \frac{2\,x_1}{y_1} = \frac{2,3624}{3,867},\ log.\,tang.\nu_1 = 0,7859792 - 1,$$

folglich: $\nu_1 = 31^0\,25'$.

Dagegen ist für den Centriwinkel des Angriffspunktes W, wenn der Radhalbmesser $a = 18$ Fuß beträgt und der Winkel $A\,C\,S = \theta = 12$ Grad mißt:

$$sin.\,\theta_1 = \frac{y_1 - y + a\,sin.\theta}{a_1} = \frac{3,867 - 2,338 + 18\,sin.\,12^0}{17,25}$$

$$= \frac{1,529 + 3,742}{17,25} = \frac{5,271}{17,25},\ log.\,sin.\,\theta_1 = 9,4851039,$$

folglich $\theta_1 = 17^0\,48'$, und der Winkel, um welchen in W die Richtung des Wasserstrahles von der Tangente des Rades abweicht:

$$\alpha_1 = \nu_1 - \theta_1 = 13^0\,37'.$$

Endlich ist die Geschwindigkeit des in W zum Stoße gelangenden Wassers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2\,g\,z_1} = \sqrt{15^2 + 62,5\,.\,0,75} = \sqrt{225 + 46,875}$$
$$= \sqrt{271,875} = 16,490 \text{ Fuß}.$$

§. 183 **Bewegung des einfallenden Wassers im Rade.** Die Art und Weise, wie das Wasser innerhalb einer Zelle zum Stoße gelangt, ist folgende. Es sei $A\,F\,W$ (Fig. 374) die Axe des Wasserstrahles vor dem Anstoße, und $A\,B\,D$ eine Schaufel, welche mit ihrem äußeren Ende durch A geht, sowie $E\,F\,G$ die nächst vorhergehende Schaufel und folglich $A\,G\,E$ die Zelle, welche den Wasserkörper aufnimmt, dessen Axe durch $A\,F$ repräsentirt wird.

Bei der oben (§. 178) angegebenen Lage des Schaufelendes $F\,E$ gelangt dieser Wasserkörper fast ohne allen Stoß in die Zelle $A\,G\,E$, wenigstens sind es bloß nur die vordersten Elemente, welche bei F an $E\,F\,G$ wirklich anstoßen, der hauptsächlichste Stoß erfolgt vielmehr erst, während die Zelle allmälig aus der Lage $A\,G\,E$ in die Lage $A_1\,G_1\,E_1$ rückt, wobei die vorderste Schaufel der Zelle nach und nach von allen übrigen Elementen des Wasserkörpers $A\,F$ eingeholt wird. Der Stoß des Wassers innerhalb der gedachten Zelle ist beendigt, sowie das letzte Element A des Wasserkörpers $A\,F$ an die vorderste Schaufel $E_1\,F_1\,G_1$ (in V) antrifft oder auf das Wasser in der gefüllten Zelle (in W) aufschlägt. Bei der entsprechenden Stellung der Zelle $A_1\,G_1\,E_1$ ist also auch die Füllung desselben beendigt und daher anzunehmen, daß hier die Wirkung des Wassers durch Stoß beendigt sei und die Wirkung desselben durch Druck beginne. Um diese Zellenstellung $A_1\,G_1\,E_1$ zu finden, hat man in Betracht zu ziehen, daß die vordere Schaufel $E\,F\,G$ bei ihrer Bewegung nach $E_1\,F_1\,G_1$ dieselbe Zeit braucht, als das letzte Wasserelement bei seiner Bewegung von A nach V oder W.

Bezeichnen wir den zu bestimmenden Weg $A\,A_1 = E\,E_1$ der Schaufel durch s, so können wir, da sich die letztere mit der Geschwindigkeit v fortbewegt, die Zeit zum Durchlaufen dieses Weges setzen:

$$t = \frac{s}{v},$$

bezeichnen wir dagegen die Länge des Curvenbogens AFV, durch s_1, und nehmen wir an, daß das letzte Wasserelement A denselben mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{c + c_1}{2}$ zurücklege, so können wir die hierzu nöthige Zeit

$$t = \frac{2\,s_1}{c + c_1}$$

setzen. Da nun aber diese beiden Zeiten einander gleich sind, so folgt die Bestimmungsgleichung

$$\frac{s}{v} = \frac{2\,s_1}{c + c_1}.$$

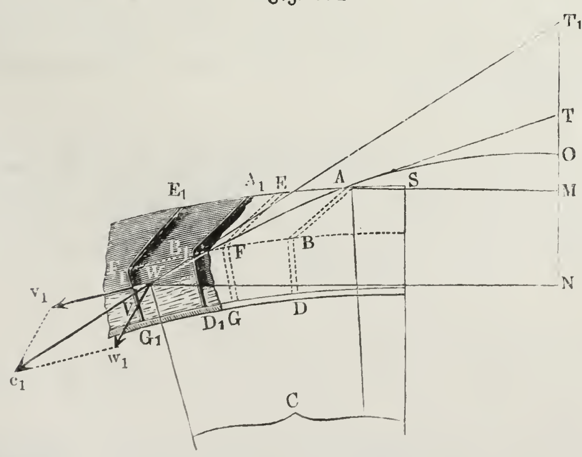
Wegen der nur mäßigen Abweichung der Richtung des Strahles AFV vom Umfange AE_1 läßt sich annähernd $s_1 = AFV = AE + EF + EE_1$ setzen. Nun ist aber AE der als bekannt anzusehende und auf dem äußeren Radumfang zu messende Abstand $b = \frac{2\pi a}{n}$, zwischen je zwei Radschaufeln, und EF durch die Proportion

$$\frac{EF}{EA} = \frac{w}{v} = \frac{c - v}{v} = \varkappa - 1$$

bestimmt, und zwar

$$\overline{EF} = (\varkappa - 1)\,\overline{EA} = (\varkappa - 1)\,b;$$

Fig. 374.



daher folgt:

$$s_1 = b + (\varkappa - 1)\,b + s = \varkappa b + s;$$

es nimmt nun die gefundene Bestimmungsgleichung folgende Gestalt an:

$$\frac{s}{v} = \frac{2}{c + c_1}(\varkappa b + s), \text{ oder:}$$

$$(c + c_1 - 2v)\, s = 2 \varkappa v b,$$

und es ist daher der gesuchte Weg der Schaufel während des Wasserstoßes folgender:

$$s = \varkappa \cdot \frac{2v}{c + c_1 - 2v}\, b = \frac{2 \varkappa b}{\left(1 + \frac{c_1}{c}\right) \varkappa - 2}.$$

Mit Hülfe von $s = \overline{AA_1} = \overline{EE_1}$ läßt sich nun die entsprechende Schaufelstellung aufzeichnen. Da sich aus dem gegebenen Aufschlagsquantum Q pr. Secunde die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute sowie aus der Anzahl der Radschaufeln der Wasserkörper

$$V = \frac{60\, Q}{n u}$$

und hieraus wieder der Querschnitt desselben:

$$F = \frac{V}{e} = \frac{60\, Q}{n u e}$$

bestimmen läßt, so kann man nun auch die Lage des Wasserspiegels W in der Zelle $A_1 G_1 E_1$ angeben und die Höhe $MN = z_1$ abmessen, welche wir im vorigen Paragraphen als gegeben angesehen haben.

Da $c_1 = \sqrt{c^2 + 2 g z_1}$ ist, so hängt allerdings die ganze Bestimmung von s durch die obige Formel mit von z_1 ab; es ist indessen z_1 in der Regel eine mäßige Größe, für welche man in dem letzteren Ausdrucke einen Annäherungswerth einsetzen kann.

Beispiel. Wenn ein oberschlägiges Wasserrad bei einer Höhe von 36 Fuß, 96 Schaufeln hat und mit $7\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit umläuft, wenn ferner das Wasser mit der Geschwindigkeit $c = 2v = 15$ Fuß in dasselbe eingeführt wird und sich dieselbe im Rade auf $c_1 = 16{,}49$ Fuß steigert (s. das Beispiel des vorigen Paragraphen), so ist die Theilung oder die äußere Weite einer Radzelle:

$$b = \frac{2 \pi a}{n} = \frac{36 \,.\, 3{,}1416}{96} = 1{,}18 \text{ Fuß},$$

und die Bewegung derselben während des Wasserstoßes:

$$s = \frac{2 \varkappa b}{\left(1 + \frac{c_1}{c}\right) \varkappa - 2} = \frac{2 b}{1 + \frac{16{,}45}{15} - 1} = \frac{2 \,.\, 1{,}18}{1{,}097} = 2{,}15 \text{ Fuß}.$$

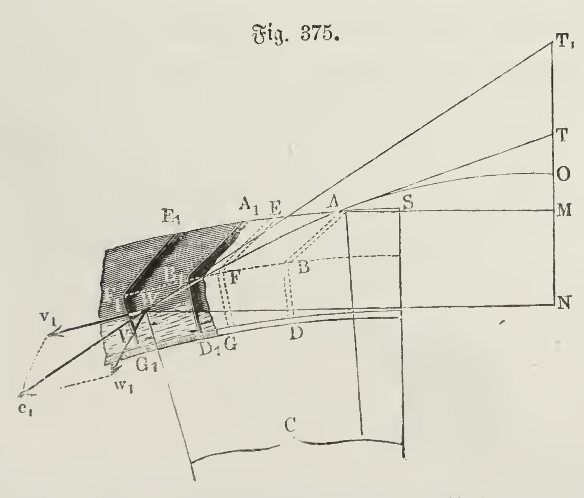
Anmerkung. Eine theoretische Untersuchung über die Einführung des Wassers in verticale Wasserräder habe ich im „Civilingenieur" Bd. 4 veröffentlicht. Siehe auch das Taschenbuch „der Ingenieur."

Stosswirkung. Das Wasser wirkt beim oberschlägigen Wasserrade vorzüglich durch sein Gewicht, und nur zum kleinsten Theil durch Stoß. Die Wirkung durch den Stoß finden wir, indem wir von der ganzen Wirkung, welche der lebendigen Kraft des eintretenden Wassers entspricht, abziehen: die mechanische Arbeit, welche das Wasser behält, wenn es das Rad verläßt, sowie diejenige, welche es durch seine wirbelnde Bewegung beim Eintritt in die Zellen verliert. Die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers ist gleichzusetzen der Geschwindigkeit v_1 des Rades im Theilrisse, und es ist daher das im abfließenden Wasser zurückbleibende Arbeitsvermögen $= \frac{v_1^2}{2g} Q\gamma$. Der Arbeitsverlust, welcher bei dem Wirbeln und Zertheilen des Wassers entsteht, läßt sich aber, wie beim Stoße, $= \frac{w_1^2}{2g} Q\gamma$ setzen, insofern w_1 diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, welche das Wasser beim Eintritt in die Zellen plötzlich verliert. Ist daher c_1 die Geschwindigkeit $\overline{Wc_1}$, Fig. 375, des eintretenden Wassers, so folgt die noch übrig bleibende Wirkung seiner lebendigen Kraft: §. 184

$$L_1 = \left(\frac{c_1^2 - v_1^2 - w_1^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Nun läßt sich aber c_1 in die Seitengeschwindigkeiten $\overline{Wv_1} = v_1$ und $\overline{Ww_1} = w_1$ theilen, wovon v_1 eben diejenige Geschwindigkeit ist, die das

Fig. 375.



Wasser behält, indem es mit der Zelle fortgeht, es ist daher auch der andere Component w_1 die verlorene Geschwindigkeit. Setzen wir den Winkel $c_1 W v_1$, welchen die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit c_1 mit der Tan=

gente $W v_1$ oder Richtung der Umfangsgeschwindigkeit einschließt, $= \alpha_1$, so haben wir bekanntlich:

$$w_1^2 = c_1^2 + v_1^2 - 2\, c_1 v_1 \cos.\alpha_1,$$

und daher die gesuchte mechanische Arbeit:

$$L_1 = \left(\frac{c_1^2 - v_1^2 - c_1^2 - v_1^2 + 2\, c_1 v_1 \cos.\alpha_1}{2g}\right) Q\gamma$$

$$= \frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\, v_1}{g}\, Q\gamma,$$

oder da $\frac{1}{g} = 0{,}032$ und $\gamma = 61{,}75$ Pfund ist,

$$L_1 = 1{,}976\, (c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\, v_1\, Q \text{ Fußpfund, oder auch}$$

$$L_1 = 102\, (c_1 \cos.\alpha_1 - v_1)\, v_1\, Q \text{ Meterkilogramm.}$$

Man ersieht leicht, daß diese Stoßleistung um so größer wird, je größer c_1 und je kleiner α_1 ist; auch folgt durch Vergleichung mit Bd. I, §. 500, daß diese ein Maximum wird, wenn $v_1 = \frac{1}{2} c_1 \cos.\alpha_1$ ausfällt. Die dem letzten Verhältnisse entsprechende Maximalleistung ist

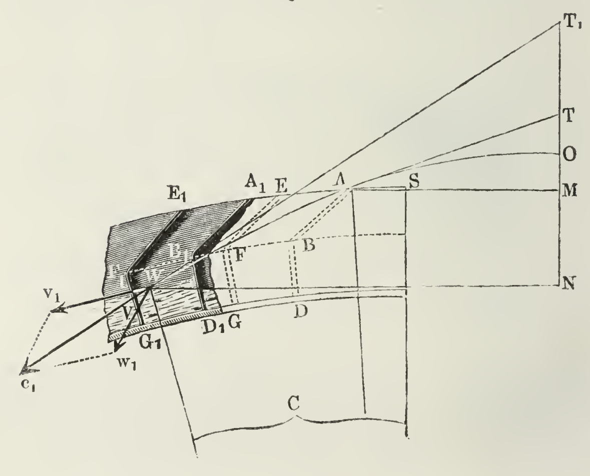
$$L_1 = \frac{1}{2} \frac{c_1^2 \cos.\alpha_1^2}{2g} Q\gamma,$$

oder $\alpha_1 = 0$, also $\cos.\alpha_1 = 1$ gesetzt,

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1^2}{2g} Q\gamma.$$

Da $\frac{c_1^2}{2g}$ das der Geschwindigkeit c_1 entsprechende Gefälle ist, so folgt, daß die Stoßwirkung im günstigsten Falle nur halb so groß ist, als die

Fig. 376.



disponible Leistung. Und es ist aus diesem Grunde zweckmäßiger, vom ganzen Radgefälle nur den kleinsten Theil auf den Stoß und dagegen so viel wie möglich auf den Druck zu verwenden. Könnten wir $c_1 \cos. \alpha_1 = v_1$, also $c_1 = \frac{v_1}{\cos. \alpha_1}$ machen, so würden wir das Gefälle $\frac{v_1^2}{2\,g \cos. \alpha_1^2}$ zur Einführung des Wassers in das Rad aufwenden, ohne eine Wirkung durch den Stoß zu erhalten. Machen wir hingegen $c_1 = \frac{2\,v_1}{\cos. \alpha_1}$, verwenden wir also auf die Einführung des Wassers das vierfache Gefälle $4 \cdot \frac{v_1^2}{2\,g \cos. \alpha_1^2}$, so erhalten wir doch nur die Wirkung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4\,v_1^2}{2\,g}\,Q\gamma = 2 \cdot \frac{v_1^2}{2\,g}\,Q\gamma,$$

und verlieren also gar das Gefälle $\left(\frac{4}{\cos. \alpha_1^2} - 2\right) \frac{v_1^2}{2\,g}$, oder, wenn wir, da α_1 sehr klein ist, $\cos. \alpha_1 = 1$ setzen, $= 2 \cdot \frac{v_1^2}{2\,g}$, d. i. doppelt so viel, als wenn wir auf alle Stoßleistung Verzicht leisten, also das Wasser nur so schnell eintreten lassen, als das Rad umgeht. Uebrigens ersehen wir auch, daß eine um so größere Wirkung vom Rade zu erwarten ist, je kleiner v_1, d. i. je langsamer das Rad umgeht. Allerdings fällt aber die Radweite e oder der Fassungsraum, und also auch das Gewicht des Wasserrades, um so größer aus, je kleiner die Umfangsgeschwindigkeit v oder Umdrehungszahl u des Rades ist; da nun aber die Zapfen eines Rades um so stärker gemacht werden müssen, je schwerer das Rad ist, und das Moment der Zapfenreibung mit den Zapfenstärken wächst, so wird allerdings bei einem langsam umgehenden Rade mehr mechanische Arbeit durch die Zapfenreibung consumirt als bei einem schneller umlaufenden, und es ist hiernach leicht zu ermessen, daß die größte Leistung eines Wasserrades noch keineswegs eine unendlich kleine Umdrehungsgeschwindigkeit erfordert.

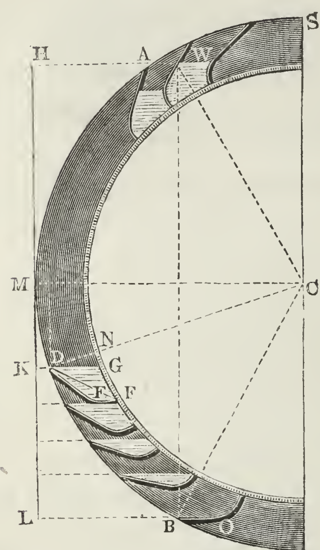
Da (nach §. 178) schon c größer als v sein muß, so ist um so mehr c_1 größer als v_1, es übertrifft daher der Arbeitsverlust durch den Stoß stets die Größe

$$\frac{v_1^2}{2\,g}\,Q\gamma.$$

Druckwirkung. Die mit Wasser gefüllten Zellen eines Wasserrades bilden gleichsam einen ringförmigen Wasserraum AB, Fig. 377 (a. f. S.), den man deshalb auch den wasserhaltenden Bogen nennt. Da das Wasser am oberen Ende dieses Bogens ein- und am unteren Ende austritt, §. 185

so ist dessen Höhe h_2 das wirksame Gefälle, und daher die mechanische Leistung des Rades durch Druck, $= h_2 . Q\gamma$. Die Höhe des wasserhaltenden Bogens läßt sich aber aus drei Theilen zusammensetzen. Der erste Theil HM liegt über dem Radmittel und hängt von dem Winkel $SCW = \theta_1$ ab, um welchen die aus §. 183 bekannte Eintrittsstelle W des Wassers in das Rad vom Radscheitel absteht. Setzen wir wieder den Halbmesser $CW = a_1$, so haben wir die Höhe des obersten Theiles vom wasserhaltenden Bogen,

Fig. 377.



$$\overline{HM} = a_1 \cos. \theta_1.$$

Der zweite Theil MK liegt unter dem Radmittel M und hängt von der Stelle D ab, wo das Wasser anfängt auszufließen; setzen wir den Winkel MCD, um welchen diese Stelle unter dem Radmittel liegt, $= \lambda$, so haben wir diese zweite Höhe $\overline{MK} = a \sin. \lambda$. Der dritte Theil entspricht endlich demjenigen Bogen DB, in welchem das Ausleeren vor sich geht, der also zwischen dem Anfange D und dem Ende B des Austrittes liegt. Setzen wir den Winkel MCB, um welchen die Stelle B, wo das letzte Wasser aus dem Rade tritt, unter dem Radmittel M liegt, $= \lambda_1$, so haben wir die Höhe KL desselben $= a (\sin. \lambda_1 - \sin. \lambda)$. Während nun in den ersten beiden Bogentheilen das Wasser zur vollständigen Wirkung gelangt, theilt es in dem unteren Drittel nur einen Theil seiner mechanischen Arbeit dem Rade mit, weil es sich hier allmälig vom Rade entfernt, und wir können daher die ganze Wirkung des Wassers durch sein Gewicht nur

$$= (a_1 \cos. \theta_1 + a \sin. \lambda)\, Q\gamma + a (\sin. \lambda_1 - \sin. \lambda)\, Q_1 \gamma$$

setzen, wenn Q das ganze Aufschlagwasserquantum pr. Secunde, Q_1 aber nur einen Theil desselben und zwar das mittlere Wasserquantum bezeichnet, welches wir im Bogen DB wirkend annehmen können.

Vereinigen wir hiermit die Stoßleistung des Wassers, so bekommen wir die ganze mechanische Arbeit eines oberschlägigen Wasserrades:

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + a_1 \cos. \theta_1 + a \sin. \lambda\right) Q\gamma$$
$$+ a (\sin. \lambda_1 - \sin. \lambda)\, Q_1 \gamma,$$

oder, wenn wir die Höhe $(a_1 \cos. \theta_1 + a \sin. \lambda)$ des Theiles vom wasser=

haltenden Bogen, welcher das vollständige Wasserquantum aufnimmt, durch h_3, den übrigen Theil $a\,(sin.\,\lambda_1 - sin.\,\lambda)$ aber durch h_4 und das Verhältniß $\frac{Q_1}{Q}$ durch ξ bezeichnen:

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1\,cos.\,\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma,$$

und die Kraft am Umfange des Wasserrades:

$$P = \left(\frac{(c_1\,cos.\,\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) \frac{Q}{v}\,\gamma.$$

Beispiel. Bei einem 30 Fuß hohen oberschlägigen Wasserrade ist die Eintrittsgeschwindigkeit $c_1 = 16$ Fuß, die Geschwindigkeit der Theilrisse, $v_1 = 7$ Fuß der Winkel α_1, um welchen die Strahlrichtung von der Bewegungsrichtung des Rades an der Eintrittsstelle W abweicht, $= 12^0$, und der Halbmesser oder Abstand $CW = 14$ Fuß, ferner der Abstand dieser Stelle vom Scheitel, $WCS = 18^0$, der Abstand der Anfangsstelle D des Ausgusses vom Radmittel, $\lambda = 58^1/_2{}^0$, und der Abstand der Endstelle B von eben diesem Mittel, $\lambda_1 = 70^1/_2{}^0$, endlich das Aufschlagequantum $Q = 5$ Cubikfuß, und es werde $\xi = \frac{Q_1}{Q} = {}^1/_2$ angenommen: man sucht die Leistung des Rades. Es ist das wirksame Stoßgefälle
$= 0{,}032\,(16\,cos.\,12^0 - 7)\,.\,7 = 0{,}224\,(15{,}65 - 7) = 1{,}937$ Fuß;
und das Druckgefälle:
$= 14\,cos.\,18^0 + 15\,[sin.\,58^1/_2 + {}^1/_2\,(sin.\,70^1/_2 - sin.\,58^1/_2)]$
$= 13{,}315 + 15\,(0{,}8526 + {}^1/_2\,.\,0{,}09) = 13{,}315 + 13{,}464 = 26{,}779$ Fuß;
folglich die ganze Leistung des Wasserrades:
$L = (1{,}937 + 26{,}779)\,.\,5\,.\,61{,}75 = 28{,}716\,.\,308{,}75 = 8866$ Fußpfund
$= 18{,}5$ Pferdekräfte.
Die Kraft am Umfange des Rades, dessen Geschwindigkeit $v = 7^1/_2$ Fuß mißt, beträgt folglich: $P = \frac{L}{v} = \frac{8862}{7{,}5} = 1182$ Pfund.

Austritt des Wassers aus dem Rade. Man sieht hiernach leicht ein, daß es bei genauer Bestimmung der Druckwirkung des Wassers bei einem oberschlägigen Rade besonders darauf ankommt, die beiden Grenzen des Ausgußbogens und das Verhältniß $\xi = \frac{Q_1}{Q}$ der mittleren Wassermenge einer Zelle im Ausgußbogen zur anfänglichen Wassermenge in einer Zelle zu finden. Hierüber sollen daher in Folgendem die nöthigen Regeln gegeben werden. §. 186

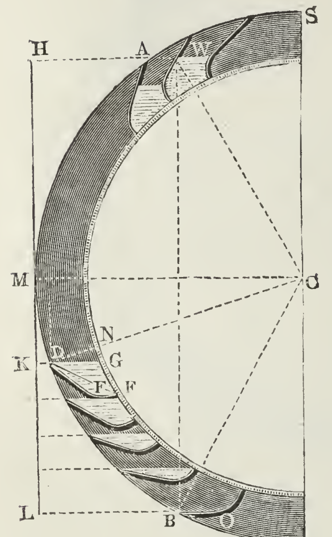
Hat das Rad n Schaufeln oder Zellen und macht es pr. Minute u Umdrehungen, so werden dem Wasser in jeder Secunde $\frac{nu}{60}$ Zellen zur Aufnahme der Wassermenge Q dargeboten, und es kommt daher auf eine Zelle das Wasserquantum:

$$V = Q : \frac{nu}{60} = \frac{60\,Q}{nu}.$$

Bezeichnet e, wie früher, die Radweite, so folgt der Querschnitt des Wasserprismas in einer Zelle:

$$F_0 = \frac{V}{e} = \frac{60\,Q}{nue}.$$ (S. §. 183.)

Fig. 378.



Ist nun $DEFG$, Fig. 378, diejenige Zelle, bei welcher das Ausgießen anfängt, so können wir setzen:

$F_0 =$ Segment $DEF +$ Dreieck DFG,

oder da Dreieck $DFG =$ Dreieck DFN $-$ Dreieck DGN ist,

$F_0 =$ Segment $DEF +$ Dreieck DFN $-$ Dreieck DGN.

Setzen wir nun den Inhalt des Segmentes $DEF = S$, und den des Dreieckes $DFN = D$, so haben wir das Dreieck $DGN = S + D - F_0$. Da sich aber $\triangle DGN$ auch $= \frac{DN.NG}{2} = \frac{1}{2} d^2\, tg.\, \lambda$ annehmen läßt, so folgt endlich annähernd, und zwar um so richtiger, je größer die Anzahl der Schaufeln ist,

$$tang.\, \lambda = \frac{S + D - F_0}{\frac{1}{2} d^2}.$$

Hiernach ist der Winkel $MCD = \lambda$ bestimmt, welcher dem Anfangspunkte D des Ausgusses entspricht. Eine Zelle wird ferner das Wasser gänzlich verloren haben, wenn das äußere Schaufelende horizontal liegt; ist daher Winkel CBO, welchen dieses Ende, oder nach Befinden, die ganze Stoßschaufel mit der Richtung des Halbmessers CB einschließt, $= \lambda_1$, so wird λ_1 auch zugleich den Winkel MCB angeben, welcher den Endpunkt B des Ausgußbogens bestimmt. Um nun die Wirkung des Wassers im Ausgußbogen zu finden, theilen wir die Höhe $KL = a\,(sin.\, \lambda_1 - sin.\, \lambda)$ in eine gerade Anzahl gleicher Theile, geben die den erhaltenen Theilpunkten entsprechenden Schaufelstellungen an, schneiden durch Horizontallinien die Querprofile der Wassermengen der Zelle bei diesen verschiedenen Stellungen an, und bestimmen die Inhalte $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$ dieser Querprofile. Nun wird der mittlere Werth F dieser Profile durch die Simpson'sche Regel ermittelt, indem man setzt:

$$F = \frac{F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots + F_{n-2})}{3\,n},$$

und hieraus erhält man das Verhältniß der mittleren Wassermenge einer Zelle im Ausgußbogen zur Wassermenge einer Zelle vor Anfang des Ausgusses:

$$\xi = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F}{F_0} = \frac{F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \cdots + F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \cdots F_{n-2})}{3\,n\,F_0}.$$

Beispiel. Ein 40 Fuß hohes Wasserrad soll pr. Minute 300 Cubikfuß Aufschlagewasser erhalten und innerhalb eben dieser Zeit vier Umdrehungen machen; man sucht die Leistung dieses Rades. Nehmen wir die Radtiefe oder Kranzbreite 1 Fuß an, so können wir die Radweite

$$e = \frac{4 \cdot 300}{\pi \cdot 40 \cdot 1 \cdot 4} = \frac{30}{4\pi} = 2{,}4 \text{ Fuß}$$

machen; geben wir dem Rade 136 Schaufeln, so erhalten wir das Wasserquantum in einer Zelle:

$$V = \frac{300}{4 \cdot 136} = \frac{75}{136} = 0{,}5515 \text{ Cubikfuß},$$

und demnach den Querschnitt desselben:

$$F_0 = \frac{0{,}5515}{2{,}4} \text{ Quadratfuß} = \frac{144 \cdot 0{,}5515}{2{,}4} = 33{,}09 \text{ Quadratzoll}.$$

Bei der angewandten und aus Fig. 379 zu ersehenden Schaufelconstruction ergiebt sich durch genaue Messung der Inhalt des Segmentes A_0BD, $S = 24{,}50$ Quadratzoll, und der des Dreieckes $A_0FD = 102$ Quadratzoll; es folgt daher für den Anfang des Ausgusses:

$$tang.\,\lambda = \frac{24{,}50 + 102 - 33{,}09}{\frac{1}{2} \cdot 144} = \frac{93{,}41}{72} = 1{,}2973\ldots,$$

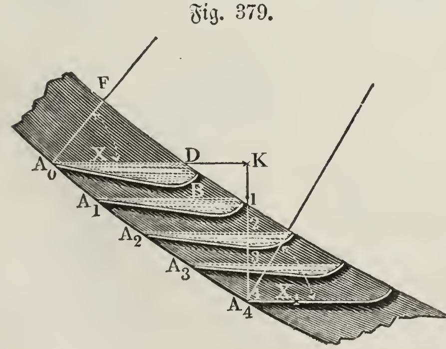
also:

$$\lambda = 52^0\,22\tfrac{1}{2}'.$$

Der Winkel, unter welchem das äußere Schaufelende den Halbmesser des Rades trifft, ist $\lambda_1 = 62^0\,30'$, daher die Höhe KA_4 des wasserhaltenden Bogentheiles, in welchem das Ausleeren erfolgt,

$$= a\,(sin.\,\lambda_1 - sin.\,\lambda)$$
$$= 20\,(0{,}8870 - 0{,}7920)$$
$$= 1{,}9 \text{ Fuß}.$$

Fig. 379.



Verzeichnet man nun innerhalb dieser Höhe noch drei Schaufelstellungen, so findet man durch Messung und Rechnung die Querschnitte der Wasserkörper einer Schaufel bei diesen Stellungen:

$F_1 = 24{,}50$; $F_2 = 14{,}48$ und $F_3 = 6{,}60$ Quadratzoll.

Da nun noch der Querschnitt am Anfang, $F_0 = 33{,}09$ und der am Ende $F_4 = 0$ ist, so hat man die Verhältnißzahl:

$$\xi = \frac{F}{F_0} = \frac{33{,}09 + 4\,(24{,}50 + 6{,}60) + 2 \cdot 14{,}48}{12 \cdot 33{,}09} = \frac{15{,}5375}{33{,}09} = 0{,}469.$$

Wäre nun noch die Höhe des obersten Wasserspiegels über der Radmitte M, $a_1\,cos.\,\theta_1 = 18$ Fuß, so würde die Leistung des Wasserrades durch das Gewicht des Wassers, ohne Rücksicht auf den Stoß und auf die Zapfenreibung betragen:

$$L = (a_1 \cos.\theta_1 + a[\sin.\lambda + 0{,}469\,(\sin.\lambda_1 - \sin.\lambda)])\,Q\gamma$$
$$= [18 + 20\,(0{,}7920 + 0{,}469\,.\,0{,}0950)]\,5\,.\,61{,}75$$
$$= (18 + 16{,}73)\,.\,308{,}75 = 10723 \text{ Fußpfund} = 22^1/_3 \text{ Pferdekräfte.}$$

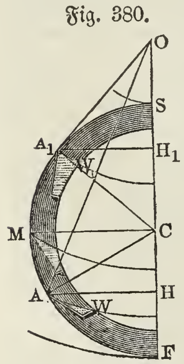
Anmerkung. Die Höhe des wasserhaltenden Bogens von Wasserspiegel zu Wasserspiegel zu messen, ist nur annähernd richtig; eigentlich hat man dieselbe vom Schwerpunkt zum Schwerpunkt des Wassers in einer Zelle zu nehmen.

§. 187 **Einfluss der Centrifugalkraft.** Bei gleicher Umfangsgeschwindigkeit haben kleine Räder eine größere Umdrehungszahl als große; überdies erfordert es oft der gleichförmige Gang oder der Zweck der Maschinen, z. B. bei Sägemühlen, Hammerwerken u. s. w., kleinen Rädern eine mehr große als kleine Geschwindigkeit zu geben. Aus diesen Gründen machen kleine Räder oft eine große Anzahl (25) von Umdrehungen in der Minute. Bei diesem großen Werthe von u fällt aber die Centrifugalkraft des Wassers in den Zellen so groß aus, daß die Neigung der Oberfläche desselben gegen den Horizont (s. Bd. I, §. 354) sehr bedeutend wird, und daher ein viel zeitigeres Austreten erfolgt, als wenn das Rad langsam umginge. Wir haben an dem citirten Orte gefunden, daß die Oberflächen des Wassers in den Radzellen lauter concentrische Cylindermäntel bilden, deren gemeinschaftliche Axe O, Fig. 380, parallel mit der Radaxe läuft und um die Höhe

$$\overline{CO} = k = \frac{g}{\omega^2} = g\cdot\left(\frac{30}{\pi u}\right)^2 = \frac{2850}{u^2} \text{ Fuß}$$

über der Radaxe C steht. Es wächst also dieser Abstand umgekehrt wie das Quadrat der Umdrehungszahl, und fällt bei einer großen Umdrehungszahl ziemlich klein aus. Man findet nun sogleich, daß nur im Radscheitel S und im Radfuße F der Wasserspiegel horizontal ist, daß er dagegen an einer gewissen Stelle oberhalb des Radmittels M am meisten vom Horizont abweicht. Es ist die Abweichung $HAW = AOC = \chi$ für irgend einen Punkt A, welcher um $ACM = \lambda$ unter dem Radmittel steht,

Fig. 380.



$$tang.\chi = \frac{AH}{OH} = \frac{a\cos.\lambda}{k + a\sin.\lambda}.$$

Für einen Punkt A_1 oberhalb M ist λ negativ, daher:

$$tang.\chi = \frac{a\cos.\lambda}{k - a\sin.\lambda}.$$

Legt man von O aus eine Tangente OA_1 an den Radumfang, so erhält man im Berührungspunkte A_1 diejenige Stelle, wo der Wasserspiegel am meisten vom Horizonte abweicht, wo also χ ein Maximum, und zwar $= \lambda$ ist, und durch

$$\sin.\chi = \frac{a}{k} = \frac{\pi^2 a u^2}{900\,g} = \frac{a u^2}{2850} \text{ bestimmt wird.}$$

Es nimmt also die Neigung χ des Wasserspiegels mit dem Radhalbmesser a und dem Quadrate der Umdrehungszahl u proportional zu.

Beispiel. 1. Für ein Rad, welches in der Minute fünf Umdrehungen macht, ist $k = {}^{2850}/_{25} = 114$ Fuß, wäre nun noch der Radhalbmesser $a = 16$ Fuß, und der Ausgußwinkel $\lambda = 50^0$, so hätte man für die Ausgußstelle:

$$tang.\, \chi = \frac{16\, cos.\, 50^0}{114 + 16\ sin.\, 50^0} = \frac{10,285}{126,256},$$

daher $\chi = 4^0\, 39'$; es wiche also an diesem Punkte der Wasserspiegel beinahe $4^1/_3{}^0$ vom Horizonte ab.

2. Für ein Rad mit 20 Umdrehungen hat man:

$$k = \frac{2850}{400} = 7,125 \text{ Fuß};$$

ist nun noch $a = 5$ Fuß und $\lambda = 0^0$, so hat man:

$$tang.\, \chi = \frac{5}{7,125}, \text{ daher } \chi = 35^0\, 3';$$

endlich $44^0\, 34'$ oberhalb des Radmittels ist diese Abweichung sogar $44^0\, 34'$.

Wenn wir nun den Einfluß der Centrifugalkraft berücksichtigen, was bei §. 188
schnell umlaufenden Wasserrädern unbedingt nothwendig ist, so müssen die oben gefundenen Formeln für den Ausgußbogen durch andere ersetzt werden.

Fig. 381.

Es sei A_0, Fig. 381, die Anfangsstelle des Ausgusses, $M C A_0 = H_0 A_0 C = \lambda$ der Ausgußwinkel, $H_0 A_0 W_0 = A_0 O C = \chi$ die Depression des Wasserspiegels unter dem Horizonte, also:

$\angle\, G_0 A_0 W_0 = \lambda + \chi$ und

$\triangle\, A_0 G_0 W_0 = {}^1/_2\, d \,.\, d\, tang.\, (\lambda + \chi)$
$= {}^1/_2\, d^2\, tang.\, (\lambda + \chi)$.

Setzen wir nun wieder den Inhalt des Segmentes $A_0 B_0 D_0 = S$, den des Dreieckes $A_0 G_0 D_0 = D$, und den Querschnitt des Wasserkörpers $= F_0$, so erhalten wir:
$F_0 + {}^1/_2\, d^2\, tang.\, (\lambda + \chi) = S + D$,
und daher:

$$1)\ tang.\, (\lambda + \chi) = \frac{S + D - F_0}{{}^1/_2\, d^2}.$$

Noch ist aber $\dfrac{sin.\, A_0\, O\, C}{sin.\, O\, A_0\, C} = \dfrac{C A_0}{C\, O}$, d. i.:

$$\frac{sin.\, \chi}{sin.\, [90^0 - (\lambda + \chi)]} = \frac{a}{k},$$

daher folgt dann:

$$2)\ sin.\, \chi = \frac{a\, cos.\, (\lambda + \chi)}{k}.$$

Nachdem man durch die erste Formel $\lambda + \chi$ und durch die zweite die Depression χ gefunden hat, erhält man durch Subtraction dieser beiden Winkel von einander den Ausgußwinkel:

$$\lambda = (\lambda + \chi) - \chi.$$

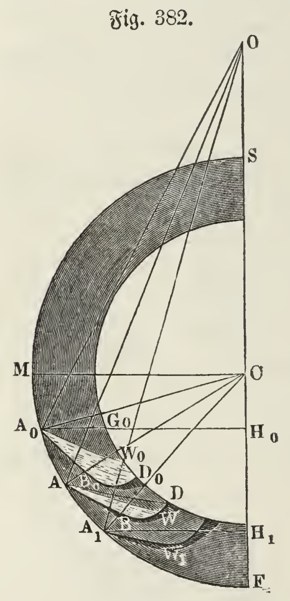
Am Ende A_1 des Ausgußbogens fällt das äußere Schaufelende mit dem Wasserspiegel $A_1 W_1$ zusammen, es ist also dort $CA_1 W_1 = \lambda_1 + \chi_1 =$ dem bekannten, durch die Schaufeldeckung bestimmten Winkel $\delta = 90^0 - \beta$, daher: $$sin.\, \chi_1 = \frac{a\, cos.\, \delta}{k} = \frac{a\, sin.\, \beta}{k}, \text{ und } \lambda_1 = \delta - \chi_1,$$ d. i. der Winkel, um welchen das Ende A_1 des Ausgußbogens vom Radmittel M absteht.

Wenn man nun die sich auf diese Weise herausstellende Höhe

$$H_0 H_1 = h_4 = a\,(sin.\, \lambda_1 - sin.\, \lambda),$$

Fig. 382, des Ausgußbogens in eine paare Anzahl (4 oder 6) gleicher Theile theilt, und die Schaufelfüllungen für die entsprechenden Schaufelstellen ermittelt, so kann man wieder das Verhältniß

Fig. 382.



$$\xi = \frac{Q_1}{Q} = \frac{F}{F_0}$$

der mittleren Schaufelfüllung während des Ausgießens zur Füllung vor dem Ausgießen finden, und hiernach die Wirkung des Wassers im Ausgußbogen berechnen. Hierbei sind natürlich die obigen Formeln umgekehrt zu gebrauchen. Es ist hier λ gegeben, hiernach

$$tang.\, \chi = \frac{a\, cos.\, \lambda}{k + a\, sin.\, \lambda} \text{ und}$$

$$F = S + D - \tfrac{1}{2} d^2\, tang.\, (\lambda + \chi).$$

Füllt das Wasser nicht mehr das ganze Segment aus, ist also $F < S$, also

$$\tfrac{1}{2} d^2\, tang.\, (\lambda + \chi) > D,$$

so hat man zu setzen (s. Fig. 382):

$$F = \text{Segment } ABD - \triangle ADW,$$

und bei geraden Schaufeln

$$F = S - \tfrac{1}{2} s^2 \cdot \frac{sin.\, (\lambda + \chi - \delta)\; sin.\, \delta_1}{sin.\, (\lambda + \chi)},$$

wo s die Diagonale AD, und δ_1 den Winkel DAC bezeichnet, welchen dieselbe mit dem Halbmesser CA einschließt.

Beispiel. Das kleine hölzerne Wasserrad in Fig. 383 hat 12 Fuß Höhe, 1 Fuß Tiefe, 4 Fuß Weite und nimmt bei 17 Umläufen pr. Minute 1080 Cubikfuß Aufschlag auf, man sucht die mechanische Leistung desselben. Es ist hier:

$$a = 6,\ d = 1,\ e = 4,\ a_1 = 5{,}5,\ Q = \frac{1080}{60} = 18 \text{ und } u = 17;$$

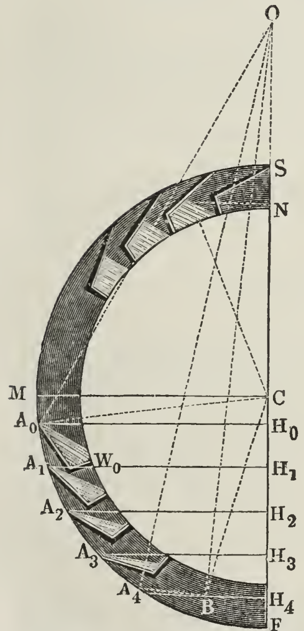
giebt man nun dem Rade 24 Schaufeln, so hat man:

$$\varphi^0 = \frac{360^0}{24} = 15^0 \quad \text{und} \quad F_0 = \frac{1080}{24\,.\,17\,.\,4} = \frac{45}{68} = 0{,}662 \text{ Quadratfuß.}$$

Ist ferner $D = 0{,}652$ und $S = 0{,}373$, so hat man:

$$tang.\ (\lambda + \chi) = \frac{0{,}373 + 0{,}652 - 0{,}662}{1/_2} = 0{,}363\,.\,2 = 0{,}726,$$

Fig. 383.



daher:

$$\lambda + \chi = 35^0{,}59'.$$

Nun ist $\overline{C\,O} = k = \frac{2850}{17^2} = 9{,}86$ Fuß, daher:

$$sin.\ \chi = \frac{6\ cos.\ 35^0{,}59'}{9{,}86} = 0{,}4924,$$

hiernach:

$$\chi = 29^0\,30' \text{ und } \lambda = 6^0{,}29'.$$

Es fängt hier also der Ausguß schon $6^1/_2{}^0$ unter dem Radwinkel an. Um die Stelle zu finden, wo der Ausguß beendigt ist, hat man in dem vorliegenden Falle, wo sich noch etwas Wasser in der Zelle erhält, wenn auch der Wasserspiegel das äußere Ende der Schaufel berührt, in der Formel

$$sin.\ \chi_1 = \frac{a\ sin.\ \beta}{k}$$

statt a den Theilkreishalbmesser $a_1 = 5{,}5$ und statt β den Eintrittswinkel, welcher hier $= 10^0\,46'$ beträgt, zu setzen. Es ist sonach:

$$sin.\ \chi_1 = \frac{5{,}5\ sin.\ 10^0\,46'}{9{,}86}, \text{ daher:}$$

$$\chi_1 = 5^0\,59',$$

und der zweite Ausgußwinkel:

$$\lambda_1 = 79^0\,14' - 5^0\,59' = 73^0\,15'.$$

Hiernach ist nun die Höhe des Ausgußbogens:

$$h_4 = a_1\ sin.\ \lambda_1 - a\ sin.\ \lambda = 5{,}5\ sin.\ 73^0\,15' - 6{,}0\ sin.\ 6^0\,29'$$
$$= 5{,}2666 - 0{,}6775 = 4{,}589 \text{ Fuß.}$$

Diese Höhe theilen wir in vier gleiche Theile, und bestimmen nun durch Zeichnung, genaue Messung und Rechnung noch die entsprechenden drei Zwischenwerthe von F. Die erlangten Ergebnisse sind: $F_1 = 0{,}501$, $F_2 = 0{,}409$, $F_3 = 0{,}195$; daher das gesuchte Querschnittsverhältniß:

$$\xi = \frac{F}{F_0} = \frac{0{,}662 + 4\,(0{,}501 + 0{,}195) + 2\,.\,0{,}409}{12\,.\,0{,}662} = 0{,}537,$$

und die mechanische Arbeit des Wassers beim Herabsinken im Ausgußbogen:

$$L_4 = \xi\,.\,h_4\ Q\gamma = 0{,}537\,.\,4{,}589\,.\,18\,.\,61{,}75 = 2739 \text{ Fußpfund.}$$

Fiele das Wasser mit 20 Fuß Geschwindigkeit 20^0 unter dem Radscheitel so ein, daß seine Richtung um 25^0 von der Tangente am Eintrittspunkte abwiche, so hätte man noch die übrige Druckwirkung:

$$L_3 = (5{,}5\ cos.\ 20^0 + 6\ sin.\ 6^0\ 29')\ 18\ .\ 61{,}75 = 5{,}845\ .\ 1111{,}5$$
$$= 6497 \text{ Fußpfund},$$

und die Stoßwirkung, da die Geschwindigkeit im Theilrisse

$$v_1 = \frac{11\ .\ \pi\ .\ 17}{60} = 9{,}791 \text{ Fuß}$$

ist:

$$L_1 = 0{,}032\ (20\ cos.\ 25^0 - 9{,}791)\ 9{,}791\ .\ 18\ .\ 61{,}75 = 2{,}611\ .\ 18\ .\ 61{,}75$$
$$= 2902 \text{ Fußpfund}.$$

Demnach wäre die ganze Leistung dieses Rades:

$$L = L_1 + L_3 + L_4 = 12138 \text{ Fußpfund}.$$

§. 189 **Stärke der Radarme.** Von der Größe und Art der Wirkung eines Wasserrades hängen auch noch die erforderlichen Querschnittsdimensionen der Radarme, sowie die Stärke der Welle und die der Wellenzapfen ab. Um diese Raddimensionen zu ermitteln, hat man vorzüglich den vierten Abschnitt des ersten Theiles dieses Werkes zu Rathe zu ziehen.

In der Regel wird die Kraft des Wasserrades durch ein Zahnrad weiter fortgepflanzt, und dasselbe sitzt entweder

1) auf der Wasserradwelle, oder
2) auf einem der Armsysteme (Armgeviere), oder
3) an einem der Radkränze fest.

Im ersteren Falle wird die Kraft des Wassers durch die Radarme auf die Welle und von dieser wieder auf das Transmissionsrad übergetragen; im zweiten Falle geht hingegen die Wasserkraft nur mittels der Radarme auf das Transmissionsrad über, und im dritten Falle erfolgt die Uebertragung der Wasserkraft fast unmittelbar. Der erstere Fall ist bei weitem der häufigere, um so mehr, da hierzu auch die Fälle zu rechnen sind, wo die Transmission nicht durch Zahnräder, sondern durch Trommeln, Kurbeln u. s. w. erfolgt.

Bezeichnet m die Anzahl der Arme des Wasserrades, ferner b_1 die Breite und h_1 die Dicke eines Armes, jene parallel zur Radaxe und diese parallel zum Radumfange gemessen, so hat man nach der aus Bd. I, §. 236 bekannten Formel

$$Pl = b_1 h_1^2 \cdot \frac{T}{6},$$

da hier P die Kraft, $\frac{P}{m}$ und l die Länge a eines Radarmes in Zollen bedeuten,

$$\frac{Pa}{m} = 9{,}549\ \frac{L}{mu} = b_1 h_1^2 \cdot \frac{T}{6}$$

zu setzen, und ist nun noch das Dimensionsverhältniß $\frac{b_1}{h_1} = \mu$ ein bestimm-

tes, z. B. bei Holz = $^5/_7$ und bei Gußeisen $^1/_5$, so erhält man hiernach für die gesuchte Dicke der Radarme:

$$h_1 = \sqrt[3]{\frac{6}{\mu T} \cdot \frac{Pa}{m}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\mu T} \cdot 9{,}549 \frac{L}{mu}} = 3{,}86 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T m u}}.$$

Drückt man, wie gewöhnlich, a in Fuß und L in Pferdekräften (jede zu 480 Fußpfund) aus, so erhält man:

$$h_1 = 4{,}16 \sqrt[3]{\frac{Pa}{\mu T m}} = 69{,}2 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T m u}} \text{ Zoll.}$$

Nimmt man nun noch für Holz $\mu = {}^5/_7$ und $T = 1000$ Pfund an (s. Bd. I, §. 240), so erhält man für hölzerne Arme:

$$h_1 = 0{,}465 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 7{,}74 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Der Sicherheit wegen, und weil die Arme auch noch das Gewicht des Rades aufnehmen müssen, nimmt man in der Ausführung reichlich das Doppelte, und setzt hiernach:

$$\text{I.} \quad h_1 = 0{,}95 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Nimmt man dagegen für Gußeisen $\mu = {}^1/_5$ und $T = 7000$ an, so erhält man für gußeiserne Arme:

$$h_1 = 0{,}372 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 6{,}19 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}}.$$

In der Praxis nimmt man nahe das Doppelte an, nämlich:

$$\text{II.} \quad h_1 = 0{,}7 \sqrt[3]{\frac{Pa}{m}} = 12 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Wenn ein hölzernes oberschlägiges Wasserrad mit 16 Armen in der Minute fünf Umdrehungen machen, und eine Leistung von 20 Pferdekraft aufnehmen und mittels seiner Welle fortpflanzen soll, so müssen dessen Arme folgende Querschnittsdimensionen erhalten:

$$h_1 = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{L}{mu}} = 15{,}5 \sqrt[3]{\frac{20}{16 \,.\, 5}} = 15{,}5 \sqrt[3]{0{,}25} = 9{,}6 \text{ Zoll}$$

und $b_1 = \mu h_1 = {}^5/_7 \,.\, 9{,}6 = 7$ Zoll.

Nach den äußeren Enden zu können natürlich diese Dimensionen etwas abnehmen.

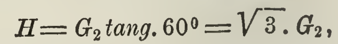
Wenn die Kraft eines oberschlägigen Wasserrades durch ein am Radumfange angebrachtes Zahnrad fortgepflanzt wird, so haben die Radarme hauptsächlich nur das Gewicht des Rades zu tragen, und es ist daher in diesem Falle die Stärke der Arme fast nur von dem Radgewichte abhängig. Da während einer Umdrehung des Rades die Arme desselben nach §. 190

und nach in alle möglichen Stellungen gegen die Richtung der Schwere kommen, so ist auch die Kraft, welche ein Radarm hierbei aufzunehmen hat, veränderlich, und es sind daher bei Bestimmung des Querschnittes eines Armes verschiedene Stellungen in Betracht zu ziehen. Setzen wir zunächst nur ein Armsystem mit sechs Armen CB, CD, $CE\ldots$, Fig. 384 und Fig. 385, sowie eine vollkommene Starrheit des Radkranzes voraus. Bei der Stellung in Fig. 384 sind zwei Arme, CB, CB, verticale, und vier Arme, CD, CE u. s. w., unter 30 Grad gegen den Horizont geneigt. Der aufsteigende Arm widersteht durch seine Druck-, der abwärts gerichtete Arm durch seine Zug-, und die übrigen Arme widerstehen durch ihre zusammengesetzte Festigkeit, und zwar die Arme CD, CD durch Druck- und Biegungs-, dagegen die Arme CE und CE durch Zug- und Biegungsfestigkeit. Da die Widerstände des Druckes und Zuges dem Rade nur eine sehr kleine verticale Senkung gestatten, so sind auch die Biegungen der Arme sehr klein, und wir können deshalb die Kraft, welche die Biegung aufnimmt, ganz außer Betracht lassen.

Fig. 384.

Fig. 385.

Es sei G derjenige Theil des Radgewichtes, welchen das in Betrachtung zu ziehende Armsystem auf die Welle C überzutragen hat, ferner G_1 der Theil des Gewichtes, welchen jeder der beiden verticalen Arme, und G_2 der Theil, welchen jeder der beiden geneigten Arme aufnimmt. Die letztere Kraft zerlegt sich in eine horizontale Kraft:



$$H = G_2\, tang.\, 60^0 = \sqrt{3}\,.\, G_2,$$

und in eine Kraft nach der Richtung des Armes:

$$N = \frac{G_2}{cos.\, 60^0} = 2\, G_2.$$

Da sich die Horizontalkräfte $H, H \dots$ gegenseitig im Rade aufheben, so kann natürlich das letztere in Folge der Elasticität der Radarme nur senkrecht, und zwar um die Größe $\overline{BB_1} = \overline{DD_1} = \overline{EE_1} \dots = \sigma$ sinken. Nun entspricht aber der Senkung $\overline{DD_1} = \overline{EE_1} \dots$ der Armenden $D, E \dots$ die Verkürzung oder Ausdehnung

$$\overline{DD_2} = \overline{EE_2} = \overline{DD_1}\; cos.\, D_1\, DD_2 = \sigma\, cos.\, 60^0 = \frac{1}{2}\, \sigma;$$

es ist daher auch die Kraft N in der Richtung der Arme CD, $CE \dots$ die Hälfte der Kraft G_1 des sich um σ verkürzenden Armes CB, sowie auch des sich um σ ausdehnenden Armes CB, und folglich

$$G_2 = \frac{1}{2}\, N = \frac{1}{4}\, G_1$$

zu setzen.

Führen wir diesen Werth in der Gleichung $2\, G_1 + 4\, G_2 = G$ ein, so erhalten wir folgende Ausdrücke für G_1 und G_2:

$$G_1 = \frac{1}{3}\, G \text{ und } G_2 = \frac{1}{12}\, G.$$

Bezeichnet endlich F den Querschnitt eines Radarmes und T den Tragmodul desselben, so erhalten wir hiernach:

$$F = \frac{G_1}{T} = \frac{G}{3\, T},$$

sowie:

$$F = \frac{N}{T} = \frac{2\, G_2}{T} = \frac{G}{6\, T}.$$

Es ist natürlich der erstere Querschnitt in Anwendung zu bringen.

Bei der Armstellung in Fig. 385, wo zwei Arme CA, CA horizontal sind, werden nur die vier Arme CD, CD und CE, CE der Druck- und Zugfestigkeit ausgesetzt, und es ist die Druck- oder Zugkraft:

$$N = \frac{G_1}{cos.\, 30^0} = G_1 \sqrt{4/3} = \frac{G}{4} \sqrt{4/3},$$

folglich der entsprechende Armquerschnitt:

$$F = \frac{N}{T} = \frac{G}{4\, T} \sqrt{4/3} = \frac{G}{3{,}464\, T},$$

also kleiner als für die Stellung in Fig. 384.

Der anzuwendende Armquerschnitt bleibt also

$$F = \frac{G}{3\, T}.$$

Bei Anwendung von nur vier Armen ist

$$F = \frac{G}{2\, T},$$

sowie bei Anwendung von acht Armen

$$F = \frac{G}{4\,T}$$

zu setzen, wie durch eine ähnliche Untersuchung leicht gefunden werden kann.

Ist allgemein die Anzahl der Arme eines Rades $= m$ und das ganze Gewicht desselben $= G$, so bestimmt sich hiernach der Querschnitt eines Radarmes einfach durch die Formel

$$F = \frac{2\,G}{m\,T}.$$

Für hölzerne Arme wäre nach Tabelle I. in §. 212 von Bd. I, $T = 2500$, dagegen für gußeiserne, $T = 9120$ Pfund und nach Tabelle II, für schmiedeeiserne, $T = 18000$ Pfund; da sich aber lange Arme auch durch Druckkräfte leicht biegen und die Spannung derselben während einer Umdrehung sich unaufhörlich verändert, von dem ersten Werthe nur der zehnte und von den letzteren Werthen nur der fünfte Theil in Anwendung zu bringen, und hiernach

für hölzerne Arme

$$F = \frac{2\,G}{250\,m} = 0{,}008\,\frac{G}{m}$$

und dagegen für gußeiserne Arme

$$F = \frac{2\,G}{1822\,m} = 0{,}0011\,\frac{G}{m}$$

und für schmiedeeiserne

$$F = \frac{2\,G}{3600\,m} = 0{,}00056\,\frac{G}{m} \text{ Quadratzoll}$$

zu setzen.

Sind die Radkränze eines Wasserrades durch schmiedeeiserne Spannstangen mit der Welle fest verbunden, so wird das Rad nur von denjenigen Armen oder Stangen, welche abwärts gerichtet sind, getragen. Es ist daher dann

$$G_1 = {}^2/_3\,G \text{ und } G_2 = {}^1/_6\,G,$$

sowie auch N und F doppelt so groß als bei einem steifen Armsystem.

Anmerkung. Mit Hülfe der vorstehenden Theorie läßt sich auch die erforderliche Stärke eines Radkranzes ermitteln. Jede Radhälfte wird von einem Kräftepaar ($H, -H$) ergriffen, welches in den Punkten B, B Spannungen $R, -R$ hervorbringt, denen der Radkranz durch seine Festigkeit widerstehen muß. Setzt man das Moment $R \cdot 2\,a$ des Paares $R, -R$, dem Momente Ha des Paares $H, -H$ gleich, so erhält man

$$R = {}^1/_2\,H = {}^1/_2 \sqrt{3}\;G_2 = {}^1/_{24} \sqrt{3}\;G = 0{,}072\,G$$

und daher den nöthigen Querschnitt des Radkranzes: $fd = \frac{R}{T}$, so wie die Dicke desselben:

$$f = \frac{0{,}072\,G}{d\,T}.$$

Um einen möglichst steifen Radkranz zu erhalten, muß man
für hölzerne Kränze $T = 50$,
für gußeiserner Kränze $T = 350$, und
für schmiedeeiserne Kränze $T = 600$ Pfund annehmen.

Stärke der Wasserradwelle. Die Stärke der Wasserradwelle bestimmt sich aus dem Kraftmomente des Rades bei in Betrachtnahme der Torsionsfestigkeit, sowie aus dem Gewichte desselben bei Berücksichtigung der relativen Festigkeit. Zieht man bloß das Kraftmoment Pa in Betracht, so hat man der Theorie der Torsionsfestigkeit zu Folge (s. Bd. I, §. 264) für die Stärke einer gußeisernen cylindrischen Welle: §. 191

$$Pa = 360\, d^3 \text{ Zollpfund}$$

und folglich diese Stärke selbst:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pa}{360}} = 0{,}1406 \sqrt[3]{Pa},$$

oder, wenn man, wie gewöhnlich, Pa in Fußpfund ausdrückt,

$$d = 0{,}3218 \sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll}.$$

Giebt man die Leistung L der Maschine in Pferdekräften, und die Umdrehungszahl u derselben pr. Minute, so hat man:

$$Pa = \frac{30 \,.\, 480 \,.\, L}{\pi u} = 4584\, \frac{L}{u},$$

und daher die gesuchte Wellenstärke:

$$d = 0{,}3218 \sqrt[3]{4584} \sqrt[3]{\frac{L}{u}} = 5{,}35 \sqrt[3]{\frac{L}{u}},$$

wofür man jedoch in der Praxis

$$d = 0{,}361 \sqrt[3]{Pa} = 5 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll} = 16 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter}$$

annimmt.

Für schmiedeeiserne Wellen ist dagegen im Mittel

$$d = 0{,}301 \sqrt[3]{Pa} = 5 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll} = 13 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter}$$

zu setzen.

Hölzerne Wasserradwellen macht man in der Praxis drei- bis viermal so stark als gußeiserne Wellen, wiewohl aus theoretischen Gründen die reichliche zweifache Stärke ausreicht.

Für Wellen mit quadratischen Querschnitten ist die Seitenlänge $s = 0{,}94\, d$ zu setzen, und für hohle cylindrische Wellen von der äußeren Weite d_1 und der inneren Weite d_2, statt

$$d^3 = \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} = d_1^3 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right] = (1 - \psi^4)\, d_1^3,$$

also
$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}},$$
wobei ψ das Verhältniß $\frac{d_2}{d_1}$ bezeichnet. Gewöhnlich nimmt man $\frac{d_2}{d_1} = 0,6$ an, und hat dann
$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - 0,13}} = 1,05\, d,$$
sowie
$$d_2 = 0,63\, d.$$

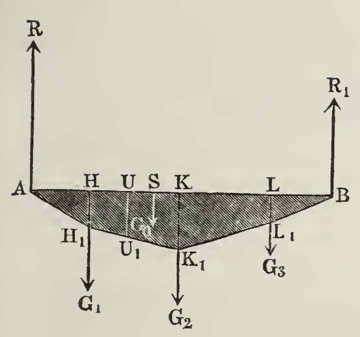
Die unmittelbare Anwendung dieser Formeln setzt voraus, daß das Transmissionsrad auf der Wasserradwelle sitze; ist aber dasselbe mit einem Armsysteme oder einem Radkranze verbunden, so wird durch die übrigen Armsysteme nur ein Theil des ganzen Umdrehungsmomentes auf die Welle übergetragen, und es fällt daher die erforderliche Stärke kleiner aus als im ersteren Falle. Hat in diesem Falle das Rad zwei Armsysteme, so kann man annehmen, daß durch das zweite Armsystem die Hälfte des ganzen Momentes Pa auf die Welle, und von da mittels des anderen Armsystemes auf das in seiner Ebene befindliche Zahnrad übergetragen werde; hat dagegen das Rad drei Armsysteme, so läßt sich annehmen, daß das mittlere Armsystem zwei und das dritte Armsystem ein Viertel des ganzen Momentes mittels der Welle auf das erste Armsystem übertrage; es ist daher bei Bestimmung der erforderlichen Wellenstärke in diesem Falle statt P, entweder $\frac{1}{2} P$ oder $\frac{3}{4} P$, und ebenso statt L, entweder $\frac{1}{2} L$ oder $\frac{3}{4} L$ einzuführen.

Wenn nun das Transmissionsrad auf einem zwischen den äußersten Radkränzen mitten innen stehenden Kranze aufsitzt, sowie wenn die Transmission durch zwei auf den äußersten Radkränzen aufsitzende Zahnräder erfolgt, so hat die Welle fast gar keine Torsion auszuhalten, und es ist daher deren Stärke aus dem Gewichte des Rades nach der Theorie der Biegungsfestigkeit zu berechnen.

Beispiel. Wenn ein oberschlägiges Wasserrad von 24 Fuß Höhe bei fünf Umdrehungen pr. Minute eine Leistung von 20 Pferdekräften verrichtet und die Transmission seiner Kraft durch ein auf seiner gußeisernen Welle sitzendes Zahnrad erfolgt, so ist die erforderliche Stärke dieser Welle:
$$d = 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} = 6 \sqrt[3]{\frac{20}{5}} = 6 \sqrt[3]{4} = 9,53 \text{ Zoll}.$$
Wollte man statt dieser Welle eine runde hölzerne Welle anwenden, so müßte man ihr mindestens die Stärke
$$d = 3 \,.\, 9,53 = 28,6 \text{ Zoll}$$
geben, und sollte diese Welle einen quadratischen Querschnitt erhalten, so würde die Seite desselben
$$s = 0,94\, d = 26,9 \text{ Zoll}$$
betragen müssen.

Um die dem Gewichte eines Wasserrades entsprechende Stärke der Welle bestimmen zu können, ist es nöthig, zuerst die beiden Zapfendrücke der letzteren zu ermitteln. Es sei in Fig. 386, AKB die Axe der in den Punkten H, K, L durch die Gewichte G_1, G_2, G_3 belasteten Wasserradwelle von der Länge $AB = l$; es seien ferner l_1, l_2, l_3 die Abstände der Angriffspunkte H, K, L der Gewichte G_1, G_2, G_3 vom Zapfen A, und es bezeichne endlich R die Größe des Zapfendruckes in A, sowie R_1 die Größe dieses Druckes in B. Sehen wir die ganze Welle als einen Hebel mit dem Stützpunkte A an, so können wir (nach Bd. I, §. 92) setzen: §. 192

Fig 386.



$$R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3}{l},$$

und wenn wir statt l_1, l_2, l_3; $l - l_1$, $l - l_2$, $l - l_3$, sowie statt R_1, R einführen:

$$R = \frac{G_1 (l - l_1) + G_2 (l - l_2) + G_3 (l - l_3)}{l} = G_1 + G_2 + G_3 - R_1.$$

Es ist leicht zu ermessen, welche Zusätze diese Formeln erhalten müssen, wenn die Zahl der Gewichte eine größere ist. Hat man die Zapfendrücke R_1 und R bestimmt, so kann man nun auch die Biegungsmomente der Welle in Hinsicht auf die verschiedenen Punkte H, K, L bestimmen. Für den Punkt H ist dieses Moment

$$M_1 = R l_1,$$

und für den Punkt K ist es:

$$M_2 = R l_2 - G_1 (l_2 - l_1)$$
$$= R l_1 + (R - G_1)(l_2 - l_1),$$

also größer oder kleiner als $M_1 = R l_1$, je nachdem R größer oder kleiner als G_1 ausfällt.

Für den Punkt L ist ferner dies Moment:

$$M_3 = R l_3 - G_1 (l_3 - l_1) - G_2 (l_3 - l_2)$$
$$= R l_1 + (R - G_1)(l_2 - l_1) + [R - (G_1 + G_2)](l_3 - l_2),$$

und dasselbe ist größer oder kleiner als das in K, je nachdem sich R größer oder kleiner als $G_1 + G_2$ herausstellt.

Trägt man diese Momente in den entsprechenden Punkten H, K, L als Ordinaten HH_1, KK_1, LL_1 auf, und verbindet man die Endpunkte A, H_1, K_1, L_1, B mit einander durch gerade Linien, so messen die Ordinaten $UU_1 \ldots$ derselben auch die Momente der Zwischenpunkte $U \ldots$ Es findet

folglich das größte Biegungsmoment M nur in einem der Angriffspunkte H, K, L statt. Zu den Gewichten $G_1, G_2, G_3 \ldots$, welche die Armsysteme in bestimmten Punkten H, K, L auf die Welle übertragen, gesellt sich auch noch das auf die ganze Axe AB stetig vertheilte Gewicht G_0 der Welle selbst. Ist l_0 der Abstand AS des Schwerpunktes S der Welle von dem Endpunkte A, so hat man die Vergrößerung des Zapfendruckes R_1 in B durch das Gewicht G_0:

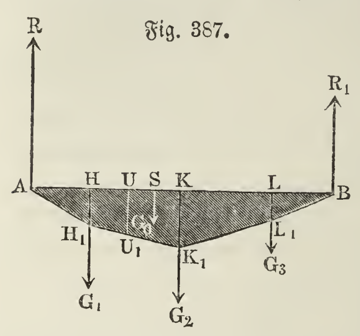


Fig. 387.

$$Z_1 = \frac{l_0}{l} G_0,$$

sowie die des Zapfendruckes R in A:

$$Z = \left(\frac{l - l_0}{l}\right) G_0.$$

In der Regel ist das Gewicht G_0 der Welle nur ein kleiner Theil vom Gewichte G des Rades und es werden daher auch durch dasselbe die Zapfendrücke nur wenig vergrößert. Deshalb ist es daher auch genügend, wenn man die Welle als einen prismatischen Körper ansieht, und $l_0 = \frac{1}{2} l$,

sowie $Z_1 = Z = \frac{1}{2} G_0$

setzt. Auch lassen sich dann die Gewichte der Wellenstärke $AH, AK, AL \ldots$

$$= \frac{l_1}{l} G_0,\ \frac{l_2}{l} G_0,\ \frac{l_3}{l} G_0 \ldots,$$

sowie ihre Momente in Hinsicht auf die Punkte $H, K, L \ldots$ der Reihe nach

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_1^2}{l},\ \frac{1}{2} G_0 \frac{l_2^2}{l},\ \frac{1}{2} G_0 \frac{l_3^2}{l} \cdots$$

setzen, so daß zuletzt die durch das Wellengewicht hervorgebrachten Vergrößerungen der Biegungsmomente in Hinsicht auf die Punkte H, K, L der Reihe nach folgen:

$$Z l_1 - \frac{1}{2} G_0 \frac{l_1^2}{l} = \frac{1}{2} G_0 \frac{l_1 (l - l_1)}{l},$$

$$Z l_2 - \frac{1}{2} G_0 \frac{l_2^2}{l} = \frac{1}{2} G_0 \frac{l_2 (l - l_2)}{l},$$

$$Z l_3 - \frac{1}{2} G_0 \frac{l_3^2}{l} = \frac{1}{2} G_0 \frac{l_3 (l - l_3)}{l} \text{ u. s. w.}$$

Addirt man nun diese Momente zu den oben angegebenen Momenten, welche den Gewichten G_1, G_2, G_3 entsprechen, so erhält man die vollständigen Biegungsmomente, wonach die erforderlichen Stärken der Welle in $H, K, L \ldots$ zu bestimmen sind. Soll die Welle an allen Stellen eine und dieselbe Stärke erhalten, so muß man natürlich dieselbe nach dem größten dieser Momente berechnen. Vortheilhafter ist es aber, die Stärke

der Welle nach den Enden zu, entsprechend der Abnahme der Biegungsmomente, allmälig schwächer zulaufen zu lassen. Zu diesem Zwecke versieht man auch die Welle sehr oft mit Federn oder Rippen, deren Höhe nach den Wellenenden hin allmälig abnehmen.

Beispiel. Die Wasserradwelle AKB, Fig. 387, hat die Länge von 10 Fuß, das Gewicht $G_0 = 3000$ Pfund, und trägt in H und K die Armsysteme eines Wasserrades von 20000 Pfund Gewicht, sowie in L ein Transmissionsrad von 2000 Pfund; wenn nun der Abstand $AH = BL = 2$ Fuß und die Länge HK des Wasserrades 3 Fuß beträgt, welches sind die Zapfendrücke und die Biegungsmomente dieser Welle?

Es ist hier $G_1 = G_2 = 10000$, $G_3 = 2000$ Pfund, und
$l_1 = 2$, $l_2 = 5$, $l_3 = 8$ und $l = 10$ Fuß,
daher der Zapfendruck in B:

$$R_1 = \frac{G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3}{l} = \frac{20000 + 50000 + 16000}{10} = 8600 \text{ Pfund},$$

ferner der Zapfendruck in A:

$$R = G_1 + G_2 + G_3 - R_2 = 22000 - 8600 = 13400 \text{ Pfund}.$$

Das Biegungsmoment in H ist:

$$M_1 = R l_1 = 13400 . 2 = 26800 \text{ Fußpfund},$$

das in K:

$$M_2 = R l_1 + (R - G_1)(l_2 - l_1) = 26800 + 3400 . 3 = 37000 \text{ Fußpfund},$$

und dagegen das in L:

$$M_3 = R_1 (l - l_3) = 8600 . 2 = 17200 \text{ Fußpfund}.$$

Durch das Wellengewicht wird annähernd jeder der beiden Zapfendrücke um $\frac{1}{2} G_0 = 1500$ vergrößert; es fällt also im Ganzen

$$R_1 = 8600 + 1500 = 10100 \text{ Pfund}$$

und

$$R = 13400 + 1500 = 14900 \text{ Pfund}$$

aus.

Ferner steigert sich durch das letzte Gewicht das Biegungsmoment in Hinsicht auf H um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_1 (l - l_1)}{l} = \frac{2 . 8}{10} \cdot 1500 = 2400 \text{ Fußpfund},$$

in Hinsicht auf K um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_2 (l - l_2)}{l} = \frac{5 . 5}{10} \cdot 1500 = 3750 \text{ Fußpfund},$$

und in Hinsicht auf L um

$$\frac{1}{2} G_0 \frac{l_3 (l - l_3)}{l} = \frac{8 . 2}{10} \cdot 1500 = 2400 \text{ Fußpfund},$$

so daß folglich das ganze Moment in Hinsicht auf H:

$$26800 + 2400 = 29200 \text{ Fußpfund},$$

das in Hinsicht auf K:

$$37000 + 3750 = 40750 \text{ Fußpfund},$$

und das in Hinsicht auf L:

$$17200 + 2400 = 19600 \text{ Fußpfund}$$

zu setzen ist.

Es bleibt nun im Folgenden noch anzugeben, wie aus dem gefundenen §. 193
Zapfendrucke und dem größten Biegungsmomente (M) die **Wellenstärken**

zu berechnen sind. Ist der Querschnitt der Welle kreisrund und der Durchmesser derselben $= d$, so hat man nach Bd. I, §. 236, das zulässige Biegungsmoment in diesem Querschnitte:

$$M = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{2}\right)^3 T = \frac{\pi d^3}{32} T,$$

und es folgt daher umgekehrt, der dem Momente M entsprechende Wellendurchmesser:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 M}{\pi T}} = 2,17 \sqrt[3]{\frac{M}{T}},$$

oder, wenn man M nicht in Zollpfund, sondern in Fußpfund giebt:

$$d = 4,97 \sqrt[3]{\frac{M}{T}}.$$

Führt man aus Bd. I, §. 240, für Gußeisen $T = 7000$ Pfund ein, so erhält man:

$$d = \frac{4,97}{\sqrt[3]{7000}} \sqrt[3]{M} = 0,260 \sqrt[3]{M} \text{ Zoll.}$$

Der Sicherheit wegen nimmt man aber T nur 4500 an, und setzt hiernach die gesuchte Stärke gußeiserner Wellen:

$d = 0,131 \sqrt[3]{M}$, wenn M in Zollpfund, und

$d = 0,300 \sqrt[3]{M}$ Zoll, wenn M in Fußpfund gegeben ist.

Für schmiedeeiserne Wellen genügt

$$d = 0,250 \sqrt[3]{M} \text{ Zoll.}$$

Hölzerne Wellen sind $2^1/_2$- bis 3mal so stark zu machen als gußeiserne.

Für Wellen mit quadratischem Querschnitte ist die Seitenlänge

$s = 0,94\, d,$

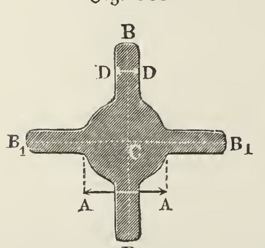
$= 0,282 \sqrt[3]{M}$, wenn dieselben aus Gußeisen bestehen.

Für eine hohle Welle mit den Durchmessern d_1 und d_2 ist wieder statt d

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{1 - \psi^4}},$$

wo $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ bezeichnet, zu setzen.

Fig. 388.



Ist bei einer gerippten Welle der Durchmesser $\overline{AA}$, Fig. 388, des cylindrischen Kernes $= d_1$, ferner die ganze Höhe $\overline{BB}$ der Rippe $= h_1$ und die Dicke $\overline{DD} = s_1$, so hat man das Tragmoment dieser Welle (vgl. Bd. I, §. 228 u. s. w.):

$$M = \left(\frac{\pi d_1^4}{64} + \frac{(h_1^3 - d_1^3) s_1 + (h_1 - d_1) s_1^3}{12}\right) \frac{T}{\frac{1}{2} h_1}$$

oder, wenn man $h_1 = \mu d_1$ und $s_1 = \nu d_1$ setzt,

$$M = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{(\mu^3 - 1)\nu + (\mu - 1)\nu^3}{3}\right) \frac{d_1^3 T}{2\mu}.$$

Nun ist aber für die cylindrische Welle vom Durchmesser d dieses Moment

$$M = \frac{\pi d^3}{32} T;$$

setzt man daher diese Momente einander gleich, so folgt die Stärke des cylindrischen Kernes der gerippten Welle:

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16}{3\pi}[(\mu^3 - 1)\nu + (\mu - 1)\nu^3]}}.$$

In den meisten Fällen ist ν so klein gegen μ, daß man das Glied $(\mu - 1)\nu^3$ außer Acht lassen und einfacher

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16(\mu^3 - 1)\nu}{3\pi}}}$$ setzen kann.

Gewöhnlich nimmt man $\mu = \frac{h_1}{d_1} = 3$ und $\nu = \frac{s_1}{d_1} = \frac{1}{3}$ an, so daß man einfach

$$d_1 = \frac{d \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16 . 26}{9\pi}}} = 0{,}574\, d,$$ sowie

$h_1 = 1{,}722\, d$ und $s_1 = 0{,}191\, d$ erhält.

Wenn von den beiden Momenten Pa und M das eine viel größer ist als das andere, so kann man das kleinere Moment ganz außer Acht lassen, folglich die Stärke der Welle nur nach dem größeren Momente berechnen, und zwar nach der Formel

$$d = 0{,}355 \sqrt[3]{Pa},$$

wenn das Torsionsmoment Pa das größere, und dagegen nach der Formel

$$d = 0{,}300 \sqrt[3]{M},$$

wenn das größte Biegungsmoment M das größere ist. Weichen aber beide Momente nicht bedeutend von einander ab, so muß man die Stärke nach der Theorie der zusammengesetzten Festigkeit (s. Bd. I, §. 277) berechnen, welche eine der Grundformeln

$$d^3 = \frac{16}{\pi} \frac{Pa}{T} \left(1 - \frac{32 M}{\pi d^3 T}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$d^3 = \frac{32\,M}{\pi\,T}\left[1 - \left(\frac{16\,Pa}{\pi\,d^3\,T}\right)^2\right]^{-1} \text{ giebt.}$$

Nun ist aber die Wellenstärke 1) ohne Rücksicht auf Biegung

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{16\,Pa}{\pi\;T}},$$ und 2) dieselbe ohne Rücksicht auf Torsion:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{32\,M}{\pi\,T}},$$ daher läßt sich auch setzen:

$$d^3 = d_1^3\left[1 - \left(\frac{d_2}{d}\right)^3\right]^{-\frac{1}{2}} \text{ und}$$

$$d^3 = d_2^3\left[1 - \left(\frac{d_1}{d}\right)^6\right]^{-1},$$ oder annähernd, je nachdem d_1 größer oder kleiner als d_2 ist, entweder

1) $$d = d_1\left[1 + \tfrac{1}{6}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3\right], \text{ oder}$$

2) $$d = d_2\left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^6\right].$$

Mit Hülfe der obigen Formel

$$d = 0{,}300\,\sqrt[3]{M}$$

läßt sich endlich auch die erforderliche Stärke der Zapfen bestimmen, wenn man voraussetzt, daß der Zapfen seine ungünstigste Lage habe, nämlich mit seinem Ende auf dem Lager ruhe. Ist dann l_0 die Länge, d_0 die Stärke des Zapfens und R der nach §. 192 zu bestimmende Zapfendruck, so hat man folglich

$$d_0 = 0{,}300\,\sqrt[3]{R\,l_0}$$

zu setzen.

Nun steht aber die Länge l_0 in einem bestimmten Verhältnisse λ zur Stärke d_0 des Zapfens, daher läßt sich auch

$$d_0^3 = (0{,}300)^3\,.\,R\,\lambda\,\frac{d_0}{12}$$

setzen, so daß

$$d_0 = \sqrt{\frac{(0{,}300)^3}{12}}\,\sqrt{\lambda\,R} = 0{,}0475\,\sqrt{\lambda\,R} \text{ Zoll}$$

folgt.

Gewöhnlich ist $\lambda = 1$ bis 1,25, und daher die Zapfenstärke

$$d_0 = 0{,}0475\,\sqrt{R} \text{ bis } 0{,}0531\,\sqrt{R} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Wenn das größte Biegungsmoment einer gußeisernen Wasserradwelle, $M = 40750$ Fußpfund beträgt (s. das Beispiel des vorigen Paragraphen), so ist die nöthige Stärke derselben:

$$d = 0{,}300\,\sqrt[3]{M} = 0{,}300\,\sqrt[3]{40750} = 10{,}3 \text{ Zoll},$$

und wenn die beiden Zapfendrücke dieser Welle $R = 14900$ und $R_1 = 10100$ Pfund betragen, so sind die erforderlichen Zapfenstärken derselben:

$$d_0 = 0{,}0531 \sqrt{14700} = 6{,}48 \text{ Zoll}$$

und

$$= 0{,}0531 \sqrt{10100} = 5{,}34 \text{ Zoll.}$$

Hätte diese Welle nur das Torsionsmoment

$$Pa = \frac{30\,.\,480\,L}{\pi u} = \frac{30\,.\,480\,.\,20}{5\,\pi} = 18335 \text{ Fußpfund (s. Beispiel zu §. 191)}$$

aufzunehmen, so wäre die nöthige Wellenstärke

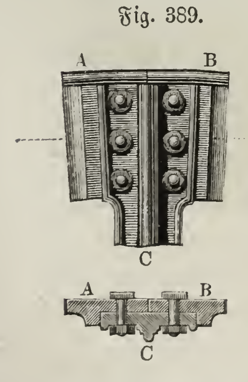
$$d = 0{,}355 \sqrt[3]{18335} = 9{,}36 \text{ Zoll,}$$

setzt man daher in obiger Formel 2) $d_2 = 10{,}30$ und $d_1 = 9{,}36$ ein, so giebt dieselbe die Stärke der Welle, welche das gegebene Biegungs- und Torsionsmoment zugleich aufnimmt:

$$d = d_2 \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^6\right] = 10{,}30 \left[1 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{9{,}36}{10{,}30}\right)^6\right] = 10{,}30\,.\,1{,}188$$
$$= 12{,}24 \text{ Zoll.}$$

Construction der Wasserräder. Im Folgenden möge noch etwas §. 194
specieller von der Zusammensetzung und Auflagerung der oberschlägigen Wasserräder gehandelt werden. Der Zusammensetzung der hölzernen Radkränze aus einer doppelten Lage von Zirkelstücken (Felgen) ist schon oben (§. 172) gedacht worden. Schmiedeeiserne Radkränze werden auf gleiche Weise zusammengesetzt, gußeiserne Radkränze läßt man dagegen nur in einer Lage von Zirkelstücken bestehen. Das Befestigungsmittel besteht bei den hölzernen Radkränzen in Holz- oder Eisennägeln, bei den schmiedeeisernen in Nieten und bei den gußeisernen in Schrauben. Die gewöhnlichen ganz oder nahe radial stehenden Hauptradarme werden in der Regel auf die Außenflächen der Radkränze aufgeschraubt. Besteht der Radkranz aus Gußeisen, so können die Schrauben, wodurch die Radfelgen A, B, Fig. 389, mit einander verbunden werden, auch zugleich zur Befestigung des Armes C dienen. Auf gleiche Weise werden auch die Arme auf der Rosette geschraubt. Damit diese Schrauben nur einem Widerstand nach ihren Axenrichtungen zu widerstehen haben, dürfen die Armenden nicht frei aufliegen, sondern sind in Vertiefungen oder zwischen Seitenbacken einzulagern. Zu Verhinderungen der Seitenschwankungen versieht man auch wohl die Räder mit Diagonalarmen, welche von der Rosette des einen Radkranzes nach dem anderen Radkranze reichen. Auch wendet man solche Diagonalarme dann an, wenn das Rad eine größere Weite hat, wo sie dann, wie der Durchschnitt des Rades in Fig. 390 (a. f. S.) zeigt, einen mittleren Radkranz DD tragen. Diese Arme sind mit einem Ende durch einen Splint und mit dem anderen Ende durch Schrauben in Hülsen oder Büchsen

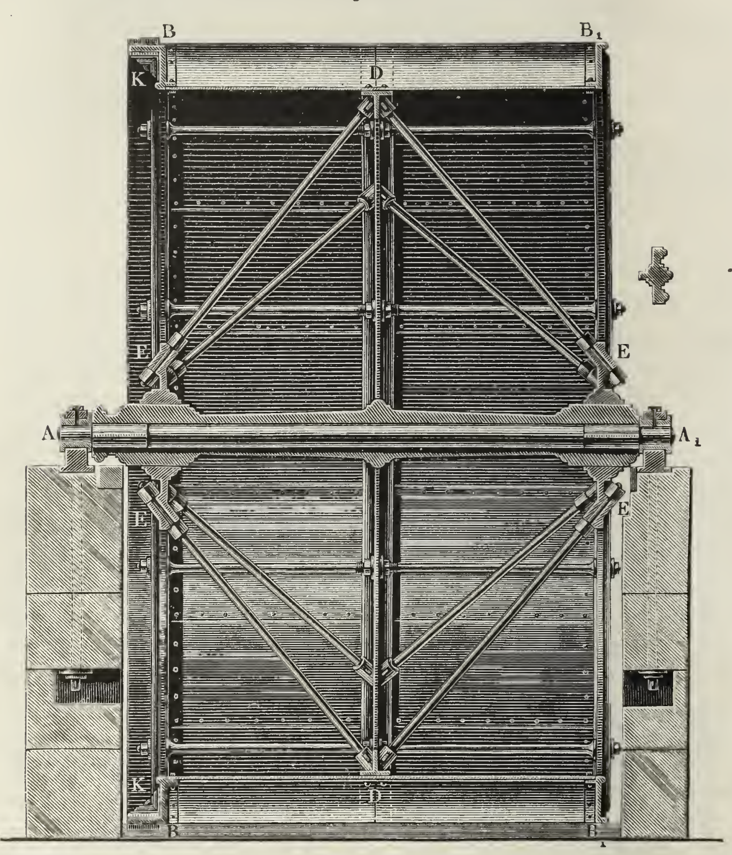
Fig. 389.



befestigt, welche theils mit der Rosette *EE*, theils mit dem Radkranze *DD* ein Ganzes bilden.

Wenn die Transmission durch ein mit dem Radkranze verbundenes Zahnrad erfolgt, so wendet man auch nicht selten statt der starken steifen Arme

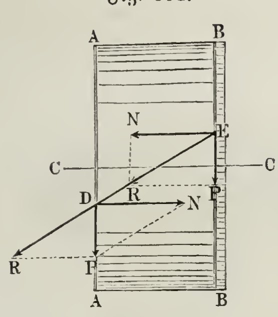
Fig. 390.



aus Holz oder Gußeisen schwache gespannte Arme aus Schmiedeeisen an. Dieselben werden gleich bei ihrem Einsetzen mittels Schrauben oder Keile so stark gespannt, daß sie das Rad nur durch ihre Zugfestigkeit tragen. Um einem Rade mit gespannten Armen die nöthige Steifigkeit zu geben, ist es nicht allein mit gespannten Diagonalarmen, sondern auch noch mit besonderen Umfangsstangen auszurüsten. Die letzteren Stangen sind nicht mit den Zugstangen (Hängenägeln) zu verwechseln, wodurch die Radkränze oder Radarme mit einander verbunden werden; sie sind am inneren Radumfange herumlaufende, schräg gegen die Radkränze stehende Stangen, welche

den Zweck haben, die Kraft des einen Radkranzes AA, Fig. 391, auf den anderen, das Transmissionsrad tragenden Radkranz BB überzutragen. Es sei P ein Theil der Kraft des Rades AA, und DE die Umfangsstange, welche denselben auf den Kranz BB überzutragen hat. Diese Kraft P zerlegt sich in eine Seitenkraft N parallel zur Radaxe CC und in eine Seitenkraft R in der Richtung der Stange DE. Die letztere pflanzt sich durch DE hindurch bis zum Ende E im zweiten Kranze BB fort und zerlegt sich hier wieder in die Seitenkräfte

Fig. 391.



$$\overline{EN} = -N \text{ und } \overline{EP} = P.$$

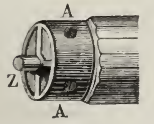
Den Kräften $N, -N$ widersteht das ganze Schaufelsystem durch seine Druckfestigkeit, und die Kraft $\overline{EP} = P$ vereinigt sich mit der Kraft des Kranzes BB, welcher beide zusammen an das Transmissionsrad abgiebt.

Zu den Holzwellen nimmt man am liebsten Eichenholz, jedoch verwendet man hierzu auch oft Tannen- und Fichtenholz. Für Stern- und Rosettenräder bearbeitet man dieselben polygonal, für Satteläder aber quadratisch. Die Zapfen der hölzernen Wellen sind entweder schmiedeeiserne Spitzzapfen, wie Fig. 392, oder schmiedeeiserne Hakenzapfen, wie Fig. 393, oder gußeiserne Blattzapfen. Die letzteren bestehen entweder nur aus einem Blatte, dem sogenannten Bleuel, wie CD, Fig. 394,

Fig. 392. Fig. 393. Fig. 394.

oder aus mehreren Blättern. Damit der Wellenhals gegen das Aufspringen gesichert werde, arbeitet man ihn etwas conisch ab und treibt über denselben eiserne Ringe AA, BB ... (Fig. 393) von $^1/_4$ bis $^1/_2$ Zoll Dicke und $1^1/_2$ bis 3 Zoll Breite. Statt der drei Ringe wendet man auch wohl einen einzigen Ring AA an, welcher den ganzen Wellenhals umfaßt und mit den vier Flügeln des Zapfens ein Ganzes bildet, wie Fig. 395.

Fig. 395.

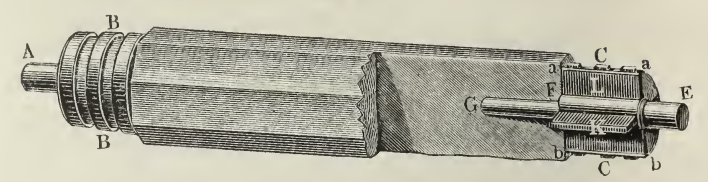


In Fig. 396 (a. f. S.) ist eine achtseitige Holzwelle abgebildet. Dieselbe zeigt links das Zapfenende A und den Hals BB mit den drei Eisenringen, und rechts die hintere Hälfte des Wellenhalses CC und den Zapfen EF mit vier Flügeln K, L ... und dem Schwanze FG. Auch bemerkt man in aa und

bb die Keile, welche zwischen den Ringen und den Flügeln von der Stirnfläche aus in den Wellenhals eingetrieben werden.

Die gußeisernen Wellen sind entweder massiv oder hohl. Bei den massiven Wellen bilden die übrigens genau abzudrehenden Zapfen mit der

Fig. 396.



Welle ein Ganzes, bei den hohlen Wellen werden dieselben dagegen an den Wellenkörper an- oder eingesetzt. Die Wellenköpfe, oder die Stellen, worauf die Hülsen der Rosetten und Zahnräder zu sitzen kommen, sind entweder einfach cylindrisch oder gerippt und müssen an ihrem Umfange genau abgedreht werden. Bei Wellen mit cylindrischen Köpfen erfolgt die Befestigung durch einen oder zwei Keile, welche zur Hälfte in dem Kopfe und zur Hälfte in der Hülse sitzen; bei den Wellen mit gerippten Köpfen wird jede Rippe einzeln in der Hülse verkeilt.

Eine gerippte massive Wasserradwelle mit cylindrischen Köpfen führt Fig. 397 vor Augen, und eine hohle Wasserradwelle mit gerippten Köpfen zeigt Fig. 398. In beiden Figuren sind A und A_1 die Zapfen, sowie B und

Fig. 397.

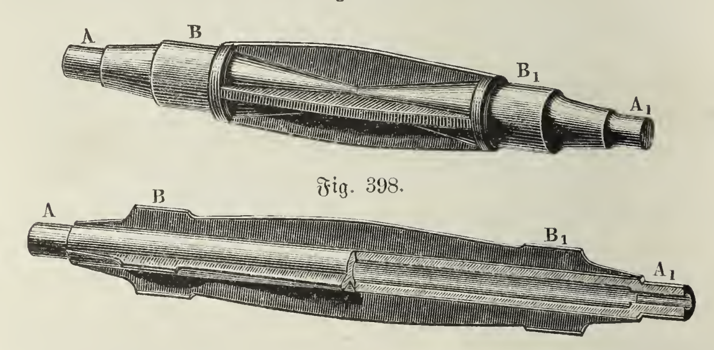


Fig. 398.

B_1 die Tragköpfe. Eine einfache hohle gußeiserne Welle mit eingesetzten Zapfen A, A_1 ist in Fig. 390 abgebildet.

Die Wellenzapfen ruhen in Lagern, welche, um das Rad bei seiner Umdrehung in sicherer Lage zu erhalten, auf starken Fundamenten oder Gestellen befestigt sein müssen. Jedes Zapfenlager besteht aus einer Pfanne und aus dem Unterlager oder dem sogenannten Angewelle (Angewäge). Die Pfanne besteht in der Regel aus Gußeisen, seltener aus Stein, Holz,

Glas, Rothguß (8 Theile Kupfer und 1 Theil Zinn); sie ist entweder mit oder ohne Deckel, sowie mit oder ohne Metallfutter.

Ein Zapfenlager mit hölzernem Angewäge ist aus Fig. 354, und ein solches mit eiserner Fußplatte und Deckel aus Fig. 355 ersichtlich. Ein einfaches offenes Zapfenlager zeigt Fig. 399, ein solches mit Metallfutter F zum Auswechseln Fig. 400, und ein geschlossenes Zapfenlager mit Metallfutter zeigt Fig. 401. Diese Lager werden durch die Schraubenbolzen AA mit ihrer Fußplatte BB entweder unmittelbar auf das Fundament

Fig. 399.

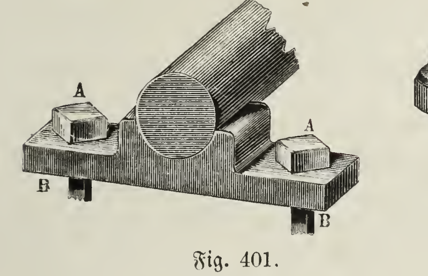


Fig. 400.

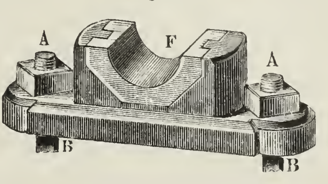
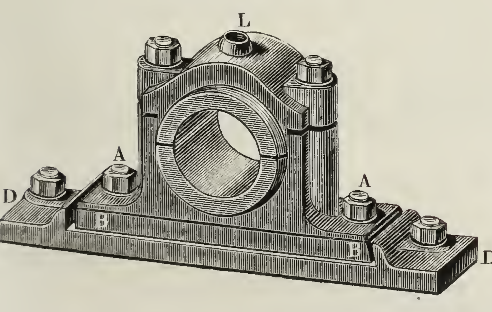


Fig. 401.



oder auf eine mit dem Fundamente fest verbundene Sohlplatte DD aufgeschraubt. Im Deckel des Zapfenlagers in Fig. 401 ist noch ein Schmierloch L angebracht, auf welches eine Schmierbüchse aufgesetzt werden kann. Zur besseren Vertheilung der durch das Schmierloch zufließenden Schmiere werden Kreuzgerinne in die Innenflächen der Lagerfutter eingeschnitten.

Zapfenreibung der Wasserräder. Einen nicht ganz unansehn- §. 195
lichen Theil der mechanischen Leistung verliert ein oberschlägiges Wasserrad in der durch die Zapfenreibung consumirten Arbeit. Dieselbe hängt vorzüglich vom Gewichte G des Rades ab, und ist $F = \varphi G$, wenn φ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Ist r der Halbmesser des Zapfens und u die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute, so läßt sich die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens

$$v = \frac{\pi u r}{30},$$

und daher die Arbeit der Zapfenreibung

$$L_1 = Fv = \varphi G v = \frac{\pi u r}{30} \varphi G = 0,1047 \varphi u G r$$

setzen. Hierbei ist für genau abgedrehte Zapfen, nach Band I, §. 181 $\varphi = 0{,}075$ anzunehmen, wenn dieselben mit Oel, Talg oder Fett geschmiert sind; bei der besten Abwartung geht jedoch dieser Coefficient auf $\varphi = 0{,}054$ herab, wogegen er bei schlechteren Schmiermitteln, z. B. bei der Graphitschmiere, auf $\varphi = 0{,}110$ steigen kann.

Die Größe und folglich auch das Gewicht eines Wasserrades hängt jedenfalls auch von der Leistung desselben ab, und man kann annehmen, wenn es nur auf eine Annäherung ankommt, daß das Gewicht proportional der Leistung des Rades wachse. Außerdem hängt dieses Gewicht auch noch von dem Grade der Zellenfüllung und der Umdrehungszahl des Rades ab, denn wenn sich die Zellen noch einmal so stark füllen, so wird dadurch das Gewicht des Rades nur wenig größer, die Leistung desselben aber ziemlich verdoppelt, und wenn auf dasselbe Rad noch einmal so viel Wasser geschlagen wird, so macht es bei derselben Last beinahe doppelt so viel Umdrehungen und verrichtet also auch nahe die doppelte Arbeit. Nehmen wir hiernach an, daß das Radgewicht mit der Leistung L, dem Füllungscoefficienten ε und der Umdrehungszahl u gleichmäßig wachse, und führen wir noch einen Erfahrungscoefficienten ι ein, so können wir

$$G = \iota \frac{L}{\varepsilon u}$$

setzen.

Nach Redtenbacher ist für ein kleines eisernes Rad mit $1/_3$ Füllung, 9,3 Umdrehungszahl und 3175 Kilogramme Gewicht, die Leistung $L = 6{,}3$; es folgt daher hiernach

$$\iota = \frac{\varepsilon u G}{L} = {}^1/_3 \cdot \frac{9{,}3 \,.\, 3175}{6{,}3} = 1560;$$

dagegen ist für ein Freiberger hölzernes Kunstrad mit eisernen Schaufeln $\varepsilon = {}^1/_4$, $u = 5$, $G = 20000$ und $L = 20$, daher

$$\iota = {}^1/_4 \,.\, 5 \,.\, \frac{20000}{20} = 1250.$$

Nehmen wir nun aus beiden Werthen für ι das Mittel, so erhalten wir für das Radgewicht die Formel:

$$G = 1400 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Kilogramme},$$

oder

$$= 2800 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Pfund}.$$

Von dem Gewichte G eines Rades hängt die Zapfenstärke, und hiervon wieder die Arbeit der Reibung ab; deshalb hat also dieses Gewicht einen zweifachen Einfluß auf die Zapfenreibung. Wir haben die mittlere Zapfenstärke (§. 193)

$$2r = 0{,}0475 . \sqrt{\frac{G}{2}} \text{ Zoll} = 0{,}00283 \sqrt{G} \text{ Fuß}$$

angegeben, können also hiernach $G r = 0{,}0142 \sqrt{G^3}$, und daher die Arbeit der Zapfenreibung

$$L_1 = 0{,}1047\, u \varphi . 0{,}00142 \sqrt{G^3} = 0{,}00015\, u\, \varphi \sqrt{G^3}$$

oder, wenn wir die Leistung $= L$ Pferdekräfte einführen, diese Arbeit

$$L_1 = 0{,}00015\ u \varphi \sqrt{\left(2800\ \frac{L}{\varepsilon u}\right)^3} = 22{,}2 . \varphi . \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fußpfund}$$

$$= 0{,}0463\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Pferdekräfte,}$$

und ihr Verhältniß zur übrigen Radleistung

$$\frac{L_1}{L} = 0{,}0463\, \varphi \sqrt{\frac{L}{\varepsilon^3 u}} \quad \text{setzen.}$$

Beispiele. 1. Welche Arbeit consumirt die Zapfenreibung eines 25000 Pfund schweren Wasserrades mit 6 Zoll dicken Zapfen, wenn dasselbe pr. Minute 6 Umdrehungen macht? Nimmt man den Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}08$ an, so hat man die Zapfenreibung $\varphi G = 0{,}08 . 25000 = 2000$ Pfund, ferner das statische Moment derselben $= \varphi G r = \frac{1}{4} . 2000 = 500$ Fußpfund und endlich ihre Arbeit:

$$L_1 = 0{,}1047 . 6 . \varphi G r = 314 \text{ Fußpfund.}$$

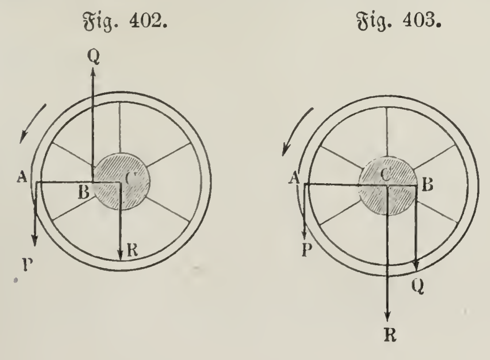
2. Welchen Arbeitsverlust giebt die Zapfenreibung eines Wasserrades von 30 Pferdekräfte Leistung bei der relativen Zellenfüllung $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und der Umdrehungszahl $u = 4$? Es ist derselbe:

$$L_1 = 0{,}0463 . 0{,}08 \sqrt{\frac{30 . 27}{4}} \cdot L = 0{,}003704 \sqrt{\frac{810}{4}} \cdot L = 0{,}0526 . L,$$

d. i. ungefähr $5\frac{1}{4}$ Procent der Nutzleistung, also $1\frac{3}{5}$ Pferdekräfte.

Anmerkung. Die Zapfenreibung eines Rades kann noch durch die Art und Weise des Anschließens der übrigen Maschinerie vergrößert oder herabgezogen werden. Läßt man, wie Fig. 402 vor Augen führt, Kraft P und Last Q auf einerlei Seite wirken, so wird der Zapfendruck R durch die Last Q vermindert; es fällt also dann die Zapfenreibung kleiner aus; läßt man aber Kraft und Last auf entgegengesetzten Seiten des Rades wirken, wie Fig. 402 vorstellt, so wird der Zapfendruck R durch die Last Q vergrößert, und es wird also hier die Zapfenreibung um eben so viel größer als im vorigen Falle kleiner. Macht man im ersten Falle noch den Hebelarm CB der Last gleich dem Hebelarm CA der

Fig. 402. Fig. 403.



Kraft, indem man z. B. die Transmission durch ein mit einem der Radkränze unmittelbar verbundenes Zahnrad bewirkt, wie z. B. Fig. 355, Seite 404 vorstellt, so wird die Wirkung der Kraft auf die Zapfen durch die Last fast ganz aufgehoben. Welche Vorzüge diese Construction übrigens hat, ist schon oben (Bd. II, §. 190) angegeben worden.

§. 196 **Totalleistung.** Die Totalleistung eines oberschlägigen Wasserrades läßt sich nun

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1)\, v_1}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v$$

setzen, oder, wenn man das Wasser nahe tangential und mit der Geschwindigkeit $c_1 = 2 v_1$ eintreten läßt und annähernd $v_1 = v$ annimmt, so daß

$$\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1)\, v_1}{g} = \frac{v^2}{g}$$

ausfällt,

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a} G v.$$

Setzen wir, dem vorigen Paragraphen zufolge, das Radgewicht

$$G = 2800 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Pfund},$$

und hiernach die Arbeit der Zapfenreibung:

$$L_1 = 22{,}2\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fußpfund},$$

so erhalten wir für die Totalleistung des Wasserrades:

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_3 + \xi h_4\right) Q\gamma - 22{,}2\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}}.$$

Da zur Erzeugung der Geschwindigkeit $c = 2v$ das Gefälle

$$4 \,.\, 1{,}1 \,.\, \frac{v^2}{2g} = \frac{4{,}4}{2g} \left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 = 0{,}000772 \,.\, u^2 a^2$$

nöthig ist, so bleibt vom Totalgefälle h das Druckgefälle $h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2$ übrig, und setzen wir nun noch der Einfachheit wegen,

$$h_3 + \xi h_4 = \chi \left[h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right],$$

wo χ ein ächter Bruch (etwa $^2/_3$ oder $^3/_4$ u. s. w.) ist, so erhalten wir die Leistung des Wasserrades:

$$L = \left(\frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 + \chi \left[h - \frac{4{,}4}{2g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right]\right) Q\gamma - 22{,}2\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}},$$

oder annähernd, wenn man $4{,}4\, \chi \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{g} = \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2$ setzt:

$$L = \chi \left[h - \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2\right] Q\gamma - 22{,}2\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}}.$$

Nun können wir aber in dem Ausdrucke für die Arbeit der Reibung annähernd

$$L = \chi h Q \gamma \text{ Fußpfund} = \frac{\chi h Q \gamma}{480} \text{ Pferdekräfte}$$

setzen, daher bleibt dann

$$L = \left[h - \frac{1}{g}\left(\frac{\pi u a}{30}\right)^2 - 22{,}2\,\varphi \sqrt{\frac{\chi h^3 Q \gamma}{(480\,\varepsilon^3) u}}\right] \chi Q \gamma,$$

oder $g = 31{,}25$ Fuß, und $\gamma = 61{,}74$ Pfund gesetzt,

$$L = \left[h - 0{,}0003860\,.\,(u a)^2 - 0{,}01659 \varphi \sqrt{\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3 \frac{\chi Q}{u}}\right] \chi Q \gamma \text{ Fußpfd.}$$

Aus der Art und Weise, wie u in diesem Ausdrucke vorkommt, folgt, daß die Leistung L weder für $u = 0$, noch für $u = \infty$, sondern für einen zwischen 0 und ∞ liegenden Werth von u ein Maximum wird. Der höhere Calcül giebt diesen Werth

$$u = \sqrt[5]{\frac{\chi Q \gamma}{480^3} \cdot (5{,}55\,\varphi g)^2 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3 \left(\frac{30}{\pi a}\right)^4},$$

oder für das preußische Maaß:

$$u = 2{,}585 \sqrt[5]{\frac{\chi \varphi^2 Q}{a^4} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^3}$$

oder wenn man annähernd $a = \frac{1}{2} h$ setzt:

$$u = 4{,}50 \sqrt[5]{\frac{\chi \varphi^2 Q}{\varepsilon^3 h}}.$$

In der Praxis macht man u meist noch etwas größer, um eine möglichst gleichförmige Umdrehung des Rades zu erlangen.

Setzen wir diesen Werth für u in den Ausdruck für L ein, so erhalten wir die Formel für die Maximalleistung des Wasserrades:

$$L = \left[h - 0{,}002580 \sqrt[5]{(\chi Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6} - 0{,}010318 \sqrt[5]{(\chi Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}\right] \cdot \chi Q \gamma,$$

$$= \left[h - 0{,}0129 \sqrt[5]{(\chi Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}\right] \cdot \chi Q \gamma.$$

Der Wirkungsgrad eines oberschlägigen Wasserrades läßt sich, da die disponible Leistung $= Q h \gamma$ ist, allgemein setzen:

$$\eta = \frac{\left(h_1 + \xi h_2 + \frac{(c_1 \cos.\alpha_1 - v_1) v_1}{g}\right) Q \gamma - \varphi \frac{r}{a} G v}{Q h \gamma};$$

nach dem Vorstehenden ist der Maximalwerth desselben:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \chi \left(1 - \frac{0{,}0129 \sqrt[5]{(\chi\, Q\, a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^6}}{h}\right).$$

Beispiele. 1. Für ein oberschlägiges Wasserrad, welches ein Gefälle h von 35 Fuß und ein Aufschlagequantum $Q = 5$ Cubikfuß benutzt, bei welchem ferner der Füllungscoefficient $\varepsilon = \frac{1}{4}$, der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$ und der Gefällcoefficient $\chi = \frac{5}{6}$ ist, hat man die vortheilhafteste Umdrehungszahl:

$$u = 4{,}50 \sqrt[5]{\frac{5}{6} \cdot \frac{0{,}01\,.\,64\,.\,5}{35}} = 4{,}50 \sqrt[5]{0{,}0762} = 2{,}69.$$

2. Für $h = 10$, $Q = 15$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ und $\chi = \frac{4}{5}$ stellt sich dagegen die gesuchte zweckmäßigste Umdrehungszahl

$$u = 4{,}50 \sqrt[5]{\frac{4}{5} \cdot \frac{0{,}01\,.\,27\,.\,15}{10}} = 4{,}58 \sqrt[5]{0{,}325} = 3{,}59 \text{ heraus.}$$

§. 197 **Effective Radleistung.** Ueber die Wirkungen oberschlägiger Wasserräder sind zwar von Vielen, namentlich von Smeaton, Nordwall, Morin u. s. w. Beobachtungen oder Versuche angestellt worden, es bleibt indessen noch sehr zu wünschen, daß deren noch mehr angestellt werden, und zwar namentlich an recht gut construirten und an sehr hohen Rädern, weil man die Leistungen letzterer erfahrungsmäßig noch gar nicht genau kennt, und weil, wie sich der Verfasser hinreichend überzeugt hat, die Wirkungen derselben meist zu klein angenommen werden. Smeaton machte Versuche an einem Modellrade von 75 engl. Zoll Umfang mit 36 Zellen, und fand bei einer Umdrehungszahl $u = 20$ den größten Wirkungsgrad 0,74. D'Aubisson führt in seiner Hydraulik an, daß er an einem $11\frac{1}{3}$ Meter hohen Wasserrade bei $2\frac{1}{2}$ Meter Umfangsgeschwindigkeit den Wirkungsgrad 0,76 gefunden habe. Der Verfasser fand ihn bei einem hiesigen Pochwerksrade von 7 Meter Höhe, $\frac{6}{7}$ Meter Weite und mit 48 Zellen bei 12 Umgängen pr. Minute = 0,78. Bei Kunst- und anderen Rädern von 10 bis 11 Meter Höhe fand derselbe, wenn sie nur 5 Umdrehungen pr. Minute machten, den Wirkungsgrad 0,80 und oft noch höher. Es kann aber auch leicht nachgewiesen werden, daß sich der Wirkungsgrad eines sehr hohen oberschlägigen Wasserrades, namentlich wenn dasselbe nur 3 bis 4 Umdrehungen macht, bis auf 0,83 steigern läßt, indem vielleicht durch das Eintrittsgefälle 3, durch das zu zeitige Ausleeren 9 und durch die Zapfenreibung 5 Procent an Wirkung verloren g hen. Kleine Räder geben immer einen kleineren Wirkungsgrad, nicht allein weil sie mehr Umläufe machen, sondern auch weil sich bei ihnen der wasserhaltende Bogen kleiner herausstellt. Die meisten und ausführlichsten Versuche über die Wirkungen der Wasserräder sind von Morin (s. Expériences sur les roues hydrauliques à aubes planes et

sur les roues hydrauliques à augets. Metz, 1836) angestellt worden. Von diesen Versuchen können jedoch hier nur die an drei mehr kleinen Rädern angestellten Berücksichtigung finden. Das erste dieser Räder war von Holz, hatte 3,425 Meter Durchmesser und 30 Zellen und gab bei $1\frac{1}{2}$ Meter Geschwindigkeit den Wirkungsgrad 0,65, dagegen den Gefällcoefficienten $\chi = 0{,}775$. Das zweite Rad hatte gar nur 2,28 Meter im Durchmesser; es war ebenfalls aus Holz, hatte aber 24 gekrümmte Blechschaufeln. Der Wirkungsgrad dieses Rades stellte sich bei ebenfalls 1,5 Meter Radgeschwindigkeit $\eta = 0{,}69$ und der Gefällcoefficient $\chi = 0{,}762$ heraus. Das dritte war ein hölzernes Hammerrad von 4 Meter Höhe mit 20 Schaufeln und mindestens 1 Meter Stoßgefälle über dem Radscheitel; es gab bei $1\frac{1}{2}$ Meter Umfangsgeschwindigkeit noch den Wirkungsgrad 0,55 bis 0,60, bei der Geschwindigkeit von $3\frac{1}{2}$ Meter, die es bei seiner Arbeitsverrichtung wirklich hatte, $\eta = 0{,}40$, und bei 4 Meter Umfangsgeschwindigkeit, η gar nur 0,25, weil hier die Centrifugalkraft das Wasser nicht vollständig in die Zellen treten ließ. Morin zieht aus seinen Versuchen die Folgerung, daß bei Rädern unter 2 Meter Durchmesser, welche höchstens mit 2 Meter Geschwindigkeit umgehen, sowie bei Rädern über 2 Meter Durchmesser, die höchstens mit $2\frac{1}{2}$ Meter Geschwindigkeit umlaufen, der Coefficient χ des Druckgefälles im Mittel $= 0{,}78$, also die Leistung dieser oberschlägigen Räder, ohne Rücksicht auf Axenreibung,

$$Pv = \left(\frac{(c\, cos.\, \alpha - v)\, v}{g} + 0{,}78\, h\right) Q\gamma$$

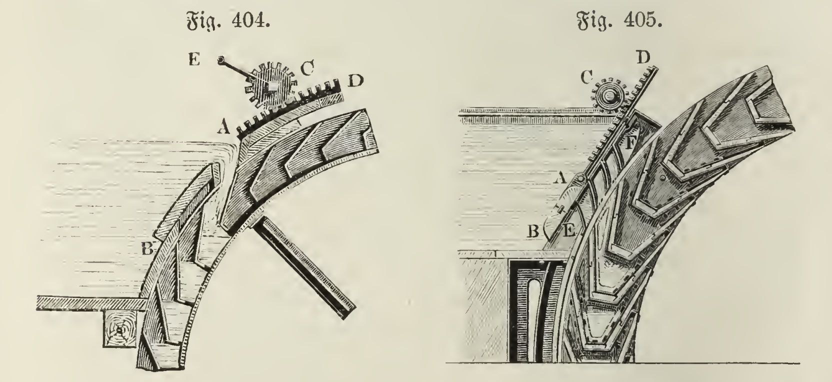
zu setzen sei, wenn h die Höhe der Eintrittsstelle über dem Radtiefsten, also $0{,}78\, h$ die mittlere Höhe des wasserhaltenden Bogens anzeigt. Dieser Coefficient $\chi = 0{,}78$ ist jedoch nur zu gebrauchen, wenn der Füllungscoefficient ε noch unter $\frac{1}{2}$ ist; er soll dagegen nach Morin in 0,65 umzuändern sein, wenn ε nahe $\frac{2}{3}$ ist. Sicherlich ist bei hohen Rädern χ größer, z. B. bei den hiesigen Kunsträdern mindestens $= 0{,}9$. Noch folgert Morin, daß für Räder, welche eine sehr große Umfangsgeschwindigkeit (über 2 Meter) haben, oder deren Füllungscoefficient über $\frac{2}{3}$ ist, sich ein bestimmter Coefficient χ für den wasserhaltenden Bogen nicht angeben läßt, weil hier kleine Veränderungen oder Abweichungen in χ und ε schon bedeutende Einflüsse auf die Größe der Leistung haben. Es ist jedoch hierbei zu bemerken, daß es nicht die Geschwindigkeit, sondern die Umdrehungszahl u (s. Bd. II, §. 187) ist, welche diese Grenze bestimmt, denn hohe Räder geben bei 2 Meter Umfangsgeschwindigkeit noch eine hohe und ziemlich bestimmte Wirkung.

Anmerkung. Wenn hier und in der Folge der umfänglichen Versuche Nordwall's (s. dessen Maschinenlehre, Berlin 1804) nicht gedacht wird, so hat dies lediglich seinen Grund darin, daß dieselben nur an größtentheils unvollkom-

mene Constructionen nachahmenden Modellen angestellt worden sind. Der Verfasser stimmt hierin ganz dem bei, was Langsdorf in seiner Maschinenlehre, Theil I, Abtheilung 2, §. 518, hierüber ausspricht.

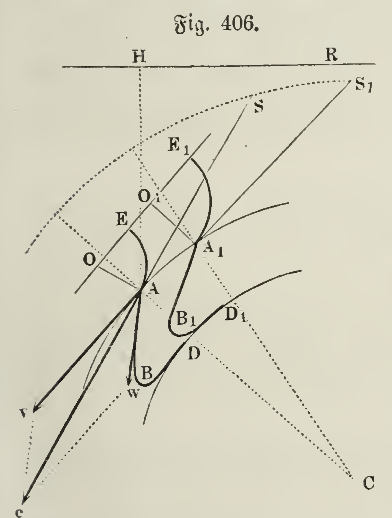
§. 198 **Rückenschlägige Wasserräder.** Noch hat man sogenannte rückenschlägige Räder (franz. roues par derrière; engl. high-breast wheels), die sich von den oberschlägigen Rädern nur durch die Beaufschlagung unterscheiden; während bei den oberschlägigen Rädern das Wasser nahe am Radscheitel eintritt, befindet sich bei den rückenschlägigen Rädern die Eintrittsstelle zwischen dem Scheitel und dem Radmittel, jedoch dem ersteren näher, als dem letzteren. Dort liegt das Aufschlaggerinne über, hier aber neben dem Rade; dort ist die Radhöhe kleiner, hier aber ist sie in der Regel größer, als das Totalgefälle; dort geht endlich das Rad in der Richtung um, in welcher es durch das Gerinne zugeführt wird, hier ist jedoch die Umdrehungsrichtung die umgekehrte. Man wendet rückenschlägige Räder besonders dann an, wenn der Wasserstand im Ab- oder Aufschlagsgraben sehr veränderlich ist, weil hier das Rad in der Richtung umgeht, in welcher das Wasser abfließt, also das Waten im Wasser von wenigem oder gar keinem Nachtheile ist, und weil hier Schutzvorrichtungen zur Anwendung kommen können, bei denen die Ausmündung stellbar ist, und daher auch immer um eine gewisse Höhe unter die Oberfläche des Aufschlagwassers gerückt werden, und selbst bei verschiedenen Wasserständen die Ausfluß- oder Eintrittsgeschwindigkeit immer dieselbe bleiben kann. Schützen für rückenschlägige Räder sind in Fig. 404 und Fig. 405 abgebildet; man nennt sie gewöhnlich Coulissenschützen. Bei der Schütze in Fig. 404 ist das Schutzbrett AB concentrisch mit dem Radumfange gekrümmt, damit die Mündung A bei allen Stellungen des Schutzbrettes das Wasser gehörig in die Radzellen leitet. Die Bewegung dieses Schutzbrettes erfolgt durch eine Zahnstange AD und ein Getriebe C mit Hülfe einer Kurbel CE. Bei der Schütze in Fig. 405

Fig. 404. Fig. 405.



fließt das Wasser über dem Kopfe A des Schutzbretes ab, das auf ähnliche Weise wie das vorige gestellt wird; damit aber das Wasser in bestimmter Richtung zum Rade gelangt, wird ein festes Leitschaufelsystem EF zwischen das Rad und das Schutzbret gebracht, über welchem dann das Letztere hingleitet. Die Leitschaufeln müssen eine bestimmte Stellung erhalten, damit sich das Wasser nicht beim Eintritt an die äußeren Schaufelenden stoße. Ist Aw, Fig. 406, die Richtung des äußeren Radschaufelendes, sowie $\overline{Av}$ Größe und Richtung der Geschwindigkeit eben dieses Endes A, so ergiebt sich genau wie in §. 178 die erforderliche Richtung $\overline{Ac}$ des eintretenden Wassers, wenn man $\overline{vc}$ parallel zu $\overline{Aw}$ zieht und $\overline{Ac}$ der durch den Wasserstand über A bestimmten Eintrittsgeschwindigkeit c gleich macht. Ist h die Tiefe AH des Punktes A unter dem Wasserspiegel HR im Aufschlaggerinne, so läßt sich mindestens $c = 0{,}82\sqrt{2gh}$ setzen, wie beim Ausflusse durch kurze Ansatzröhren (s. Bd. I, §. 421), wenn jedoch die von den Leitschaufeln gebildeten Canäle nach innen abgerundet sind, so fällt der Ausflußcoefficient noch größer aus, so daß $c = 0{,}90\sqrt{2gh}$ gesetzt werden kann. Wendet man gerade Leitschaufeln an, so bringt man sie in die Richtung cAS, bedient man sich aber gekrümmter Schaufeln AE, was den Vortheil gewährt, daß hier das Wasser allmälig aus der Richtung im Gerinne in die Richtung $\overline{Ac}$ übergeht, so läßt man dieselben mit AS in A tangiren, indem man z. B. AO winkelrecht auf AS setzt, und einen Kreisbogen AE aus O beschreibt.

Fig. 406.



Da verschieden tief liegenden Eintrittspunkten verschiedene Druckhöhen (h) und also auch verschiedene Geschwindigkeiten (c) zukommen, so hat man die Construction für jede Leitschaufel besonders zu machen. Gewöhnlich macht man die Eintrittsgeschwindigkeit $c = 9$ bis 10 Fuß und die Radgeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ bis höchstens $\frac{2}{3}c$. Man führt diese Construction für den mittleren Wasserstand im Aufschlaggerinne aus, damit die Abweichungen beim höchsten und tiefsten Wasserstande nicht zu groß ausfallen.

Die Luft kann bei diesen Schützen weniger leicht entweichen, als bei den Spannschützen; weshalb dann entweder die Schütze schmäler zu machen ist, als das Rad, oder dieses besonders zu ventiliren, d. h. mit Luftlöchern im Rad-

boden (s. Fig. 405) zu versehen ist. Auch ist es nicht rathsam, die Radschaufeln zu scharf zu decken, sondern das Wasser lieber durch einen Mantel im Rade zurück zu erhalten, als durch die Schaufeln, weil bei großen Deckungswinkeln die Leitschaufeln einen zu großen Bogen vom Rade einnehmen oder zu enge Canäle bilden, und das nöthige Stoßgefälle zu groß ausfällt.

Was endlich noch den Wirkungsgrad der rückenschlägigen Räder anlangt, so kommt dieser mindestens dem der oberschlägigen Räder gleich; wegen der zweckmäßigen Wassereinführung ist er sogar oft größer, als bei einem oberschlägigen Rade unter übrigens gleichen Verhältnissen. Morin fand bei einem Rade von 9,1 Meter Höhe mit 96 Zellen, wo der Eintritt des Wassers 50° vom Radscheitel abstand, bei $1\frac{1}{2}$ Meter Umfangs- und $2\frac{1}{2}$ Meter Eintrittsgeschwindigkeit $\eta = 0,69$, die Höhe χh des wasserhaltenden Bogens aber $= 0,78 \,.\, h$.

§. 199 **Ventilirte rückenschlägige Wasserräder.** Sind die rückenschlägigen Wasserräder ventilirt, kann also die Luft durch Canäle DE, $D_1 E_1$, Fig. 407, aus den Zellen A, A_1 u. s. w. entweichen, so kann man die Schaufeln näher an einander rücken, also auch eine größere Anzahl der Zellen anwenden, als bei unventilirten rückenschlägigen Wasserrädern, wodurch man unter übrigens gleichen Umständen mehr Fassungsraum erhält als bei den oberschlägigen Rädern, so daß sich der Füllungscoefficient $\varepsilon = \frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ anwenden läßt.

Für die gewöhnliche Schaufelconstruction hat man annähernd den Querschnitt des Fassungsraumes einer Zelle $ABDF$, Fig. 408:

Fig. 407.

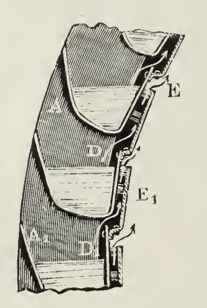
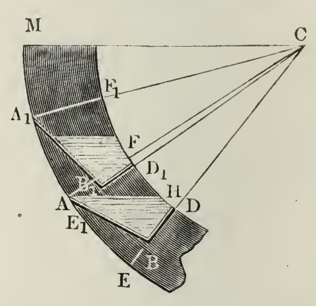


Fig. 408.



$$ABDH = \text{Viereck } AEDF \text{ minus Dreieck } ABE \text{ minus Dreieck } AFH$$
$$= \psi a_1 d - \frac{1}{4}\psi a_1 d - \frac{1}{2} d^2 \, tang.\, \lambda,$$

wobei ψ den Schaufelwinkel ACB und λ den Ausgußwinkel $CAH = ACM$ bezeichnen und $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{d}{2}$ vorausgesetzt wird. Dagegen ist der ganze Querschnitt einer Zelle:

$$EDD_1 E_1 = \varphi a_1 d,$$

wovon φ den Theilwinkel $A C A_1 = E C E_1$ bezeichnet. Hiernach folgt der Füllungscoefficient:

$$\varepsilon = \frac{\text{Fläche } ABDH}{\text{Fläche } EDD_1E_1} = \frac{{}^3/_4\, \psi\, a_1 - {}^1/_2\, d\, tang.\, \lambda}{\varphi\, a_1},$$

und daher:

$$tang.\, \lambda = ({}^3/_4\, \psi - \varepsilon\, \varphi)\, \frac{2\, a_1}{d}.$$

Die größte Raumbenutzung würde dann stattfinden, wenn der eben zum Ausguß gelangende Wasserspiegel AH die folgende Schaufel in B_1 berührte; dies vorausgesetzt, so hätte man, da $BD = BE$, also auch:

$B_1 D_1 = B_1 E_1$, und $B_1 H = B_1 A$ und $D_1 H = D_1 F$, d. i.:

$${}^1/_2\, d\, tang.\, \lambda = (\psi - \varphi)\, a_1, \text{ also auch:}$$

$$tang.\, \lambda = (\psi - \varphi)\, \frac{2\, a_1}{d}.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Ausdrücke für λ resultirt nun die einfache Formel:

$${}^3/_4\, \psi - \varepsilon\, \varphi = \psi - \varphi, \text{ d. i. } \varphi = \frac{\psi}{4\,(1 - \varepsilon)}.$$

Nimmt man $\varepsilon = {}^1/_2$ an, so erhält man endlich

$$\varphi = \frac{\psi}{2},$$

und es bildet der Querschnitt des den Ausguß beginnenden Wasserkörpers ein Dreieck ABD, Fig. 409, dessen Seiten AB und BD von den beiden Schaufelbreiten gebildet werden.

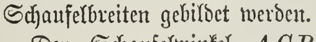
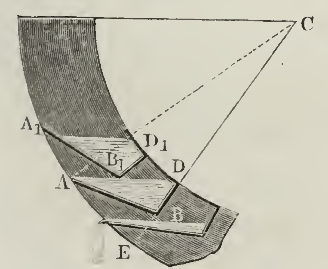


Fig. 409.



Der Schaufelwinkel $ACB = \psi$ bestimmt sich aus dem Eintrittswinkel $BAE = \beta$ mittels der bekannten trigonometrischen Formel:

$$sin.\, ABC = \frac{CA\, sin.\, CAB}{CB}, \text{ d. i.}$$

$$1)\quad cos.\,(\beta - \psi) = \frac{a\, cos.\, \beta}{a - {}^1/_2\, d}.$$

Hieraus ergiebt sich der Schaufelwinkel ACB:

$$2)\quad \psi = \beta - (\beta - \psi),$$

ferner nach der oben gefundenen Formel:

$$3)\quad \varphi = \frac{\psi}{4\,(1 - \varepsilon)}$$

und endlich die Schaufelzahl:

$$4)\quad n = \frac{2\,\pi}{\varphi} = \frac{360^0}{\varphi^0}.$$

Beispiel. Für ein rückenschlägiges Rad von 15 Fuß Halbmesser, 1 Fuß Kranzbreite und mit einem Eintrittswinkel $\beta = 20$ Grad, ist

$$cos. (\beta - \psi) = \frac{15 \, cos. 20^0}{14,5}, \; log. cos. (\beta - \psi) = 0,98771 - 1,$$

hiernach ergiebt sich

$$\beta - \psi = 13^0 \, 34',$$

und der Schaufelwinkel

$$\psi = 20^0 - 13^0 \, 34' = 6^0 \, 26';$$

endlich folgt für $\varepsilon = 1/_2$, der Theilwinkel

$$\varphi^0 = \frac{6^0 \, 26'}{2} = 3^0 \, 13'$$

und die Schaufelanzahl

$$n = \frac{360 \, . \, 60}{3 \, . \, 60 + 13} = \frac{21600}{193} = 112.$$

Für den Ausgußpunkt ist

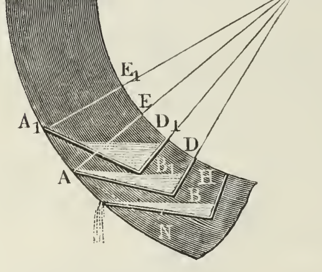
$$tang. \lambda = (\psi - \varphi) \frac{2 \, a_1}{d} = 30 \, arc. 3^0 \, 13' = 1,684,$$

und hiernach

$$\lambda = 59^0 \, 18'.$$

§. 200 Wenn der Füllungscoefficient ε noch unter $1/_2$ ist, so füllt das den Ausguß beginnende Wasser einer Zelle noch nicht den Raum ABD, Fig. 410, über den beiden Schaufeln BA und BD aus, und es läßt sich dann die Formel für den wasserhaltenden Bogen auf folgende Weise finden. Es ist der Querschnitt des Wasserraumes einer Zelle

Fig. 410.



$$\triangle ABH = \triangle ANH - \triangle ANB, \text{ d. i.:}$$
$$= 1/_2 \, AN \, (NH - NB);$$

nun kann man aber

$$AN = CA \, sin. ACB = a \, sin. \psi,$$
$$NB = AN \, cotang. ABN = a \, sin. \psi \, tang. (\beta - \psi) \text{ und}$$
$$NH = AN cotang. AHN = a \, sin. \psi \, cotang. (\lambda + \psi)$$

setzen; daher folgt dann:

$$\triangle ABH = 1/_2 \, a^2 \, sin. \psi^2 \, [cotang. (\lambda + \psi) - tang. (\beta - \psi)],$$

und der Füllungscoefficient:

$$\varepsilon = \frac{\triangle ABH}{AEE_1A_1} = \frac{1/_2 \, a^2 \, sin. \psi^2 \, [cotang. (\lambda + \psi) - tang. (\beta - \psi)]}{d \, a \, \varphi}.$$

Umgekehrt ist demnach hier

$$cotang. (\lambda + \psi) = tang. (\beta - \psi) + \frac{2 \, \varepsilon \, \varphi \, d}{a \, sin. \psi^2}.$$

Soll auch hier die Oberfläche des abfließenden Wassers von der folgenden Schaufel berührt werden, so hat man annähernd

$$tang.\, \lambda = (\psi - \varphi) \frac{2\,a}{d};$$

und es lassen sich daher mittels beider Gleichungen φ und λ bestimmen. Es ist (s. „Ingenieur“ Seite 157, Formel XX)

$$cotang.\,(\lambda + \psi) = \frac{cotang.\,\lambda\; cotang.\,\psi - 1}{cotang.\,\lambda + cotang.\,\psi}$$

$$= \frac{1 - tang.\,\lambda\; tang.\,\psi}{tang.\,\psi + tang.\,\lambda}.$$

daher den letzten Werth für $tang.\,\lambda$ eingesetzt,

$$cotang.\,(\lambda + \psi) = \frac{1 - (\psi - \varphi)\dfrac{2\,a}{d}\, tang.\,\psi}{tang.\,\psi + (\psi - \varphi)\,\dfrac{2\,a}{d}} = \frac{d - 2\,a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2\,a\,(\psi - \varphi)},$$

wenn man noch annähernd $tang.\,\psi = \psi$ setzt. Hiernach folgt:

$$\frac{d - 2\,a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2\,a\,(\psi - \varphi)} = tang.\,(\beta - \psi) + \frac{2\,\varepsilon\,\varphi\,d}{a\,\psi^2},$$

und daher der gesuchte Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{a\,\psi^2}{2\,\varepsilon\,d}\left(\frac{d - 2\,a\,(\psi - \varphi)\,\psi}{d\,\psi + 2\,a\,(\psi - \varphi)} - tang.\,(\beta - \psi)\right),$$

woraus nun die Schaufelzahl $n = \dfrac{6,28}{\varphi}$ zu finden ist.

Beispiel. Wenn wir im vorigen Beispiele den Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{4}$ annehmen, so haben wir den Theilwinkel:

$$\varphi = \frac{15\,.\,0,1123^2}{2\,.\,\frac{1}{4}}\left(\frac{1 - 30\,.\,0,1123\;(0,1123 - \varphi)}{0,1123 + 30\;(0,1123 - \varphi)} - 0,2413\right)$$

$$= 30\,.\,0,012611\left(\frac{1 - 3,369\;(0,1123 - \varphi)}{0,1123 + 30\,.\,(0,1123 - \varphi)} - 0,2413\right)$$

$$= 0,37833\left(\frac{0,62166 + 3,369\,\varphi}{3,4813 - 30\,\varphi} - 0,2413\right).$$

Nimmt man ferner annähernd $\varphi = \frac{1}{20} = 0,05$ an, so erhält man genauer:

$$\varphi = 0,3783\left(\frac{0,62166 + 0,16845}{3,4813 - 1,5} - 0,2413\right)$$

$$= 0,3783\,.\,0,1575 = 0,0596,$$

setzt man dagegen $\varphi = 0,04$, so folgt

$$\varphi = 0,3783\left(\frac{0,62166 + 0,13476}{3,4813 - 1,20} - 0,2413\right)$$

$$= 0,3783\;(0,3316 - 0,2413) = 0,3783\,.\,0,0903 = 0,0342.$$

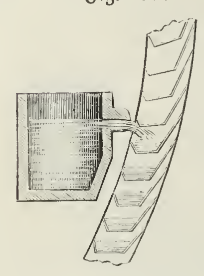
Man kann hiernach $\varphi = 0,044$, oder $\varphi^0 = 2^0\,31'$ setzen. Die entsprechende Schaufelzahl ist hiernach:

$$n = \frac{2\pi}{\varphi} = \frac{6,283}{0,044} = 143,$$

wofür vielleicht der leichteren Vertheilung wegen, $n = 136$ zu nehmen sein möchte.

§. 201 **Mittelschlägige Wasserräder.** Die mittelschlägigen Wasserräder sind entweder gemein mittelschlägige, oder Kropfräder. Die ersteren sind Zellenräder wie die ober- und rückenschlägigen Räder; die letzteren aber sind mit einem Mantel oder Kropfe umgebene Schaufelräder (s. Bd. II, §. 170). Da durch das zu zeitige Austreten des Wassers aus den Zellen der größte Gefäll- oder Arbeitsverlust in der unteren Radhälfte statt hat, so ist leicht zu ermessen, daß bei gleichen Verhältnissen und unter gleichen Umständen die mittelschlägigen Räder weniger Wirkungsgrad haben, als die ober- und rückenschlägigen Räder. Aus diesem Grunde hat man denn auch bei den ersteren Rädern das Gefälle noch mehr zusammenzuhalten und dafür Sorge zu tragen, daß das Wasser möglichst lange im Rade zurück gehalten werde; man deckt daher solche Räder gern sehr stark, oder führt wohl das Wasser von innen in das Rad, wie z. B. Fig. 411 vorstellt, oder, was das Beste ist, man umgiebt das Rad mit einem Mantel oder Kropfe, und läßt die Schaufeln nur aus einem Stück bestehen. Der Kropf soll vom Radumfange nicht mehr als $^1/_2$ bis 1 Zoll abstehen, damit durch den übrig bleibenden Zwischenraum so wenig wie möglich Wasser entweichen kann. Was die Schaufeln bei Kropfrädern anlangt, so kann man diese ganz radial stellen, da sie nicht den Zweck haben, das Wasser in dem Rade zurückzuhalten; damit sie aber beim Austritte aus dem Unterwasser kein Wasser mit emporwerfen, ist es rathsam, wenigstens den Theil der Schaufel, welcher ins Unterwasser eingetaucht ist, so schief zu stellen, daß er bei dem Austritte aus demselben eine verticale Lage annimmt. Was die Schaufelzahl betrifft, so ist es hier ebenfalls zweckmäßig, dieselbe groß zu machen, nicht allein, weil dadurch der Wasserverlust durch den Spielraum zwischen Rad und Mantel kleiner ausfällt, sondern auch weil bei einer engeren Schaufelstellung das Stoßgefälle kleiner und also das Druckgefälle größer wird. Gewöhnlich macht man die äußere Entfernung zwischen je zwei Schaufeln der Kranzbreite d gleich, oder nimmt sie 10 bis 15 Zoll, auch wendet man zur Bestimmung der Schaufelzahl wohl eine der oben (Bd. II, §. 175) gegebenen Regeln an. Wesentlich nothwendig ist es aber, daß die mittelschlägigen Räder hinreichend ventilirt werden, weil hier der eintretende Wasserstrahl beinahe den ganzen Querschnitt der Zellen ausfüllt, so daß die Luft nach außen nicht entweichen kann. Man muß deshalb in dem Radboden Spalten zum Entweichen der Luft aufsparen, damit dieselbe nicht dem Eintritte des Wassers entgegen-

Fig. 411.

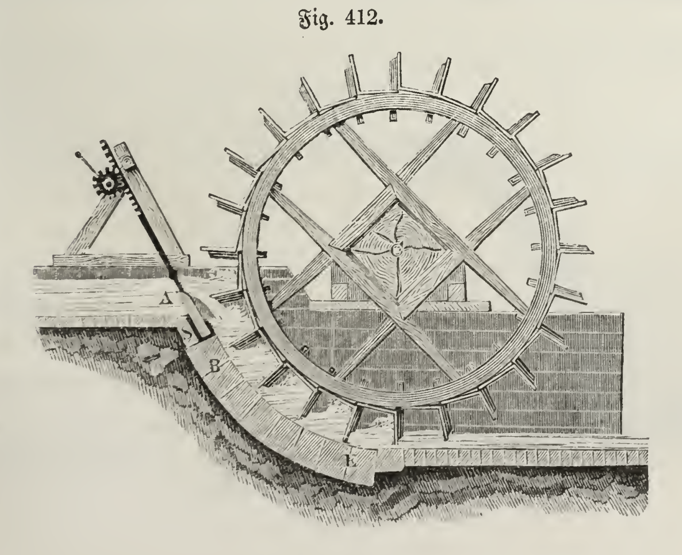


wirkt. Dies ist bei diesen Rädern um so nöthiger, da man sie bis zur Hälfte oder gar bis zwei Drittel ihrer Capacität anfüllen läßt. Uebrigens kommen die mittelschlägigen Räder vorzüglich bei einem Gefälle von 5 bis 15 Fuß und bei einem Aufschlagsquantum von 5 bis 80 Cubikfuß pr. Secunde in Anwendung.

Anmerkung. Theoretische Untersuchungen und Versuche über mittel- und unterschlägige Wasserräder, welche von innen beaufschlagt werden, sind in Schweden angestellt worden, worüber ausführlich gehandelt wird in dem Werke: Hydrauliska Försök etc. of Lagerhjelm, of Forselles och Kallstenius, Andra Delen, Stockholm, 1822. Egen beschreibt ein solches Rad in seinen Untersuchungen über den Effect einiger Wasserwerke ꝛc., Berlin 1831. Dieses Rad wurde vom Grafen de Thiville auf der Saline Neuwerk bei Werl erbaut, in der Erwartung, durch dasselbe einen großen Wirkungsgrad zu erlangen. Egen fand jedoch den Wirkungsgrad nur 59 Proc., obgleich dieses Rad ein Gefälle von 13,42 Fuß benutzte. Nach diesem Rade wurde ein anderes, aber nur 2 Meter hohes Rad in Frankreich erbaut (s. Bulletin de la société d'encouragement Nro. 282), und von Mallet untersucht; nach genauer Berechnung dieser Versuche scheint hiernach der Wirkungsgrad nicht größer als 60 Proc. ausgefallen zu sein. Egen sagt nun sehr recht, daß die Räder mit innerer Beaufschlagung nur in wenigen Fällen zu empfehlen sein möchten, weil sie nur eine geringe Breite (unter 4 Fuß) zulassen, und ohne dies eine große Festigkeit und Stabilität nie besitzen können.

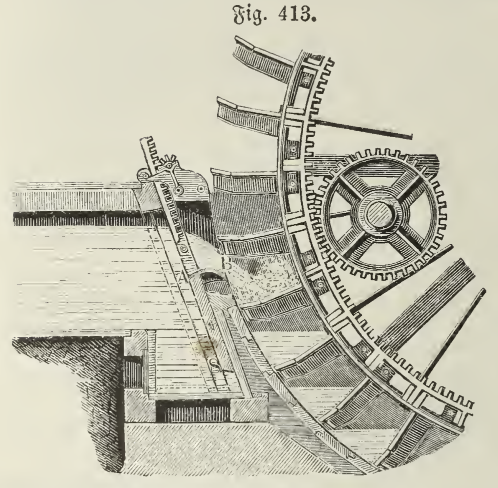
Ueberfallschützen. Die Wassereinführung bei mittelschlägigen §. 202
Wasserrädern ist sehr mannigfaltig, entweder wird das Wasser durch eine Ueberfallschütze, oder durch eine Leitschaufelschütze, oder durch eine Spannschütze dem Rade zugeführt, selten fließt es aber ganz frei zu. Bei den Ueberfallschützen AS, welche in den Figuren 412 und 413 (a. f. S.)

Fig. 412.



abgebildet sind, fließt das Wasser über den Kopf A des Schutzbrettes; damit es aber in der gehörigen Richtung eintrete, ist es nöthig, den Schützenkopf abzurunden, oder an denselben eine abgerundete Leitschaufel AB, Fig. 413, anzusetzen. Diese Leitschaufel AB, Fig. 414, ist nach der Parabel zu krümmen, welche die tiefsten Wasserelemente bei ihrer freien Bewegung beschreiben, denn wollte man sie mehr krümmen, so würde ihr der Wasserstrahl gar nicht folgen, und gäbe man ihr weniger Krümmung, so würde entweder die Leitschaufelbreite und also auch die Reibung des Wassers auf der Leitschaufel größer ausfallen oder das Wasser nicht in der erforderlichen Richtung an das Rad gelangen.

Fig. 413.

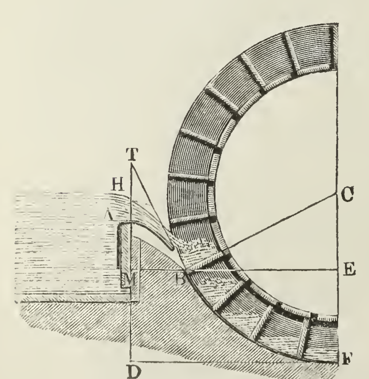


Der Theorie des Ausflusses durch Ueberfälle zufolge, hat man (s. Bd. I, §. 411) die Ausflußmenge, wenn e_1 die Mündungsweite sowie h_0 die Druckhöhe $\overline{HA}$, Fig. 414, über der Schwelle bezeichnet, und μ den Ausflußcoefficienten ausdrückt:

$$Q = {}^2/_3\, \mu\, e_1\, h_0\, \sqrt{2\, g\, h_0};$$

ist aber das Aufschlagquantum Q und die Mündungsweite e_1, da sie wenige (3 bis 4) Zoll kleiner als die Radweite e gemacht wird, gegeben, so folgt dann die Druckhöhe für den Ausfluß:

Fig. 414.



$$h_0 = \left(\frac{{}^3/_2\, Q}{\mu\, e_1 \sqrt{2\, g}}\right)^{2/3}$$
$$= 0{,}3302 \left(\frac{Q}{\mu\, e_1}\right)^{2/3}.$$

Nun ist noch die Geschwindigkeit c des bei B eintretenden Wassers durch ihr Verhältniß $\varkappa = \frac{c}{v}$ zur Radgeschwindigkeit v bestimmt, daher folgt auch das nöthige Gefälle zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit:

$$\overline{HM} = h_1 = \frac{c^2}{2g} = \frac{(\varkappa v)^2}{2g},$$

oder wegen des Verlustes beim Ausfluß, wie oben,

$$h_1 = 1,1 \cdot \frac{(\varkappa v)^2}{2g}.$$

Gewöhnlich macht man $\varkappa = 2$, und daher ist

$$h_1 = 4,4 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

zu setzen. Aus h_0 und h_1 folgt nun die Höhe $\overline{AM}$ der Kröpfung der Leitschaufel,

$$x = h_1 - h_0;$$

und ist nun das Totalgefälle $\overline{HD} = h$, so bleibt für das Druckgefälle im Rade:

$$\overline{MD} = \overline{EF} = h_2 = h - h_1$$

übrig. Noch hat man, der Theorie der Wurfbewegung zufolge, den Neigungswinkel $TBM = \nu$ des Leitschaufelendes gegen den Horizont bestimmt durch die Formel:

$$x = \frac{c^2 \sin. \nu^2}{2g}, \text{ folglich ist}$$

$$\sin. \nu = \sqrt{\frac{x}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_1 - h_0}{h_1}}$$

und die Länge der Kröpfung der Leitschaufel:

$$\overline{MB} = y = \frac{c^2 \sin. 2\nu}{2g} = h_1 \sin. 2\nu.$$

Endlich ist, wenn man noch die Forderung macht, daß das Wasser tangential an das Rad gelangt, der Radhalbmesser $\overline{CB} = \overline{CF} = a$ bestimmt durch die Gleichung:

$$a(1 - \cos. \nu) = h - h_1,$$

also

$$a = \frac{h - h_1}{1 - \cos. \nu}.$$

Umgekehrt hat man für den Centriwinkel $BCF = \theta$ des wasserhaltenden Bogens:

$$\cos. \theta = 1 - \frac{h - h_1}{a},$$

und, wenn man der letzten Bedingung nicht Genüge leistet, also ν nicht $= \theta$ macht, so hat man die Abweichung der Richtung des eintretenden Strahles von der Bewegungsrichtung der von ihm gestoßenen Schaufel:

$$\alpha = \theta - \nu.$$

Beispiel. Wenn bei einem mittelschlägigen Rade mit Ueberfallschütze das Aufschlagwasserquantum $Q = 6$ Cubikfuß, das Totalgefälle $h = 8$ Fuß, die Umfangsgeschwindigkeit $v = 5$ Fuß ist, und das Füllungsverhältniß $^2/_5$ betragen soll, so hat man bei 1 Fuß Radtiefe die erforderliche Radweite:

$$e = \frac{5}{2} \cdot \frac{Q}{dv} = \frac{5.6}{2.1.5} = 3 \text{ Fuß},$$

und wenn man nun hiernach die Weite des Ueberfalles $= 2\frac{3}{4}$ Fuß macht und $\mu = 0,6$ setzt, so erhält man die Wasserstandshöhe:

$$h_0 = 0,3302 \left(\frac{6}{0,6 \cdot 11/4}\right)^{2/3} = 0,3302 \left(\frac{4}{1,1}\right)^{2/3} = 0,781 \text{ Fuß}.$$

Nimmt man $\varkappa = \frac{8}{5}$ an, so erhält man das Gefälle zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{8}{5} \cdot 5 = 8 \text{ Fuß}, \; h_1 = 1,1 \cdot 0,016 \cdot 8^2 = 1,126 \text{ Fuß},$$

und daher die Höhe der Schaufelkröpfung:

$$x = 1,126 - 0,781 = 0,345 \text{ Fuß} = 4\frac{1}{7} \text{ Zoll},$$

ferner für den Neigungswinkel des Leitschaufelendes:

$$sin. \nu = \sqrt{\frac{0,345}{1,126}} = 0,5539;$$

hiernach $\nu = 33^0\, 38'$, und die Länge der Leitschaufelkröpfung:

$$y = 1,126 \; sin. 67^0\, 16' = 1,039 \text{ Fuß} = 12\frac{1}{2} \text{ Zoll}.$$

Um das Wasser tangential einzuführen, müßte das Rad den großen Halbmesser

$$a = \frac{h - h_1}{1 - cos. \nu} = \frac{8 - 1,126}{1 - cos. 33^0\, 38'} = \frac{6,874}{0,1674} = 41,06 \text{ Fuß}$$

erhalten; wenn man es aber nur 25 Fuß hoch macht, also $a = 12,5$ Fuß annimmt, so erhält man für den Centriwinkel θ des wasserhaltenden Bogens:

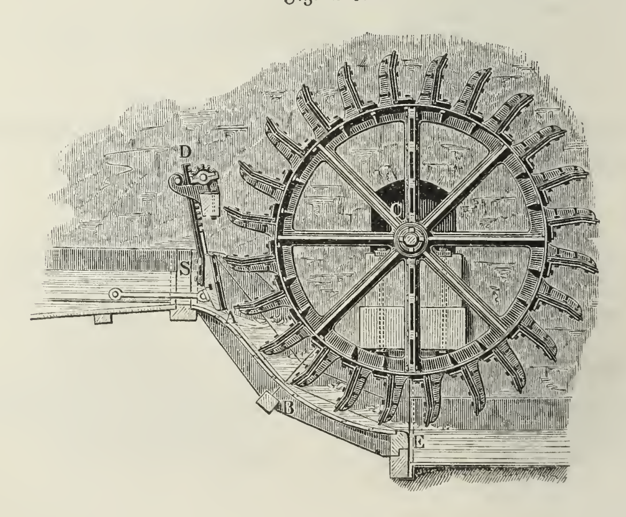
$$cos. \theta = 1 - \frac{6,874}{12,5} = 0,450,$$

also $\theta = 63^0\, 16'$ und die Abweichung der Bewegungsrichtung des Wassers von der des Rades an der Eintrittsstelle:

$$\alpha = \theta - \nu = 63^0\, 16' - 33^0\, 38' = 29^0\, 38'.$$

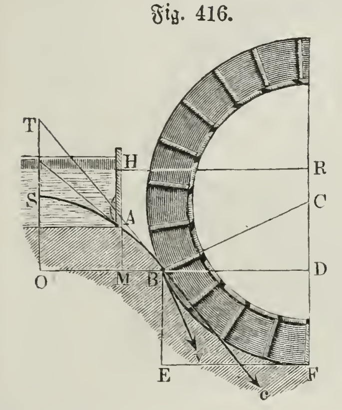
§. 203 **Spann- und Coulissenschützen.** Die Beaufschlagung eines mittelschlägigen Rades durch eine Spannschütze führt Fig. 415 vor Augen.

Fig. 415.



Es ist hier das übrigens so nahe wie möglich an das Rad gerückte Schutzbrett AD unten sehr dick und gut abgerundet, damit das Wasser in gehöriger Richtung und ohne Contraction durch die Schutzöffnung fließe. Aus demselben Grunde ist auch das Ende A des Gerinnbodens parabolisch zu formen. Die Höhe $\overline{BE} = \overline{DF} = h_2$, Fig. 416, des Kropfes bestimmt sich aus dem Totalgefälle $\overline{RF} = h$ und der Geschwindigkeitshöhe

Fig. 416.



$$\overline{MH} = h_1 = 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1{,}1 \cdot \frac{\varkappa^2 v^2}{2g}$$

durch die Formel $h_2 = h - h_1$, folglich der entsprechende Centriwinkel

$$BCF = \theta,$$

indem man setzt:

$$cos.\,\theta = \frac{CD}{CB} = \frac{a - h_2}{a}$$
$$= 1 - \frac{h - h_1}{a}.$$

Wenn man nun das Wasser tangential einführen will, so muß man die Neigung $TBO = \nu$ des Wasserstrahles gegen den Horizont $= \theta$ setzen, und hiernach die Coordinaten $\overline{SO} = x$ und $\overline{OB} = y$ des Parabelscheitels S durch die Formeln

$$x = \frac{c^2 sin.\,\theta^2}{2g} \text{ und } y = \frac{c^2 sin.\,2\,\theta}{2g}$$

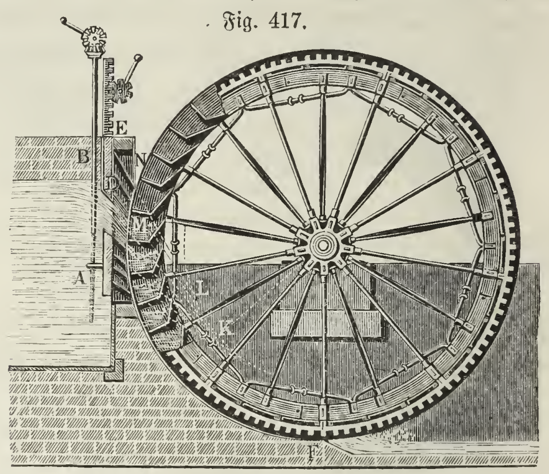
bestimmen.

Man hat aber nicht nöthig, die Schutzöffnung genau in den Parabelscheitel S zu legen, sondern man kann dieselbe nach jedem anderen Punkte A des Parabelbogens SB versetzen, nur muß dafür gesorgt werden, daß die Mündungsaxe tangential an die Parabel zu liegen komme (s. Bd. II, §. 181).

Eine dritte Wassereinführung besteht in der Schütze mit Leitschaufeln oder in der Coulissenschütze AB, Fig. 417 (a. f. S.). Man wird diese besonders dann mit großem Vortheil anwenden, wenn der Wasserstand im Aufschlaggerinne sehr veränderlich ist. Der in Fig. 417 abgebildete Apparat besteht aus zwei Schutzbrettern A und B, wovon jedes für sich gestellt und dadurch nicht allein die Druckhöhe, sondern auch die Ausflußöffnung verändert werden kann. Eine tangentiale Einführung des Wassers in das Rad ist durch den Leitschaufelapparat DE nicht möglich, man muß sich vielmehr damit begnügen, die Richtungen der Leitschaufeln noch 20 bis 30 Grad von den Tangentialrichtungen abweichen zu lassen. Das Wasser läuft zwischen den Leitschaufeln hindurch nach demselben Gesetze, wie es durch kurze Ansatzröhren ausfließt; es ist daher in der Regel der Ausflußcoefficient $\mu = 0{,}82$

und nur bei genauer Abrundung von innen, $\mu = 0,90$ anzunehmen. Aus diesem Grunde fällt denn auch der Widerstandscoefficient größer aus, als bei der Ueberfall- und bei der Spannschütze. Nehmen wir für μ den Mittel-

Fig. 417.



werth 0,85 an, so erhalten wir die zur Erzeugung der Geschwindigkeit c nöthige Druckhöhe:

$$h_1 = \left(\frac{1}{0,85}\right)^2 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1,384 \frac{c^2}{2g},$$

und es ist hiernach die von dem Totalgefälle h übrigbleibende Höhe des Kropfes oder wasserhaltenden Bogens:

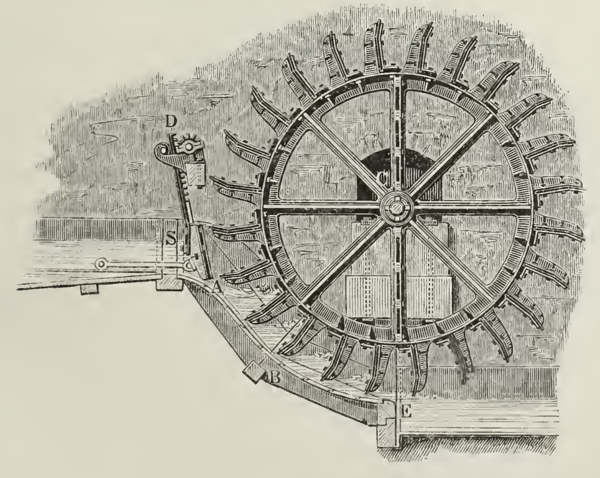
$$h_2 = h - h_1 = h - 1,384 \frac{\varkappa^2 v^2}{2g}.$$

Bei veränderlichem Wasserstande macht man die Anordnung für den mittleren Wasserstand, indem man das äußerste Ende M der mittleren Leitschaufel um die letzte Höhe h_2 über den Fuß F des Rades legt. Um sämmtliche Leitschaufeln, deren Normalabstand etwa 3 Zoll gemacht wird, unter gleichen Winkeln gegen den Radumfang zu stellen, legt man sie tangential an einen zum Radumfange concentrischen Kreis KL, der durch die Richtung DK der ersten Leitschaufel bestimmt wird.

§. 204 **Kropf- und Radconstructionen.** Der Mantel oder sogenannte Kropf, womit man die mittelschlägigen Räder umgiebt, um das Wasser in denselben so lange wie möglich zurückzuhalten, wird entweder von Steinen (s. Fig. 412) oder von Holz (s. Fig. 415) gebildet. Jedenfalls wird der Zweck eines Kropfes um so mehr erfüllt, je kleiner der Spielraum zwischen den äußersten Kanten der Radschaufeln und der von dem Kropfboden gebil-

deten Cylinderfläche ist, weil durch diesen Spielraum dem Wasser Gelegenheit zum Entweichen gegeben wird. Bei den besten Constructionen macht man diesen Zwischenraum $^1/_2$ Zoll, doch findet man ihn auch 1 und nicht selten sogar 2 Zoll weit. Bei hölzernen Rädern und hölzernen Kröpfen genügt deshalb ein Spielraum von $^1/_2$ Zoll Weite nicht, weil diese leichter und öfters unrund werden, so daß endlich gar ein Anstreifen des Rades am Kropfe zu befürchten ist. Bei eisernen Rädern und Kropfgerinnen aus Quadersteinen fallen bedeutende Deformationen nicht vor, weshalb man hier allerdings dem Spielraume nur $^1/_2$ Zoll Weite geben soll. Räder mit enganschließenden Kröpfen können durch feste Körper, wie z. B. durch Holz- oder Eisstücke, die durch das Wasser zugeführt werden, bedeutende Beschädigungen erleiden; deshalb ist es denn auch nöthig, diese durch Rechen, welche vor der Schütze aufzustellen sind, von dem Zutritte zum Rade abzuhalten. Wenn dies, freilich zum Nachtheile der Wirkung des Rades, nicht oder nur unvollkommen geschieht, so ist allerdings der Spielraum des Rades im Kropfe sehr weit zu machen. Zu steinernen Kröpfen wählt man gern sehr große Sandsteinquader und verbindet dieselben durch Cement oder hydraulischen Kalk; hölzerne Kröpfe *AE*, Fig. 418, werden aus Kropfschwellen

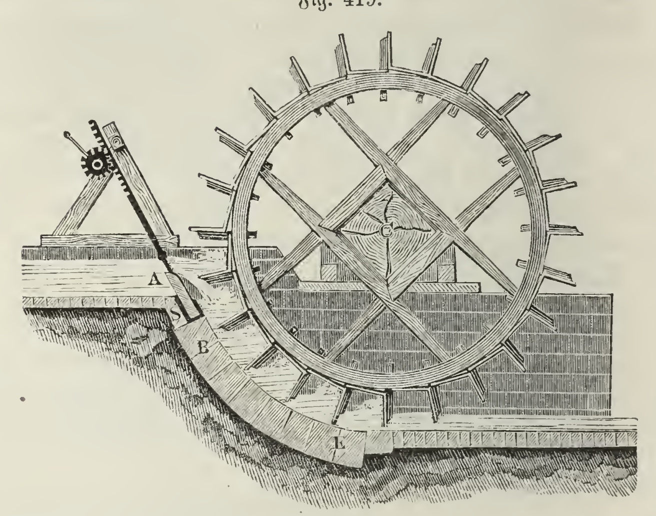
Fig. 418.



A, *B*, *E*, Kropfbalken *AB*, *BE* und aus Kropfdielen, welche quer über die letzteren zu liegen kommen, gebildet. In der Regel befestigt man noch besondere Wasserbänke auf die Kropfdielen, welche das Rad zu beiden Seiten umfassen, um dadurch das seitliche Entweichen des Wassers zu verhindern. Wenn das Wasser im Abzugscanale mit derselben Geschwindigkeit abfließen kann, mit welcher das Rad umläuft, so kann man den

Kropf AE, Fig. 419, unter dem Untertheile des Rades, in der Sohle EH des Abzugscanales auslaufen lassen; wenn aber das Wasser langsamer abfließt, als das Rad umläuft, oder wenn gar Aufstauungen des Unterwassers

Fig. 419.



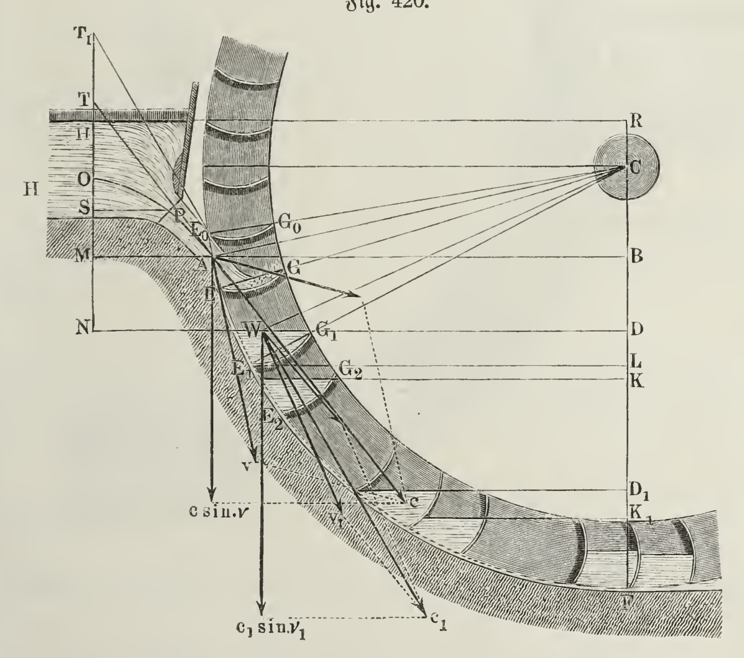
zu befürchten sind, so muß man einen Absatz E, Fig. 418, zwischen dem Kropfe und dem Abzugscanale herstellen.

Was endlich die Radconstructionen anlangt, so findet ein Unterschied zwischen den ober- und mittelschlägigen Rädern schon darin statt, daß jene nur Zellen-, diese aber in der Regel bloße Schaufelräder sind; nächstdem weichen diese Räder auch in der Art und Weise der Verbindung der Schaufeln mit den Kränzen von einander ab. Man unterscheidet hiernach Stabe- und Strauberäder von einander, und rechnet nun zu den Staberädern diejenigen, bei welchen die Schaufeln zwischen zwei Kränzen befestigt sind, zu Strauberädern aber diejenigen, deren Schaufeln auf kurzen Armen (Kolben oder Schaufelarmen) aufsitzen, welche radial aus dem Radkranze hervorragen. Fig. 417 ist ein Staberad, Fig. 418 und 419 aber sind Strauberäder; Fig. 419 ist ein hölzernes und Fig. 418 ein eisernes Strauberad. Schmale Strauberäder haben nur einen, weite aber haben, wie die Staberäder, zwei Kränze. Die Kränze der Strauberäder sind jedoch schmäler als die der Staberäder. Bei den hölzernen Rädern sind die Schaufelarme durch die aus zwei Felgenlagen gebildeten Kränze hindurchgesteckt, oder zwischen denselben schwalbenschwanzförmig eingelegt; bei den eisernen Rädern aber werden sie entweder mit den einzelnen Kranzsegmenten aus einem Stücke gegossen oder auf diese aufgeschraubt. Die Schaufeln sind gewöhnlich von Holz, und werden auf ihre Arme aufgeschraubt. Der

Radboden liegt hier auf dem äußeren Umfang des Radkranzes und umschließt das Rad nicht vollständig, indem in ihm Spalten zum Entweichen der Luft ausgespartt sind, wie die Figuren 418 und 419 vor Augen führen. Uebrigens sind auch diese Räder entweder Stern- oder Sattelräder (s. §. 172).

Einführung des Wassers. Die Regeln über die Einführung des Wassers in ein Kropfrad, Fig. 420, sind im Allgemeinen dieselben wie §. 205

Fig. 420.



bei den Zellenrädern. Aus der Geschwindigkeit $c = \varkappa v$ des bei A eintretenden Wassers folgt das nöthige Gefälle zur Erzeugung derselben:

$$h_1 = 1,1 \frac{c^2}{2g},$$

und daher das übrigbleibende, der Kropfhöhe gleiche Druckgefälle im Rade:

$$FB = h_2 = h - h_1 = h - 1,1 \frac{c^2}{2g}.$$

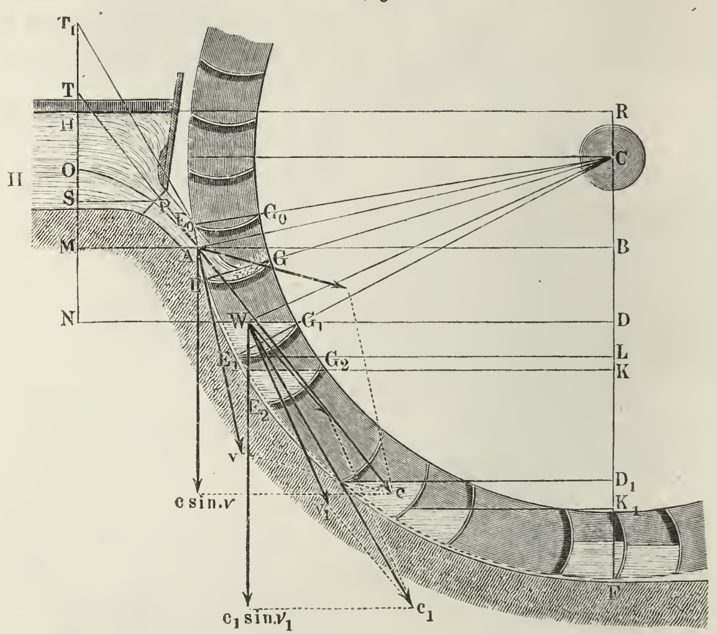
Giebt man noch den Radhalbmesser $CA = CF = a$, so läßt sich der Winkel $ACF = \theta$, um welchen die Eintrittsstelle A vom Radtiefsten F absteht, durch die Formel

$$cos. ACF = \frac{CB}{CA} = \frac{CF - FB}{CA}, \text{ d. i.}$$

$$\cos.\theta = \frac{a - h_2}{a} = 1 - \frac{h_2}{a}$$ berechnen.

Da der Zutrittswinkel $vAc = \alpha$ (10 bis 20 Grad) als gegeben an-

Fig. 421.



zusehen ist, so kann man hier auch den Neigungswinkel des in A eintretenden Wasserstrahles:

$$cAB = v = \theta - \alpha$$

bestimmen, woraus sich wieder die Coordinaten des Scheitels O von dem einfallenden Parabelbogen:

$$\overline{OM} = x = \frac{c^2 \sin. v^2}{2g} \text{ und}$$

$$\overline{MA} = y = \frac{c^2 \sin. 2v}{2g} \text{ ergeben.}$$

Legt man nun die Mitte P der Schützenmündung um $\overline{MS} = z$ über die Eintrittsstelle A, so erhält man die Coordinaten von P in Hinsicht auf O:

$$\overline{OS} = x_0 = x - z \text{ und}$$

$$\overline{SP} = y_0 = y\sqrt{\frac{x-z}{x}} = y\sqrt{1 - \frac{z}{x}},$$

sowie für die Neigung der Axe des Strahles beim Austritt P:

$$tang.\, \nu = \frac{2\,x_0}{y_0} = \frac{2\sqrt{x\,(x-z)}}{y}.$$

Kennt man die senkrechte Tiefe $\overline{MN} = z_1$, um welche das Wasser im Rade sinkt, bis es vollständig zum Stoße gelangt, so hat man für die Coordinaten des Punktes W, wo dieser Stoß beendigt ist,

$$\overline{ON} = x_1 = x + z_1, \text{ und}$$

$$\overline{NW} = y_1 = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}},$$

sowie für den Neigungswinkel $D\,W c_1$ des Wasserstrahles in W gegen den Horizont:

$$tang.\, \nu_1 = \frac{2\,x_1}{y_1} = \frac{2\sqrt{x\,(x+z_1)}}{y}.$$

Ferner folgt für den Winkel $W\,C\,F = \theta_1$, um welchen der Punkt W vom Radfuße F abweicht, wenn a_1 den mittleren Radhalbmesser $C\,W$ bezeichnet,

$$cos.\, \theta_1 = \frac{CD}{CW} = \frac{a\, cos.\, \theta + z_1}{a_1};$$

und der Winkel $c_1\,W v_1 = \alpha_1$, um welchen die Richtung der Endgeschwindigkeit c_1 des Wassers in W von der der Radgeschwindigkeit v_1 daselbst abweicht,

$$\alpha_1 = \theta_1 - \nu_1.$$

Endlich ist, wie oben, die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in W aufschlägt,

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2\,g z_1}.$$

Die letzteren Bestimmungen setzen voraus, daß die Fallhöhe $\overline{MN} = z_1$ bekannt sei. Diese ist daher vorher, und zwar auf dem im Folgenden angegebenen Näherungsweg zu finden.

In der Zeit $t = \frac{\overline{EE_1}}{v} = \frac{s}{v}$ legt die Schaufel $E\,G$, welche der Schaufel $E_0\,G_0$ unmittelbar vorausgeht, einen Weg $\overline{EE_1} = s$ zurück, während das von $E_0\,G_0$ abgeschnittene Einfallwasser den Weg $\overline{A\,W}$ macht, dessen Verticalprojection $= \overline{MN} = z_1$ ist. Da die Verticalprojectionen der Geschwindigkeit des Wasserstrahles in A und W

$$c\; sin.\, \nu \quad \text{und} \quad c_1\; sin.\, \nu_1$$

sind, so folgt die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher z_1 durchlaufen wird:

$$\frac{c\; sin.\, \nu + c_1\; sin.\, \nu_1}{2}, \text{ und daher auch}$$

$$t = \frac{2\,z_1}{c\; sin.\, \nu + c_1\; sin.\, \nu_1}.$$

Hiernach ist

$$\frac{s}{v} = \frac{2 z_1}{c \; sin. v + c_1 \; sin. v_1},$$

und daher der Weg, welchen die Schaufel während der Füllung durchläuft:

$$s = \frac{2 z_1 v}{c \; sin. v + c_1 \; sin. v_1}.$$

Nimmt man nun erst für z_1 einen Näherungswerth an, und berechnet mit Hülfe dieser Formel s, so kann man auch die entsprechende Stelle der Schaufel $E_1 G_1$ aufzeichnen; und trägt man über dieselbe den Querschnitt $F = \frac{V}{e} = \frac{60 \, Q}{n u e}$ des Wasserkörpers zwischen je zwei Schaufeln, so kann man untersuchen, ob die Oberfläche W des letzteren die angenommene Tiefe $\overline{MN} = z_1$ unter dem Eintrittspunkte A hat. Ist dies nicht der Fall, so muß man ein anderes z_1 annehmen, s von Neuem bestimmen, und die vorige Probe wiederholen. Findet auch dann noch keine Uebereinstimmung zwischen den angenommenen und bestimmten Werthen von z_1 statt, so ist dieses Verfahren nochmals anzuwenden.

§. 206 **Leistung der Kropfräder.** Die Leistung der Räder im Kropfgerinne zerfällt, wie bei einem oberschlägigen Rade, in eine Stoß- und in eine Druckleistung; es ist auch die Formel für die Leistung beider genau dieselbe, nur macht die Bestimmung des Wasserverlustes verschiedene Rechnungen nöthig, denn während dort dieser Verlust in dem allmäligen Ablaufen des Wassers aus den Zellen seinen Grund hat, entsteht er hier durch das Entweichen des Wassers in dem Zwischenraume zwischen dem Rade und dem Kropfe. Wir haben also hier zu untersuchen, auf welche Weise und in welcher Menge das Wasser in diesem Zwischenraume, den man deshalb auch den schädlichen Raum nennen kann, erfolgt, und müssen hiernach die Wirkung, welche dadurch dem Rade entzogen wird, berechnen. Setzen wir nun, wie bei den oberschlägigen Rädern, die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers in den Theilkreis des Rades $= c_1$, die Geschwindigkeit des Rades in Theilkreise, $= v_1$ und den Winkel $c_1 W v_1$, Fig. 422, zwischen den Richtungen dieser Geschwindigkeiten, $= \alpha_1$, so haben wir wieder die Stoßleistung:

$$= \frac{(c_1 \, cos. \, \alpha_1 - v_1) \, v_1}{g} \cdot Q \gamma.$$

Bezeichnen wir ferner den Niveauabstand DK_1 zwischen dem Eintrittspunkte W und der Oberfläche des Unterwassers durch h_3, und nehmen wir an, daß von dem Aufschlagquantum Q nur der Theil $Q_1 = \xi Q$ im

Kropfe zur Wirkung gelange, so können wir die Druckleistung des Wassers $= h_3 Q\gamma$, und genau wie bei einem oberschlägigen Rade die Totalleistung

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + \xi h_3\right) Q\gamma \text{ setzen.}$$

Um mit Hülfe der vorstehenden Formel die Leistung des Kropfrades berechnen zu können, ist noch nöthig das Verhältniß $\xi = \frac{Q_1}{Q}$ zu ermitteln.

Der Arbeitsverlust, welcher aus dem Entweichen des Wassers durch den Spielraum (franz. jeu; engl. back-lash) des Rades im Kropfe hervorgeht, ist bei dem Stoße des Wassers unbedeutend, da der eintretende Wasserstrahl diesen Spielraum in der Regel nicht unmittelbar trifft; anders ist es aber bei dem Drucke desselben, denn hier findet ein ununterbrochener Wasserverlust statt, während eine Schaufel $E_1 G_1$ (Fig. 418) nach und nach in tiefere Stellungen $E_2 G_2$, $E_3 G_3$ u. s. w. kommt, ehe sie die tiefste Stelle F erreicht. Es bildet hier der Spielraum Ausflußöffnungen $E_1, E_2 \ldots$, durch welche das Wasser mit veränderlichen Druckhöhen ausfließt.

Bezeichnen wir wieder die Radweite durch e, und setzen die Weite des Spielraumes oder den kürzesten Abstand der Radschaufeln vom Kropfboden durch σ, so können wir den Querschnitt der Oeffnung, durch welche das Wasser aus einer Zelle in die nächst tiefere fließt, $= \sigma e$ setzen; und sind nun während des allmäligen Niederganges der Zelle die Druckhöhen, oder Tiefen $\overline{DL}$ der Ausflußmündung unter den darüber stehenden Wasserspiegeln nach und nach l_1, l_2, u. s. w, so folgen die entsprechenden Ausflußgeschwindigkeiten

$$v_1 = \sqrt{2gl_1}, \quad v_2 = \sqrt{2gl_2} \text{ u. s. w.,}$$

und Ausflußmengen innerhalb eines Zeitelementes τ

$$V_1 = \sigma e \tau \sqrt{2gl_1}, \quad V_2 = \sigma e \tau \sqrt{2gl_2} \text{ u. s. w.;}$$

oder, wenn man noch einen Ausflußcoefficienten μ einführt,

$$V_1 = \mu \sigma e \tau \sqrt{2gl_1}, \quad V_2 = \mu \sigma e \tau \sqrt{2gl_2} \text{ u. s. w.}$$

Diese Wassermengen sinken unbenutzt von den Höhen $\overline{DK} = k_1, k_2$ u. s. w. herab, um welchen je zwei benachbarte Wasserspiegel in den Radzellen von einander abstehen; es sind daher die durch die Wasserverluste V_1, V_2 u. s. w. herbeigeführten Arbeitsverluste:

$$V_1 k_1 \gamma = \mu \sigma e \tau \sqrt{2gl_1} . k_1 \gamma, \quad V_2 k_2 \gamma = \mu \sigma e \tau \sqrt{2gl_2} . k_2 \gamma, \text{ u. s. w.}$$

Die Summe dieser Verluste giebt den Arbeitsverlust der Radzelle

$$A_1 = \mu \sigma e \tau \sqrt{2g} . \gamma (k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + \cdots).$$

Nun ist aber die Länge des Kropfes $= \theta a$, und die Zeit, während eine Schaufel denselben mit der Geschwindigkeit v durchläuft:

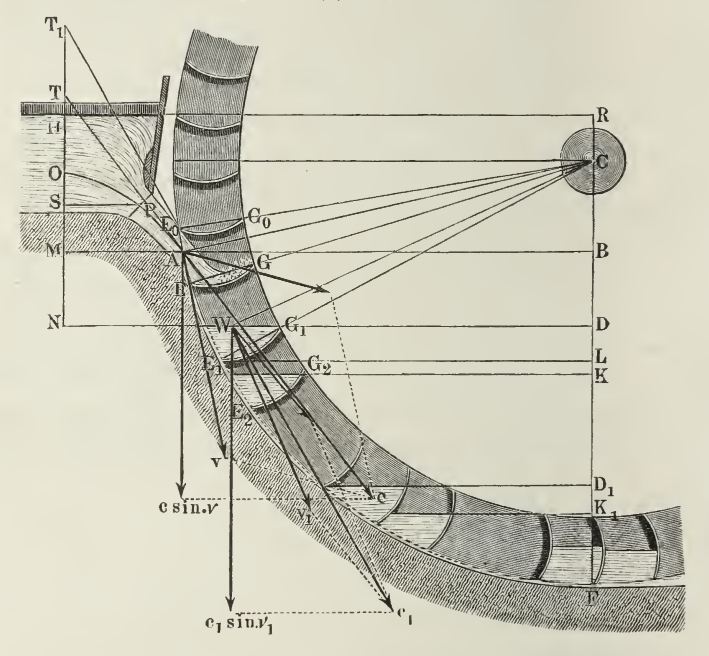
$$t = \frac{\theta a}{v};$$

setzt man daher $\tau = \frac{t}{n_1}$, so folgt

$$A_1 = \mu \sigma e \frac{\theta a}{v} \sqrt{2g}\, \gamma \left(\frac{k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + \cdots}{n_1}\right),$$

zieht man diesen Arbeitsverlust von der Arbeit $A = V h_3 \gamma = F e h_3 \gamma$ ab, welche das Wasser einer Schaufel beim Herabsinken von der Kropfhöhe ver-

Fig. 422.



richten würde, wenn kein Wasserverlust statt hätte, so erhält man die wirkliche Arbeit des Wassers einer Schaufel

$$A - A_1 = F e h_3 \gamma \left(1 - \mu \sigma \frac{\theta a}{F v} \sqrt{2g} \cdot \frac{k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + \cdots}{n_1 h_3}\right);$$

und daher die entsprechende Arbeit des Wassers durch Druck

$$L_2 = \frac{n u}{60}(A - A_1) = \frac{n u}{60} F e h_3 \gamma \left(1 - \frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{F v} \frac{(k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} \cdots)}{n_1 h_3}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{F v} \frac{k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + \cdots}{n_1 h_3}\right) Q h_3 \gamma;$$

oder mit Anwendung der Simpson'schen Regel:

$$L_2 = \left(1 - \frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{Fv} \cdot \frac{k_0 \sqrt{l_0} + 4 k_1 \sqrt{l_1} + 2 k_2 \sqrt{l_2} + 4 k_3 \sqrt{l_3} + k_4 \sqrt{l_4}}{12\, h_3}\right) Q h_3 \gamma.$$

Es fällt folglich die Druckleistung des Wassers im Kropfe um so größer aus, je größer die Radgeschwindigkeit v und je größer der Querschnitt F des Wassers einer Zelle, d. i. je stärker die Radfüllung ist.

Um die Rechnung ausführen zu können, hat man den Bogen $E_1 F$ in n_1, z. B. in vier gleiche Theile zu theilen, durch die Theilpunkte Schaufeln zu legen, über dieselben die Querschnittsfläche aufzutragen und die Höhen k_1, $k_2 \ldots$ sowie l_1, $l_2 \ldots$ mit dem Zirkel abzunehmen. Hierbei ist nicht außer Acht zu lassen, daß an den Stellen, wo das Wasser aus einer Zelle unter dem Wasser der vorausgehenden ausfließt, die Werthe l_1, $l_2 \ldots$ in die von k_1, $k_2 \ldots$ übergehen (s. Band I, §. 399).

Auch fließt noch Wasser seitwärts durch den Raum zwischen den Radkränzen und dem Kropfboden ab, weil die Einfassungswände oder sogenannten Wasserbänke nicht genau an den äußeren Stirnflächen der Radkränze anschließen, sondern 1 bis 2 Zoll davon abstehen. Der Inhalt der Ausflußöffnung ist hier $b\sigma$, wenn b den Bogen bezeichnet, in welchem das Wasser einer Zelle den Kropf berührt, die Druckhöhen sind die veränderlichen Abstände m_1, m_2 u. s. w. der Oberfläche des Wassers in der niedergehenden Zelle über der unteren Kante der Schaufel, welche diese Zelle bildet, und das verlorene Gefälle ist der veränderliche Abstand p_1, p_2 u. s. w. dieses Wasserspiegels von dem tiefsten Wasserspiegel K_1. Aus diesen Höhen m_1, $m_2 \ldots$ und p_1, $p_2 \ldots$ folgt der Arbeitsverlust, welcher aus dem Entweichen des Wassers auf diesem Wege hervorgeht,

$$A_2 = {}^2/_3\, \mu \sigma b \frac{\theta a}{v} \sqrt{2g} . \gamma \left(\frac{p_1 \sqrt{m_1} + p_2 \sqrt{m_2} + \cdots}{n_1}\right),$$

und es ist daher bei Inbetrachtnahme von beiden Wasserverlusten, wenn man nur drei Schaufelstellungen in Betracht zieht, die Druckleistung

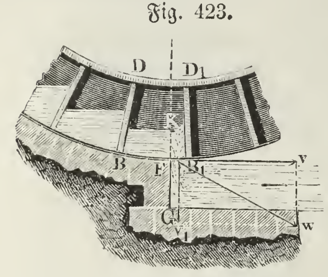
$$L_2 = \left[1 - \frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{6 F v h_3}\left(k_0 \sqrt{l_0} + 4 k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + {}^2/_3 \frac{b}{e}\left(p_0 \sqrt{m_0} + 4 p_1 \sqrt{m_1} + p_2 \sqrt{m_2}\right)\right)\right] Q h_3 \gamma.$$

Setzt man diese Arbeit $L_2 = \xi Q h_3 \gamma$, so hat man folglich

$$\xi = \left[1 - \frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{6 F v h_3}\left(k_0 \sqrt{l_0} + 4 k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + {}^2/_3 \frac{b}{e}\left(p_0 \sqrt{m_0} + 4 p_1 \sqrt{m_1} + p_2 \sqrt{m_2}\right)\right)\right].$$

§. 207 **Andere Arbeitsverluste.** Ein weiterer Verlust tritt noch dann ein, wenn die Oberfläche des Unterwassers nicht mit der Oberfläche des Wassers in der tiefsten Zelle in einerlei Niveau steht, wie z. B. in Fig. 423 vor Augen geführt wird; denn hier fließt sogleich Wasser aus der Zelle BDD_1B_1, wenn die Schaufel B_1D_1 die Schwelle FG überschritten hat, es nimmt also dasselbe außer der Radgeschwindigkeit v noch eine Geschwindigkeit an, welche durch den Niveauabstand FK erzeugt wird. Dieser Niveauabstand ist aber veränderlich, er hat im ersten Augenblicke, wenn die Schaufel über die Schwelle weggegangen und die Oeffnung bei F entstanden ist, seinen größten Werth, wird aber immer kleiner und kleiner, je mehr Wasser aus dem Raume BDD_1B_1 geflossen ist, und fällt endlich Null aus, wenn beide Wasserspiegel in einerlei Niveau gekommen sind, also der Ausfluß durch B_1F beendigt ist. Der mittlere Werth dieses Niveauabstandes läßt sich $\frac{1}{2}h_4$ setzen, wenn h_4 die anfängliche Tiefe des Wassers in der untersten Zelle ist, und daher die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers nicht $\frac{v^2}{2g}$, sondern $\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \frac{1}{2}h_4$; da wir indessen den der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ entsprechenden Verlust an Leistung schon beim Stoße in Abzug gebracht haben, so bleibt daher nur noch die Leistung

Fig. 423.



$$L_4 = \frac{1}{2}\,Q h_4 \gamma$$

von der gefundenen Nutzleistung abzuziehen. Man ersieht hieraus, daß es nicht vortheilhaft ist, unter dem Kropfrade einen Abfall anzubringen, daß sich daher nur dann seine Anwendung rechtfertigen läßt, wenn man einen veränderlichen Unterwasserstand hat, so daß bei hohem Wasser zu befürchten ist, daß das Rad im Wasser watet, indem das Wasser im Untertheile des Rades tiefer steht als im Abzugsgraben.

Außerdem lassen sich noch mehrere Arbeitsverluste des Kropfrades angeben. Zunächst haben wir zu berücksichtigen, daß das Wasser bei seiner Bewegung im Kropfgerinne eine Reibung zu überwinden hat, deren Coefficient ζ nach Band I, §. 476 für Geschwindigkeiten von 4 bis 6 Fuß 0,00769 gesetzt werden kann. Der entsprechende Gefällverlust ist (Bd. I, §. 475):

$$h_5 = \zeta\,\frac{lp}{F}\cdot\frac{v^2}{2g},$$

daher hier, wo l die Länge des Kropfes, p den Umfang und F den Inhalt des Wasserprofiles bezeichnet, also

$$\frac{p}{F} = \frac{e + d}{\frac{1}{2} d e} \text{ und annähernd } = \frac{2}{d}$$

gesetzt werden kann,

$$h_5 = \zeta \cdot \frac{2l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0{,}0002461 \, \frac{l}{d} v^2,$$

und der entsprechende Verlust an mechanischer Arbeit:

$$L_5 = 0{,}0002461 \, \frac{l v^2}{d} Q \gamma.$$

Endlich müssen wir auch den Widerstand der Luft gegen die Bewegung der Schaufeln, und vielleicht auch noch den, welchen die Radarme zu überwinden haben, berücksichtigen. Der Widerstandscoefficient der Luft ist hier nach Band I, §. 512, $\zeta = 1{,}25$, und die Formel für diesen Widerstand

$$= \xi F \gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wo F die Fläche, sowie γ die Dichtigkeit der Luft bezeichnet. Führen wir nun nach Band I, §. 393, für $\gamma = 0{,}0800$ Pfund ein, so erhalten wir diesen Widerstand

$$= 0{,}0016 \, F v^2,$$

oder, wenn wir die Fläche gleich setzen dem Inhalte $n \, . \, d e$ sämmtlicher n Schaufeln des Rades, denselben

$$= 0{,}0016 \, n d e v^2,$$

und demnach den entsprechenden Verlust an mechanischer Leistung:

$$L_6 = 0{,}0016 \, n d e v^3.$$

Bei den gewöhnlichen Verhältnissen betragen alle diese Verluste zusammen nur wenige Procente der ganzen Radleistung, wie wir auch in einem Beispiele weiter unten sehen werden.

Leistungsformel. Wir können nur einen Ausdruck für die vollständige Leistung eines Kropfrades angeben, wenn wir außer den im vorigen Paragraphen gefundenen Arbeitsverlusten auch die Arbeit der Zapfenreibung in Betracht ziehen. Nach dem Vorstehenden ist die Druckwirkung des Wassers $= \xi Q h_3 \gamma$ und wenn wir, wie bei den oberschlägigen Wasserrädern, die Arbeit der Zapfenreibung $\varphi \frac{r}{a} \cdot G v$ setzen, so bleibt die Nutzleistung §. 208

$$L = P v = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + \xi h_3\right) Q \gamma - \varphi \, \frac{r}{a} G v$$

übrig.

Bezeichnen wir das Totalgefälle, vom Wasserspiegel des Oberwassers bis zur Oberfläche des Unterwassers gemessen, durch h, so können wir wieder

$$h_3 = h - 1{,}1\,\frac{c_1^2}{2g}$$

setzen, und erhalten nun:

$$L = \left[\frac{(c_1\,cos.\,\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + \xi\left(h - 1{,}1\,\frac{c_1^2}{2g}\right)\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,Gv.$$

Um nun denjenigen Werth der Eintrittsgeschwindigkeit c_1 zu finden, bei welchem die Leistung am größten ausfällt, haben wir nur zu untersuchen, wenn

$$\left(\frac{c_1\,v_1\,cos.\,\alpha_1}{g} - 1{,}1\cdot\xi\,\frac{c_1^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{1{,}1\,.\,\xi\,.\,c_1}{2g}\left(\frac{2\,v_1\,cos.\,\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi} - c_1\right) Q\gamma$$

oder

$$c_1\left(\frac{2\,v_1\,cos.\,\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi} - c_1\right)$$

ein Maximum wird. Es ist hier derselbe Fall wie in Bd. **I**, §. 500, und daher wie dort

$$c_1 = \frac{v_1\,cos.\,\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi}$$

zu setzen. Die entsprechende Maximalleistung ist:

$$L = \left[\xi h - \left(2 - \frac{cos.\,\alpha_1^2}{1{,}1\,.\,\xi}\right)\frac{v_1^2}{2g}\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,Gv.$$

Die Formel $c_1 = \frac{v_1\,cos.\,\alpha_1}{1{,}1\,.\,\xi}$ giebt uns, da α_1 klein, also $cos.\,\alpha_1$ nahe 1 und ebenso $1{,}1\,.\,\xi$ nahe $= 1$ ist, auch c_1 nahe $= v_1$; wegen der leichteren und sichereren Einführung des Wassers in die Zellen macht man aber $c_1\,cos.\,\alpha_1 = 2\,v_1$, läßt also das Wasser noch einmal so schnell in das Rad eintreten, als dieses umläuft, weshalb man die effective Radleistung

$$L = \left[\xi h - \left(\frac{4{,}4\,\xi}{cos.\,\alpha_1^2} - 2\right)\frac{v_1^2}{2g}\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,Gv$$

erhält.

Da dieser Ausdruck für die Leistung eines rückenschlägigen Rades nicht wesentlich verschieden ist von dem für die eines oberschlägigen, so ist ohne weitere Untersuchung leicht einzusehen, daß auch die vortheilhafteste Umdrehungszahl (s. §. 196) nahe dieselbe sein werde.

§. 209 **Effective Leistungen der Kropfräder.** Ueber die Wirkungen mittelschlägiger Kropfräder sind von Morin an ziemlich gut construirten Rädern mehrfache Versuche angestellt worden. Morin vergleicht die Ergebnisse seiner Versuche mit den entsprechenden Werthen, welche die theoretische Formel

$$Pv = \left(\frac{(c\,cos.\,\alpha - v)\,v}{g} + h_2\right) Q\gamma$$

giebt, und findet nun, daß eine ziemlich gute Uebereinstimmung sich herausstellt, wenn man den letzten Ausdruck durch einen Erfahrungscoefficienten χ multiplicirt, also

$$Pv = \chi \left(\frac{(c \cos. \alpha - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma$$

setzt. Das erste von den Rädern dieser Art, welches Morin in Untersuchung zog, war aus Gußeisen, hatte hölzerne, schief gegen die Schütze gestellte Schaufeln und befand sich in einem sehr eng anschließenden eisernen Kropfe. Es hatte eine Höhe von $6^1/_2$ Meter, eine Breite von $1^1/_2$ Meter, ein Gefälle von $1^2/_3$ Meter, 50 Schaufeln und ging mit 1 bis 2,4 Meter Geschwindigkeit um, während das Wasser mit 2,8 bis 3,2 Meter Geschwindigkeit durch eine unter einem geneigten Schutzbrete befindliche Mündung eintrat. Der Coefficient χ ergab sich im Mittel 0,75 und der Wirkungsgrad, mit Einschluß der Zapfenreibung, ungefähr 0,60. Das zweite Rad, an welchem Morin Versuche angestellt hat, war ebenfalls eisern und ging in einem sehr eng anschließenden Kropfe aus Sandsteinquadern; seine Höhe, wie seine Weite, war 4 Meter, die Schaufelzahl betrug 32 und das Gefälle 2 Meter. War die Geschwindigkeit des Rades 47 bis 100 Proc. von der des durch einen Ueberfall zugeführten Wassers und zwar innerhalb der Grenzen 0,5 bis 1,8 Meter, so blieb der Coefficient χ ziemlich derselbe, nämlich 0,788, und der Wirkungsgrad fiel 0,70 aus. Mit einem dritten Rade wurden zwei Versuchsreihen angestellt, die eine bei einem Wassereinlaufe mit Spannschütze und die andere bei einer Wasserzuführung durch eine Ueberfallschütze. Dieses Rad war größtentheils aus Holz und hing in einem eng anschließenden Kropfe, seine Höhe betrug 6 Meter und seine Schaufelzahl 40. Bei der Spannschütze ergab sich im Mittel $\chi = 0,792$, bei der Ueberfallschütze dagegen 0,809. Der Wirkungsgrad aber war im ersten Falle 0,54 und im zweiten 0,67. Nimmt man nun aus diesen Angaben Mittelwerthe, so erhält man für mittelschlägige Kropfräder mit Spannschützen die Leistung:

$$L = 0,77 \left(\frac{(c \cos. \alpha - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma$$

und für die mit Ueberfallschützen:

$$L = 0,80 \left(\frac{(c \cos. \alpha - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma,$$

wovon jedoch die Arbeit der Zapfenreibung abzuziehen ist. Die größere Wirkung bei der Ueberfallschütze hatte ihren Grund darin, daß hier das Wasser langsamer eintrat, als bei der Spannschütze, und deshalb fast nur durch Druck wirkte. Noch folgt aus den Versuchen Morin's, daß der Wirkungsgrad abnimmt, wenn das Wasser mehr als die Hälfte oder zwei Drittel der Räume zwischen den Schaufeln ausfüllt, daß die Wirkung sich

nicht sehr verändert, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades innerhalb der Grenzen 0,5 und 2,0 Meter bleibt.

Egen hat Versuche (s. die oben angeführte Abhandlung desselben) an einem 23 Fuß hohen und $4^1/_3$ Fuß weiten Kropfrade angestellt. Dieses Rad hatte noch zwei Eigenthümlichkeiten; es waren nämlich die 69 übrigens gut ventilirten Schaufeln desselben genau so gedeckt, wie bei oberschlägigen Rädern, und es bestand die Schütze aus zwei Theilen, wovon, je nachdem es der Wasserstand erforderte, bald die eine oder obere, bald die andere oder untere gezogen werden konnte. Obgleich der Kropf sehr genau an das Rad anschloß, so fand Egen den Wirkungsgrad dieses Rades im günstigsten Falle doch nur 0,52, und im Mittel, bei 6 Cubikfuß Aufschlag pr. Secunde und bei 4 Umdrehungen pr. Minute, denselben gar nur 0,48.

Versuche mit einem mittelschlägigen Kropfrade werden noch in Bulletin de la Societé indust. de Mulhouse T. XVIII, (s. Polytechn. Centralblatt, Bd. IV, 1844) mitgetheilt. Dieses Rad war von Holz, hatte eine Höhe von 5 Meter und eine Weite von 4 Meter, und bestand aus drei Abtheilungen, welche durch zwei Mittelkränze hervorgebracht wurden. Das Kropfgerinne schloß sich an ein parabolisches Gerinne von 0,2 Meter Höhe an und das Wasser trat in dieses durch eine Ueberfallschütze mit ebenfalls 0,2 Meter Höhe; es war daher die Eintrittsgeschwindigkeit c ungefähr 2,8 Meter. Das ganze Gefälle betrug 2,7 Meter, und die Umfangsgeschwindigkeit des Rades $1^1/_2$ bis 3 Meter. Die Wasserfüllung war $^1/_3$ bis $^2/_3$, und der Wirkungsgrad fiel bei größerer Zellenfüllung größer aus, als bei kleinerer Füllung der Zellen; nämlich bei starker Füllung 0,80, bei mittlerer aber nur 0,73 und bei schwacher Füllung gar nur 0,52. Die Versuche über die Leistungen bei verschiedenen Füllungen ließen sich hier, da jede der Abtheilungen des Rades besonders beaufschlagt werden konnte, sehr bequem und sicher ausführen.

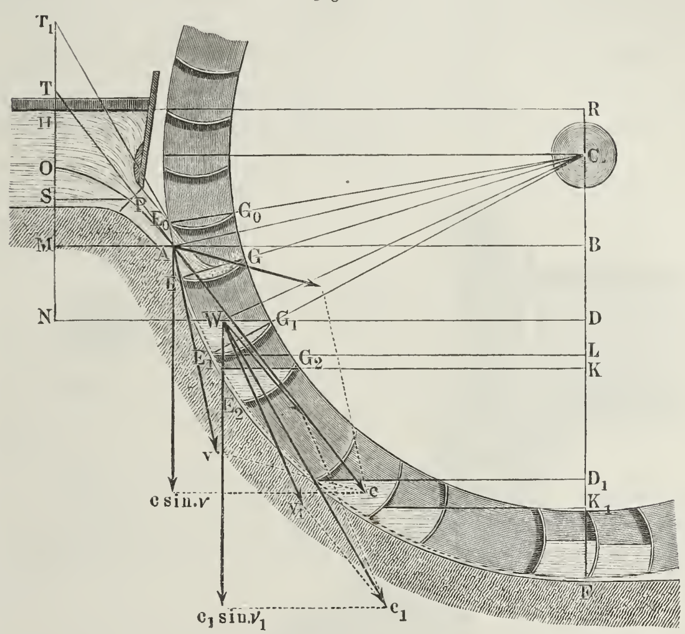
Durch Bremsversuche an einem eisernen mittelschlägigen Wasserrade von 20 sächsische Fuß Höhe, 3 Fuß Breite und mit 48 Schaufeln, welches das durch eine Coulissenschütze zugeführte Wasser in der Höhe des Radmittels auffing, wurde vom Verfasser in Verbindung mit den Herren Professoren Brückmann, Zeuner u. s. w. (s. „Civilingenieur“ Bd. II) Folgendes gefunden.

Bei dem Füllungscoefficienten $\varepsilon = {}^1/_2$ und dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\varkappa = {}^1/_2$ machte das Rad 8 bis 9 Umdrehungen pr. Minute und leistete $12^1/_2$ bis 12 Pferdekräfte, wogegen die disponible Leistung $Q h \gamma = 19$ Pferdekräfte betrug; es war folglich der Wirkungsgrad dieses Rades:

$$\eta = \frac{12,5}{19} = 0,65 \text{ bis } \frac{12}{19} = 0,63.$$

Beispiel. Es sei für einen Aufschlag $Q = 20$ Cubikfuß pr. Secunde und für ein Gefälle $h = 9$ Fuß die Anordnung und Berechnung eines mittelschlägigen Kropfrades, Fig 424, von 16 Fuß Höhe und mit 8 Fuß Umfangsgeschwindigkeit zu vollziehen.

Fig. 424.



Nehmen wir die Radtiefe oder Kranzbreite $d = 1\frac{1}{4}$ Fuß an, und lassen wir die Radzellen halb füllen, so erhalten wir zunächst die Radweite:

$$e = \frac{2\,Q}{d\,v} = \frac{2\,.\,20}{\frac{5}{4}\,.\,8} = 4 \text{ Fuß}.$$

Lassen wir nun das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$c = \varkappa v = \frac{3}{2}\,v = \frac{3}{2}\,.\,8 = 12 \text{ Fuß}$$

eintreten, so erhalten wir das zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit nöthige Gefälle:

$$\overline{MH} = \overline{BR} = h_1 = 1{,}4 \cdot \frac{c^2}{2\,g} = 1{,}1\,.\,0{,}016\,.\,12^2 = 2{,}54 \text{ Fuß}.$$

Ziehen wir dieses Gefälle von dem Totalgefälle ab, so bleibt für das Gefälle im Kropfe:

$$\overline{BF} = h_2 = h - h_1 = 9 - 2{,}54 = 6{,}46 \text{ Fuß},$$

und es folgt für den Winkel $ACF = \theta$, um welchen die Eintrittsstelle A über dem Radtiefsten F steht,

$$\cos.\theta = 1 - \frac{h_2}{a} = 1 - \frac{6{,}46}{8} = 1 - 0{,}8075 = 0{,}1925,$$

und hiernach

$$\theta = 78^0\,54'.$$

Lassen wir nun den zutretenden Wasserstrahl um den Winkel $\alpha = \overline{cAv} = 25\frac{1}{2}$ Grad vom Radumfange abweichen, so erhalten wir die Neigung des Wasserstrahles in A gegen den Horizont:

$$BAc = \nu = \theta - \alpha = 78^0\,54' - 25^0\,30' = 53^0\,24',$$

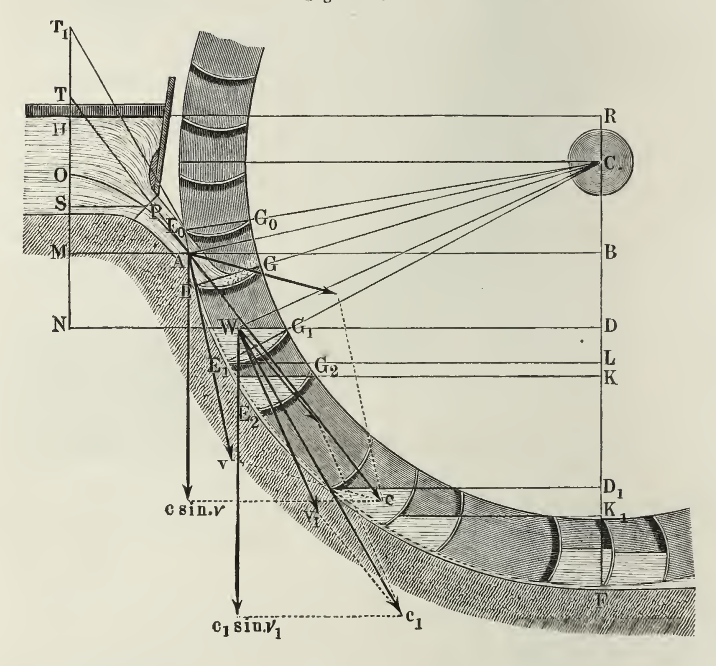
und es sind nun die Coordinaten des Scheitels O, der Parabel, in welcher das Wasser dem Rade zuzuführen ist:

$$\overline{OM} = x = \frac{c^2 \sin.\nu^2}{2g} = 0{,}016\,.\,144\,(\sin.\,53^0\,24')^2 = 1{,}48 \text{ Fuß}$$

und

$$\overline{MA} = y = \frac{c^2 \sin.2\nu}{2g} = 0{,}016\,.\,144 \sin.\,73^0\,12' = 2{,}21 \text{ Fuß}.$$

Fig. 425.



Die Mitte P der Schützenmündung ist auf dem Parabelbogen OA, und zwar möglichst nahe am Rade anzunehmen, übrigens aber so zu formen, daß ihre Axe die Tangente an diesem Bogen bildet. Legt man diese Mündungsmitte P um 0,54 Fuß über A, so folgt die Druckhöhe für dieselbe:

$$h_0 = h_2 - 0{,}54 = 2{,}54 - 0{,}54 = 2 \text{ Fuß},$$

daher die Ausflußgeschwindigkeit:

$$c_0 = 0{,}95\,\sqrt{2\,g h_0} = 0{,}95\,\sqrt{125} = 10{,}62 \text{ Fuß},$$

und nimmt man noch die Mündungsweite $e_0 = e - 0{,}25 = 3{,}75$ Fuß an, so folgt die Mündungshöhe:

$$d_0 = \frac{Q}{c_0 e_0} = \frac{20}{10{,}62\,.\,3{,}75} = 0{,}502 \text{ Fuß}.$$

Geben wir dem Rade 48 Schaufeln, so erhalten wir den äußeren Abstand zwischen je zwei Schaufeln

$$b = \frac{2\pi a}{n} = \frac{2\pi . 8}{48} = \frac{3,1416}{3} = 1,047 \text{ Fuß}.$$

Nehmen wir an, daß die Schaufel EG den Weg $EE_1 = s = 0,9$ Fuß zurücklege, während sie noch Wasser aufnimmt und zeichnen wir hiernach nicht allein die Stellung $E_1 G_1$ der Schaufel, sondern auch den Querschnitt des Wasserkörpers in dem entsprechenden Augenblick der Zellenfüllung auf, so können wir nun auch die Tiefe $MN = z_1$ des Wasserspiegels W unter der Eintrittsstelle A abmessen. Man findet auf diese Weise $z_1 = 1,25$ Fuß, und es ist hiernach die Geschwindigkeit des bei W auffallenden Wassers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2gz_1} = \sqrt{144 + 62,5 . 1,25} = \sqrt{222} = 14,9 \text{ Fuß},$$

sowie die Abscisse des Punktes W:

$$x_1 = \overline{ON} = x + z_1 = 1,48 + 1,25 = 2,73 \text{ Fuß},$$

die Ordinate desselben

$$y_1 = \overline{NW} = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = 2,21\sqrt{\frac{2,73}{1,48}} = 3,00 \text{ Fuß}$$

und für den Neigungswinkel $c_1 WD = \nu_1$ des in W einfallenden Wassers

$$tang. \nu_1 = \frac{2x_1}{y_1} = \frac{5,46}{3,00} = 1,82, \text{ wonach}$$

$$\nu_1 = 61^0 13' \text{ folgt.}$$

Da nun

$$c \sin. \nu = 12 \sin. 53^0 24' = 9,634 \text{ und}$$

$$c_1 \sin. \nu_1 = 14,9 \sin. 61^0 13' = 13,059 \text{ ist, so folgt}$$

$$\frac{2z_1}{c \sin. \nu + c_1 \sin. \nu_1} = \frac{2 . 1,25}{22,693} = \frac{2,5}{22,693} = 0,1102,$$

während

$$\frac{s}{v} = \frac{0,9}{8} = 0,1125 \text{ giebt.}$$

Jedenfalls ist die Differenz zwischen diesen Werthen von $\frac{2z_1}{c_1 \sin. \nu + c_1 \sin. \nu_1}$ und $\frac{s}{v}$ klein genug um $s = 0,9$ und $z_1 = 1,25$ Fuß als die richtigen ansehen zu können.

Ferner ist für den Winkel $WCF = \theta_1$, um welchen der Anfangspunkt W des wasserhaltenden Bogens WF vom Radtiefsten F absteht,

$$cos. \theta_1 = \frac{CD}{CW} = \frac{CB + z_1}{a_1} = \frac{1,54 + 1,25}{7,6} = 0,3671,$$

wonach $\theta_1 = 68^0 28'$, und die Abweichung der Richtung des Wasserstrahles von der Bewegungsrichtung des Rades in W:

$$\alpha_1 = \theta_1 - \nu_1 = 68^0 28' - 61^0 13' = 7^0 15' \text{ folgt.}$$

Da das wirksame Druckgefälle im Rade

$$\overline{FD} = h_3 = h_2 - z_1 = 6,46 - 1,25 = 5,21 \text{ Fuß},$$

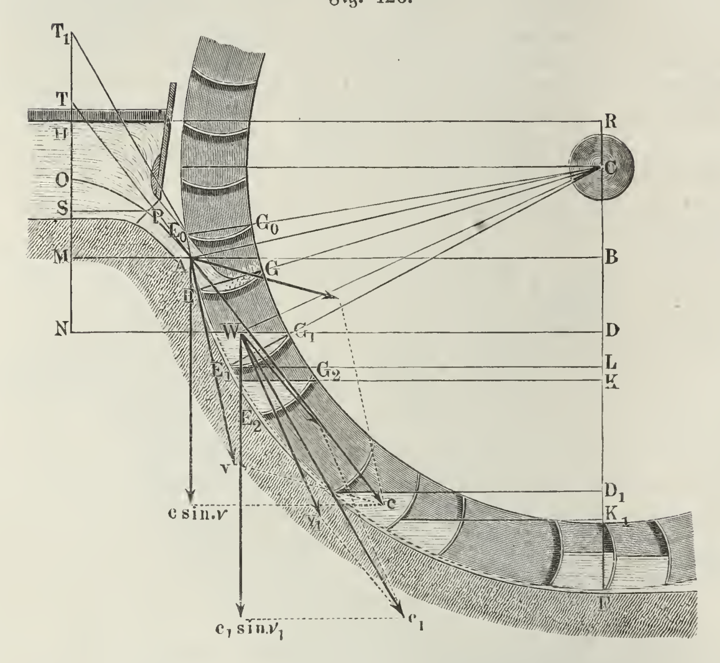
und die Geschwindigkeit des Rades W:

$$v_1 = \frac{a_1}{a} v = \frac{7,6}{8} \cdot 8 = 7,6 \text{ Fuß ist,}$$

so folgt die Leistung dieses Kropfrades ohne Rücksicht auf die Wasserverluste u. s. w.:

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + h_3\right) Q\gamma$$
$$= [0,032 \ (14,9 \cos. 7^0 15' - 7,6) . 7,6 + 5,21] \ 20 . 61,75$$
$$= (0,032 . 7,10 . 7,6 + 5,21) . 1235 = (1,75 + 5,21) . 1235$$
$$= 6,96 . 1235 = 8596 \text{ Fußpfund.}$$

Fig. 426.



Ist die Weite des Spielraumes im Kropfe $\sigma = \frac{1}{2}$ Zoll und nimmt man $\mu = 0,7$ an, so hat man

$$\mu \sigma \theta a \sqrt{2g} = 0,7 . \frac{1}{24} . 8 . 7,906 \ arc. 78^0,54 = \frac{0,7 . 7,906}{3} \cdot 1,377 = 2,54.$$

Da ferner

$$Fv = \frac{60 \ Q}{nue} \cdot \frac{2 \pi u a}{60} = \frac{2 \pi a Q}{ne} = \frac{6,28 . 8 . 20}{48 . 4} = 5,23$$

und $h_3 = 5,21$ ist, so folgt

$$\frac{\mu \sigma \theta a \sqrt{2g}}{F v h_3} = \frac{2,54}{5,23 . 5,21} = 0,0932.$$

Ist noch der mittlere Werth von $k\sqrt{l} = 0,5$, ferner $b = 1$ und der mittlere Werth von $\frac{2}{3} p \sqrt{m} = 1,0$, so folgt
$\xi = 1 - 0,0932 \ (0,5 + \frac{1}{4} . 1) = 1 - 0,0932 . 0,75 = 1 - 0,070 = 0,930$
und daher die effective Radleistung

$$L = \left(\frac{(c_1 \cos. \alpha_1 - v_1) v_1}{g} + \xi h_3\right) Q\gamma = (1,75 + 0,930 . 5,21) . 1235$$
$$= 6,595 . 1235 = 8145 \text{ Fußpfund.}$$

Wenn hiervon die übrigen Nebenhindernisse, der Luftwiderstand und die Zapfenreibung 645 Fußpfund verzehren, so ist die Nutzleistung dieses Rades

$L = 7500$ Fußpfund $= 15\frac{1}{2}$ Pferdekräfte,

und der Wirkungsgrad desselben:

$$\eta = \frac{L}{Q h \gamma} = \frac{7500}{20 . 9 . 61,74} = \frac{25}{37} = 0,68.$$

Unterschlägige Wasserräder. Die unterschlägigen Wasserräder hängen in der Regel in einem Gerinne, welches mit seinem Boden und mit seinen Seitenwänden das Rad möglichst genau umschließen soll, damit sich so wenig wie möglich Wasser der Wirkung desselben auf das Rad entziehen kann. Aus diesem Grunde ist auch die Anwendung von einem Kropfgerinne, welches das Rad längs eines kleinen Bogens concentrisch umfaßt, zweckmäßiger, als die Anwendung von einem Schnurgerinne, welches das Rad nur tangirt. Ueberdies gewährt das Kropfgerinne, wenn es sich nur auf der einen Seite des Rades befindet, noch den Nutzen, daß das Wasser in ihm noch eine Druckwirkung hervorbringen kann, welche beim Schnurgerinne ganz ausfällt. Die Berechnung eines solchen unterschlägigen Rades im Kropfgerinne (Fig. 427) ist, wenn der Kropf AB wenigstens 3 bis 4 Schaufeln umfaßt, genau so durchzuführen, wie die eines mittelschlägigen Kropfrades. Auch sind die mittel- und unterschlägigen Kropfräder nach gleichen Regeln zu construiren, da sie sich wesentlich nicht von einander unterscheiden. Man wendet auch hier meist einfache radial gestellte Schaufeln an; zuweilen neigt man sie jedoch unten etwas nach der Schütze zu, damit sie auf der anderen Seite des Rades kein Wasser mit empor nehmen. Nicht selten setzt man sie sogar aus zwei Theilen BD und DE, Fig. 428, so zusammen, daß dieselben einen Winkel BDE von 100 bis 120° einschließen. Es lassen sich hier große Oeffnungen im Boden aussparen, ohne befürchten zu müssen, daß das Wasser durch dieselben nach innen überfließt, und deshalb läßt man die Zellen dieser Räder auch in der Regel zur Hälfte oder zwei Drittel vom Wasser anfüllen, wendet also den Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ an. Um das Ueberlaufen des Wassers §. 210

Fig. 427

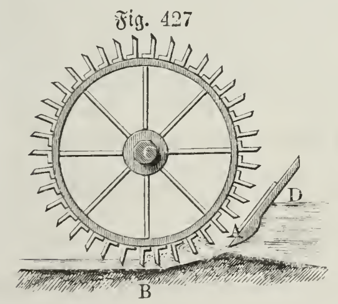
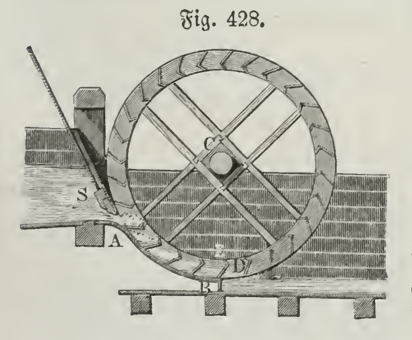


Fig. 428.



nach innen zu verhindern, oder um einen größeren Fassungsraum zu erhalten, wendet man hier oft größere Radtiefen von $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Fuß an. Die tangentiale Einführung des Wassers ist hier noch leichter zu bewerkstelligen als bei mittelschlägigen Rädern. Um die Schützenmündung möglichst nahe an das Rad legen zu können, wendet man ein geneigtes Schutzbrett S, Fig. 428, an, dessen untere Kante noch abgerundet wird, um die partielle Contraction des Wasserstrahles zu verhindern.

§. 211 **Unterschlägige Kropfräder.** Jedenfalls ist die Leistung unterschlägiger Kropfräder noch kleiner als die mittelschlägiger, wo das Druckgefälle immer ein größeres ist. Der Grund hiervon ist leicht zu ermessen, da bei der Wirkung des Wassers durch den Stoß mindestens die Hälfte der disponiblen Leistung verloren geht, während bei der Druckwirkung durch das Entweichen des Wassers im schädlichen Raume höchstens $^1/_4$ an der zu Gebote stehenden Leistung verloren wird. Die hierüber angestellten Versuche haben dies auch zur Genüge bewiesen. Das eine Rad, an welchem Morin Versuche angestellt hat, war 6 Meter hoch und 1,6 Meter lang und hatte 36 radial gestellte Schaufeln. Das Schutzbrett war $34^1/_2{}^0$ gegen den Horizont geneigt und die Mündung unter demselben stand noch 0,78 Meter vom Anfange des Kropfgerinnes ab. Das Totalgefälle betrug im Mittel 1,9 Meter, die Druckhöhe vor der Ausflußmündung im Mittel 1,4 Meter, es war demnach das Druckgefälle ungefähr 0,5 Meter. Die Umfangsgeschwindigkeit des Rades war 2 bis 4 Meter, und die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers 5 bis $5^1/_2$ Meter. So lange $\frac{v}{c}$ den Werth $= 0{,}63$ nicht übertraf, ergab sich der Wirkungsgrad im Mittel $\eta = 0{,}41$, wenn aber $\frac{v}{c}$ zwischen den Grenzen 0,5 und 0,8 war, so stellte sich η im Mittel nur 0,33 heraus. Wenn die schon früher gebrauchten Bezeichnungen c, v, Q und h auch hier gelten, so hat man hiernach für die Leistung dieses Rades, ohne Rücksicht auf Zapfenreibung, im ersten Falle:

$$Pv = 0{,}74 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma,$$

und im zweiten:

$$Pv = 0{,}60 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma.$$

Das zweite Rad, mit welchem Morin noch Versuche angestellt hat, war beinahe 4 Meter hoch, ungefähr 0,8 Meter weit, 0,3 Meter tief und hatte nur 24 Schaufeln. Das Wasser floß aus der Mündung eines verticalen Schutzbrettes, und gelangte von da durch ein 0,8 Meter langes horizontales Gerinne bis zum Rade. Dieses Gerinne sowie der Kropf war von Quader-

steinen, und es hatte der schädliche Raum nur 0,005 Meter Weite. Das Gefälle betrug im Mittel 0,78 bis 1 Meter, die Druckhöhe des Wassers hinter der Schütze aber war 0,15 bis 0,45 Meter. Die Versuche wurden bei sehr verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten des Rades angestellt, bei sehr kleinen Geschwindigkeiten war der Wirkungsgrad auch sehr klein, bei der mittleren Geschwindigkeit von 1,5 Meter aber war er am größten, und wenn dann die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers hiervon nicht viel verschieden war, so stellte sich der größte Wirkungsgrad 0,49 heraus. Für die Geschwindigkeitsverhältnisse innerhalb der Grenzen $\frac{v}{c} = {}^1/_4$ und $\frac{v}{c} = {}^2/_4$ hat sich im Mittel genau wie beim vorigen Rade $\eta = 0{,}74$ herausgestellt, daher auch hier die Formel

$$Pv = 0{,}74 \left(\frac{(c - v)v}{g} + h_2\right) Q\gamma$$

gilt.

Morin macht nun mit den Resultaten seiner Versuche an Kropfrädern überhaupt folgende Zusammenstellung. Für diese Räder läßt sich setzen:

$\eta = 0{,}40$ bis $0{,}45$, wenn $h_1 = {}^1/_4\, h$
$\eta = 0{,}42$ bis $0{,}49$, wenn $h_1 = {}^2/_5\, h$
$\eta = 0{,}47$, wenn $h_1 = {}^2/_3\, h$ und
$\eta = 0{,}55$, wenn $h_1 = {}^3/_4\, h$ ist.

Beispiel. Man soll die Leistung eines unterschlägigen Kropfrades von 15 Fuß Höhe angeben, welches in der Minute 8 Umdrehungen macht, ein Gefälle von 4 Fuß und ein Wasserquantum von 20 Cubikfuß benutzt. Die Umfangsgeschwindigkeit ist

$$v = \frac{\pi u a}{30} = \frac{\pi \,.\, 8 \,.\, 15}{60} = 6{,}283 \text{ Fuß};$$

und wenn nun die Wassergeschwindigkeit doppelt so groß ist, so hat man die Druckhöhe des Wassers vor dem Schutzbrete, oder das sogenannte Stoßgefälle

$$= 1{,}1 \cdot \frac{c^2}{2g} = 1{,}1 \,.\, 0{,}016 \,.\, 12{,}566^2 = 2{,}779 \text{ Fuß};$$

daher bleibt für Druckgefälle $h_2 = 4 - 2{,}779 = 1{,}221$ Fuß übrig, und es ist nun die theoretische Leistung:

$$L = (0{,}032 \,.\, 6{,}283^2 + 1{,}221) \,.\, 20 \,.\, 61{,}75 = (1{,}263 + 1{,}221) \,.\, 1235 = 3067 \text{ Fußpfd.}$$

Nun hat man aber hier h_1 nur:

$$\frac{1{,}221}{4} h = 0{,}3\, h,$$

daher möchte der Coefficient η nur 0,42 zu setzen, also die Leistung

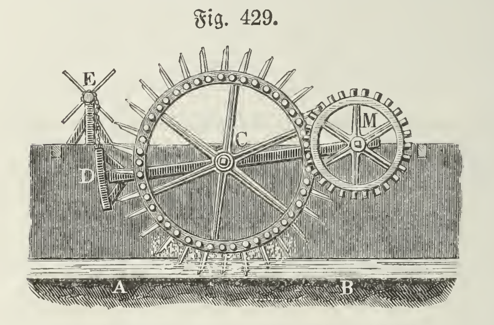
$$L = 0{,}42 \,.\, 3279 = 1288 \text{ Fußpfund}$$

anzunehmen, und hiervon selbst noch die Arbeit der Zapfenreibung abzuziehen sein.

Räder im Schnurgerinne. Die schwächsten Leistungen liefern die unterschlägigen Räder im Schnurgerinne, weil dieselben nur durch den §. 212

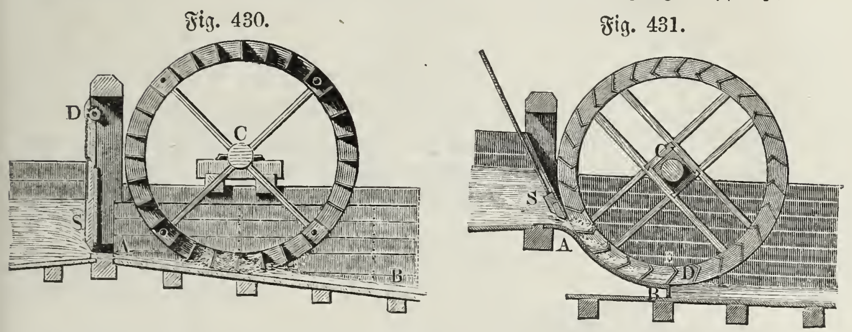
Wasserstoß in Umdrehung gesetzt werden, und weil sie überdies noch ein bedeutendes Wasserquantum unbenutzt fortgehen lassen. Sie kommen nur bei unbedeutenden Gefällen von noch nicht 4 Fuß vor, weil hier die Anwendung eines Kropfes noch keine wesentlichen Vortheile gewährt. Wegen ihrer geringen Leistung ersetzt man sie gern durch Ponceleträder, oder durch Turbinen, wovon in der Folge die Rede sein wird. Man giebt diesen Rädern nur 12 bis 24 Fuß Höhe, und versieht sie mit 24 bis 48, meist radial oder unten wenig nach der Schütze zu schräg gestellten Schaufeln. Die Schaufeln müssen dreimal so breit gemacht werden, als der ankommende Wasserstrahl dick ist, weil das Wasser nach vollbrachtem Stoße mit dem Rade eine Geschwindigkeit annimmt, die bei der größten Wirkung 35 bis 40 Procent der Geschwindigkeit des Wassers vor dem Stoße ist, daher der fortfließende Wasserstrom $2^1/_2$ bis 3 mal so dick ist, als der ankommende Wasserstrahl. In der Regel ist der ankommende Wasserstrahl 4 bis 6 Zoll dick, daher die Höhe des fortgehenden Wassers 10 bis 18 Zoll, und die nöthige Schaufelbreite, damit das Wasser nicht nach innen überfließe, 12 bis 20 Zoll. Das Schnurgerinne, in welchem ein gemeines unterschlägiges Rad hängt, ist entweder horizontal, wie *AB*, Fig. 429, oder geneigt, wie *AB*, Fig. 430. Damit so wenig wie möglich Wasser unbenutzt durchgehe, darf der Zwischenraum zwischen Rad und Gerinne nur 1 bis 2 Zoll, besser soll er aber noch weniger betragen. Aus demselben Grunde ist es auch besser, wenn man, wie Fig. 431 vor Augen führt, eine schwache Krümmung in das Gerinne legt, und wenn man das Rad eng schaufelt, so daß immer 4 bis 5 Schaufeln in das Wasser eingetaucht sind. Die Spannschütze legt man gern schief, um die Ausflußmündung der Eintrittsmündung möglichst nahe zu bringen und die Contraction des Wasserstrahles möglichst zu beseitigen. Unter dem Rade bringt man oft einen Abfall an, weil hier ein Rückstau des Wassers bis zum Rade den Gang des Rades sehr stören oder ganz verhindern kann. Auch wendet man in solchen Fällen noch besondere Vorrichtungen zum Heben oder Senken des Rades und nach Befinden auch des Gerinnes an. Man nennt diese Vorrichtungen Pansterzeuge, und unterscheidet in den Werken über Mühlenbaukunst Stock- und Ziehpanster. Bei den ersteren wird das Angewelle (Angewäge) durch Hebeladen (s. Bd. I, §. 135), bei den zweiten aber durch Ketten u. s. w. gehoben oder gesenkt.

Fig. 429.



In Fig. 429 ist ein Ziehpanster abgebildet. Die Axe *M* des Hebels *MD* fällt hier mit der Umdrehungsaxe der Welle, welche die Bewegung fortpflanzt,

Fig. 430. Fig. 431.



zusammen, damit sich der Eingriff zwischen Rad und Getriebe beim Heben oder Senken des Rades nicht ändert. In *C* trägt dieser Hebel das Rad, und in *D* wird derselbe mittels eines Kreuzhaspels *E* und einer Kette *DE* auf- oder niedergelassen. Um diese unvollkommenen und schwerfälligen Vorrichtungen nicht nöthig zu haben, wendet man in neuerer Zeit bei veränderlichem Wasserstande lieber Turbinen statt unterschlägiger Wasserräder an, um so mehr, da diese auch mehr Leistung geben, als diese Räder.

Wasserverlust im Schnurgerinne. Ist *c* die Geschwindigkeit des Wassers und *v* die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, so hat man für die Leistung eines unterschlägigen Rades im Schnurgerinne die theoretische Formel: §. 213

$$Pv = \frac{(c - v)v}{g} Q_1 \gamma,$$

und also die Umdrehungskraft:

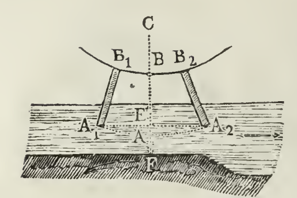
$$P = \frac{c - v}{g} Q_1 \gamma = 1{,}976\ (c - v)\ Q_1$$

(s. Bd. I, §. 501). Hier bezeichnet allerdings Q_1 das wirklich zum Stoße gelangende Wasserquantum; es ist daher noch zu untersuchen, in welchem Verhältnisse dasselbe zum ganzen Aufschlagsquantum steht. Der Wasserverlust bei einem Rade im Schnurgerinne ist ein doppelter. Erstens geht Wasser unbenutzt durch den Zwischenraum zwischen Rad und Gerinne hindurch, und es findet zweitens ein Wasserverlust dadurch statt, daß gewisse, namentlich tiefere Wasserelemente, gar nicht zum Stoße gegen die vorausgehende Schaufel gelangen.

Betrachten wir zunächst den Wasserverlust durch den Spielraum unter dem Radtiefsten. Die Höhe des Spielraumes unter dem Rade ist veränder-

lich; steht die Schaufel AB, Fig. 432, am tiefsten Punkte, so ist diese Höhe dem kürzesten Abstande $\overline{AF} = \sigma$ des Rades vom Gerinne gleich, stehen aber zwei benachbarte Schaufeln $A_1 B_1$ und $A_2 B_2$ um gleichviel vom Tiefsten F ab, so ist die Höhe EF des schädlichen Raumes am größten. Setzen wir den Radhalbmesser $\overline{CA} = a$, und die Schaufelzahl des Rades $= n$, so haben wir die halbe Entfernung $EA_1 = EA_2$ je zweier Schaufeln von einander:

Fig. 432.



$$= \frac{2\pi a}{2n} = \frac{\pi a}{n},$$

und daher die Bogenhöhe:

$$\overline{EA} \text{ annähernd} = \frac{\overline{EA_1}^2}{2a} = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2};$$

es stellt sich folglich die größte Höhe des schädlichen Raumes

$$\overline{EF} = \sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2}$$

heraus, und es läßt sich sonach der mittlere Werth desselben

$$= \sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}$$

setzen. Multipliciren wir hiermit die ganze Gerinneweite e_1, so erhalten wir den Querschnitt des schädlichen Raumes:

$$= e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}\right],$$

und es ist nur noch die Geschwindigkeit w zu ermitteln, mit welcher das Wasser durch denselben entweicht. Steht die Oberfläche des Unterwassers in gleichem Niveau mit der Oberfläche des ankommenden Strahles, so kann das Wasser ungehindert mit der Geschwindigkeit c durch EF hindurchgehen, und es ist daher die unter dem Rade unbenutzt hinwegfließende Wassermenge:

$$Q_2 = \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] e_1 c;$$

steht aber die Oberfläche des Unterwassers höher als die des anstoßenden, welcher Fall allemal eintritt, wenn das Abzugsgerinne AB, Fig. 433, unter oder nahe hinter dem Rade keinen Abfall hat, so ist die Geschwindigkeit des entweichenden Wassers kleiner, weil hier ein Gegendruck vom Unterwasser dem Ausströmen entgegenwirkt. Setzen wir die Strahldicke $AD = d_1$ und die Höhe AE des abfließenden Wassers $= d_2$, so haben wir

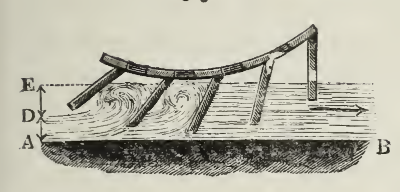
aus bekannten Gründen $d_1 c = d_2 v$, und daher

$$d_2 = \frac{d_1 c}{v},$$

sowie den Niveauabstand

$$d_2 - d_1 = \left(\frac{c - v}{v}\right) d_1.$$

Fig. 433.



Hiernach folgt für diesen Fall die Geschwindigkeit des durch den Spielraum unter dem Rade entweichenden Wassers:

$$w = \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1},$$

also der Wasserverlust:

$$Q_2 = e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1}.$$

Dieser Ausdruck ist jedoch, wie der obere, noch mit einem Ausflußcoefficienten μ zu multipliciren, der wie beim Kropfrade, $= 0{,}7$ gesetzt werden kann. Noch etwas Wasser fließt durch den Spielraum zur Seite der Radkränze ab. Der Querschnitt des Wassers, welches auf diese Weise verloren geht, ist $d_1 \sigma_1$ zu setzen, und daher für den ersten Fall diese Abflußmenge:

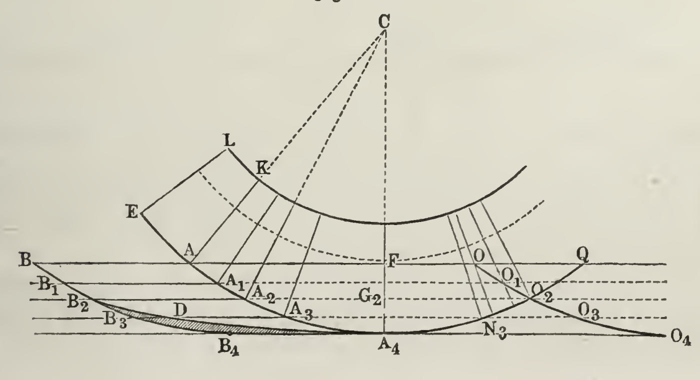
$$Q_3 = 2 \mu d_1 \sigma_1 c,$$

im zweiten aber:

$$Q_3 = 2 \mu d_1 \sigma_1 \sqrt{c^2 - 2g\left(\frac{c - v}{v}\right) d_1}.$$

Gerstner's Formel. Das Wasserquantum, welches zwischen den Schaufeln durchgeht, ohne zum Stoße zu gelangen, läßt sich, wenn auch nur annähernd, nach Gerstner auf folgende Weise ermitteln. Aus der Entfernung $\overline{AE} = b$, Fig. 434, je zweier Schaufeln von einander §. 214

Fig. 434.



ergiebt sich mit Hülfe der Geschwindigkeiten c und v des Wassers und des Rades, die Länge $\overline{AB} = \overline{A_1 B_1} = \overline{A_2 B_2}$ u. s. w. derjenigen Wasserfäden, welche in dem Zwischenraume zwischen je zwei Schaufeln Platz finden, $l = \frac{c}{v}\, b$. Wenn nun von dem Wasserfaden AB das erste Element A die Schaufel AK in A trifft, so wird das letzte Element B desselben diese in einem Punkte O treffen, dessen Entfernung $\overline{AO}$ von A bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\frac{AO}{v} = \frac{BO}{c}, \text{ oder } \frac{AO}{v} = \frac{AO}{c} + \frac{BA}{c},$$

es folgt hiernach:

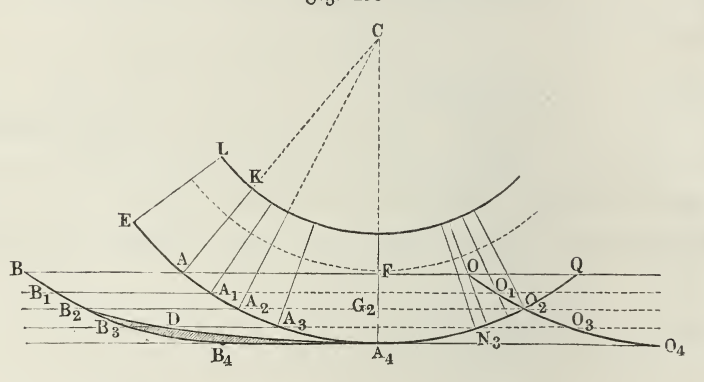
$$\overline{AO} = \left(\frac{v}{c-v}\right) \cdot \overline{BA} = \frac{vl}{c-v};$$

ebenso ist für tiefere Wasserfäden:

$$\overline{A_1 O_1} = \overline{A_2 O_2} = \overline{AO} = \frac{vl}{c-v}.$$

Das letzte Element B_2 des Wasserfadens $A_2 B_2$ trifft allerdings noch die Schaufel, dagegen das letzte Element B_3 eines tieferen Fadens $A_3 B_3$

Fig. 435.



würde die Schaufel erst in O_3 erreichen, wo sich dieselbe in Folge ihrer Kreisbewegung aus der Bewegungsrichtung des Fadens $A_3 B_3$ herausgezogen hat; es kann also dasselbe nicht zum Stoße gelangen. Aber nicht allein B_3, sondern ein ganzer Theil $B_3 D$ des Wasserfadens $A_3 B_3$ kommt nicht zum Stoße, weil erst das Element D die Schaufel in N erreicht.

Die Länge $A_3 D$ desjenigen Theiles vom Wasserfaden $A_3 B_3$, welcher noch zum Stoße gelangt, ist bestimmt durch Umkehrung der obigen Formel, indem man setzt:

$$\overline{A_3 D} = \frac{c - v}{v} \cdot \overline{A_3 N}.$$

Dies gilt für alle Wasserfäden zwischen $A_2 B_2$ und $A_4 B_4$, es ist daher auch der Inbegriff aller zwischen $A_2 B_2 D A_4 A_3 A_2$ liegenden und eine Schaufel stoßenden Wasserfäden, $= \dfrac{c - v}{v}$ mal Summe aller Sehnen zwischen $A_2 O_2$ und A_4, d. i. $\dfrac{c - v}{v}$ mal Kreissegment $A_2 O_2 A_4$. Dieses Segment läßt sich aber (s. „Ingenieur", Geometrie S. 189) $= {}^2/_3\, \overline{A_2 O_2} \,.\, \overline{A_4 G_2}$ $= {}^2/_3\, \overline{AO} \,.\, \overline{A_4 G_2}$ setzen; daher ist denn der Querschnitt der zum Stoße gelangenden Wassermenge

$$A_2 B_2 D A_4 = \frac{c - v}{v} \cdot {}^2/_3 \cdot \frac{vl}{c - v} \cdot \overline{A_4 G_2} = {}^2/_3\, l \,.\, \overline{A_4 G_2},$$

und hiernach das Verhältniß der zum Stoß gelangenden Wassermenge Q_1 zur ganzen Wassermenge:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\text{Fläche } A B B_2 A_2 + \text{Fläche } A_2 B_2 D A_4}{\text{Fläche } A B B_4 A_4} = \frac{l \,.\, \overline{F G_2} + {}^2/_3\, l \,.\, \overline{A_4 G_2}}{l \,.\, \overline{A_4 F}}$$

$$= \frac{\overline{A_4 F} - {}^1/_3\, \overline{A_4 G_2}}{\overline{A_4 F}} = 1 - \frac{\overline{A_4 G_2}}{3\, \overline{A_4 F}}.$$

Ist ferner a der Halbmesser $\overline{CA}$ des Rades, so läßt sich, den Eigenschaften des Kreises zufolge, annähernd:

$$\overline{A_4 F} = \frac{\overline{A F}^2}{2a} \text{ und } \overline{A_4 G_2} = \frac{\overline{A_2 G_2}^2}{2a},$$

$$\text{folglich } \frac{A_4 G_2}{A_4 F} = \frac{\overline{A_2 G_2}^2}{\overline{A F}^2} \text{ setzen.}$$

Nun ist $\overline{A_2 G_2} = {}^1/_2\, \overline{A O} = {}^1/_2\, \dfrac{vl}{c - v}$, und

$\overline{A F} = {}^1/_2\, \overline{A Q} = {}^1/_2\, n_1 b = {}^1/_2\, n_1 \cdot \dfrac{v}{c} l$, wenn n_1 die Anzahl aller ins Wasser eingetauchten Schaufeln bezeichnet, daher folgt:

$$\frac{A_4 G_2}{A_4 F} = \frac{1}{n_1^2} \cdot \left(\frac{c}{c - v}\right)^2,$$

und endlich die stoßende oder Arbeit verrichtende Wassermenge:

$$Q_1 = \left[1 - \frac{1}{3 n_1^2} \left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q.$$

Man ersieht hieraus, daß dieser Verlust um so kleiner ausfällt, je größer die Anzahl der eingetauchten Schaufeln, je größer also auch die Zahl n der

Schaufeln überhaupt, und, da die Schaufelzahl mit dem Radhalbmesser wächst, je größer die Radhöhe ist.

Beispiel. Wenn ein unterschlägiges Rad im Schnurgerinne mit 3 Schaufeln ins Wasser eingetaucht ist, und halb so viel Geschwindigkeit hat als das ankommende Wasser, so beträgt bei demselben das Verhältniß der stoßenden Wassermenge zur ankommenden:

$$\frac{Q_1}{Q} = 1 - \frac{1}{27}\left(\frac{1}{1/2}\right)^2 = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27} = 0{,}85 \text{ Procent;}$$

es geht also 15 Procent Wasser unbenutzt durch.

Anmerkung. Die obige Untersuchung setzt voraus, daß jedes Wasserelement, nachdem es gegen eine Schaufel gestoßen hat, dem folgenden Platz macht, damit dieses ebenfalls die Schaufel stoßen könne. Da nach dem in Bd. I, §. 501 Vorgetragenen jedes Wasserelement während seines Stoßes oder während seiner Wirkung gegen die Schaufel an dieser in die Höhe steigt, so möchte sich dieser Annahme nichts Wesentliches entgegensetzen lassen.

Wenn das Rad unmittelbar unter dem Fuße A_4 einen Abfall hat, so findet nur vor $A_4 F$ ein Stoß statt; deshalb ist dann statt Segment $A_2\, O_2\, A_4$ nur dessen Hälfte $= \frac{1}{3}\, l\, A_4\, G_2$ in Rechnung zu bringen, und

$$Q_1 = \left[1 - \frac{2}{3\, n_1^2}\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q \text{ zu setzen.}$$

§. 215 **Leistung unterschlägiger Räder.** Wenn wir nun auf die im Vorstehenden gefundenen Wasserverluste und auch noch auf die Zapfenreibung Rücksicht nehmen, so können wir die effective Leistung eines unterschlägigen Wasserrades mit ziemlicher Sicherheit bestimmen. Es ist nämlich:

$$L = Pv = \frac{(c - v)v}{g}\,(Q_1 - Q_2)\,\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\,G v,$$

oder annähernd:

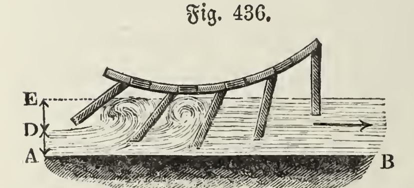
$$Q_2 = \sigma e c = \frac{\sigma}{d_1}\, Q \text{ und } Q_1 = \left[1 - \frac{1}{3\, n^2}\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q$$

gesetzt,

$$Pv = \frac{(c - v)v}{g}\left[1 - \frac{\sigma}{d_1} - \frac{1}{3\, n_1^2}\cdot\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right] Q\gamma - \varphi\,\frac{r}{a}\, G v.$$

In dem Falle, wenn, wie in Fig. 436 abgebildet ist, die Sohle des Abzugsgrabens mit der des Schußgerinnes zusammenfällt, und daher das Wasser nach vollbrachter Wirkung, wo es die Geschwindigkeit v des Rades angenommen hat, mit der Tiefe $\overline{AE} = d_2 = \frac{c}{v}\, d_1$ fortfließt, findet noch

Fig. 436.



eine Reaction des Wassers auf die Radschaufeln statt, deren mechanische Arbeit

$$L_1 = (d_2 - d_1)\, Q\gamma = \left(\frac{c - v}{v}\right) d_1\, Q\gamma$$

zu setzen ist, da hier die Druckhöhe d_1 in d_2 übergeht.

Diese Arbeit fällt um so größer aus, je größer die Differenz $c - v$ der Geschwindigkeiten und je größer die Dicke $\overline{AD} = d_1$ des ankommenden Wasserstrahles ist; um auf diese Weise wenig an Leistung zu verlieren, müßte daher das Rad schnell umgehen, und das Wasser in einem breiten und dünnen Strahle zufließen. Wir können indessen diese Arbeit der Reaction nur als relativen Verlust der Wirkung des Rades ansehen, da in Folge dieses Aufsteigens des Wasserspiegels auch das Totalgefälle, von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen, um $d_2 - d_1$ und also auch die disponible Arbeit um $(d_2 - d_1)\, Q\gamma$ kleiner wird. Jedenfalls werden wir daher keinen beträchtlichen Fehler begehen, wenn wir bei der Berechnung auf diese Wirkung des Rades nicht Rücksicht nehmen.

Es ist nun noch die Frage, bei welchem Verhältnisse $\frac{v}{c}$ der Radgeschwindigkeit zur Wassergeschwindigkeit wird die Leistung des unterschlägigen Rades am größten? Verhältnißmäßig ist hier der Verlust an Leistung, welchen das Rad durch die Zapfenreibung verliert, klein, wir können daher bei der Ermittelung des der Maximalleistung entsprechenden Verhältnisses $\frac{v}{c}$ dieselbe unbeachtet lassen, und haben daher dann nur das Maximum von

$$(c - v)\, v \left(1 - \frac{\sigma}{d_1} - \frac{c^2}{3\, n_1^2 (c - v)^2}\right) \text{ oder}$$

$$\left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c v - v^2) - \frac{c^2 v}{3\, n_1^2\, (c - v)} \text{ zu finden.}$$

Der höhere Calcül findet die Bedingung

$$\left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c - 2\, v) = \frac{c^3}{3\, n_1^2 (c - v)^2},$$

wonach sich nun

$$v = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{c^2}{3\, n_1^2 \left(1 - \frac{\sigma}{d_1}\right)(c - v)^2}\right) \text{ setzen läßt.}$$

Man ersieht hieraus, daß die Maximalleistung erlangt wird, wenn die Umfangsgeschwindigkeit des Rades etwas kleiner als die halbe Wassergeschwindigkeit ist.

Beispiel. Welche Leistung verspricht ein unterschlägiges Wasserrad im Schnurgerinne, welches bei 3 Fuß Gefälle ein Aufschlagsquantum Q von 20 Cubikfuß benutzt? Die theoretische Wassergeschwindigkeit ist:

$$c = \sqrt{2gh} = 7{,}906 . \sqrt{3} = 13{,}69 \text{ Fuß},$$

die effective Geschwindigkeit des Wassers läßt sich aber $= 0{,}95 \,.\, 13{,}69 = 13$ Fuß annehmen. Setzen wir die Strahlhöhe $d_1 = 4$ Zoll $= \frac{1}{3}$ Fuß, so müssen wir die Mündungsweite

$$e_1 = \frac{Q}{d_1 c} = \frac{20}{\frac{1}{3} \,.\, 13} = \frac{60}{13} = 4{,}615 \text{ Fuß}$$

und die Radweite e von 4,75 Fuß in Anwendung bringen. Rechnen wir nun auf den schädlichen Raum die Weite $\sigma = \frac{3}{4}$ Zoll; so erhalten wir den Verlust des Wassers durch den Spielraum des Rades im Gerinne:

$$\frac{\sigma}{d_1} = \frac{\frac{3}{4}}{4} = \frac{3}{16}$$

Geben wir ferner dem Rade den Halbmesser $a = 10$ Fuß, so können wir es mit 48 Schaufeln, jede von 1 Fuß Breite, ausrüsten, und annehmen, daß vom ganzen Radumfange der Theil

$$\frac{2\sqrt{d_1 \,.\, 2a}}{2\pi a} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\,d_1}{a}} = 0{,}318\sqrt{\frac{2}{30}} = 0{,}0822,$$

und von den sämmtlichen Radschaufeln $= 48 \,.\, 0{,}0822 = 3{,}95$ oder beinahe 4, ins Wasser eingetaucht sind. Hiernach ist nun die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit

$$v = \frac{13}{2}\left(1 - \frac{c^2}{3 \,.\, 16 \,.\, \frac{13}{16}\,(c - v)^2}\right) = \frac{13}{2}\left[1 - \frac{1}{39}\left(\frac{c}{c - v}\right)^2\right]$$

zu setzen. Sehr leicht findet man hieraus annähernd, $v = 0{,}45\,c$. Bringen wir aber wegen der Zapfenreibung, $v = 0{,}43\,c$ in Anwendung, so erhalten wir die effective Leistung des Wassers:

$$L = \frac{0{,}57 \,.\, 0{,}43\,c^2}{g}\left[\frac{13}{16} - \frac{1}{48} \cdot \left(\frac{1}{0{,}57}\right)^2\right] . 20 \,.\, 61{,}75$$

$$= 0{,}032 \,.\, 0{,}2451 \,.\, 169\,(0{,}8125 - 0{,}0641) \,.\, 1235 = 1225 \text{ Fußpfund.}$$

Wenn noch das Gewicht dieses Rades 7200 Pfund beträgt und hiernach die Halbmesser seiner Zapfen $= 0{,}024 \,.\, \sqrt{3600} = 1{,}5$ Zoll oder, des allmäligen Abführens wegen, $= 1{,}75$ Zoll gemacht werden und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$ gesetzt wird, so erhält man noch den Arbeitsverlust wegen der Zapfenreibung:

$$= 0{,}1 \cdot \frac{1{,}75}{12 \,.\, 10} \cdot 7200 \,.\, 0{,}43 \,.\, 13 = 61 \text{ Fußpfund,}$$

daher die effective Leistung dieses Wasserrades:

$$L = 1225 - 61 = 1164 \text{ Fußpfund} = 2{,}43 \text{ Pferdekräfte,}$$

und endlich den Wirkungsgrad desselben:

$$\eta = \frac{1164}{3 \,.\, 20 \,.\, 61{,}75} = \frac{1164}{3705} = 0{,}315.$$

§. 216 **Effective Leistungen.** Ueber die Leistungen unterschlägiger Räder im Schnurgerinne sind nur Versuche an Modellen, und zwar von de Parcieux, Bossut, Smeaton, Nordwall und Lagerhjelm u. s. w. bekannt. Die vorzüglichsten unter ihnen sind aber die von Smeaton und Bossut. Im Wesentlichen stimmen die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen nicht allein unter sich, sondern auch mit der Theorie überein. Die Wirkungen der Räder wurden bei allen diesen Versuchen dadurch ermittelt, daß man durch sie mittels einer Schnur, welche sich um die Welle des Rades umwickelte, Gewichte heben ließ. Smeaton machte seine Ver-

suche (siehe Recherches expériment. sur l'eau et le vent etc.) an einem kleinen Rade von 75 Zoll Umfang, mit vierundzwanzig 4 Zoll langen und 3 Zoll breiten Schaufeln. Das Hauptergebniß, zu welchem er gelangte, ist: der größte Wirkungsgrad eines unterschlägigen Wasserrades im Schnurgerinne findet bei dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{v}{c} = 0{,}34$ bis $0{,}52$ statt, und beträgt 0,165 bis 0,25. Bossut gebrauchte bei seinen Versuchen ein Rad von 3 Fuß Höhe mit 48 oder 24 oder 12 Schaufeln von 5 Zoll Länge und 4 bis 5 Zoll Breite. Er fand, ganz der Theorie entsprechend, die Wirkung bei 48 Schaufeln größer als bei 24, und bei 24 größer als bei 12; auch folgerte er, daß es zweckmäßig sei, circa 25^0 vom Radumfange oder $^{25}/_{360} \cdot 48 = {}^{10}/_3$, also mehr als drei Schaufeln ins Wasser einzutauchen zu lassen. Aus den Versuchen Bossut's an dem Rade mit 48 Schaufeln stellt sich ein etwas größerer Wirkungsgrad heraus, als ihn die Smeaton'schen Versuche geben; Gerstner, welcher auch findet, daß die Bossut'schen Versuche mehr mit seiner Theorie übereinstimmen, als die von Smeaton, mißt diese Abweichung dem Umstande bei, daß das Rad von Smeaton eine kleinere Schaufelzahl hatte als das von Bossut, und daß bei demselben auch ein beträchtlicher Rückstau statt fand. Im Mittel läßt sich aus den Versuchen beider Experimentatoren für die effective Leistung eines solchen Rades, ohne Rücksicht auf Zapfenreibung, setzen:

$$L = 0{,}61 \frac{(c - v)v}{g} Q\gamma = 1{,}205\ (c - v) v Q \text{ Fußpfund.}$$

Diese Formel ist jedoch, Erfahrungen zufolge, nur dann genügend, wenn der Spielraum $1^1/_2$ Zoll nicht übertrifft; außerdem hat man statt $Q = Fc$, wo F den Inhalt des ins Wasser getauchten Flächenstücks der Schaufeln bezeichnet, und 0,76 statt 0,61; nach Christian (s. dessen Mécanique industr.) also

$$L = 0{,}76\ F\gamma \cdot \frac{(c - v)}{g} cv = 1{,}502\ (c - v)\ Fcv \text{ Fußpfund}$$

zu setzen.

Uebrigens läßt sich auch aus allen diesen Versuchen folgern, daß die größte Wirkung, wie auch die Theorie giebt, bei dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{v}{c} = 0{,}4$ stattfindet, daß aber bei großen Geschwindigkeiten dieses Verhältniß etwas kleiner, und bei großen Wassermengen etwas größer ausfällt.

In Schweden angestellte Versuche an Modellrädern, eins von 3 und eins von 6 Fuß Durchmesser, jenes mit 72 und dieses mit 144 Schaufeln, werden in dem zweiten Bande des schon oben citirten Werkes von Lagerhjelm, Forselles und Kallstenius beschrieben. Ihnen zufolge stellt sich der Wirkungsgrad eines Rades im Schnurgerinne noch größer, nämlich ohne

Rücksicht auf Reibung, 0,3 bis 0,35 heraus, wenn das Geschwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c}$ nahe $\frac{1}{2}$ ist. Da hier die Anzahl der eingetauchten Schaufeln sehr groß war, so läßt sich erwarten, daß hier nur sehr wenig Wasser ohne Wirkung fortging, und es ist daher diese hohe Wirkung des Rades erklärlich und mit der Theorie in guter Uebereinstimmung.

Beispiel. Die empirische Formel $L = 1{,}205\,(c - v)\,Q v$ giebt für den im Beispiele zu §. 215 behandelten Fall, wo $c = 13$, $v = 0{,}43 \,.\, c = 5{,}59$ und $Q = 20$ ist, die Leistung des Rades $= 1{,}205 \,.\, 0{,}57 \,.\, 0{,}43 \,.\, 20 \,.\, 13^2 = 998$ Fußpfund, während wir durch die theoretische Formel 1225 Fußpfund gefunden haben.

§. 217 **Theilung der Wasserkraft.** Man vertheilt sehr oft eine vorhandene Wasserkraft auf mehrere Räder, nicht allein, weil ein Rad allein zu groß ausfallen würde, sondern auch, und zwar vorzüglich, um die Arbeitsmaschinen unabhängig von einander in Gang setzen zu können, und keine Stellvorrichtungen zum An- und Abschluß mehrerer Arbeitsmaschinen an einer und derselben Kraftmaschine nöthig zu haben. Bei dieser Theilung können zwei Fälle vorkommen, man kann nämlich entweder das Wasser, oder man kann das Gefälle theilen. Im Allgemeinen läßt sich annehmen, daß bei Druckrädern eine Theilung des Wasserquantums und bei Stoßrädern eine Theilung des Gefälles das Zweckmäßigere ist, denn wir haben im Vorhergehenden gesehen, daß der Wirkungsgrad eines höheren oberschlägigen Rades größer ist, als der eines kleineren oberschlägigen oder gar mittelschlägigen Rades, und umgekehrt können wir leicht ermessen, daß der Verlust durch den Stoß des Wassers und der durch den schädlichen Raum kleiner ist bei zwei hinter einander hängenden Rädern als bei zwei neben einander hängenden, weil die der verlorenen Wirkung entsprechende Geschwindigkeitshöhe $\frac{(c - v)^2}{2g}$ (s. Bd. I, §. 436) und das Verhältniß $\frac{\sigma}{d_1}$ des schädlichen Raumes zur Wassertiefe kleiner ist, als im letzteren Falle. Bei mittelschlägigen Kropfrädern, wo das Wasser durch Druck und Stoß wirkt und wo der Wasserverlust vorzüglich von $\frac{\sigma}{d_1}$ abhängt, ist im Allgemeinen der Vorzug der einen Theilungsweise vor der anderen unbestimmt, und es muß einer besonderen Untersuchung überlassen bleiben, in jedem speciellen Falle den Vorzug der einen Theilung vor der anderen zu ermitteln. Im Folgenden möge nur noch von der Theilung der Wasserkraft unterschlägiger Räder im Schnurgerinne die Rede sein.

Denken wir uns zwei Räder hinter einander in einem horizontalen Schnurgerinne hängend, und nehmen wir an, daß das Wasser an das zweite Rad mit der Geschwindigkeit (v_1) ankomme, mit welcher das erste Rad um-

geht. Ist nun noch c die Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in das erste Rad und v_2 die Geschwindigkeit des zweiten Rades, sowie Q das Aufschlagsquantum für beide Räder, und χ eine Erfahrungszahl (1,205), so hat man die Leistungen dieser Räder:

$$L_1 = \chi\,(c - v_1)\,v_1\,Q \quad \text{und} \quad L_2 = \chi\,(v_1 - v_2)\,v_2\,Q.$$

Sollen nun beide Räder gleich viel leisten, so ist

$$(c - v_1)\,v_1 = (v_1 - v_2)\,v_2$$

zu setzen, und wenn man nun noch, um der Maximalleistung sehr nahe zu kommen, $v_2 = \frac{1}{2}\,v_1$ annimmt, $(c - v_1)\,v_1 = \frac{1}{4}\,v_1^2$ oder $c - v_1 = \frac{1}{4}\,v_1$; hiernach

$$v_1 = \frac{4}{5}\,c \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{2}{5}\,c,$$

und die Leistung beider Räder zusammen:

$$L = L_1 + L_2 = 2\,\chi\,(c - \frac{4}{5}\,c)\,\frac{4}{5}\,c\,Q = \frac{8}{25}\,\chi\,c^2\,Q$$
$$= 0{,}32\,\chi c^2\,Q,$$

während, wenn man nur ein Rad angewendet hätte, die Leistung

$$L = \frac{1}{4}\,\chi\,c^2\,Q \quad \text{oder} \quad = 0{,}25\,\chi\,c^2\,Q$$

ausgefallen wäre. Hiernach stellt sich also bei der Anwendung zweier Räder ein Arbeitsgewinn von 32 — 25 = 7 Procent heraus.

Bei Anwendung dreier Räder fiele dieser Gewinn noch größer aus. Für das dritte Rad ließe sich auch

$$L_3 = \chi\,(v_2 - v_3)\,v_3\,Q,$$

wo v_3 die Umfangsgeschwindigkeit dieses Rades bezeichnet, setzen. Machen wir nun wieder $v_3 = \frac{1}{2}\,v_2$, und bedingen wir wieder, daß das eine Rad so viel Leistung geben soll als das andere, so erhalten wir:

$$v_2 = \frac{4}{5}\,v_1 \quad \text{und} \quad c - v_1 = \frac{4}{25}\,v_1,$$

daher

$$v_1 = \frac{25}{29}\,c, \quad v_2 = \frac{20}{29}\,c, \quad v_3 = \frac{10}{29}\,c \quad \text{und}$$

die Leistungen aller drei Räder zusammen:

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 3\,\chi\,(c - v_1)\,v_1\,Q = 3\,\chi\,.\,\frac{4}{29}\,.\,\frac{25}{29}\,c^2\,Q$$
$$= \frac{300}{841}\,\chi\,c^2\,Q = 0{,}356\,\chi\,c^2\,Q;$$

es resultirt also in Hinsicht auf ein einziges Rad ein Arbeitsgewinn von 35,6 — 25 = 10,6 Procent.

Allerdings wird dieser Gewinn durch die größere Zapfenreibung wieder etwas vermindert.

Anmerkung. Wenn wir die Bedingung, daß die Räder in einem Schnurgerinne gleiche Leistung hervorbringen, fallen lassen, so stellt sich der Vortheil der Anwendung mehrerer Räder noch größer heraus. Denken wir uns bei Behandlung dieses Falles den Wasserverlust in einem genau, und längs drei bis vier Schaufeln concentrisch an das Rad anschließenden Schutzgerinne klein genug, um ihn ganz bei Seite setzen zu können. Dann erhalten wir für die Leistung des ersten Rades:

$$L_1 = \frac{(c - v_1)\, v_1}{g}\, Q\gamma, \text{ und die des zweiten:}$$

$$L_2 = \frac{(v_1 - v_2)\, v_2}{g}\, Q\gamma,$$

also die Leistung beider Räder zusammen:

$$L = [(c - v_1)\, v_1 + (v_1 - v_2)\, v_2]\, \frac{Q\gamma}{g}.$$

Damit diese ein Maximum werde, ist zunächst $v_2 = \frac{1}{2} v_1$ zu machen, und da sich hiernach

$$L = (c - \tfrac{3}{4} v_1)\, v_1\, \frac{Q\gamma}{g}$$

herausstellt, wieder $\frac{3}{4} v_1 = \frac{1}{2} c$, also $v_1 = \frac{2}{3} c$ und $v_2 = \frac{1}{3} c$, daher

$$L = (\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3})\, \frac{Q c^2 \gamma}{g} = \tfrac{1}{3}\, \frac{c^2 Q \gamma}{g} = 0{,}333\, \frac{c^2 Q \gamma}{g},$$

während ein Rad allein nur $0{,}250\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$ und zwei Räder, bei gleicher Wirkung, $0{,}320\, \frac{c^2 Q\gamma}{g}$ geben würden. Bei drei Rädern stellt sich der Vortheil noch größer heraus, hier ist nämlich $v_1 = \frac{3}{4} c$, $v_2 = \frac{2}{4} c$, $v_3 = \frac{1}{4} c$, und daher die Wirkung aller drei Räder zusammen:

$$L = (\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4})\, \frac{c^2 Q \gamma}{g} = \tfrac{3}{8} \cdot \frac{c^2 Q \gamma}{g} = 0{,}375\, \frac{c^2 Q \gamma}{g},$$

während ein Rad allein $= 0{,}250\, \frac{c^2 Q \gamma}{g}$, und drei Räder bei gleicher Wirkung, $L = 0{,}356\, \frac{c^2 Q \gamma}{g}$ geben.

Für vier Räder stellt sich $v_1 = \frac{4}{5} c$, $v_2 = \frac{3}{5} c$, $v_3 = \frac{2}{5} c$, $v_4 = \frac{1}{5} c$, und

$$L = \frac{(4 + 3 + 2 + 1)}{25} \cdot \frac{Q c^2 \gamma}{g} = \tfrac{2}{5} \cdot \frac{Q c^2 \gamma}{g} = \tfrac{4}{5} \cdot Q h \gamma$$

heraus, wenn h die Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ bezeichnet. Für fünf Räder folgt $L = \frac{5}{6}\, Q h \gamma$, und für n Räder $= \frac{n}{n+1}\, Q h \gamma$, also für unendlich viele Räder, $L = Q h \gamma$, während ein Rad L doch nur $\frac{1}{2}\, Q h \gamma$ gäbe. Bloß vom theoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet sieht man hiernach, daß viele Räder hinter einander beinahe das ganze Arbeitsvermögen ($Q h \gamma$) des Wassers in sich aufnehmen, während ein Rad allein nur halb so viel Arbeit ($\frac{1}{2}\, Q h \gamma$) verrichtet, als das Wasser leisten kann.

Mehrere Räder **neben einander** leisten natürlich zusammen eben so viel als ein einziges.

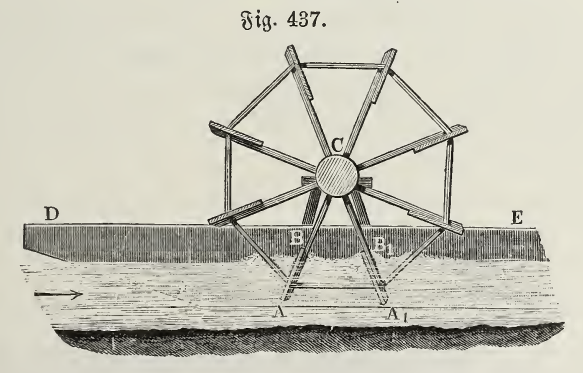
§. 218 **Schiffmühlenräder.** Noch hat man freihängende Räder, welche von keinem Gerinne umschlossen sind, sondern in einem weiten Canale oder Flusse hängen, und deshalb nur einen Theil von der Breite des fließenden Wassers einnehmen. Es gehören hierher vorzüglich die sogenannten Schiffmühlenräder, deren Zapfen auf Kähnen oder Schiffen ruhen, die durch eingeworfene Anker, angehängte Steine oder am Ufer befestigte Seile festgehalten werden. Zuweilen befindet sich nur das eine Angewelle auf einem

Schiffe, während das andere zwischen zwei Säulen am Ufer festgehalten wird. Ruhen beide Zapfen auf Schiffen, so befindet sich die ausübende Maschine ebenfalls auf einem Schiffe, daher der Name **Schiffmühle**, ruht aber nur der eine Zapfen auf einem Schiffe, so nimmt die ausübende Maschine ihren Platz auf dem Lande ein.

Die Construction der Schiffmühlenräder weicht insofern in der Regel von der anderer Räder ab, als diese Räder oft mit gar keinem Kranze ausgerüstet, und ihre Schaufeln unmittelbar auf den Radarmen befestigt sind. Diese Räder sind nur 12 bis 15 Fuß hoch und haben oft nur sechs Schaufeln; es ist jedoch besser, ihnen zwölf oder mehr Schaufeln zu geben. Die Schaufeln muß man sehr lang und breit machen, damit sie einen großen Wasserstrom aufnehmen, der ohnedies wegen seiner meist sehr mäßigen Geschwindigkeit keine große lebendige Kraft besitzt. Die Länge der Schaufeln beträgt 6 bis 18 Fuß und die Breite 1 bis 2 Fuß. Es ist übrigens zweckmäßig, den Schaufeln nach außen 10 bis 20° Neigung gegen den Strom zu geben, sie mit Leisten einzufassen und nicht viel über die Hälfte ins Wasser eintauchen zu lassen.

Fig. 437 zeigt einen Theil einer **Schiffmühle** (franz. moulin à nef; engl. ship-mill); AC ist das mit acht Schaufeln AB, A_1B_1 ... ausgerüstete

Fig. 437.



gerüstete Schiffmühlenrad und DE der Kahn oder das Schiff, auf welchem das eine Wellenende C ruht. Um das Biegen der Arme zu verhindern, sind dieselben mit einander durch Streben verbunden.

Zuweilen besteht eine Schiffmühle aus zwei Rädern, deren gemeinschaftliche Axe in der Mitte von einem einzigen Schiffe getragen wird.

Die Leistungen der Schiffmühlenräder sind aus doppelten Gründen kleiner als die der Räder, welche in Gerinnen hängen, denn es weicht hier nicht nur ein Theil des Wassers zur Seite der Schaufeln und unter denselben aus, sondern es geht auch hier ein größeres Wasserquantum durch das Rad,

ohne zum Stoße zu gelangen, weil die Anzahl der eingetauchten Schaufeln sehr klein, zuweilen sogar nur $1\frac{1}{2}$ bis 2 ist.

§. 219 **Leistung freihängender Räder.** Wir können die theoretische Leistung eines freihängenden Wasserrades wie die eines Rades im Gerinne durch die Formel

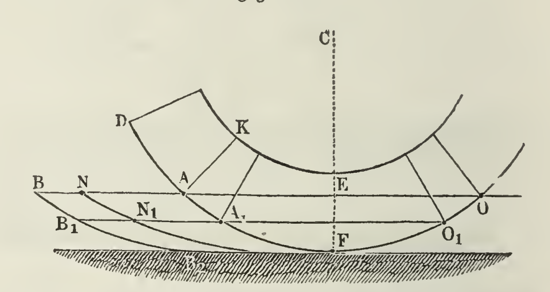
$$L = Pv = \frac{(c - v)\, vc}{g} F\gamma$$

setzen, wenn wieder c und v die Geschwindigkeiten des Wassers und Rades, sowie F den Inhalt des eingetauchten Theiles einer Schaufelfläche (ohne Rücksicht auf die Aufstauung vor derselben) bezeichnet. Wegen der Wasserverluste müssen wir aber diesen Ausdruck noch durch einen Coefficienten multipliciren, dessen Werth wir nach Gerstner wenigstens theilweise bestimmen können. Ist die Zahl n_1 der eingetauchten Schaufeln nicht sehr klein, so haben wir auch hier wie bei den unterschlägigen Rädern das wirklich zum Stoße gelangende Wasserquantum:

$$Q_1 = \left(1 - \frac{c^2}{3\, n_1^2\, (c - v)^2}\right) Q;$$

ist sie aber klein, so trifft vielleicht schon der oberste Wasserfaden AB einer Zelle AD, Fig. 438, nicht vollständig die Schaufel AK vor ihm, es ist

Fig. 438.



vielmehr nur ein Theil AN desselben, welcher noch zum Stoße gelangt. In diesem Falle findet ein Wasserverlust bei allen Wasserfäden statt, und es ist das Verhältniß des stoßenden Wasserquantums zum ankommenden:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\text{Fläche } ANN_1FA_1}{\text{Fläche } ABB_2FA_1},$$

oder, da nach Bd. II, §. 214, Fläche $ANN_1FA_1 = \frac{c - v}{v}$ mal Segment AOF ist,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{{}^2/_3 \left(\frac{c-v}{v}\right) \cdot \overline{AO}}{\overline{AB}} = {}^2/_3 \left(\frac{c-v}{v}\right) \cdot \frac{n_1 \overline{AD}}{\frac{c}{v} \cdot \overline{AD}} = \frac{2\,n_1}{3} \left(\frac{c-v}{c}\right).$$

Es ist also in diesem Falle die Leistung des Wasserrades:

$$\text{I.} \quad L = \frac{(c-v)\,v}{g} \cdot \frac{2\,n_1}{3} \left(\frac{c-v}{c}\right) Q\gamma = {}^2/_3\, n_1 \frac{(c-v)^2 v}{gc} Q\gamma$$

$$= {}^2/_3\, n_1 \frac{(c-v)^2 v}{g} F\gamma.$$

Die größte Leistung findet hiernach nicht für $v = {}^1/_2\, c$, sondern für $v = {}^1/_3\, c$ statt, und beträgt:

$$L = {}^2/_3\, n_1 \,.\, {}^4/_{27} \cdot \frac{c^3}{g} F\gamma = \frac{8\,n_1}{81} \cdot \frac{c^3}{g} F\gamma.$$

Setzt man noch $Fc = Q$, so erhält man:

$$L = \frac{8\,n_1}{81} \cdot \frac{c^2}{g}\, Q\gamma = \frac{16\,n_1}{81} \cdot \frac{c^2}{2g}\, Q\gamma,$$

und daher den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{16\,n_1}{81},$$

z. B. für $n_1 = {}^3/_2$:

$$\eta = {}^{24}/_{81} = {}^8/_{27} = 0{,}296.$$

Die letzte Formel findet jedoch keine Anwendung, wenn die Zahl der Schaufeln beträchtlich ist, denn sie setzt voraus, daß $AN < AB$, also:

$$\frac{c-v}{v} \cdot \overline{AO} < \overline{AB} \text{ oder } \frac{c-v}{v} < \frac{\frac{c}{v}\overline{AD}}{n_1 \overline{AD}}$$

d. i.

$$n_1 < \frac{c}{c-v}$$

sei. Ist nun z. B. $v = {}^1/_3\, c$, so erhält man zur Bedingung, daß $n_1 < {}^3/_2$ sei, ist aber $v = {}^1/_2\, c$, so folgt die Bedingung $n_1 < 2$ u. s. w. Es tritt also in dem Falle, wenn zwei oder mehr Schaufeln unter das Wasser tauchen, der eben abgehandelte Fall nicht ein, und es gilt dann die Formel für Räder im Gerinne auch hier, nämlich:

$$\text{II.} \quad L = \left(1 - \frac{c^2}{3\,n_1^2\,(c-v)^2}\right) \frac{(c-v)\,v\,c}{g} F\gamma.$$

Uebrigens läßt sich die Zahl n_1 der eingetauchten Schaufeln aus der Anzahl aller Schaufeln leicht berechnen, wenn man den Radhalbmesser a und die Tiefe $EF = e_1$ der Eintauchung giebt, es ist nämlich:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\overline{AO}}{2\,\pi a},$$

oder, da sich $\overline{AO} = 2\overline{AE} = 2\sqrt{2ae_1}$ setzen läßt,

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{2ae_1}}{\pi a} = 0{,}45\sqrt{\frac{e_1}{a}}.$$

Beispiel. Welche Leistung verspricht ein Schiffmühlenrad von 15 Fuß Höhe und mit acht 12 Fuß langen Schaufeln, welche 1 Fuß tief ins Wasser tauchen, wenn letzteres mit 5 Fuß Geschwindigkeit anstößt? Wir haben hier:

$$\frac{n_1}{n} = 0{,}45\sqrt{\frac{1}{7{,}5}} = 0{,}45 . 0{,}365 = 0{,}164,$$

daher:

$$n_1 = 0{,}164 . 8 = 1{,}3,$$

und folglich die Formel:

$$L = \tfrac{2}{3} n_1 \frac{(c-v)^2 v F\gamma}{g}$$

in Anwendung zu bringen. Lassen wir nun das Rad mit 2 Fuß Geschwindigkeit umgehen, so erhalten wir die in Frage stehende Leistung:

$$L = \tfrac{2}{3} . 1{,}3 \cdot \frac{3^2 . 2}{g} \cdot 12 . 1 . 61{,}75 = 0{,}032 . 1{,}3 . 9 . 988 = 370 \text{ Fußpfund.}$$

Giebt man diesem Rade 16 Schaufeln, um eine größere Leistung zu gewinnen, so hat man $n_1 = 2{,}6$, und daher nach der Formel II.:

$$L = \frac{(5-2) . 5 . 2}{g}\left(1 - \frac{5^2}{3 . 2{,}6^2 . 3^2}\right) \cdot 12 . 1 . 61{,}75 = 0{,}032 . 0{,}863 . 22230$$
$$= 614 \text{ Fußpfund.}$$

§. 220 **Versuche mit freihängenden Rädern.** Versuche über die Leistungen der Wasserräder im unbegrenzten Strome sind von Deparcieux, Bossut und Poncelet angestellt worden. Am ausgedehntesten sind die allerdings nur an einem Modellrade vorgenommenen Versuche von Bossut. Dieses Rad hatte eine Höhe von 0,975 Meter und enthielt 24 Schaufeln von 0,135 Meter Länge, welche 0,108 Meter tief in dem Wasser gingen, das eine Geschwindigkeit von 1,854 Meter besaß. Aus den Resultaten der Versuche berechnet sich der Coefficient, womit der Ausdruck

$$L = \frac{(c-v)^2 v}{g} \cdot F\gamma$$

zu multipliciren ist, um die effective Leistung zu geben, $\chi = 1{,}37$ bis $1{,}79$, dagegen der Coefficient, womit der Ausdruck

$$L = \frac{(c-v)vc}{g} F\gamma$$

zu multipliciren ist, um die effective Leistung zu erhalten, $\chi = 0{,}847$ bis $0{,}706$ (s. d'Aubuisson's Hydraulik, §. 352). Die Grenzwerthe des letzteren Coefficienten sind einander etwas näher als die des ersteren, da aber die Zahl der Radschaufeln 24 betrug, so ist es auch nicht anders zu erwarten, denn es findet hier jedenfalls die Formel II. des vorigen Paragraphen,

$$L = \left(1 - \frac{c^2}{3\, n_1^2\, (c - v)^2}\right) \frac{(c - v)\, c v}{g}\, F\gamma,$$

ihre Anwendung. In der Regel wird man die Schaufelzahl so groß machen, daß immer mindestens zwei Schaufeln ins Wasser tauchen, und daher die letzte Formel mit dem mittleren Coefficienten $\chi = 0{,}8$ anwenden, also

$$L = 0{,}8\, \frac{(c - v)\, c v}{g}\, F\gamma = 1{,}58\, (c - v)\, c v F \text{ Fußpfund}$$

setzen können.

Hiermit stimmen aber auch die Beobachtungen von Poncelet, welche derselbe an drei Rädern in der Rhone angestellt hat, überein. Diese Räder hatten $2^1/_2$ bis $2^2/_3$ Meter lange Schaufeln, welche $^2/_3$ bis $^3/_4$ Meter tief im Wasser gingen, das $1^1/_5$ bis 2 Meter Geschwindigkeit besaß. Auch führt Poncelet noch eine Beobachtung von Boistard und eine andere von Christian an, welche beide gut hiermit übereinstimmen.

Nach den Versuchen von Bossut findet, ganz in Uebereinstimmung mit der Theorie, die größte Wirkung statt, wenn das Rad mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}4\, c$ umgeht; auch hat Poncelet gefunden, daß bei den soeben besprochenen Rädern in der Rhone das vortheilhafteste Geschwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c} = 0{,}4$ war.

Wenn wir in der obigen Formel $v = 0{,}4\, c$ einsetzen, so bekommen wir die effective Leistung:

$$L = 0{,}8 \cdot \frac{0{,}6 \,.\, 0{,}4\, c^3}{g}\, F\gamma = 0{,}192\, \frac{c^3}{g}\, F\gamma = 0{,}384\, \frac{c^2}{2g}\, Q\gamma,$$

und also den Wirkungsgrad:

$$\eta = 0{,}384.$$

Die Versuche Deparcieux's waren besonders darauf gerichtet, die vortheilhafteste Stellung der Schaufeln zu finden; aus ihnen folgt, wie aus denen von Bossut, daß eine Neigung von 60^0 gegen den Strom die vortheilhafteste ist.

Anmerkung. Es ist lange in Zweifel gezogen worden, welche von den Formeln

$$L = \frac{\chi\, (c - v)^2 v}{g}\, F\gamma \quad \text{oder} \quad L = \frac{\chi_1\, (c - v)\, c\, v}{g}\, F\gamma$$

die richtigere sei; man hat jene die Parent'sche und diese die Borda'sche genannt. Wenn nun auch bei einem Rade im unbegrenzten Wasser nicht alles Wasser, welches gegen die Schaufeln anrückt, nach dem Stoße die Geschwindigkeit der Schaufeln annimmt, da dem Wasser Gelegenheit zum Entweichen am Umfange gegeben wird, so läßt sich doch bei dem so großen Inhalte einer Schaufelfläche erwarten, daß wenigstens der größere Theil des Wassers bei dem Stoße gegen die Schaufel die Geschwindigkeit derselben annimmt, und aus diesem Grunde ist die größere Uebereinstimmung der Erfahrung mit der Borda'schen Formel erklärlich. Die in Bd. II, §. 219 entwickelte Gerstner'sche Formel stimmt mit

der Parent'schen natürlich in der Form zusammen, denn die Parent'sche Formel ist ohne Coefficienten

$$L = \frac{(c - v)^2 v}{2g} F\gamma,$$

und unter der Voraussetzung entwickelt, daß der Stoß durch die der relativen Geschwindigkeit $c - v$ entsprechende Geschwindigkeitshöhe gemessen werde. (Vergleiche Bd. I. §. 511, wo die Stoßkraft $= 1{,}86 \frac{c^2}{2g} F\gamma$ angegeben wird, wenn $v = 0$ ist.)

Beispiel. Für das Schiffmühlenrad, welches wir schon im Beispiele des vorigen Paragraphen behandelt haben, ist $c = 5$, $v = 2$, $F = 12.1 = 12$, daher die effective Leistung nach Poncelet:

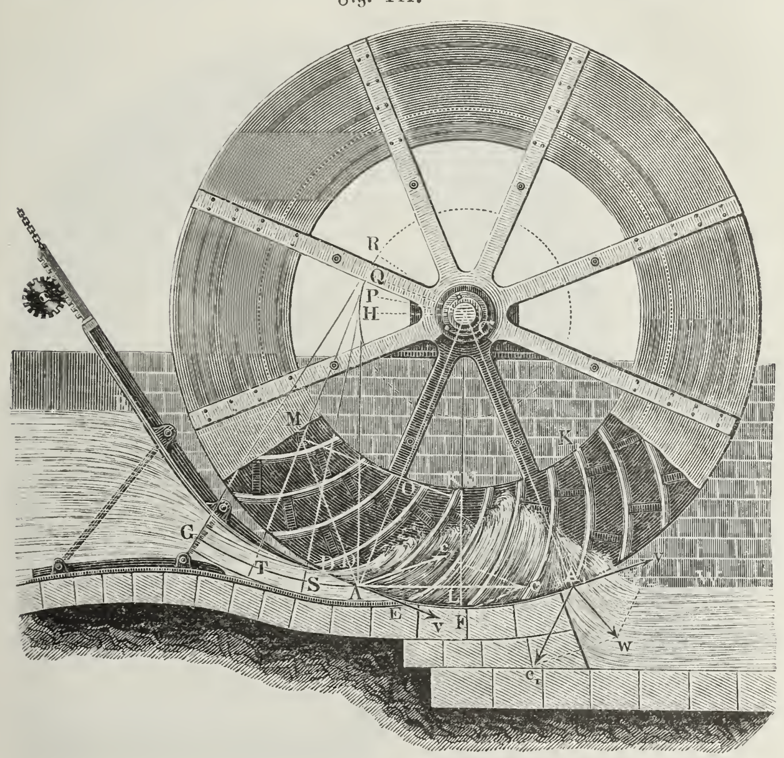
$$L = 1{,}69 . 3 . 2 . 5 . 12 = 608 \text{ Fußpfund},$$

während wir durch die theoretische Formel ein Mal bei 8 Schaufeln, 395 Fußpfund, und ein zweites Mal bei 16 Schaufeln 656 Fußpfund gefunden haben.

§. 221 **Ponceleträder.** Wenn man die Schaufeln unterschlägiger Räder so krümmt, daß der eintretende Wasserstrahl an der hohlen Seite derselben hinströmen und dadurch gegen dieselbe drücken kann, ohne einen Stoß hervorzubringen, so erhält man eine größere Leistung, als wenn das Wasser ebene Schaufeln mehr oder weniger rechtwinkelig stößt. Solche Räder mit krummen Schaufeln heißen nach ihrem Erfinder Poncelet'sche oder Ponceleträder. Sie sind besonders bei kleinen Gefällen (unter 6 Fuß) von großem Nutzen, weil sie mehr leisten, als unterschlägige Räder mit oder ohne Kropf. Bei größerem Gefälle werden sie jedoch von den mittelschlägigen Kropfrädern in der Leistung übertroffen; auch ist, wie wir weiter unten sehen werden, in diesem Falle ihre Construction eine schwierigere, weshalb man sie bei Gefällen über 6 Fuß nicht gern anwendet. Poncelet behandelt diese Räder in der besonderen Schrift: Mémoire sur les roues hydrauliques à aubes courbes, mues par-dessous, Metz 1827, ausführlich. Ihre Einrichtung ist aus Fig. 441 zu ersehen, welche die untere Hälfte eines solchen Rades vorstellt. Man sieht in C die Axe und in AK, A_1K_1 u. s. w. Schaufeln des Rades; BD ist das geneigte Schutzbrett und TA der eintretende und an den Schaufeln AK und A_1K_1 hinauf- und herabsteigende Wasserstrahl, sowie W die Oberfläche des Unterwassers. Damit fast alles Wasser zur Wirkung gelange, muß dem Rade nur ein sehr enger Spielraum in dem Gerinne gelassen werden, und um die partielle Contraction zu verhindern, wird die untere Kante des Schutzbrettes unten abgerundet; damit ferner so wenig wie möglich lebendige Kraft durch die Reibung des Wassers im Zuflußgerinne verloren gehe, wird die Mündung ganz nahe an das Rad gerückt und das Bret gegen den Horizont geneigt; auch erhält wohl das Vorgerinne $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ Neigung, um dadurch den Verlust an Wasserreibung in demselben wieder auszugleichen. In der Regel umgiebt

man das Rad mit einem kreisförmigen Kropfe, welcher sich wenigstens auf zwei Schaufeltheilungen erstreckt, und damit das Rad nicht im Unterwasser

Fig. 441.

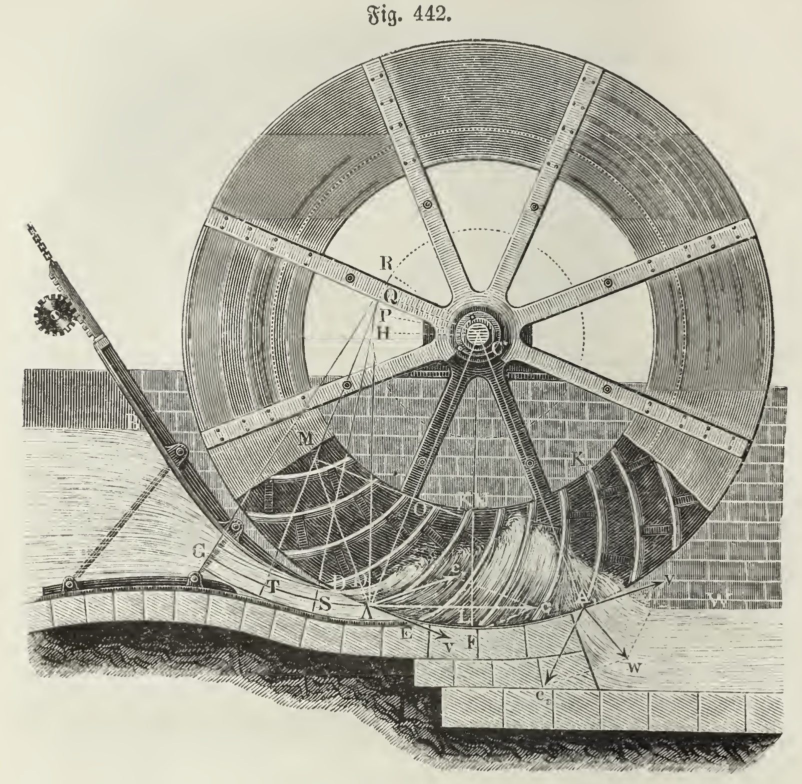


wate, bringt man hinter diesem Kropfe einen Abfall von $^1/_2$ Fuß Höhe an, und erweitert zu diesem Zwecke auch wohl den Abzugsgraben. Man baut Ponceleträder von 10 bis 20 Fuß Höhe und giebt ihnen 32 bis 48 Schaufeln von Blech oder Holz. Die hölzernen Schaufeln sind aus Dauben zusammenzusetzen wie eine Tonne, und außen zuzuschärfen oder mit einer Blechkante auszurüsten. Viel zweckmäßiger sind jedoch die Blechschaufeln. Die Anwendung von Eisen statt des Holzes ist bei den Ponceleträdern vorzüglich zu empfehlen, weil die Wirkung dieser Räder von einer guten Ausführung wesentlich mit abhängt. Die Schutzöffnung macht man höchstens 1 Fuß hoch, in der Regel, namentlich aber bei größeren Gefällen von 5 bis 6 Fuß, nur $^1/_2$ Fuß, und noch niedriger.

Theorie der Ponceleträder. Um eine möglichst große Wirkung von einem Ponceletrade zu erhalten, ist es nöthig, daß das Wasser ohne §. 222

Stoß in das Rad eintrete. Ist $\overline{Ac} = c$, Fig. 442, die Geschwindigkeit des eintretenden Wassers und $\overline{Av} = v$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades,

Fig. 442.



so erhält man in der Seite $\overline{Ac_1} = c_1$ des Parallelogramms $A v c c_1$, welches der Seite $\overline{Av} = v$ und Diagonale $\overline{Ac} = c$ entspricht, die Größe und Richtung der Geschwindigkeit des Wassers in Hinsicht auf das Rad; wenn man daher die Schaufel AK tangential an Ac_1 anschließt, so wird das Wasser an ihr, ohne irgend einen Stoß auszuüben, mit der Geschwindigkeit c_1 in die Höhe zu steigen anfangen. Setzen wir den Winkel $c A v$, um welchen die Richtung des ankommenden Wassers von dem Radumfange oder der Tangente Av abweicht, $= \alpha$, so haben wir die relative Anfangsgeschwindigkeit des an den Schaufeln in die Höhe steigenden Wassers:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2 c v \cos. \alpha};$$

und für den Winkel $v A c_1 = \beta$, um welchen die Richtung derselben von dem Radumfange oder der Tangente Av abweicht,

$$sin. \beta = \frac{c \, sin. \alpha}{c_1}.$$

Damit das Wasser nicht blos in der Mitte A, sondern in ganzer Höhe, also auch in D und E mit dem Winkel α in das Rad eintrete, muß es dem Rade in einem Kreisevolventenbogen GA zugeführt werden, dessen Grundkreis mit dem Rade einerlei Mittelpunkt C hat, und dessen Erzeugungslinie AH anfangs auf AA_1 oder auf der Bewegungsrichtung des Strahles bei seinem Eintritte in das Rad rechtwinkelig steht. Denn zieht man in dem der halben Strahlhöhe gleichen Abstande Aequidistanten zu diesem Evolventenbogen, so sind diese gleiche Evolventenbögen und schneiden den Radumfang in D und E unter demselben Winkel, wie der erstere in A. Um die der Axe des eintretenden Wasserstrahles entsprechende Evolvente zu construiren, schneide man auf dem Grundkreise beliebige Stücke HP, PQ u. s. w. ab, führe Berührungslinien durch die dadurch bestimmten Punkte $P, Q \dots$ und mache diese gleich der ersten Tangente AH plus dem zwischenliegenden Bogenstück HP, HQ u. s. w.

Das Wasser steigt, wie ein fester Körper, an der Schaufel mit abnehmender Geschwindigkeit in die Höhe, während es mit der Schaufel gleichzeitig noch die Umdrehungsgeschwindigkeit v besitzt. Auf einer gewissen Höhe angekommen, hat es seine relative Geschwindigkeit ganz verloren, und es fällt nun auf der Schaufel beschleunigt herab, so daß es zuletzt mit derselben Geschwindigkeit c_1 wieder am äußeren Ende A_1 ankommt, mit welcher es zu steigen anfing. Vereinigen wir nun die relative Geschwindigkeit $\overline{A_1 c_1} = c_1$ des bei A_1 austretenden Wassers mit der Umfangsgeschwindigkeit $\overline{A_1 v} = v$ durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, so erhalten wir in dessen Diagonale $\overline{A_1 w} = w$ die absolute Geschwindigkeit des abfließenden Wassers. Diese Geschwindigkeit ist

$$w = \sqrt{c_1^2 + v^2 - 2 c_1 v \cos. \beta},$$

und demnach die mechanische Arbeit, welche das abfließende Wasser behält und, ohne dem Rade mitgetheilt zu haben, mit sich fortnimmt:

$$L_1 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{c_1^2 + v^2 - 2 c_1 v \cos. \beta}{2g}\right) Q\gamma.$$

Zieht man nun diesen Verlust von der Leistung $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$, welche das Wasser vermöge seiner lebendigen Kraft vor dem Eintritte in das Rad verrichten kann, ab, so bekommt man folgenden Ausdruck für die theoretische Radleistung:

$$L = \left(\frac{c^2}{2g} - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma = \left(\frac{c^2 - w^2}{2g}\right) Q\gamma,$$

$$= \left(\frac{c^2 - c_1^2 - v^2 + 2 c_1 v \cos. \beta}{2g}\right) Q\gamma,$$

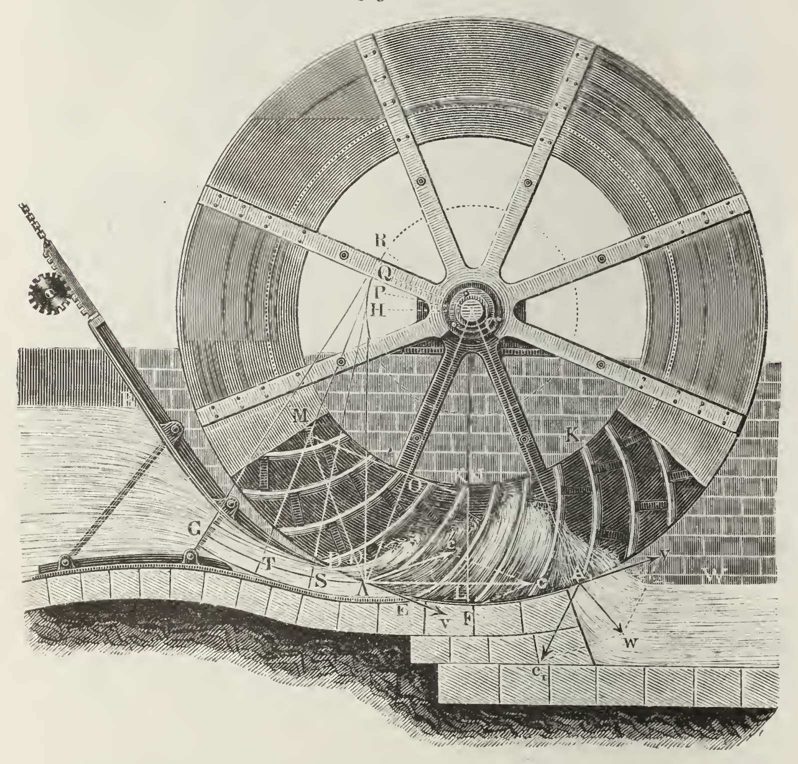
oder, da $c^2 = c_1^2 + v^2 + 2\, c_1 v \cos.\beta$ ist, auch

$$L = \frac{2\, c_1 v \cos.\beta}{g}\, Q\gamma,$$

und es folgt, wenn man noch $c_1 \cos.\beta = c \cos.\alpha - v$ einsetzt, diese Leistung

$$L = \frac{2\, v\, (c \cos.\alpha - v)}{g}\, Q\gamma.$$

Fig. 443.



Man sieht nun leicht ein, daß für $v = \frac{1}{2}\, c \cos.\alpha$ die Leistung am größten, und zwar

$$L = \frac{c^2 \cos.\alpha^2}{2\, g}\, Q\gamma$$

wird, und daß der Arbeitsverlust sogar Null ist, also die ganze disponible Arbeit

$$L = \frac{c^2}{2\, g}\, Q\gamma$$

gewonnen wird, wenn man $\cos.\alpha = 1$, also $\alpha =$ Null hat.

Wenn es auch nicht möglich ist, den Eintrittswinkel $\alpha =$ Null zu machen, so folgt doch wenigstens hieraus, daß man α nicht sehr groß (nicht über 20°) machen darf, um eine große Leistung zu erhalten, und es ist auch hiernach zu ersehen, daß man die Umfangsgeschwindigkeit des Rades nur wenig kleiner als die halbe Geschwindigkeit des zufließenden Wassers zu machen hat, um einen großen Wirkungsgrad des Rades zu erlangen.

Die senkrechte Höhe $\overline{LN}$, auf welche das Wasser aufsteigt, während es an den Schaufeln hingeht, wäre $= \frac{c_1^2}{2g}$, wenn das Rad still stände, da es aber mit einer Geschwindigkeit v umläuft, so entsteht eine Centrifugalkraft, welche ziemlich mit der Schwerkraft in gleicher Richtung wirkt und eine Acceleration p erzeugt, die sich $\frac{v_1^2}{a_1}$ setzen läßt, wenn a_1 den mittleren Radkranzhalbmesser, und v_1 die mittlere Geschwindigkeit des Radkranzes oder die Geschwindigkeit im Mittel der Kranzbreite bezeichnet. S. Band I, §. 42. Es ist sonach zu setzen: §. 223

$$(g + p)\, h_1 = \frac{c_1^2}{2} \text{ oder } \left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right) h_1 = \frac{c_1^2}{2},$$

und daher die gesuchte Steighöhe:

$$h_1 = \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)}.$$

Damit das Wasser nicht oben bei N überschlägt, ist nun nöthig, daß die Kranzbreite eine gewisse Größe $\overline{FN} = d$ habe, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$d = \overline{LN} + \overline{FL} = h_1 + CF - CL, \text{ d. i.:}$$

$$d = h_1 + a - a\cos. ACF = \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)} + a\,(1 - \cos. \lambda),$$

wobei λ den Winkel ACF bezeichnet, um welchen der Eintrittspunkt A vom Radtiefsten F absteht. Jedenfalls ist aber hierzu noch die Strahldicke d_1 zu addiren, weil die oberen Wasserfäden bei Annahme einer mittleren Geschwindigkeit, im ganzen Strahle um diese Höhe höher steigen als die unteren Fäden. Wir setzen also die Kranzbreite:

$$d = d_1 + \frac{c_1^2}{2\left(g + \frac{v_1^2}{a_1}\right)} + a\,(1 - \cos. \lambda).$$

Die Radweite läßt sich der Strahlbreite $e = \frac{Q}{d_1 c}$ gleichsetzen. Nimmt

man den Fassungsraum $d e v_1$ des Rades 2= bis $2^1/_2$mal so groß als das Aufschlagquantum Q an, so hat man die Gleichung:

$$d v_1 = 2\, d_1\, c \text{ bis } {}^5/_2\, d_1\, c,$$

woraus sich die Strahldicke

$$d_1 = {}^2/_5 \frac{d v_1}{c} \text{ bis } {}^1/_2 \frac{d v_1}{c} \text{ ergiebt.}$$

Da $\frac{v_1}{v} = \frac{a - {}^1/_2 d}{a}$ ist, so hat man auch:

$$v_1 = \left(1 - \frac{d}{2a}\right) v, \quad \text{und daher:}$$

$$d_1 = {}^2/_5 \left(1 - \frac{d}{2a}\right) \frac{d v}{c} \text{ bis } {}^1/_2 \left(1 - \frac{d}{2a}\right) \frac{d v}{c},$$

oder, $v = {}^1/_2\, c \cos. \alpha$ gesetzt,

$$d_1 = {}^1/_5 \left(1 - \frac{d}{2a}\right) d \cos. \alpha \text{ bis } {}^1/_4 \left(1 - \frac{d}{2a}\right) d \cos. \alpha.$$

Nach Morin ist $d = \frac{a}{3}$ bis $\frac{a}{2}$, also der Radhalbmesser a nur zwei= bis dreimal so groß zu machen als die Kranzbreite.

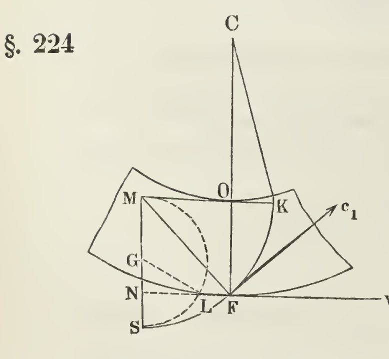
Ein anderes wichtiges Verhältniß ist nun noch die Bestimmung der Eintritts= und Austrittsstelle, oder die Größe des wasserhaltenden Bogens $A A_1$, den wir am besten auf beiden Seiten des Radtiefsten F gleichmäßig vertheilen. Die Länge dieses Bogens hängt von der Zeit ab, welche das Wasser zum Auf= und Absteigen an den Schaufeln nöthig hat. Um diese zu finden, muß aber die Gestalt und Ausdehnung der Schaufeln bekannt sein. Ist diese Zeit $= t$, so können wir setzen:

$$A A_1 = 2\, \lambda a = v t,$$

und sonach den Bogen, um welchen Ein= und Austrittspunkt (A und A_1) des Wassers vom Radtiefsten F abstehen:

$$\lambda = \frac{v t}{2\, a}.$$

Fig. 444.



§. 224 Damit das Wasser, wenn es die höchste Stelle K, Fig. 444, auf der Schaufel erreicht hat, daselbst nicht überschlage, sondern an der Schaufel wieder niederfalle, ist es nöthig, daß das innere Schaufelende K beim tiefsten Stande $F K$ der Schaufel nicht überhänge, damit aber auf der anderen Seite die Schaufel nicht unnöthig lang ausfalle, ist nöthig, daß das Schaufelende K den inneren Radumfang nicht sehr spitz schneide;

aus diesen Gründen ist ein verticaler Stand des inneren Schaufelendes beim mittelbaren Schaufelstande am zweckmäßigsten. Giebt man nun der Schaufel eine cylindrische Form, so erhält man das Centrum M ihres kreisbogenförmigen Durchschnittes, wenn man MF rechtwinkelig auf $\overline{Fc_1}$ stellt und OM horizontal zieht. Aus der Radtiefe oder Kranzbreite $\overline{FO} = d$ ergiebt sich der Krümmungshalbmesser $MF = KM = r$, da der Winkel $MFO = c_1 Fv = \beta$ ist,

$$r = \frac{d}{cos.\,\beta}.$$

Die Zeit zum Hinauf- und Hinabsteigen des Wassers an dem Bogen FK finden wir wie die Schwingungszeit eines Pendels, indem wir statt der Acceleration der Schwere die Summe $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ aus der Acceleration g derselben und aus der mittleren Centrifugalacceleration $\frac{v_1^2}{a_1}$ einsetzen.

Wir finden übrigens diese Zeit genau nach der in Bd. I, (§. 322) entwickelten Formel

$$t = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{g}} \left(\varphi + (\varphi + sin.\,\varphi)\frac{h}{8\,r}\right)$$

für die Schwingungszeit t eines Pendels durch den Bogen FK, wenn r den Halbmesser $MF = MK$ des von der Schaufel gebildeten Kreisbogens, h die ganze Fallhöhe $\overline{MS} = \overline{MF} = r$, und φ den Centriwinkel MGL bezeichnet, welcher dem Kreise MLS über dem Durchmesser $MS = r$ und der Bogenhöhe

$$\overline{MN} = \overline{OF} = \overline{MF}\,cos.\,FMN = r\,cos.\,(vFc_1) = r\,cos.\,\beta$$

entspricht.

Dieser Winkel φ bestimmt sich durch die Formel:

$$cos.\,\varphi = -\frac{NG}{LG} = -\frac{MN - MG}{MG} = -\frac{r\,cos.\,\beta - \tfrac{1}{2}\,r}{\tfrac{1}{2}\,r}$$
$$= 1 - 2\,cos.\,\beta,$$

oder:

$$sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi = \sqrt{cos.\,\beta}.$$

Wenn man nun noch wegen der Einwirkung der Centrifugalkraft statt g, $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ setzt, so erhält man die Zeit zum Steigen und Fallen durch den Bogen FK:

$$2\,t = \left(\varphi + \frac{\varphi + sin.\,\varphi}{8}\right) \sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}$$
$$= \left(\frac{9\,\varphi + sin.\,\varphi}{8}\right) \sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}.$$

und daher die Länge des wasserhaltenden Bogens $A\bar{A}_1$ Fig. (443):

$$b = 2\lambda a = 2vt = v\left(\frac{9\varphi + sin.\varphi}{8}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}.$$

§. 225 **Dimensionen eines Ponceletrades.** Es kommt nun darauf an, mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Ergebnisse, Regeln für die Anordnung und Construction eines Ponceletrades aufzustellen. Wir können nur das Aufschlagquantum Q und das Gefälle h, von Wasserspiegel zu Wasserspiegel gemessen, als bekannt ansehen, und haben daher die Geschwindigkeiten c, c_1 und v, die Winkel α, β und λ, sowie die Raddimensionen a, d, e u. s. w. zu berechnen.

Annähernd ist

$$v = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}\sqrt{2gh},\ d = \frac{1}{4}h \text{ und } d_1 = \frac{1}{4}d = \frac{1}{16}h.$$

Auch können wir in der Formel

$$\lambda = \frac{v}{a}\cdot\left(\frac{9\varphi + sin.\varphi}{16}\right)\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}}$$

annähernd $\varphi = \pi$, also $sin.\varphi = 0$, ferner $v_1 = v = \frac{1}{2}c$, $a_1 = a$ und $r = d = \frac{1}{4}h$ setzen, weshalb wir

$$\lambda = 1{,}767\cdot\frac{\sqrt{2gh}}{2a}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}h}{g + \frac{c^2}{4a}}} = \frac{0{,}883\,h}{a\sqrt{2 + \frac{h}{a}}},$$

also umgekehrt,

$$a^2 + \frac{1}{2}ha = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}883\,h}{\lambda}\right)^2,$$

folglich den Radhalbmesser

$$a = \frac{h}{4}\left[\sqrt{8\left(\frac{0{,}883}{\lambda}\right)^2 + 1} - 1\right] = \frac{h}{4}\left(\sqrt{\frac{6{,}238}{\lambda^2} + 1} - 1\right)$$

erhalten.

Am angemessensten ist es, den Wasserstrahl horizontal in das Rad einzuführen, also $\alpha = \lambda$, und zwar

1) $\alpha = \lambda = 20$ Grad, also $arc.:\lambda = 0{,}3491$

anzunehmen.

Hiernach erhalten wir den Radhalbmesser:

2) $a = 1{,}56\,h$.

Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers ist:

3) $c = \mu\sqrt{2g\,(h - \frac{1}{2}d_1)} = \mu\sqrt{2g\,.\,\frac{31}{32}h}$
$= 0{,}98\,\mu\sqrt{2gh},$

ferner die vortheilhafteste Geschwindigkeit des Rades:

4) $v = \frac{1}{2} c \cos. \alpha$,

und die Umdrehungszahl:

5) $u = \frac{30\, v}{\pi\, a}$.

Der Schaufelwinkel δ ist ferner durch die Formel

$$cotg.\, \beta = cotg.\, \alpha - \frac{v}{c \sin. \alpha} = \frac{1}{2}\, cotg.\, \alpha,$$

d. i. durch

6) $tang.\, \beta = 2\, tang.\, \alpha$

bestimmt.

Auch erhält man nun für die relative Anfangsgeschwindigkeit des aufsteigenden Wassers:

7) $c_1 = \frac{c \sin. \alpha}{\sin. \beta} = \frac{v}{\cos. \beta}$,

und wenn man annähernd

$$\frac{v_1^2}{a_1} = \left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) \frac{v^2}{a} = \left(1 - \frac{h}{8\,a}\right) \frac{v^2}{a} = 0{,}9\, \frac{v^2}{a}$$

annimmt, die Radtiefe schärfer bestimmt,

$$d = d_1 + \frac{c_1^2}{2\left(g + 0{,}9\, \frac{v^2}{a}\right)} + (1 - \cos. 20^0)\, a, \quad \text{oder:}$$

8) $d = \frac{2}{3} \frac{c_1^2}{g + 0{,}9\, \frac{v^2}{a}} + 0{,}08\, a$.

Damit das Wasser auch bei langsamerem Gange nicht überschlägt, setzt man noch einige Zoll zu.

Die schärfer bestimmte Strahlhöhe ist nun:

9) $d_1 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{d}{2\,a}\right) d \cos. \alpha$,

und die Radweite:

10) $e = \frac{Q}{d_1\, c} = \frac{2\, Q}{d\, v_1}$.

Für die Schaufelkrümmung ist endlich der Halbmesser:

11) $r = \frac{d}{\cos. \beta}$,

und für den Hülfswinkel φ:

12) $\sin. \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\cos. \beta}$.

Mit Hülfe der Größen v, a, r und φ läßt sich

13) $\lambda = \frac{v}{a} \left(\frac{9\, \varphi + \sin. \varphi}{16}\right) \sqrt{\frac{r}{g + 0{,}9\, \frac{v^2}{a}}}$

noch schärfer bestimmen.

Den mittleren Abstand je zweier Schaufeln von einander, $b = 1$ Fuß angenommen, erhält man endlich noch die Anzahl der Schaufeln:

14) $n = 2\pi a_1$.

Beispiel. Man soll für ein Gefälle $h = 4,5$ Fuß und für ein Aufschlagquantum $Q = 24$ Cubikfuß pr. Minute ein Ponceletrad anordnen und berechnen.

Nehmen wir $\alpha = \lambda = 20$ Grad an, so erhalten wir zunächst den Radhalbmesser $a = 1,56\,h = 7$ Fuß, und setzen wir den Geschwindigkeitscoefficienten = dem Ausflußcoefficienten $\mu = 0,90$, so ergiebt sich die mittlere Geschwindigkeit des bei A eintretenden Wassers:

$$c = 0,98\,\mu\,\sqrt{2gh} = 0,882\,.\,7,906\,\sqrt{4,5} = 6,97\,.\,2,121 = 14,78 \text{ Fuß},$$

ferner die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = \tfrac{1}{2}\,c\,cos.\,\alpha = 7,39\,.\,cos.\,20^0 = 7,39\,.\,0,940 = 6,95 \text{ Fuß},$$

und die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute:

$$u = \frac{30\,v}{\pi a} = \frac{30\,.\,6,95}{7\pi} = 9,48 \text{ oder nahe } 9\tfrac{1}{2}.$$

Für den Schaufelwinkel β ist:

$$tang.\,\beta = 2\,tang.\,\alpha = 2\,tang.\,20^0 = 2\,.\,0,3640 = 0,7280, \text{ daher:}$$

$$\beta = 36^0\,2',$$

oder in runder Zahl, $\beta = 36$ Grad.

Die Anfangsgeschwindigkeit des aufsteigenden Wassers ist:

$$c_1 = \frac{v}{cos.\,\beta} = \frac{6,95}{cos.\,36^0\,2'} = \frac{6,95}{0,8087} = 8,59 \text{ Fuß},$$

und hiernach die erforderliche Radkranzbreite:

$$d = \tfrac{2}{3}\,\frac{c_1^2}{g + 0,9\,\frac{v^2}{a}} + 0,08\,a = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{8,59^2}{31,25 + 0,9\cdot\frac{6,95^2}{7}} + 0,08\,.\,7$$

$$= \tfrac{2}{3}\cdot\frac{73,79}{37,46} + 0,56 = 1,31 + 0,56 = 1,87 \text{ Fuß},$$

wofür vielleicht 1,90 Fuß zu nehmen sein möchte.

Die Strahldicke ist

$$d_1 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{d}{2a}\right)d\,cos.\,\alpha = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{1,90}{14}\right).\,1,90\,cos.\,20^0 = 0,216\,.\,1,90\,.\,0,94$$

$$= 0,410\,.\,0,94 = 0,385 \text{ Fuß},$$

und die Radweite:

$$e = \frac{Q}{d_1 c} = \frac{24}{0,385\,.\,14,78} = 4,22 \text{ Fuß}.$$

Der Halbmesser der Schaufelkrümmung mißt:

$$r = \frac{d}{cos.\,\beta} = \frac{1,90}{cos.\,36^0\,2'} = 2,35 \text{ Fuß},$$

und für den entsprechenden Centriwinkel φ hat man:

$$sin.\,\tfrac{1}{2}\,\varphi = \sqrt{cos.\,\beta} = \sqrt{cos.\,36^0\,2'} = 0,8993,$$

hiernach:

$$\tfrac{1}{2}\,\varphi = 64^0\,4' \text{ und } \varphi = 128^0\,8',$$

Nun folgt genauer:

$$\lambda = \frac{v}{a} \cdot \frac{9\,\varphi + sin.\,\varphi}{16} \sqrt{\frac{r}{g + 0{,}9\,\frac{v^2}{a}}}$$

$$= \frac{6{,}95}{7} \cdot \frac{9\,.\,2{,}236 + 0{,}787}{16} \sqrt{\frac{2{,}35}{37{,}46}} = 1{,}30\,.\,0{,}251 = 0{,}327 \text{ oder } = 19 \text{ Grad.}$$

Nimmt man den Abstand zwischen je zwei Schaufeln, am äußeren Radumfange gemessen, = 1 Fuß an, so erhält man die erforderliche Schaufelzahl:

$$n = 2\,\pi\,a = {}^{44}/_{7}\,.\,7 = 44;$$

wofür der leichten Vertheilung wegen 48 zu setzen sein möchte.

Das disponible Arbeitsquantum ist:

$$L = Q\,h\,\gamma = 24\,.\,4{,}5\,.\,61{,}75 = 6669 \text{ Fußpfund,}$$

und die theoretische Leistung dieses Rades:

$$L_1 = \frac{c^2}{2\,g}\,cos.\,\alpha^2\,.\,Q\,\gamma = 0{,}016\,.\,14{,}78^2\,.\,(cos.\,20)^2\,.\,24\,.\,61{,}75 = 4579 \text{ Fußpfund,}$$

folglich der Wirkungsgrad desselben:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{4579}{6669} = 0{,}686.$$

Versuche an Ponceleträdern. Ueber die Leistungen der Ponceleträder hat Poncelet selbst Versuche angestellt; es sind dieselben in der oben citirten Abhandlung genau beschrieben und deren Resultate aufgezeichnet. Die ersten Versuche nahm Poncelet an einem Modellrade von $^1/_2$ Meter Durchmesser oder ungefähr $^1/_6$ der natürlichen Größe vor. Es war ganz aus Holz gefertigt und hatte zwanzig krumme Holzschaufeln von $2^1/_2$ Millimeter Dicke, 65 Millimeter Breite und 76 Millimeter Länge. Die Wirkung dieses Rades bestimmte er wie Bossut, Smeaton u. A. mit Hülfe eines Gewichtes, welches durch einen sich um die Welle des Rades umwickelnden Bindfaden aufgehoben wurde. Die größten Leistungen ergaben sich, der Theorie entsprechend, wenn die Radgeschwindigkeit 0,5 der Wassergeschwindigkeit war, und der Wirkungsgrad betrug in diesem Falle 0,42 bis 0,56; ersteres bei kleinerer, letzteres aber bei größerer Dicke des Wasserstrahles oder stärkerer Füllung der Zellen. Wenn man nicht das Gefälle, sondern die Geschwindigkeitshöhe des ankommenden Wassers als maßgebend ansieht, so stellt sich der Effect 0,65 bis 0,72 heraus. Später hat Poncelet noch Versuche an einem Rade in natürlicher Größe mit einem Bremsdynamometer angestellt und ist dabei zu Ergebnissen gelangt, welche von den eben angeführten nur wenig abweichen. Dieses Rad hat 11 Fuß (paris. Maß) Durchmesser und dreißig blecherne Schaufeln von 2 Millimeter Dicke. Die Radkränze waren, wie die Arme und Wellen, von Holz, und es betrug ihre Breite 14 Zoll, ihre Dicke 3 Zoll, und die Entfernung derselben von einander, oder die Radweite, 28 Zoll. Bei einer mittleren Druckhöhe von 1,3 Meter, einer Strahlhöhe von 0,2 Meter und einem Geschwindigkeitsverhältnisse von 0,52 stellt sich auch hier ein Wirkungsgrad von 0,52 heraus, der sich aber §. 226

auf 0,60 steigert, wenn man die Geschwindigkeitshöhe statt des ganzen Gefälles einführt. Poncelet zieht aus seinen Versuchsresultaten folgende Folgerungen.

Das vortheilhafteste Geschwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c}$ ist 0,55, kann aber 0,50 bis 0,60 betragen, ohne eine bedeutend kleinere Wirkung zu geben. Der Wirkungsgrad ist für Gefälle von 2 bis 2,3 Meter, $\eta = 0,5$; für Gefälle von 1,5 bis 2,0 Meter, $\eta = 0,55$, und für Gefälle unter 1,5 Meter, $\eta = 0,60$. Es berechnet sich hiernach die Nutzleistung im ersten Falle:
$Pv = 122,3\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2,53\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund,
im zweiten:
$Pv = 132,5\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2,74\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund,
im dritten:
$Pv = 142,7\ (c - v)\, v\, Q$ Kilogr.-Meter $= 2,95\ (c - v)\, v\, Q$ Fußpfund.

Noch giebt Poncelet einige Regeln für die Anordnung eines unterschlägigen Wasserrades mit krummen Schaufeln, welche er ebenfalls aus seinen Beobachtungen folgert. Die Entfernung je zweier Schaufeln, am äußeren Umfange gemessen, soll nur 0,20 bis 0,25 Meter, der Radhalbmesser aber soll nicht unter 1 und nicht über 2,5 Meter betragen; die Axe des Wasserstrahles soll dem Umfange des Rades unter einem Winkel von 24° bis 30° begegnen, und noch ungefähr 3° gegen den Horizont geneigt sein. Uebrigens soll der Abfall hinreichend hoch sein, damit das Wasser ungehindert aus dem Rade treten kann, und es darf der Spielraum des Rades im Kropfe nur 1 Centimeter betragen. Einige dieser Verhältnisse sind jedoch nicht wesentlich, und andere lassen sich sicherer durch die Formel des vorigen Paragraphen ermitteln. Nach den Versuchen wächst noch der Wirkungsgrad mit der Strahldicke; da aber mit letzterem unter übrigens gleichen Verhältnissen die Füllung der Zellen zunimmt, so folgt noch die in gewissen Grenzen einzuschränkende Regel, daß die Füllung der Schaufeln eine große sein soll. Unter 0,1 Meter Höhe ist übrigens nach Poncelet die Strahlhöhe nie zu machen.

§. 227 **Neue Versuche an Ponceleträdern.** In der neueren Zeit hat auch Morin Versuche an Ponceleträdern angestellt, hierzu drei hölzerne und ein eisernes Rad benutzt, und dabei ein Bremsdynamometer in Anwendung gebracht. Sie wurden vorzüglich in der Absicht gemacht, um den Nutzen eines neuen, von Poncelet vorgeschlagenen krummlinigen Wassereinlaufes zu erproben, nächstdem aber auch, um sich genauere Kenntnisse über den Einfluß der Dimensionsverhältnisse auf die Leistung zu verschaffen, da sich bei mehreren Ausführungen ergeben hatte, daß die Dimensionen der nach Poncelet's Regel construirten Räder zu klein waren, namentlich aber

bei Abweichung von der mittleren Geschwindigkeit des Rades eine zu kleine Leistung gaben, weil das Wasser innen überschlug (s. Comptes rendus, 1845, T. XXII, und polytechn. Centralblatt, Bd. VIII, 1846).

Die drei hölzernen Versuchsräder hatten 1,6 Meter, 2,4 Meter und 3,2 Meter, das eiserne Rad aber 2,8 Meter Höhe, die Schaufeln waren bei allen drei Rädern von Blech. Die ersten drei Räder hatten 0,4, das letztere aber 0,8 Meter Weite, und alle vier hatten eine Tiefe oder Kranzbreite von 0,75 Meter. Ein besonderer Uebelstand stellte sich aber bei den hölzernen Rädern dadurch heraus, daß sie wegen ihres kleinen Trägheitsmomentes sehr ungleichförmig gingen und eben dadurch viel Wasser nach innen verspritzten. Das kleinste Rad ging besonders sehr ungleichförmig und gab bei dem Gefälle von 0,45 bis 0,55 Meter, und wenn die Zellen mindestens zur Hälfte gefüllt waren, nur den Wirkungsgrad 0,485; bei größerem Gewichte würde es vielleicht 0,55 Wirkungsgrad gegeben haben. Bei dem mittleren Rade wurde dieser mit einem Gefälle von 0,75 Meter, 0,60 bis 0,62 gefunden. An dem dritten Rade wurden Versuche bei verschiedenen Schaufelbreiten angestellt. Es zeigte sich, daß bei einem Gefälle von 0,56 Meter die Kranzbreite 0,43 Meter, und bei einem Gefälle von 0,7 Meter, die von 0,59 Meter noch zu klein war. Noch wurden an diesem Rade Versuche über die Wirkung des von Poncelet vorgeschlagenen (in §. 222 beschriebenen) Gerinnes angestellt, und damit nicht nur ein größerer Wirkungsgrad erlangt, sondern auch gefunden, daß der Fassungsraum bis $^3/_2$ herabsinken konnte, ehe das Wasser innen überschlug.

Was endlich noch die Versuche mit dem aus 42 Schaufeln bestehenden eisernen Rade betrifft, so wurden diese bei 1,2 bis 1,4 Meter Gefälle angestellt, wobei das Rad frei ging, sowie bei 0,9 Meter Gefälle, wobei es 0,36 Meter tief im Wasser watete. Bei den Schützenzügen von 0,15 Meter, 0,2 Meter, 0,25 Meter und 0,277 Meter betrugen die Maxima des Wirkungsgrades: 0,52; 0,57; 0,60 und 0,62; und bei Schwankungen der Umdrehungszahlen innerhalb der Grenzen 12 bis 21, 13 bis 21, 11 bis 20 und 12 bis 19 entfernten sich die Wirkungsgrade nur $^1/_{13}$, $^1/_{14}$, $^1/_{12}$ und $^1/_9$ von den Maximalwerthen. Aus den Resultaten dieser Versuche folgt, daß bei einem Rade mit dem gekröpften Einlauf die Wirkung durch die Formel

$$Pv = 0{,}871 \left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right) Q\gamma$$

ausgedrückt werden kann, daß ferner das vortheilhafteste Geschwindigkeitsverhältniß $\frac{v}{c} = 0{,}50$ bis $0{,}55$ ist, daß das Wasser dieselbe Wirkung giebt es mag der Unterwasserspiegel 0,12 Meter unter oder 0,20 bis 0,25 Meter über dem Radtiefsten stehen; daß endlich der Wirkungsgrad bis auf 0,46

herabsinkt, wenn das Rad 0,357 Meter tief oder mit der halben Kranzbreite im Wasser watet. Der Hauptnutzen dieses neuen Gerinnes besteht nun darin, daß sich ein Rad mit diesem Gerinne in weiteren Geschwindigkeitsgrenzen bewegen kann, ohne viel von seiner Nutzleistung zu verlieren. Uebrigens findet Morin für Gefälle von 0,9 bis 1,3 Meter am angemessensten, die Kranzbreite der Hälfte des Radhalbmessers gleich und den Fassungsraum noch einmal so groß zu machen, als den Raum, den das Wasser eigentlich beansprucht, d. i. den Füllungscoefficienten $\varepsilon = \frac{1}{2}$ in Anwendung zu bringen.

Neuere Versuche sind auch von Marozeau an einem Ponceletrade mit drei Abtheilungen angestellt worden (s. Bulletin de Mulhouse 1846, oder polytechnisches Centralblatt, Jahrgang 1848). Dieses Rad hatte eine Höhe von 4,4 Meter, eine lichte Weite von $3 . 0,67 = 2$ Meter und eine Kranzbreite von 0,75 Meter und nahm bei 1,5 Meter Gefälle pr. Secunde 500 bis 1000 Litres Aufschlagwasser auf. Der größte Wirkungsgrad wurde hier 0,669 gefunden, und zwar dann, wenn das Wasser in allen drei Abtheilungen zugleich floß. Der Wirkungsgrad wurde jedoch kleiner, wenn das Rad 0,1 Meter im Unterwasser badete.

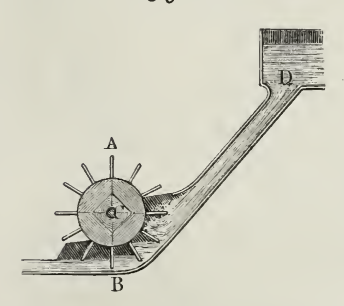
Neuere und sehr interessante Versuche sind vom Herrn Capitain O. de Lacolonge an einem Ponceletrade in der Pulvermühle zu Angoulème (1847) angestellt worden (s. le Génie Industrielle par Armengaud Frères, Paris 1854). Dieses Rad hatte einen Halbmesser von 4,8 Meter, eine Weite sowie eine Kranzbreite von 1,00 Meter, und machte bei einer Leistung von 10 Pferdekräften circa zehn Umdrehungen pr. Minute. Der Wirkungsgrad dieses Rades stieg bei dem Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{v}{c} = 0,579$, wobei das Gefälle 1,56 Meter und die Höhe der Schützenmündung 0,25 Meter betrug, auf 0,678. Das Wasser wurde dem Rade durch ein nach der Kreisevolvente construirtes Gerinne zugeführt und trat $26\frac{1}{2}$ Grad oberhalb des Radtiefsten so in das Rad ein, daß seine relative Bewegung auf der Schaufel in horizontaler Richtung begann. Der Füllungscoefficient war sehr klein, nämlich bei der vortheilhaftesten Wirkung, $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Die angegebene Leistung des Rades steigerte sich noch etwas (auf 0,755), wenn das Rad bis auf $\frac{1}{3}h$ unter dem Wasser watete; dieses Verhältniß, welches auf eine bessere Ausnutzung der Kraft hindeutet, hat man auch schon bei andern mittelschlägigen Rädern beobachtet (s. die Bremsversuche an einem Kropfrade von Hülße und Brückmann im polytechnischen Centralblatte, Jahrgang 1851).

§. 228 **Kleine Wasserräder.** Man hat zuweilen auch noch andere verticale Wasserräder angewendet, welche sich keinem der eben abgehandelten Radsysteme bei-

zählen lassen; namentlich giebt es noch sehr kleine Räder, welche kaum einige Fuß Höhe haben und durch den Druck oder Stoß des Wassers in Bewegung gesetzt werden. Diejenigen, welche sich an die bereits abgehandelten Systeme noch am meisten anschließen, mögen hier noch ihren Platz finden, anderer aber wird aus besonderen Gründen, erst in dem folgenden Capitel gedacht werden.

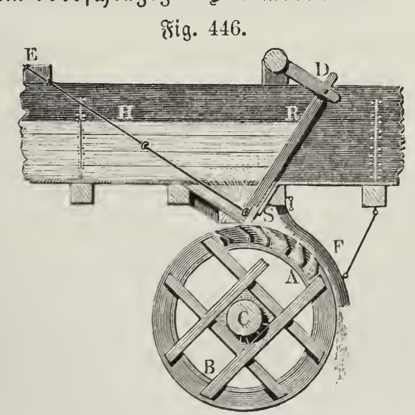
D'Aubuisson beschreibt in seiner Hydraulik kleine Stoßräder, wie *ACB*, Fig. 445, mit hohem Gefälle von 6 bis 7 Meter, welche in den Pyrenäen häufig angewendet werden. Diese Räder sind nur $2^1/_2$ bis 3 Meter hoch und haben vierundzwanzig etwas ausgehöhlte Schaufeln. Ihre Wirkung soll nach d'Aubuisson $^2/_3$ von der eines oberschlägigen Rades bei gleichem Gefälle sein. Es ist übrigens die Leistung eines solchen Rades nach der oben entwickelten Theorie der Kropfräder zu berechnen, denn es sind diese Räder eigentlich nur Kropfräder mit einem großen Stoß- und einem kleinen Druckgefälle. Um das Verspritzen des Wassers so viel wie möglich zu verhindern, wird das Rad in einen Kropf mit genau anschließenden Seitenwänden gehängt. Uebrigens läßt sich bei Anwendung mehrerer solcher Räder unter oder neben einander, wenn das Wasser von einem Rade auf das andere tritt, noch ein hoher Wirkungsgrad erlangen (s. Bd. II, §. 217). Auch kann man diese Räder noch niedriger und aus Eisen herstellen. In den Alpen kommen solche Räder bei Mühlen und Hammerwerken sehr häufig vor.

Fig. 445.



Ein oberschlägiges Hammerrad mit einem großen Stoßgefälle ist in Fig. 446 abgebildet. Es ist *ERD* das Aufschlaggerinne, *SD* die Schütze, *ACB* das Rad und *F* ein Mantel um dasselbe, welcher das zu zeitige Austreten des Wassers verhindert.

Fig. 446.



Ein anderes Rad, Fig. 447 (a. f. S.), wird im „Technologiste“, Septbr. 1845, und auch im polytechnischen Centralblatte,

Bd. VII, 1846, beschrieben. Während bei obigen Rädern das Wasser vorzüglich nur durch Stoß wirkt, bringt dieses seine Leistung nur durch Druck hervor. Dieses Rad wurde von dem Ingenieur Mary erbaut, und sein Wirkungsgrad wurde von Belanger bei 1,3 Meter Umfangsgeschwindigkeit, 0,75 bis 0,85, also sehr hoch gefunden. Es hat dasselbe nur einen aus Eisenblech gebildeten Kranz von 0,3 Meter Breite, 0,12 Meter Dicke und 2,28 Meter Durchmesser, und besteht aus sechs elliptischen, durch Rippen verstärkte Blechschaufeln. Uebrigens hängt dieses Rad in einem sehr genau anschließenden Gerinne, und an den Radkranz sehr nahe anschließende Eisenplatten *DE* sperren das Oberwasser *O* von dem Unterwasser *U* ziemlich genau ab, indem sich der Radkranz in dem zwischen diesen Platten befindlichen Spalt bewegt. Die Kraft, mit welcher ein solches Rad umläuft, ist jedenfalls das Product aus dem Niveauabstande beider Wasserspiegel, dem Querschnitte einer Schaufel, und der Dichtigkeit des Wassers.

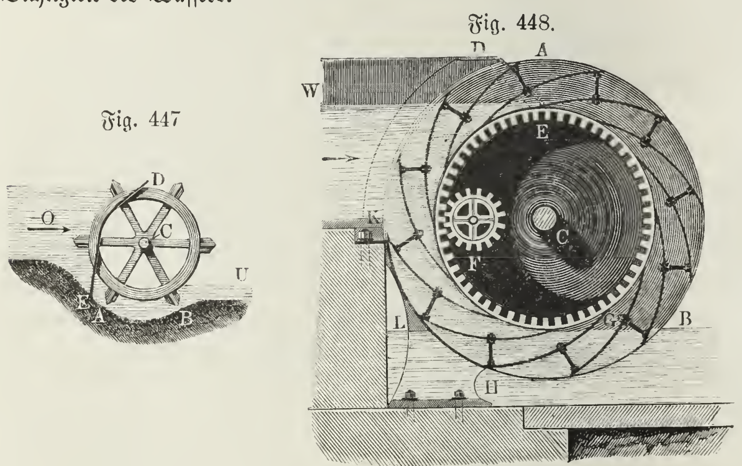


Fig. 447

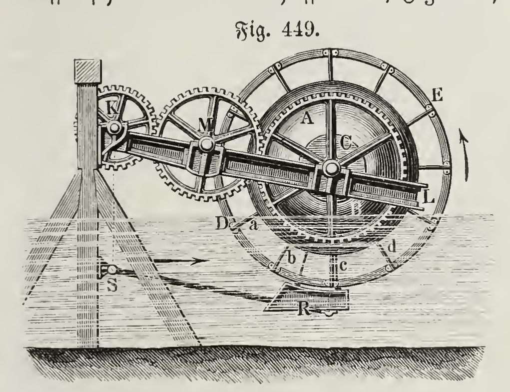
Fig. 448.

Ein anderes ähnliches, jedoch noch vollkommeneres Rad ist das Zupinger'sche, in Fig. 448. Dieses Rad hat nur einen Kranz *AB* und langgedehnte Blechschaufeln, welche entweder nur auf einer oder auf beiden Seiten des Kranzes aufsitzen, und ist mit einem eisernen Mantel *DEFGHK* umgeben, welcher das Aufschlagwasser *W* dem Rade nicht allein von vorn, sondern auch von der Seite zuführt und dasselbe so lange im Rade zurückhält, bis die unterste Schaufel *GH* aus demselben hervortritt. Das bei *W* zutretende und innerhalb des Mantels im Rade niedersinkende Wasser fließt nun längs *GH* unter dem Unterwasserspiegel *BL* ab, und tritt dabei sein ganzes Arbeitsvermögen an das Rad ab. Bei der Herstellung eines solchen Rades ist dafür zu sorgen, daß die innere Radhöhe gleich dem Gefälle ausfalle, daß ferner die untere Mündung des Mantels der untersten Schaufel

entspreche und unter den Unterwasserspiegel falle, und daß der Spielraum zwischen dem Rade und dem Mantel möglichst klein sei. Ein solches Rad ist bei ganz kleinen Gefällen noch anwendbar, und giebt hierbei noch einen sehr hohen Wirkungsgrad (75 bis 80 Procent). S. Gewerbeblatt für Würtemberg 1855, auch polytechnisches Centralblatt 1855.

Eine eigenthümliche Construction hat das schwimmende Wasserrad vom Herrn Colladon in Genf. Dasselbe hängt wie ein Schiffmühlenrad im unbegrenzten Strome, und besteht in der Hauptsache aus einem auf dem Wasser schwimmenden Blechkessel AB, Fig. 449, auf dessen Umfang lange, unter einander durch eiserne Reifen DE verbundene Blechschaufeln $a, b, c, d \ldots$ festsitzen. Um die Umdrehungsbewegung dieses Rades auf eine festliegende Welle K überzutragen, ist die Welle C desselben auf zwei um K drehbare Hebel, wie KL, gelagert, und sind diese Wellen mit Zahnrädern ausgerüstet, welche entweder unmittelbar in einander eingreifen, oder durch ein drittes ebenfalls auf KL gelagertes Rad M auf einander wirken (vergl. §. 212). Um die Wirkung des an die Schaufeln $b, c \ldots$ anschlagenden Wassers zu vergrößern, ist noch unter dem Rade ein Kropf R aufgehangen, welcher je nach dem Stande des Wassers mit dem Rade zugleich steigt und sinkt, so daß beide immer in derselben Tiefe unter dem Wasser bleiben. Die feste Welle K ist, wie die Axe S des Kropfes oder hängenden Gerinnes R, an zwei Paar Säulen befestigt. Man sieht, daß durch die Eintauchung des Radkörpers eine Querschnittsverminderung des Wasserstromes entsteht, welche eine für die Wirkung des Rades vortheilhafte Vergrößerung der Geschwindigkeit des stoßenden Wassers zur Folge hat.

Fig. 449.



Schlußanmerkung. Die Literatur über verticale Wasserräder ist allerdings sehr ausgedehnt; doch verdienen nur wenige Schriften über diese Maschinen einer größeren Beachtung, da die meisten derselben nur oberflächliche und einige sogar ziemlich unrichtige Theorien über Wasserräder abhandeln. In Eytelwein's Hydraulik sind die Wasserräder nur ganz allgemein abgehandelt, Vollständigeres, namentlich über die Theorie unterschlägiger Wasserräder, findet man in Gerstner's Mechanik. Wenig Brauchbares findet man in Langsdorf's Hydraulik oder in dessen System der Maschinenkunde. Ziemlich ausführlich, namentlich über die oberschlägigen Wasserräder, handelt d'Aubuisson in seiner

Hydraulique à l'usage des Ingénieurs. Navier handelt in seinen Applications de la Mécanique nur ganz allgemein von den verticalen Wasserrädern, ausführlicher aber in der von ihm besorgten Ausgabe vom ersten Bande der Architecture hydraulique von Belidor. In dem deutsch unter dem Titel Lehrbuch der Anwendung der Mechanik erschienenen Cours de Mécanique appliquée von Poncelet wird die Theorie der Wasserräder in gedrängter Kürze, jedoch ziemlich gründlich abgehandelt. Ueber die Leistungen und Regeln zur Construction von Wasserrädern findet man auch das Nöthigste in Morin's Aide-mémoire de Mécanique pratique. In dem Treatise on Manufactures and Machinery of Great-Britain, of P. Barlow, ist wenig über Theorie, mehr über die Einrichtung der Wasserräder gesagt. Vollständige Beschreibungen und gute Zeichnungen von Wasserrädern findet man in Armengaud's Traité pratique des moteurs hydrauliques et à vapeur, sowie auch in den neueren Bänden seiner Publication industrielle. Gute Zeichnungen und Zeichnungen von Wasserrädern enthält auch die Maschinenkunde 2c. von Sebastian Haindl. Das vorzüglichste Werk über verticale Wasserräder ist aber Redtenbacher's Theorie und Bau der Wasserräder, welches mit 6 kleinen und 23 großen lithographirten Tafeln 1846 in Mannheim erschienen ist. Poncelet's und Morin's Memoiren über die Wirkungen verticaler Wasserräder (s. oben §. 221 und §. 197) bilden ein wichtiges Element in der Literatur über verticale Wasserräder. Von den kleinen Hammerrädern ist ausführlich die Rede in Tunner's Darstellung der Stabeisen- und Rohstahl-Bereitung, Grätz 1845. Von den Wasserrädern handelt auch Morin's Leçons de Mécanique, pratique, Part. II. Ebenso: Band II von Redtenbacher's Maschinenbau, Mannheim 1863, und Band I von Rühlmann's allgemeiner Maschinenlehre. Ein Wasserrad mit schrägen Schaufeln von Delnest ist beschrieben in Dingler's polytech. Journal Bd. 173.

Fünftes Capitel.

Von den horizontalen Wasserrädern.

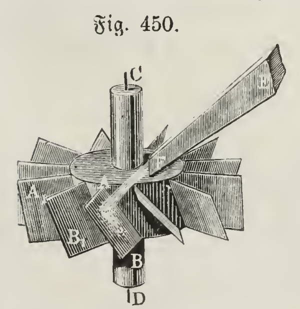
§. 229 **Turbinen.** Bei den horizontalen oder um eine verticale Axe umlaufenden Wasserrädern wirkt das Wasser entweder durch Stoß, oder durch Druck, oder durch Reaction, nie aber unmittelbar durch sein Gewicht. Man unterscheidet daher auch horizontale Stoß-, Druck- und Reactionsräder von einander. Sehr gewöhnlich nennt man auch die horizontalen Wasserräder überhaupt Turbinen oder Kreiselräder (franz. und engl. turbines), zuweilen giebt man aber nur einer gewissen Classe von Reactionsrädern den Namen Turbinen. Die Stoßräder sind mit ebenen oder ausgehöhlten Schaufeln ausgerüstet, auf die das Wasser mehr oder weniger rechtwinklig aufschlägt; die Druckräder hingegen haben krumme Schaufeln, an welchen das Wasser bloß hinläuft; die Reactionsräder endlich be-

stehen aus einem Röhrenapparate, aus welchem das Wasser mehr oder weniger tangential ausfließt. Die Druck- und Reactionsräder sind in ihrer Construction einander sehr ähnlich, jedoch unterscheiden sie sich dadurch wesentlich von einander, daß bei den Druckrädern die Zellen oder Canäle zwischen je zwei Schaufeln vom Wasser nicht ganz ausgefüllt werden, bei den Reactionsrädern aber das Wasser durch die Canäle oder Röhren mit gefülltem Querschnitte hindurchströmt. Während sich bei den Stoßrädern das Wasser nach allen Seiten hin auf den Schaufeln ausbreitet, strömt es bei den Druck- und Reactionsrädern nur nach einer Seite hin. Nach den verschiedenen Richtungen, in welchen sich das Wasser in den Canälen der letzteren Räder bewegt, hat man zwei Hauptsysteme von Druck- und Reactionsrädern; entweder ist die relative Bewegung des Wassers in den Canälen eine horizontale, oder sie ist eine gegen den Horizont geneigte, meist in einer Verticalfläche vor sich gehende Bewegung. Im ersten Systeme ist aber wieder zu unterscheiden, ob das Wasser von innen nach außen, oder von außen nach innen strömt; im zweiten, ob es von oben nach unten oder von unten nach oben fließt. Meist erfolgt die Bewegung entweder nur von innen nach außen, oder von oben nach unten; im ersten Falle kommt die Centrifugal- und im zweiten die Schwerkraft der Bewegung zu Hülfe.

Horizontale Wasserräder, bei welchen das Wasser von oben nach unten abfließt, nennt man wohl auch Danaiden.

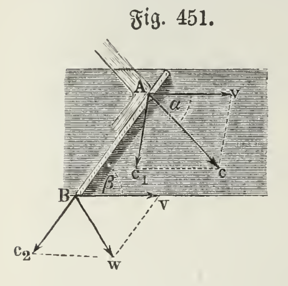
Stossräder. Die einfachsten, jedoch auch unvollkommensten horizontalen Wasserräder sind die sogenannten Stoßräder oder Stoßturbinen, wie ACD, Fig. 450. Sie bestehen aus 16 bis 20 rectangulären Schaufeln AB, A_1B_1 u. s. w., welche so auf den Radkörper aufgesetzt sind, daß sie 50 bis 70 Grad Neigung gegen den Horizont erhalten. Das Wasser wird ihnen durch ein pyramidales Gerinne EF von 40 bis 20 Grad Neigung so zugeführt, daß es ziemlich winkelrecht auf die Schaufeln aufschlägt. Man wendet diese Räder bei 10 bis 20 Fuß Gefälle und dann an, wenn eine große Umdrehungszahl erfordert wird, wie z. B. bei Mahlmühlen, wo man den beweglichen Mühlstein oder sogenannten Läufer auf die Welle des Rades aufsetzt, so daß man Vorgelege oder besondere Zwischenmaschinen gar nicht nöthig hat. Vorzüglich kommen diese Räder in dem südlichen Europa und im nördlichen Afrika, zumal aber in den Alpen und Pyrenäen und in Algier vor. Man giebt ihnen ungefähr 5 Fuß Durchmesser, sowie ihren Schaufeln 15 Zoll Höhe und 8 bis 10 Zoll Länge (radial gemessen). §. 230

Fig. 450.



Die Leistung dieser Räder ist nach der Theorie des Wasserstoßes auf folgende Weise zu ermitteln. Die Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 451, des aufschlagenden Wassers und die Geschwindigkeit $\overline{Av} = v$ der Schaufeln und in eine Geschwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$, welche in Folge des Stoßes die Richtung der Schaufel annimmt. Unter der Voraussetzung, daß das Wasser das Ende B der Schaufel mit dieser relativen Geschwindigkeit $\overline{Bc_2} = c_2$ läßt sich durch Vereinigung derselben mit der Geschwindigkeit $\overline{Bv} = v$ der umlaufenden Schaufel die absolute Abflußgeschwindigkeit w des Wassers bestimmen. Wenn die Bewegungsrichtung Av der Schaufel den Winkel $cAv = \alpha$ mit der Richtung Ac des einfallenden Wassers einschließt, so hat man für die Geschwindigkeit c_1, mit welcher das Wasser an der Schaufel AB hinläuft

Fig. 451.



$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha,$$

und wenn die Bewegungsrichtung von der Schaufelrichtung um den Winkel $ABv = \beta$ abweicht, so ist für die absolute Geschwindigkeit w des abfließenden Wassers:

$$w^2 = c_2^2 + v^2 - 2c_2 v\cos.\beta, \text{ oder wenn man } c_2 = c_1 \text{ annimmt,}$$

$$w^2 = c^2 + 2v^2 - 2v(c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta)$$

$$= c^2 + 2v(v - (c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta)).$$

Mit Hülfe dieser Größe bestimmt sich nun das Arbeitsvermögen, welche das mit der Geschwindigkeit c zufließende Wasserquantum Q dem Rade mittheilt.

$$L = \left(\frac{c^2 - w^2}{2g}\right)Q\gamma$$

$$= \frac{v(c\cos.\alpha + c_1\cos.\beta - v)}{g}\,Q\gamma, \text{ oder, wenn man noch}$$

$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha} \text{ einführt,}$$

$$L = \frac{(c\cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2cv\cos.\alpha}\,.\cos.\beta - v)v}{g}\,Q\gamma.$$

Damit das Wasser nach dem Anstoße an der Schaufel AB herablaufe, ist nöthig, daß der Winkel BAc_1, welchen der Strahl Ac_1 nach dem Stoße mit der Schaufel AB einschließt, kleiner als 90 Grad sei. Bezeichnen wir den Neigungswinkel Ac_1c durch θ, so ist $BAc_1 = \theta - \beta$, und daher $\theta - \beta < 90^0$, oder

$$\theta < 90^0 + \beta, \text{ also auch}$$

$tang.\theta < tang.(90^0 + \beta)$, d. i. $cotang.\beta < - tang.\theta$
oder $tang.\beta > - cotang.\theta$ zu fordern.

Nun ist aber $cotang.\theta = \frac{c\,cosin.\alpha - v}{c\,sin.\alpha}$, daher folgt die Bedingung

$$tang.\beta > \frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}.$$

Um eine möglichst große Leistung zu erhalten, giebt man dem eintretenden Strahle nahe die Richtung der ausweichenden Schaufel, macht also α nahe = Null. Da dann $cos.\alpha$ = Eins gesetzt werden kann, so folgt für diesen Fall:

$$L = \left(\frac{c + (c - v)\,cos.\beta - v}{g}\right) v\,Q\gamma = \frac{(1 + cos.\beta)\,(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma.$$

Nun fällt aber für einen kleineren Werth von α, $\frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}$ nahe unendlich groß aus; es ist daher dann $tang.\beta = \infty$, und daher $\beta = 90^0$ zu machen, und die entsprechende Leistung des Rades

$$L = \frac{(c - v)\,v}{g}\,Q\gamma.$$

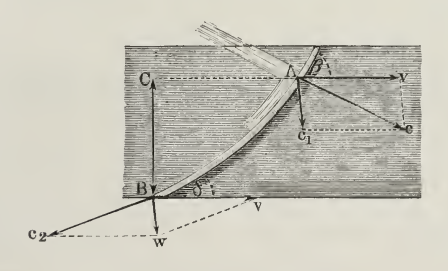
Dieselbe ist für $v = \frac{c}{2}$ ein Maximum und zwar $L = \frac{1}{2}\cdot\frac{c^2}{2g}Q\gamma$, also nur die Hälfte von dem Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers.

Stossräder mit krummen Schaufeln. Da der Formel: **§. 231**

$$L = \frac{(c\,cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha}\;.\;cos.\beta - v)\,v}{g}\,Q\gamma$$

zu Folge die Leistung eines Stoßrades um so größer ausfällt, je größer $cos.\beta$, je kleiner also der Austrittswinkel β ist, so bringt man mit Vortheil statt der ebenen Schaufeln, hohle Schaufeln wie AB, Fig. 452, zur Anwendung. Es ist dann die Neigung β der Schaufel am Eintrittspunkte A eine andere als die Neigung δ an der Austrittsstelle B, und kann daher durch β der obigen Gleichung $tang.\beta > \frac{v - c\,cos.\alpha}{c\,sin.\alpha}$ Genüge gethan werden, ohne die durch die Formel

Fig. 452.



$$L = \frac{(c\,cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha . cos.\delta} - v)\,v}{g}\,Q\gamma$$

zu bestimmende Leistung des Stoßrades zu beeinträchtigen. Macht man dann den Austrittswinkel sehr klein, so läßt sich $cos.\delta = 1$, und daher

$$L = \frac{(c\,cos.\alpha + \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha} - v)\,v}{g}\,Q\gamma \text{ setzen.}$$

Die Geschwindigkeit v der Schaufeln, bei welcher die Maximalleistung erlangt wird, ist bestimmt durch die Gleichung

$$c\,cos.\alpha - 2\,v + \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha} - \frac{v(c\,cos.\alpha - v)}{\sqrt{c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha}} = 0,$$

deren Auflösung auf den Werth

$$v = \frac{c}{2\,cos.\alpha} \text{ führt.}$$

Die diesem Geschwindigkeitswerthe entsprechende Maximalleistung des Rades ist

$$L = \frac{c\,cos.\alpha}{g} \cdot \frac{c}{2\,cos.\alpha}\,Q\gamma = \frac{c^2}{2\,g}\,Q\gamma.$$

Es wird also bei diesem Gange des Rades das ganze disponible Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers gewonnen.

Ist die Höhe $\overline{CB} = h_2$, von welcher das Wasser während der Bewegung auf der Schaufel AB herabfällt, ein ansehnlicher Theil des ganzen Radgefälles, so hat man die relative Geschwindigkeit mit welcher das Wasser am Schaufelrade B ankommt,

$$c_2 = \sqrt{2\,g\,h_2 + c_1^2} \text{ zu setzen.}$$

Wendet man wieder einen sehr kleinen Austrittswinkel δ an, so läßt sich die absolute Austrittsgeschwindigkeit

$$w = c_2 - v = \sqrt{2\,g\,h_2 + c_1^2} - v \text{ setzen.}$$

Damit dieselbe nahe Null ausfalle, folglich das ganze Arbeitsvermögen des Wassers auf das Rad übergehe, ist der Gleichung

$$v^2 = 2\,g\,h_2 + c_1^2$$
$$= 2\,g\,h_2 + c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,cos.\alpha \text{ zu genügen,}$$

wonach

$$2\,c\,v\,cos.\alpha = 2\,g\,h_2 + c^2, \text{ oder}$$

$$v = \frac{2\,g\,h_2 + c^2}{2\,c\,cos.\alpha} \text{ folgt.}$$

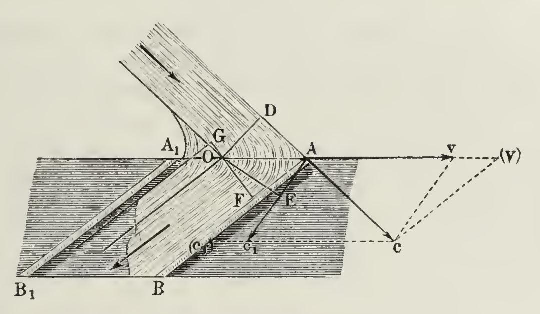
Ist $h_1 = \frac{c^2}{2\,g}$ das Gefälle, welches die Erzeugung der Geschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in das Rad in Anspruch nimmt, so hat man das ganze

Radgefälle $h = h_1 + h_2 = \frac{c^2}{2g} + h_2$, und daher die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades, wobei dasselbe das Arbeitsquantum $L = Qh\gamma$ liefert,

$$v = \frac{gh}{c \cos. \alpha}.$$

Bezeichnet d die Dicke OD, Fig. 453, des zutretenden Strahles und θ

Fig. 453.



den Winkel $OAE = Avc$, welchen die Richtung des in das Rad eintretenden Wasserstrahles Ac_1 mit der Bewegungsrichtung Av des Rades einschließt, so ist die Dicke des eintretenden Strahles

$$\overline{OE} = d_1 = \frac{cd}{c_1},$$

weil durch OD und OE in derselben Zeit eine und dieselbe Wassermenge strömt. Da die Schaufel AB nur die Richtung der Bewegung aus AE in AF umsetzt, die Geschwindigkeit derselben aber nicht abändert, so folgt, daß der Wasserstrahl auch mit der Dicke $\overline{FG} = \overline{OE} = d_1 = \frac{cd}{c_1}$ an der Schaufel AB hinläuft. Damit das Wasser ungehindert in das Rad eintreten und an dessen Schaufeln hinlaufen könne, ist nöthig, daß der Normalabstand zwischen den benachbarten Schaufeln AB und A_1B_1 mindestens dieser Strahldicke $FG = \frac{cd}{c_1}$ gleich sei, daß also das zuströmende Wasser nur einen Theil AO von der ganzen Mündung AA_1 oder dem Raume zwischen den Schaufeln AB und A_1B_1, einnehme.

Läßt man die Eintrittsgeschwindigkeit (c_1) mit der Schaufelrichtung zusammen fallen, macht man also $\theta = \beta$, so hat man $\frac{c}{c_1} = \frac{\sin. \beta}{\sin. \alpha}$, daher

$$d_1 = \frac{d \sin. \beta}{\sin. \alpha} = \overline{OF}.$$

In diesem Falle schließt sich der Wasserstrahl OFB im Rade unmittelbar an die Basis AO des zutretenden Strahles an, und es kann daher die Schaufel $A_1 B_1$ bis O der vorausgehenden Schaufel AB genähert werden. Da dieses Bewegungsverhältniß nur bei einer bestimmten Radgeschwindigkeit $v = \frac{c \sin.(\alpha + \beta)}{\sin.\beta}$ statt hat, so ist d_1 noch etwas größer als $\frac{d \sin.\beta}{\sin.\alpha}$ zu machen, damit das Wasser auch bei einer kleineren Umdrehungsgeschwindigkeit ungestört in das Rad eintreten könne.

§. 232 Zu der Classe von Rädern, Stoßrädern mit krummen Schaufeln, gehören diejenigen, welche die Franzosen rouets volants nennen, und über deren Wirkungen Piobert und Tardy Versuche angestellt haben (s. Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical etc., par Piobert et Tardy, Paris 1840). Die Ergebnisse dieser Versuche an einem Rädchen, wie Fig. 454, von 5 Fuß Durchmesser, 8 Zoll Höhe und 20 gekrümmten Schaufeln (Fig. 454) waren bei einem Gefälle von $4^1/_4$ Meter (vom Spiegel des Oberwassers bis Grundfläche des Rades gemessen) und bei einem Aufschlag von 0,3 Cubikmeter pr. Secunde folgende:

Für $\frac{v}{c} = 0,72$, $\eta = 0,16$; für $\frac{v}{c} = 0,66$, $\eta = 0,31$, und für $\frac{v}{c} = 0,56$, $\eta = 0,40$.

Fig. 454.

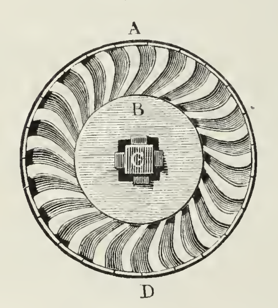
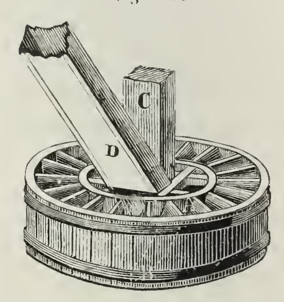


Fig. 455.



Man nennt die im vorigen Paragraphen abgehandelten Räder, bei welchen das Wasser vorzüglich durch Druck wirkt, indem es an gekrümmten Schaufeln niederfließt, Borda'sche Turbinen. Die Construction solcher Turbinen führt Fig. 455 vor Augen. Der Verfasser hat das Original als Umtriebsmaschine für sechs Amalgamirfässer und ein anderes zum Umtriebe eines Mahlganges zu Huelgoat in der Bretagne gesehen. Die krummen Schaufeln waren aus drei Buchenholzbretchen zusammengesetzt, und zwischen aus Dauben zusammengesetzten Mänteln, wovon der äußere mit zwei eisernen Ringen umgeben war, eingesetzt. In Fig. 455 ist AB eine Schaufel, C die Welle

und D der 45° geneigte Wassereinfallutten. Der Durchmesser des Rades betrug $1\frac{1}{2}$ Meter, die 20 Schaufeln dieses Rades waren 0,36 Meter lang und 0,44 Meter hoch. Uebrigens machte das Rad bei einem Gefälle von 5 Metern, 40 Umdrehungen in der Minute.

Ueber die effectiven Wirkungen der Borda'schen Turbinen sind sichere Beobachtungen nicht bekannt. Borda giebt das Verhältniß der effectiven Leistung zur theoretischen 0,75 an.

Poncelet bemerkt sehr richtig, daß es zweckmäßig ist, den Rädern eine große Höhe und einen großen Durchmesser zu geben, und die Schaufeln weniger lang zu machen, also die beiden Mäntel oder Trommeln nicht weit von einander abstehen zu lassen. Durch die größere Radhöhe erlangt man ein kleineres Geschwindigkeitsgefälle, und daher auch kleinere Wasser- und Radgeschwindigkeiten, durch einen größeren Durchmesser erhält man eine kleinere Umdrehungszahl, und da bei einem größeren Rade bei gleichem Fassungsraume die Radweite eine kleinere sein kann, so erhält man auch dadurch kleinere Abweichungen in der Geschwindigkeit der neben einander niederfließenden Wasserfäden.

Beispiel. Welchen Aufschlag erfordert eine Borda'sche Turbine nach der Construction von Fig. 455, wenn dieselbe bei einem Gefälle von 15 Fuß zum Umtriebe eines Mahlganges eine Leistung von 3 Pferdekräften hervorbringen soll? Geben wir dem Rade $1\frac{3}{4}$ Fuß Höhe, so bekommen wir die theoretische Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = 7{,}906\sqrt{15 - 1{,}75} = 7{,}906\sqrt{13{,}25} = 28{,}75 \text{ Fuß.}$$

Führt man das Wasser unter 30° Neigung gegen den Horizont ein, so erhält man die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{gh}{c\,cos.\,\alpha} = \frac{31{,}25\,.\,15}{28{,}75\,.\,cos.\,30^0} = 18{,}83 \text{ Fuß.}$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher es an den Schaufeln niederzufließen anfängt, ist

$$c_1 = \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,cv\,cos.\,\alpha} = \sqrt{c^2 + v^2 - 2\,gh} = \sqrt{v^2 - 2\,gh_2}$$
$$= \sqrt{18{,}83^2 - 2\,.\,31{,}25\,.\,1{,}75} = \sqrt{245} = 15{,}65 \text{ Fuß.}$$

Für den Winkel β, unter welchem der Schaufelkopf gegen den Horizont zu neigen ist, damit das Wasser ohne Stoß in das Rad eintrete, hat man hiernach $\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\alpha} = \frac{c}{c_1}$, also:

$$sin.\,\beta = \frac{28{,}75}{15{,}65}\,sin.\,30^0 = 0{,}9185,$$

folglich

$$\beta = 66\tfrac{3}{4}{}^0.$$

Geben wir noch dem Schaufelfuße eine Neigung $\delta = 25^0$ gegen den Horizont, so erhalten wir die absolute Geschwindigkeit des abfließenden Wassers:

$$w = 2\,v\,sin.\,\frac{\delta}{2} = 2\,.\,18{,}83\,sin.\,12\tfrac{1}{2}{}^0 = 8{,}15 \text{ Fuß}$$

und daher die Leistung des Rades:

$$L = \frac{3}{4}\left(h - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{3}{4}\left(15 - \frac{8{,}15^2}{2g}\right).61{,}75\, Q$$
$$= 46{,}31\ (15 - 1{,}063)\, Q = 645\, Q.$$

Damit diese die verlangten 3 Pferdekräfte = 1440 Fußpfund giebt, ist demnach das Aufschlagquantum

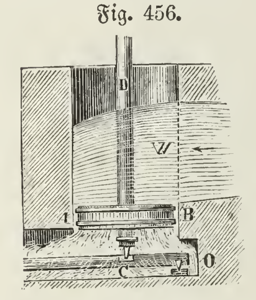
$$Q = \frac{1440}{645} = 2{,}23 \text{ Cubikfuß nöthig.}$$

Geben wir dem Rade einen mittleren Halbmesser (bis zur Schaufelmitte gemessen) von $1\frac{1}{2}$ Fuß, und machen wir den Wasserraum $l = \frac{1}{4}$ Fuß weit, so erhalten wir den Inhalt der Querschnitte sämmtlicher Abflußöffnungen an der Grundfläche des Rades:

$F = 2\pi a l \sin.\delta = \pi . 3 . \frac{1}{4} \sin. 25^0 = 2{,}356 . 0{,}4226 = 1{,}0$ Quadratfuß, welcher sicherlich hinreicht, um pr. Secunde 2,23 Cubikfuß Wasser mit 18,83 Fuß Geschwindigkeit durchfließen zu lassen.

§. 233 **Kufenräder.** Zu den Turbinen, bei welchen das Wasser an krummen Schaufeln niederfließt, gehören noch die Kufenräder (franz. roues en cuves), welche noch häufig im südlichen Frankreich vorkommen und schon von Belidor in seiner Architecture hydraulique beschrieben worden sind. Auch d'Aubuisson behandelt diese Räder ziemlich ausführlich in seiner Hydraulik. Endlich haben Piobert und Tardy in einer schon oben citirten Abhandlung (§. 231) die Resultate der von ihnen angestellten Versuche, welche allerdings keinesweges günstig zu nennen sind, mitgetheilt. Diese Räder (s. AB, Fig. 456) weichen in ihrer Form von den oben betrachteten Stoßrädern (Fig. 454) nicht ab, sie haben jedoch nur 1 Meter im Durchmesser und nur neun krumme Schaufeln; man setzt sie nur aus zwei Stücken zusammen und umgiebt sie mit zwei eisernen Reifen. Die Welle CD ruht mit ihrem Stifte C auf einem Hebel CO, um sie heben oder senken zu können, wie es der aufsitzende Mühlstein (hier nicht angegeben) erfordert. Dieses Rad befindet sich nahe am Fuße innerhalb eines cylindrischen, 2 Meter hohen und 1,02 Meter breiten Schachtes AWB, und das Wasser fließt durch ein sich an das Rad tangential anschließendes Gerinne zu, welches 3 bis 4 Meter Länge, anfänglich eine Breite von 0,75, zuletzt, bei der Einmündung in die schachtförmige Radstube, aber nur noch eine solche von 0,25 Meter hat. Das Wasser fließt mit einer großen Geschwindigkeit zu, nimmt, in der Radstube angelangt, eine drehende Bewegung an und wirkt nun stoßend und drückend gegen die Schaufeln des Rades, indem es in den Zwischenräumen zwischen den Schaufeln nach unten strömt. Ein großer Theil des Wassers kommt aber nur unvollkommen oder gar nicht zur Wirkung, indem er entweder in dem Zwischenraume zwischen Rad und

Fig. 456.

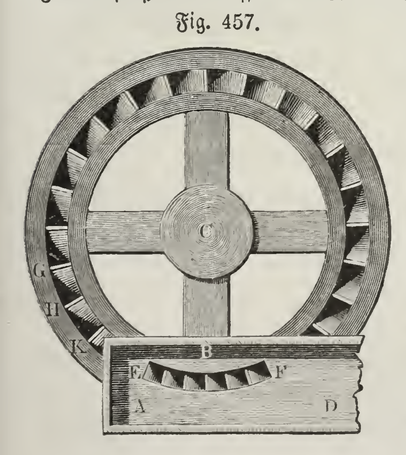


Schacht entweicht, oder beim Durchgang durch die weiten Schaufelräume nicht hinreichende Gelegenheit hat, seine Kraft auszuüben. Aus diesem Grunde sind auch die Wirkungsgrade dieser Räder so sehr klein. Bei den besseren Rädern in der Hospitalmühle zu Toulouse fanden Piobert und Tardy den Wirkungsgrad höchstens 0,27 und zwar bei einem Gefälle von 3 Meter, einem Aufschlag von 0,45 Cubikmeter, und einer Umdrehungszahl $u = 100$. War unter übrigens gleichen Verhältnissen die Umdrehungszahl $u = 120$, so stellte sich $\eta = 0{,}22$ heraus und für $u = 133$ war η gar nur $= 0{,}15$. Die Räder in der sogenannten Basacle-Mühle gaben ihres schlechten Zustandes wegen, höchstens $\eta = 0{,}18$.

D'Aubuisson berichtet, daß man bei neuen Ausführungen das Rad nicht in, sondern unmittelbar unter den Schacht gestellt und dafür etwas weiter gemacht hat als diesen Raum; daß man auch das pyramidale Zuflußgerinne bedeutend abgekürzt und durch beides den Wirkungsgrad um $^1/_3$ erhöht hat. Wenn wir nun auch für diese Räder den Wirkungsgrad mit d'Aubuisson 0,25 setzen, so erhalten wir doch noch eine viel kleinere Leistung, als bei den oben betrachteten freistehenden Stoßrädern oder roues à buse, wie sie d'Aubuisson nennt.

Burdin's Turbinen. Die Turbinen von Burdin, oder turbines à évacuation alternative, wie sie Burdin selbst nennt, sind die vorzüglichsten der hierher (§. 231) gehörigen Räder. Sie sind im Wesentlichen von den einfachen Borda'schen Turbinen nur dadurch verschieden, daß bei ihnen das Wasser an mehreren Punkten zugleich eintritt, und daß die Ausmündungen auf drei concentrische Kreise vertheilt sind. Die letztere Anordnung geschieht deshalb, damit das mit einer sehr kleinen absoluten Geschwindigkeit abfließende Wasser dem Rade keine Hindernisse in seiner Umdrehung entgegensetze. Das erste Rad dieser Art hat Burdin in der Mühle zu Pont-Gibaud aufgeführt, und in den Annales des Mines, III. Serie, T. III, beschrieben. Fig. 457 stellt einen Grundriß dieses Rades vor. ABD ist der unmittelbar über dem Rade stehende Speisebehälter, welcher auf der einen Seite mit dem Aufschlaggerinne in Verbindung steht und im Boden eine Reihe EF von Mundstücken hat, durch welche das Wasser in einer geneigten Richtung in das Rad eingeführt wird. Das um die §. 234

Fig. 457.

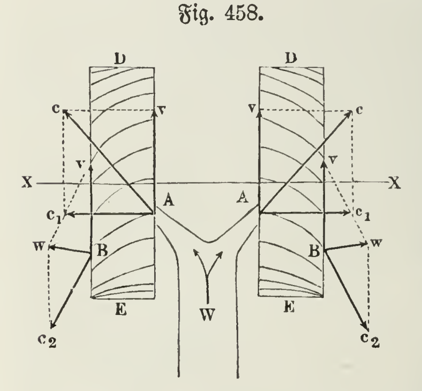


Axe C umlaufende Rad besteht aus einer Reihe von Canälen, deren Einmündungen zusammen einen ringförmigen Raum $GHK\ldots$ bilden, welcher sich genau unter dem von den Mundstücken gebildeten Bogen EF bewegt, so daß das Wasser ungehindert aus diesen in jene eintreten kann. Die Canäle (franz. couloirs) laufen oben senkrecht, unten aber ziemlich horizontal und beinahe tangential und zwar in drei verschiedenen Kreisen aus; es befindet sich nämlich nur der dritte Theil sämmtlicher Ausmündungen dieser Canäle genau unter dem von den Einmündungen gebildeten Ringe $GHK\ldots$, das andere Drittel, wie z. B. H, mündet aber innerhalb, und das dritte Drittel, wie z. B. K, mündet außerhalb des gedachten Ringes aus.

Durch die Versuche, welche an der Burdin'schen Turbine in Pont-Gibaud angestellt worden sind, hat sich bei einem Aufschlag Q von 0,0935 Cubikmeter und einem Gefälle h von 3,24 Meter ein Wirkungsgrad $\eta = 0{,}67$ herausgestellt. Die vorher zu demselben Zwecke angewendete Stoßturbine erforderte bei gleicher Leistung das dreifache Wasserquantum. Der Durchmesser dieses Rades betrug 1,4 Meter, die Höhe 0,4 Meter, und die Schaufelzahl 36.

Man kann auch nach dem Principe der Burdin'schen Turbinen verticale Wasserräder, wie DE Fig. 458, construiren, und denselben das Wasser durch eine Röhre WA zuführen, welche nahe über dem Radtiefsten ausmündet. Ist hier c die Ausflußgeschwindigkeit, v die Radgeschwindigkeit und α der Winkel cAv, welcher die Richtung des eintretenden Wassers mit dem Radumfange einschließt, so hat man für die relative Geschwindigkeit $c_1 = c_2$ des Wassers im Rade:

Fig. 458.



$$c_1^2 = c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v\,\cos.\alpha.$$

Soll nun das Wasser möglichst todt abfließen, so muß $c_2 = v$, also auch $c_2^2 = v^2$, und daher:

$$2\,c\,v\,\cos.\alpha = c^2, \text{ also}$$

$$v = \frac{c}{2\cos.\alpha} \text{ sein.}$$

Wenn man das Rad mit dieser Geschwindigkeit umlaufen läßt, und dabei den Austrittswinkel $\delta = 180^0 - c_2Bv$ möglichst klein macht, so fällt die absolute Abflußgeschwindigkeit w so klein aus, daß das Arbeitsvermögen

$\frac{w^2}{2g} Q g$ des abfließenden Wassers als Null angesehen und folglich das theoretische Arbeitsvermögen des Wasserrades

$$L = Q h \gamma$$

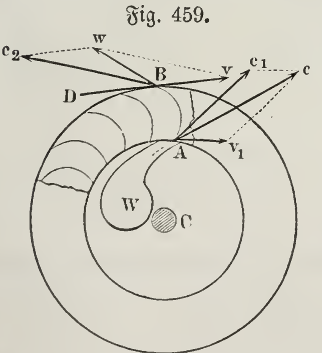
gesetzt werden kann.

Damit das Wasser ungehindert durch die Radcanäle AB fließen könne, ist nöthig, daß der Querschnitt der Ausmündung B nicht kleiner sei als der der Einmündung A und deshalb zu fordern, daß der Austrittswinkel δ dem Eintrittswinkel α mindestens gleich sei. Ein einfaches Rad DE dieser Construction hat in Folge der Abweichung der Kraftrichtung von der Umdrehungsebene noch ein Bestreben, sich um eine in dieser Ebene liegende Axe zu drehen; und um dasselbe aufzuheben, kann man auf dieselbe Welle XX zwei solche Räder DE, DE setzen, welche das durch eine Röhre W zugeführte Wasser auf entgegengesetzten Seiten aufnehmen und ausgießen.

Tangentialräder. Bei den seither in Betrachtung gezogenen Turbinen bewegt sich das Wasser nahe oder ganz in einer cylindrischen Fläche, es verändert folglich bei dieser Bewegung jedes Wasserelement seine Entfernung von der Umdrehungsaxe nicht, oder wenigstens nicht sehr; im Folgenden werden wir aber Räder kennen lernen, wo das Wasser außer einer Umdrehungs- und nach Befinden einer Verticalbewegung noch eine mehr oder weniger radial ein- oder radial auswärts gerichtete Bewegung in Hinsicht auf die Umdrehungsaxe hat. Diese Turbinen haben die Eigenthümlichkeit, daß ihr Gang von der Centrifugalkraft des Wassers wesentlich mit abhängt. Man könnte daher auch diese Räder Centrifugalturbinen nennen. Sie sind aber gewöhnlich unter dem Namen Tangentialräder bekannt. §. 235

Die Theorie dieser Turbinen gründet sich auf die in Bd. I, §. 303 und §. 304 abgehandelte Theorie der mechanischen Arbeit der Centrifugalkraft. Bewegt sich ein Körper oder ein Wasserelement M in einem Radcanale AB, Fig. 459, auswärts, während sich das Rad ACB selbst mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω umdreht, so erhält dasselbe in Folge der radial auswärts wirkenden Centrifugalkraft einen Zuwachs an Arbeitsvermögen, welcher durch den Ausdruck

Fig. 459.



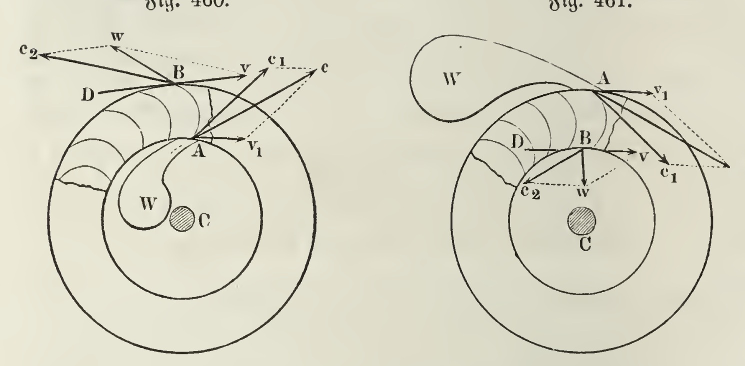
$$L = \left(\frac{v^2 - v_1^2}{2g}\right) G$$

gemessen wird, wenn G das Gewicht des Körpers v_1 und v die Umfangsgeschwindigkeiten des Rades an der Eintritts-

stelle A und an der Austrittsstelle B, und g das bekannte Beschleunigungsmaaß der Schwere bezeichnen.

Dieser Arbeitsgewinn geht in einen Arbeitsverlust über, wenn sich der Körper von außen nach innen bewegt, also A die Eintritts- und B die Austrittsstelle ist (s. Fig. 461). Wenn daher die relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers $= c_1$ ist, so nimmt die relative Austrittsgeschwindigkeit desselben in B einen Werth c_2 an, welcher in beiden Fällen durch die Formel:

Fig. 460. Fig. 461.



$$\frac{c_2^2}{2g} = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{v^2 - v_1^2}{2g}, \text{ oder } c_2^2 = c_1^2 + v^2 - v_1^2$$

bestimmt wird.

Damit das Wasser ungehindert und ohne Stoß bei A Fig. 460 eintrete, ist nöthig, daß sich die absolute Eintrittsgeschwindigkeit c in zwei Geschwindigkeiten v_1 und c_1 zerlegen lasse, wovon die eine mit der Radgeschwindigkeit v_1 an der Eintrittsstelle zusammenfällt, und die andere die Richtung des Schaufelendes in A hat. Ist nun α der Winkel $c A v_1$, welchen der zufließende Strahl mit dem Radumfang in A einschließt, und β der Winkel $c_1 A v_1$, unter welchem sich die Schaufel AB in A an den Radumfang anschließt, so hat man für die Größe und Richtung der relativen Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2 c v_1 \cos.\alpha$$

und

$$\frac{\sin.\beta}{\sin.\alpha} = \frac{c}{c_1}.$$

Sind also die Größen c, v_1 und α gegeben, so bestimmen sich die Größen c_1 und β durch die Ausdrücke:

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{c^2 + v_1^2 - 2 c v_1 \cos.\alpha} \quad \text{und} \\ \sin.\beta = \dfrac{c \sin.\alpha}{c_1}, \end{cases}$$

oder auch $\begin{cases} cotang.\,\beta = cotang.\,\alpha - \dfrac{v_1}{c\,sin.\,\alpha} \text{ und} \\ c_1 = \dfrac{c\,sin.\,\alpha}{sin.\,\beta}. \end{cases}$

Für die relative Austrittsgeschwindigkeit folgt nun:

$$c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c v_1\,cos.\,\alpha.$$

Ist δ der Winkel DBc_2, unter welchem sich das Schaufelende B an den Radumfang anschließt, so hat man für die absolute Ausflußgeschwindigkeit w:

$$w^2 = c_2^2 + v^2 - 2\,c_2 v\,cos.\,\delta.$$

Um das Arbeitsvermögen $\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma$ des fließenden Wassers so klein und folglich das des Rades so groß wie möglich zu erhalten, ist die absolute Geschwindigkeit w möglichst klein und daher $c_2 = v$ und δ gleich oder wenigstens so nahe wie möglich Null zu machen. Könnte δ = Null sein, also die Schaufel in B tangential an den Radumfang angelegt werden, so würde dann

$$w = c_2 - v = 0,$$

und also auch der Arbeitsverlust Null sein. Um dem bei B abfließenden Wasser den nöthigen Querschnitt zu geben, kann aber δ nur klein (15 bis 20 Grad) gemacht werden, und wenn dann nur $c_2 = v$ ist, so folgt:

$$w = 2\,v\,sin.\,\frac{\delta}{2},$$

und daher der gesuchte Arbeitsverlust:

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{\left(2\,v\,sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Setzen wir nun in die Gleichung

$$c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c v_1\,cos.\,\alpha,$$

$v = c_2$ ein, so folgt einfach $2\,v_1\,cos.\,\alpha = c$, und daher die erforderliche Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades:

$$v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha},$$

oder, da sich die Geschwindigkeit c aus dem ganzen Gefälle oder der Druckhöhe im Ausflußreservoire W durch den Ausdruck $c = \sqrt{2gh}$ bestimmt:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{2\,cos.\,\alpha},$$

und, wenn r und r_1 die Radhalbmesser $\overline{CB}$ und $\overline{CA}$ bezeichnen:

$$v = \frac{r}{r_1}v_1 = \frac{r}{r_1}\cdot\frac{c}{2\,cos.\,\alpha} = \frac{r}{r_1}\,\frac{\sqrt{2gh}}{2\,cos.\,\alpha}.$$

Setzt man diesen Werth für v in den Ausdruck für den

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{\left(2\,v\,sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2}{2g}\,Q\gamma$$

ein, so erhält man:

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \left(\frac{r}{r_1}\cdot\frac{sin.\,{}^1\!/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2 Q\,h\,\gamma,$$

und daher das theoretische Arbeitsquantum des Rades:

$$L = h\,Q\gamma - \frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\cdot\frac{sin.\,{}^1\!/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q\,h\,\gamma.$$

§. 236 In Folge der Reibung des Wassers in der Zuleitungsröhre und in den Radcanälen erleidet diese Leistung noch zwei Verluste, welche den Quadraten der Ausflußgeschwindigkeiten c und c_2 proportional wachsen, und daher zusammen

$$= \left(\zeta\,\frac{c^2}{2g} + \zeta_1\cdot\frac{c_2^2}{2g}\right) Q\gamma$$

zu setzen sind, wenn ζ und ζ_1 gewisse Erfahrungszahlen, sogenannte Widerstandscoefficienten, bezeichnen.

Setzen wir in diesem Ausdrucke

$$\frac{c^2}{2g} = h \quad \text{und}$$

$$\frac{c_2^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\cdot\frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 h,$$

so erhalten wir hiernach die Leistung des Rades:

$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{1}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{sin.\,{}^1\!/_2\,\delta}{cos.\,\alpha}\right)^2\right] Q\,h\,\gamma$$

und ist hierin $\zeta = \zeta_1 = 0{,}05$ bis $0{,}10$ anzunehmen.

Uebrigens ist wegen der letzten Verluste genauer

$$(1 + \zeta)\,c^2 = 2\,g\,h \quad \text{und}$$

$$(1 + \zeta_1)\,c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha$$

zu setzen, so daß $c = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{1 + \zeta}}$, und

$$\zeta_1\,c_2^2 = c^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha \text{ folgt.}$$

Wenn man ferner

$$\zeta_1\,c_2^2 = \zeta_1\,v^2 = \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 v_1^2 = \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\,cos.\,\alpha}\right)^2$$

$$= c^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha \text{ setzt,}$$

so folgt die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit

$$v_1 = \left[1 - \xi_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\, cos.\, \alpha}\right)^2\right] \frac{c}{2\, cos.\, \alpha}.$$

Da in dem obigen Ausdrucke für die Radleistung $cos.\, \alpha$ im Nenner vorkommt, so ist es zweckmäßig, den Einführungswinkel klein zu machen, und folglich das Wasser nahe tangential in das Rad einzuführen, weshalb man auch diese Räder Tangentialräder nennt. Dieselben sind entweder Tangentialräder mit innerer Beaufschlagung, wie Fig. 460, oder solche mit äußerer Beaufschlagung, Fig. 461.

Giebt man das Aufschlagquantum Q, so kann man nun auch mit Hülfe der Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 den erforderlichen Querschnitt F der Ausmündung des Aufschlagreservoirs sowie den Querschnitt F_1 des Wassers bei seinem Eintritte, und Querschnitt F_2 desselben bei seinem Austritte aus dem Rade finden. Es ist nämlich:

$$Q = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2,$$

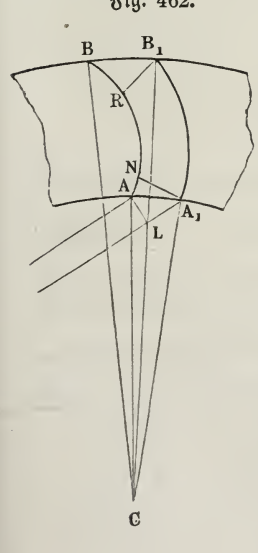
und daher:

$$c = \frac{Q}{F},\ c_1 = \frac{Q}{F_1} \text{ und}$$

$$c_2 = \frac{Q}{F_2}.$$

Durch Vergleichung der beiden ersten Geschwindigkeiten mit einander erhält man die Gleichung:

Fig. 462.



$$\frac{c_1}{c} = \frac{F}{F_1} = \frac{AL}{A_1 N},$$

wenn AL und $A_1 N$, Fig. 462, die Dicken des Wasserstrahles vor und nach dem Eintritte ins Rad bezeichnen. Ist nun noch AA_1 der Bogen des Radumfanges, welchen der durchgehende Wasserstrahl einnimmt, so hat man:

$$\frac{AL}{A_1 N} = \frac{AA_1 \,.\, sin.\, AA_1 L}{AA_1 \,.\, sin.\, A_1 AN} = \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \beta},$$

und daher auch:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{sin.\, \alpha}{sin.\, \beta},$$

ganz in Uebereinstimmung mit dem Obigen:

Da c und α gegeben und v_1 als bestimmt anzusehen sind, so ist der Winkel β durch den Ausdruck:

$$cotang.\, \beta = cotang.\, \alpha - \frac{v_1}{c\, sin.\, \alpha}$$

zu bestimmen.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist $v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}$, daher:

$$cotang.\,\beta = cotang.\,\alpha - \frac{1}{2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha} = \frac{2\,(cos.\,\alpha)^2 - 1}{2\,sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha}$$

$$= \frac{cos.\,2\,\alpha}{sin.\,2\,\alpha} = cotang.\,2\,\alpha, \text{ und daher:}$$

$$\beta = 2\,\alpha.$$

Endlich folgt aus $Fc = F_2 c_2$,

$$\frac{c_2}{c} = \frac{F}{F_2} = \frac{AL}{B_1 R} = \frac{A A_1\,sin.\,\alpha}{B B_1\,sin.\,\delta},$$

wenn $\overline{B_1 R}$ die Dicke des Wasserstrahles vor dem Austritt, und $\overline{B B_1}$ den von demselben eingenommenen Bogen des Radumfanges andeuten. Nun ist aber noch:

$$\frac{A A_1}{B B_1} = \frac{CA}{CB} = \frac{r_1}{r},$$

daher hat man auch:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{r_1\,sin.\,\alpha}{r\,sin.\,\delta},$$

und zur Bestimmung des erforderlichen Austrittswinkels:

$$sin.\,\delta = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{c}{c_2}\,sin.\,\alpha = \frac{r_1}{r}\,\frac{c}{v}\,sin.\,\alpha = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{c}{v_1}\,sin.\,\alpha,$$

oder wenn man annähernd

$$v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}$$

einführt,

$$sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \cdot sin.\,2\,\alpha.$$

Bei dem Tangentialrade mit innerer Beaufschlagung, Fig. 460, ist r der größere und r_1 der kleinere Radhalbmesser, folglich $\frac{r_1}{r}$ ein echter Bruch; bei dem mit äußerer Beaufschlagung (Fig. 461) bezeichnet dagegen, r den inneren oder kleineren und r_1 den äußeren oder größeren Halbmesser; es ist daher hier $\frac{r_1}{r}$ ein unechter Bruch und es fällt folglich bei diesen Turbinen unter übrigens gleichen Umständen, der Austrittswinkel δ größer aus als bei den Turbinen mit innerer Beaufschlagung. Setzt man annähernd

$$sin.\,{}^1/_2\,\delta = {}^1/_2\,sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 sin.\,\alpha\,cos.\,\alpha$$

in die oben gefundene Leistungsformel

$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\cos.\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.\alpha}\right)^2\right] Qh\gamma$$

ein, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\cos.\alpha}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (\sin.\alpha)^2\right] Qh\gamma.$$

Da in diesem Ausdrucke das Glied $\zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{1}{2\cos.\alpha}\right)^2$ bei den Rädern mit innerer Beaufschlagung größer ist als bei den mit äußerer Beaufschlagung, und dagegen das Glied $\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (\sin.\alpha)^2$ bei den ersteren kleiner ausfällt als bei den letzteren, so möchte im Allgemeinen keinem dieser Räder ein Vorzug vor dem anderen einzuräumen sein.

Beispiel. Es ist für ein Gefälle $h = 150$ Fuß und ein Aufschlagquantum $Q = \frac{3}{4}$ Cubikfuß ein Tangentialrad mit äußerer Beaufschlagung anzuordnen und zu berechnen.

Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus dem Einlaufe ist:

$$c = 0{,}95\sqrt{2gh} = 0{,}95\sqrt{62{,}5 \,.\, 150} = 0{,}95\sqrt{9375} = 92 \text{ Fuß.}$$

Nimmt man $\frac{r_1}{r} = \frac{4}{3}$, $\zeta_1 = 0{,}10$ und $\alpha = 10$ Grad an, so folgt nun die erforderliche äußere Radgeschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{c}{2\cos.\alpha}\left[1 - \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{(2\cos.\alpha)^2}\right] = \frac{92}{2\cos.10}\left(1 - 0{,}1\,(\tfrac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{(2\cos.10^0)^2}\right)$$
$$= \frac{46}{0{,}985}\left(1 - \frac{0{,}9}{64\,.\,(0{,}985)^2}\right) = 46{,}7\,(1 - 0{,}015) = 46{,}0 \text{ Fuß.}$$

Die Bruttoleistung ist:

$$L = Qh\gamma = \tfrac{3}{4} \,.\, 150 \,.\, 61{,}75 = 112{,}5 \,.\, 61{,}75 = 6947 \text{ Fußpfund.}$$

Dagegen hat man, wenn man

$$1 - \zeta = 1 - 0{,}10 = 0{,}9, \text{ sowie}$$

$$\zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2\cos.\alpha)^2} = 0{,}015 \text{ setzt,}$$

und wenn man

$$\sin.\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \sin.2\alpha = (\tfrac{4}{3})^2 \sin.20^0 = \tfrac{16}{9} \,.\, 0{,}3420 = 0{,}608,$$

folglich

$$\delta = 37\tfrac{1}{2} \text{ Grad,}$$

sowie

$$\beta = 2\alpha = 20 \text{ Grad}$$

annimmt, und hiernach

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.\alpha}\right)^2 = (\tfrac{3}{4})^2 \left(\frac{\sin.18^0\,45}{\cos.10^0}\right)^2 = \tfrac{9}{16} \,.\, 0{,}1065 = 0{,}060 \text{ ein-}$$

führt, die zu erwartende Nettoleistung:

$$L_1 = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{(2\cos.\alpha)^2} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin.\frac{1}{2}\delta}{\cos.\alpha}\right)^2\right] Qh\gamma$$
$$= (0{,}900 - 0{,}015 - 0{,}060)\, Qh\gamma = 0{,}825\, Qh\gamma = 5722 \text{ Fußpfund.}$$

Bei innerer Beaufschlagung läßt sich $\alpha = 20$ und $\beta = 40$ Grad annehmen, so daß die innere Radgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{c}{2\, cos.\, \alpha}\left[1 - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2\, cos.\, \alpha)^2}\right] = \frac{46}{0,940}\left(1 - 0,1\, (4/3)^2\, \frac{1}{4\, .\, 0,884}\right)$$

$$= 48,9\, \left(1 - \frac{0,4}{7,956}\right) = 48,9\, .\, 0,95 = 46,5 \text{ Fuß}$$

folgt.

Für den Austrittswinkel δ ist

$$sin.\, \delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 sin.\, 2\, \alpha = 9/_{16}\, sin.\, 40^0 = 0,3616,$$

folglich

$$\delta = 21 \text{ Grad } 12 \text{ Minuten.}$$

Nun ist noch

$$\zeta_1\, \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2\, cos.\, \alpha}\right)^2 = 0,050,$$

und

$$\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\, \left(\frac{sin.\, 1/2\, \delta}{cos\, \alpha}\right)^2 = (4/3)^2\, \left(\frac{sin.\, 10^0\, 36'}{cos.\, 20^0}\right)^2 = 0,055,$$

daher folgt hier die zu erwartende Nutzleistung mit Einschluß der Arbeit der Reibung des Wassers im Rade:

$$L_1 = \left[1 - \zeta - \zeta_1\, \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2\, cos.\, \alpha)^2} - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\, \left(\frac{sin.\, 1/2\, \delta}{cos.\, \alpha}\right)^2\right]\, Q h \gamma$$

$$= (0,900 - 0,050 - 0,055)\, Q h \gamma = 0,795\, Q h \gamma = 5523 \text{ Fußpfund.}$$

Für beide Räder hat man noch den nöthigen Querschnitt der Schützenmündung:

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{0,75}{92} = 0,00815 \text{ Quadratfuß} = 1,17 \text{ Quadratzoll.}$$

Macht man die Weite d des Mündungsquerschnittes, $= 1/4$ Zoll, so folgt die erforderliche Mündungshöhe:

$$e = \frac{F}{d} = \frac{1,17}{1/4} = 4,68 \text{ Zoll,}$$

wofür man der Sicherheit wegen, 5 Zoll annehmen kann. Die Weite des Rades ist nur wenig größer, also etwa $5\frac{1}{2}$ Zoll, anzunehmen. Giebt man dem Rade einen äußeren Halbmesser von 3 Fuß, so erhält man die Umdrehungszahl dieses Rades pr. Minute

1) bei äußerer Beaufschlagung:

$$u = \frac{30\, v_1}{\pi\, r} = \frac{30\, .\, 46}{3\, \pi} = \frac{460}{3,14} = 146,$$

und dagegen

2) bei innerer Beaufschlagung, da hier $r_1 = 3/4\, r = 2,25$ Fuß zu setzen ist:

$$u = \frac{30\, v_1}{\pi\, r_1} = \frac{30\, .\, 46,5}{2,25\, .\, \pi} = \frac{620}{\pi} = 197.$$

§. 237 Die Tangentialräder mit äußerer Beaufschlagung sind zuerst von dem Ingenieur Zupinger in der Maschinenfabrik von Escher Wyss u. Comp. in Zürich construirt worden. Die erste Idee hierzu hat aber schon Poncelet (1826) gehabt, s. dessen Cours de mécanique appliquée aux machines, deutsch von Schnuse, unter dem Titel: Lehrbuch der Anwendung der Mechanik, Bd. II, §. 150.

Die Fig. 463 und Fig. 464 führen ein Tangentialrad im Auf- und

Grundrisse vor Augen. Es ist hier *A* der Einfallkasten, *B* die Einfallröhre und *C* der aus drei Canälen bestehende Leitschaufelapparat, durch welchen dàs Wasser nahe tangential auf das Rad geführt wird. Zum Reguliren des Wasserzuflusses dient ein Schieber *D*, welcher durch ein gezahn-

Fig. 463.

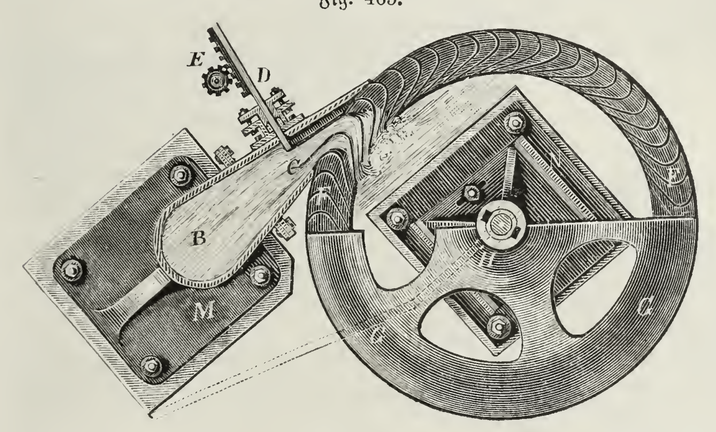
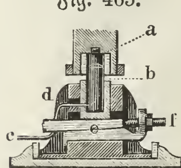


Fig. 464.

tes Rad *E* gestellt werden kann. Bei der abgebildeten Schieberstellung ist ein Leitschaufelcanal ganz abgeschlossen, es wird daher hier das Wasser nur in zwei Canälen auf das Rad geführt. Das aus 60 Schaufeln bestehende Rad *FF* ist mittelst eines Tellers *GG* und des Muffes *H* mit der stehenden Welle *KL* desselben fest verbunden; die letztere läuft oben in einem Halslager *K* und unten mittels einer stählernen Pfanne auf einem ebenfalls stählernen Stifte, dessen Gestelle in Fig. 465 besonders abgebildet ist.

Fig. 465.



Es ist hier *a* die in der stehenden Welle fest eingeschraubte Pfanne, *b* der im Gestelle sitzende Stift, *cd* ein Rohr, durch welches Oel nach den Reibungsflächen geführt wird, und *e* ein durch Schrauben *f* zu stellender Keil, womit sich der Stift nach Bedürfniß heben oder senken läßt. Die Einfallröhre und das Radgestelle ruhen mittels eiserner Lagerplatten *M* und *N* (Fig. 464) auf steinernen Pfeilern *P* und *Q*. Diese in $^1/_{30}$ der natürlichen Größe abgebildete Maschine benutzt ein (in der Figur verkürztes) Gefälle von 6,17 Meter, und ein Aufschlagquantum von 0,2 Cubikmeter pr. Secunde, und hat bei 65 Umdrehungen pr. Minute, einen Wirkungsgrad von 0,72.

Wir können hier aus dem polytechnischen Centralblatte, Jahrgang 1847 und 1849, die Resultate der Versuche an zwei Paar solchen Rädern mittheilen.

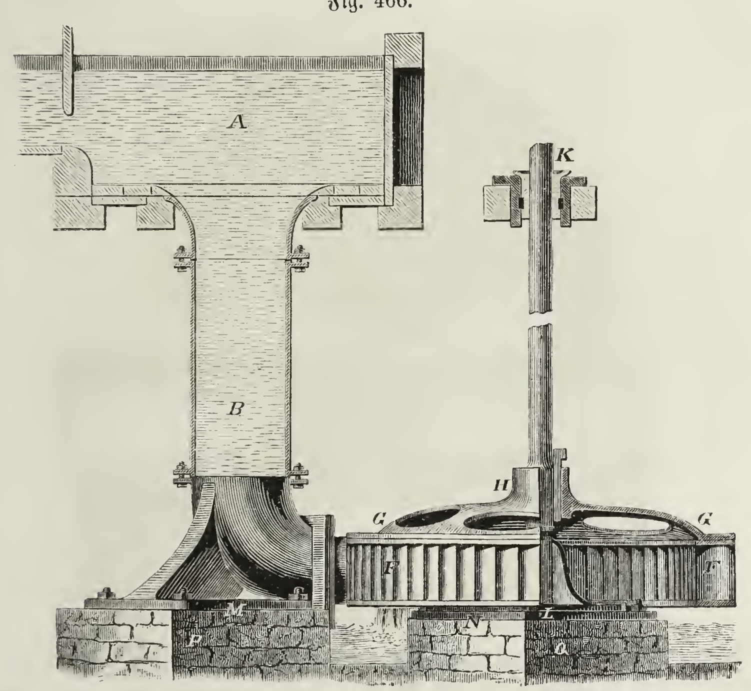
Das erste Räderpaar befindet sich in einer Spinnerei in Tanneberg bei Annaberg. Dasselbe hat einen Aufschlag von 7 Cubikfuß pr. Secunde und ein Gefälle von 76 Fuß, der äußere Durchmesser eines jeden Rades ist 24 und der innere 16 Zoll (engl.), die Weite beträgt ferner nur 3 Zoll, und die Anzahl Schaufeln ist 48. Das Wasser wird durch eine Röhre aus Kesselblech von 76 Fuß Länge und 18 Zoll Weite zugeleitet. Dieselbe hat einen horizontalen Auslauf, welcher auf der einen Seite nach dem einen und auf der anderen nach dem anderen Rade führt. Vor jeder Ausmündung befindet sich eine durch eine Schraube ohne Ende stellbare Schieberschütze und ein in Fig. 463 abgebildeter Leitschaufelapparat, welcher das Wasser in drei Canälen nahe tangential in das Rad einführt. Die an einem dieser Räder von Herrn Professor Hülße angestellten Versuche gaben bei 270 Umdrehungen des Rades pr. Minute einen Wirkungsgrad von

0,75 bei ganz geöffneter Schütze,
0,60 bei drei Viertel geöffneter Schütze, und
0,46 bei halb geöffneter Schütze.

Während das Räderpaar in Tanneberg zum Betriebe einer Spinnerei dient, wird dagegen ein anderes Paar Tangentialräder in Birkigt bei Tetschen zum Betriebe von Mahlgängen verwendet. Das Gefälle dieser Turbine ist nur $20^1/_4$ Fuß (engl.), jedes Rad hat 75 Schaufeln, 5 Fuß äuße-

ren Durchmesser, 5 Zoll Kranzbreite und 11½ Zoll Weite. Die Zuführung des Wassers durch eine Einfallröhre und durch Leitschaufelapparat ist in der Hauptsache dieselbe wie bei der Tanneberger Maschine und wie Fig. 466 vor Augen führt. Die Schützen bestehen jedoch hier aus Drosselventilen, auch sind die Mündungen der von den zwei Leitschaufeln gebildeten drei Eintrittscanäle mit besonderen Schiebern versehen, um einen oder zwei dieser Canäle ganz verschließen zu können. Aus den vom Herrn Prof. Brückmann an einem dieser Räder angestellten Versuchen geht hervor, daß diese Maschine bei 61 Umdrehungen pr. Minute den Maximal-Wirkungsgrad 0,70 giebt, und daß der letztere nur auf 0,65 herabsinkt, wenn die Umdrehungszahl auf 50 herabgeht oder auf 70 steigt, oder wenn das Ausschlagquantum durch Absperren eines oder zweier Canäle auf die Hälfte herabgezogen wird.

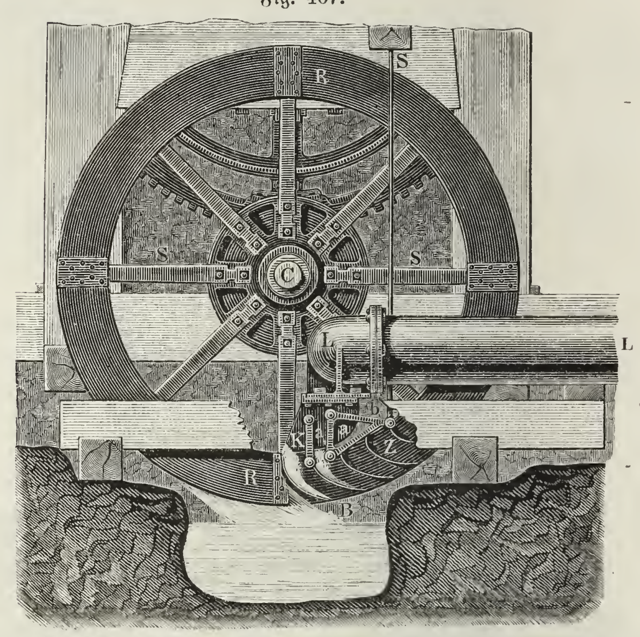
Fig. 466.



Liegende Tangentialräder. Das Princip der Tangentialräder läßt §. 238 sich auch bei verticalen Wasserrädern in Anwendung bringen (s. §. 235). Solche Tangentialräder mit horizontaler Axe mit innerer Beaufschlagung sind zuerst vom Herrn Kunstmeister Schwamkrug construirt worden

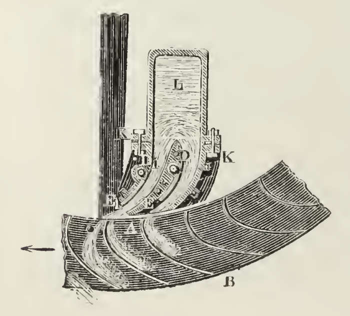
(s. das Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann auf das Jahr 1850 und 1853). Die Seitenansicht u. s. w. von einem solchen Tangentialrade führt Fig. 467 vor Augen. Das Rad RR ist durch ein einseitig ansitzendes Armsystem und mit Hülfe einer Rosette u. s. w. auf der horizontalen Welle C

Fig. 467.



befestigt, und letztere trägt ihre Umdrehungsbewegung mittels Zahnräder u. s. w. auf die arbeitende Welle über. Das Wasser tritt nahe am Radtiefsten in das Rad ein und wird durch eine Röhre LL zugeführt, welche um den freien Radkranz herumläuft und sich in einer Kammer endigt, worin ein Leitschaufelapparat angebracht ist. Der letztere ist in Fig. 468

Fig. 468.



besonders abgebildet. Man sieht hier den Durchschnitt eines Radstückes mit den Schaufeln AB, ferner in L das gekrümmte Ende der Einfallröhre, sowie in KE die Schützenkammer. Die Ausmündung der letzteren ist durch eine Zunge in zwei Theile getheilt, und mit zwei um die Axen D, D_1 drehbare Klappen DE, D_1E_1 ausgerüstet, wodurch die beiden Ausmündungen beliebig verengt werden können. Die Stellung dieser Klappen erfolgt durch die in Fig. 467

sichtbaren Arme a, a_1, welche außerhalb der Kammer auf den Axen D, D_1 der Stellklappen befestigt und mit einander so verbunden sind, daß sie mittels eines dritten Armes b und durch eine Zugstange ZS gemeinschaftlich sich bewegen lassen.

Die Turbinen mit liegender Welle haben vor den Turbinen mit verticaler Axe den Vorzug einer leichteren, sichereren und vor dem Zutritte des Wassers geschützteren Lagerung. Das Rad, an welchem von dem Erbauer dynamometrische Versuche angestellt worden sind, hat $7^2/_3$ Fuß (1 Fuß $= ^2/_7$ Meter) äußeren und 6 Fuß inneren Durchmesser, ferner 4 Zoll Weite und 45 Schaufeln. Das Gefälle desselben betrug $103^1/_2$ Fuß; das durch einen Ueberfall gemessene Aufschlagquantum 38,7 bis 133,6 Cubikfuß, und der Wirkungsgrad desselben war, bei 112 bis 148 Umdrehungen pr. Minute, $\eta = 0{,}58$ bis 0,79.

Näheres über diese Turbine im polytechn. Centralblatt. Jahrgang 1849, Nr. 8 und 9, so wie im Jahrbuch für den sächs. Berg- und Hüttenmann. Eine andere Turbine dieser Art, welche zum Umtriebe des Kunstgezeuges auf der Grube „Churprinz Friedrich August Erbstolln“ bei Freiberg dient, und bei einem Gefälle von 145 Fuß, 550 Cubikfuß p. m. Aufschlag hat, und bei einer Kranzbreite von 13 Zoll einen inneren Durchmesser von 8 Fuß besitzt, beschreibt der Herr Oberkunstmeister Schwamkrug im Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann auf 1853.

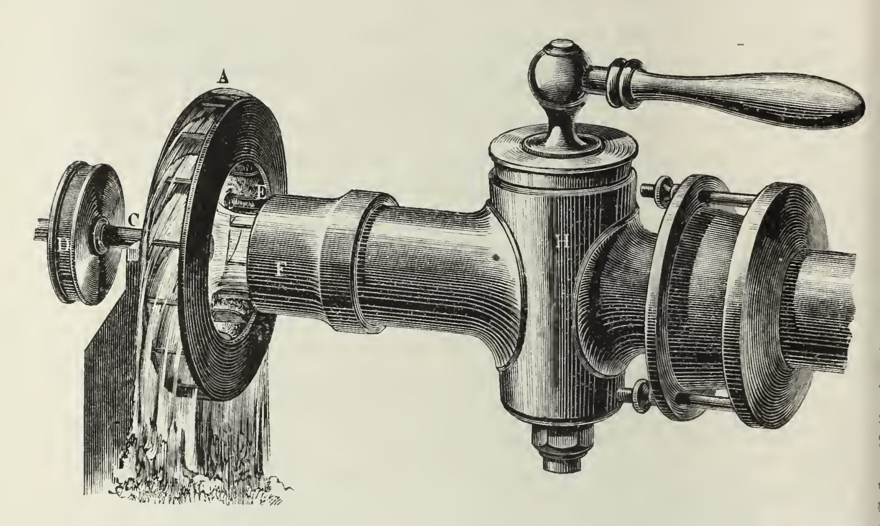
Anmerkung. Auch in Frankreich werden in neueren Zeiten Tangentialturbinen mit innerer Beaufschlagung construirt; bei der Industrieausstellung 1855 in Paris waren mehrere solcher Räder, ganz aus Eisenblech construirt, ausgestellt.

Da auch diese Turbinen bei ihrer mäßigen Größe und selbst bei einem mittleren Gefälle, sehr viele Umdrehungen machen, so erfordern sie in der Regel noch ein oder mehrere Vorgelegsräder, wodurch ihre Umdrehungszahl auf die zur gewöhnlichen Arbeitsvorrichtung nöthige Größe herabgezogen wird.

Strahlturbine. Anstatt den Wasserstrahl nur einseitig in das Rad zu führen, kann man denselben auch in der Axenrichtung auf den Radteller auffallen und in radialen Richtungen in die Radcanäle einführen lassen. Da eine solche Turbine durch einen isolirten Wasserstrahl (s. Bd. I, §. 497) in Umdrehung gesetzt wird, so möchte sie nicht mit Unrecht eine Strahlturbine genannt werden. Man kann diese Turbine sowohl in horizontalen als auch verticalen Ebenen umlaufen lassen. In Fig. 469 (a. f. S.) ist ein solches Rad mit horizontaler Axe CD oder verticaler Umdrehungsebene AB gebildet. Der Wasserstrahl, welcher durch eine Oeffnung E in das Rad eintritt, wird durch eine mit einem Stellhahne H versehene Röhre FH zugeführt. Durch Stellung dieses Hahnes kann diese Turbine nicht nur in und außer Gang gesetzt, sondern auch die Bewegung derselben nach Bedürfniß regulirt werden. Diese Maschine eignet sich §. 239

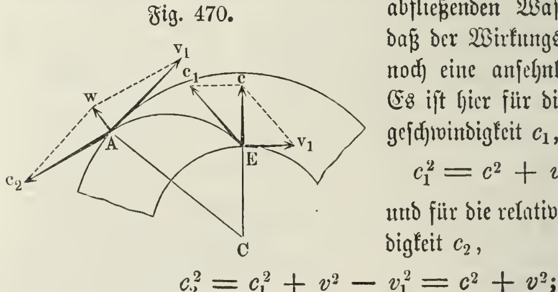
besonders zur Verrichtung kleiner Arbeiten, z. B. zum Ersatz von Menschenkräften, bei Benutzung des Wassers aus einer großen städtischen Wasserleitung. Die im Vorstehenden entwickelte Theorie der Tangentialturbinen

Fig. 469.



findet hier nur zum Theil ihre Anwendung. Da hier das Wasser radial in die Radcanäle eintritt, also $\alpha = 90$ Grad ist, so giebt hier die $v_1 = \frac{c}{2\,cos.\,\alpha}$ die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit $v_1 = \frac{c}{0} = \infty$. Es ist hiernach bei dieser Turbine die Austrittsgeschwindigkeit w, selbst wenn auch der Austrittswinkel δ = Null wäre, nicht Null, und daher auch ein Maximum der theoretischen Leistung nicht zu erlangen. Wenn man aber die Umfangsgeschwindigkeit v des Rades mindestens ebenso groß macht als die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers, so fällt die lebendige Kraft des abfließenden Wassers so klein aus, daß der Wirkungsgrad der Maschine noch eine ansehnliche Größe behält. Es ist hier für die relative Eintrittsgeschwindigkeit c_1,

Fig. 470.



$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 \text{ (s. Fig. 470)}$$

und für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2,

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2 - v_1^2 = c^2 + v^2;$$

macht man daher $v = c$, so erhält man $c_2^2 = 2v^2$, und

$$c_2 = \sqrt{2} \cdot v = 1{,}414\, v;$$

und nimmt man noch $\delta = 0$ an, so ist die absolute Austrittsgeschwindigkeit

$$w = c_2 - v = 0{,}414\, v,$$

und daher der entsprechende Verlust an Gefälle:

$$\frac{w^2}{2g} = 0{,}171 \frac{v^2}{2g} = 0{,}171\, h,$$

wenn $h = \frac{c^2}{2g}$ das zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit c des Wassers nöthige Gefälle bezeichnet. Macht man v noch größer als c, so fällt dieser Verlust noch kleiner aus; z. B. für $v = {}^3/_2\, c$ ist

$$\frac{w^2}{2g} = (1{,}803 - 1{,}500)^2 \frac{c^2}{2g} = (0{,}303)^2 \frac{c^2}{2g} = 0{,}092\, h.$$

Wenn nun auch noch in Folge der Abweichung δ zwischen den Richtungen der Geschwindigkeiten c_2 und v dieser Verlust noch etwas größer ausfällt, und auch die Reibungen noch einen Theil der Arbeit des Rades verzehren, so ist doch noch immer ein leidlicher Wirkungsgrad desselben zu erwarten.

Für den Austrittswinkel δ ist, da jedenfalls $2\pi r_1 c = 2\pi r c_2 \sin.\delta$ sein muß,

$\sin.\delta = \frac{r_1}{r}\frac{c}{c_2}$, z. B. für $\frac{r_1}{r} = {}^1/_2$ und $v = c$, also $c_2 = c\sqrt{2}$,

$\sin.\delta = 0{,}5 \,.\, 0{,}707 = 0{,}354$, wonach $\delta = 20^3/_4$ Grad, und

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2 + c_2^2 - 2vc_2\cos.\delta}{2g} = \frac{(1 + 2 - 2\sqrt{2}\cos.\delta)\, c^2}{2g}$$

$$= (3 - 2{,}828 \cos. 20^3/_4)\, h = 0{,}356\, h \text{ ausfällt.}$$

Diese Turbinen geben zwar keinen großen Wirkungsgrad, haben aber den Vorzug der Einfachheit und Kleinheit. Sie sind bei hohen Gefällen wahre Liliputräder und haben eine so große Umdrehungszahl u, daß es in den meisten Fällen der Anwendung nöthig ist, diese Umdrehungszahl durch Räderwerke bedeutend herabzuziehen.

Beispiel. Es wird die Anlage einer Strahlturbine verlangt, welche bei dem Gefälle $h = 100$ Fuß die Nutzleistung $L = 4$ Pferdekräfte $= 1920$ Fußpfund p. s. liefert. Lassen wir das Rad mit der Geschwindigkeit

$$c = v = \sqrt{2gh} = \sqrt{6250} = 79 \text{ Fuß umgehen,}$$

so können wir den Gefällverlust $\frac{w^2}{2g} = 0{,}365\, h = 35{,}6$ Fuß setzen; nehmen wir aber noch an, daß die Reibungen noch $0{,}144\, h = 14{,}4$ Fuß verzehren, so bleibt

die ganze Nutzleistung der Turbine $L = (1 - 0{,}356 - 0{,}144)\, Q h \gamma = 0{,}5\, Q h \gamma$ $= 50 . 61{,}75\, Q = 3087{,}5\, Q$, und es ist daher das nöthige Aufschlagquantum

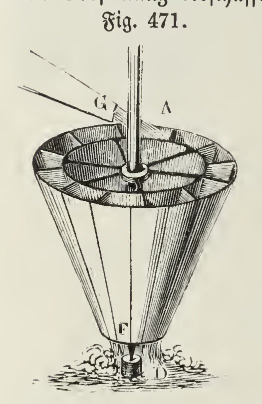
$$Q = \frac{1920}{3087{,}5} = 0{,}622 \text{ Cubikfuß, d. i. p. m. } 60\, Q = 37^1/_3 \text{ Cubikfuß.}$$

Bei der Ausflußgeschwindigkeit $c = v = 79$ Fuß, ist daher der Querschnitt des aufschlagenden Wasserstrahles: $F = \frac{Q}{v} = 0{,}007873$ Quadratfuß $= 1{,}133$ Quadratzoll. Da eine Kreisfläche von diesem Inhalte den Durchmesser $d = 1{,}2$ Zoll hat, so möchte es genügen, den inneren Radhalbmesser $r_1 = 1$ und den äußeren, $r = 2\, r_1 = 2$ Zoll zu machen. Bei dem Durchmesser von 4 Zoll $= 1/_3$ Fuß, welchen hiernach diese Strahlturbine erhält, folgt die Umdrehungszahl derselben p. m.

$$u = \frac{30\, v}{\pi\, r} = \frac{30 . 79}{1/_3 . 3{,}141} = \frac{2370}{1{,}047} = 2263.$$

§. 240 **Danaiden.** An die Tangentialräder-Turbinen schließen sich zunächst diejenigen horizontalen Wasserräder an, welche mehr oder weniger die Form eines umgestürzten Kegels haben, die man in Frankreich roues à poires oder Danaides nennt, und deren schon Belidor in seiner Architect. hydr. erwähnt. Von der Einrichtung eines solchen Rades wird Fig. 471 eine Vorstellung verschaffen. Es besteht dieses Rad im Wesentlichen aus

Fig. 471.



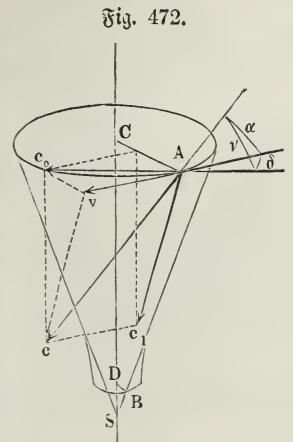
einer stehenden Welle CD, und aus zwei kegelförmigen Mänteln mit Scheidewänden, welche den hohlen Raum zwischen beiden Mänteln in von oben nach unten laufende Canäle zerschneiden. Das Aufschlagwasser wird durch ein Gerinne G oben zu-, und durch das Loch F unten nahe an der Axe, nachdem es die erwähnten Radcanäle durchlaufen hat, abgeführt. Bei dem einfachen Rade dieser Art sind die Scheidewände durch verticale Ebenen, bei anderen aber durch schiefe oder Schraubenflächen gebildet. Bei den Rädern, welche Belidor beschreibt, fehlt endlich der äußere Mantel ganz, und es ist dafür das Rad in eine conische, ziemlich genau an die Schaufeln oder Scheidewände anschließende Radstube gestellt. Wir beschäftigen uns nur mit dem Rade der ersten Art.

Bei diesen Rädern haben Schwerkraft und Centrifugalkraft zugleich Antheil an der Bewegung des Wassers. Tritt das Wasser mit der absoluten Geschwindigkeit $\overline{Ac} = c$, Fig. 472, zu, und weicht die Richtung desselben um den Winkel $c A v = \alpha$ von der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit $\overline{Av} = v$ ab, so ist für die Größe der relativen Geschwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$, mit welcher das Wasser im Rade an der verticalen Schaufel AB niederzugehen anfängt,

$$c_1^2 = c^2 - v^2.$$

Da es aber im Rade von der Höhe $\overline{CD} = h_1$ desselben herabsinkt und dabei nahe an die Radaxe gelangt, deren Umfangsgeschwindigkeit $v_1 = 0$ gesetzt werden kann, so folgt für die relative Geschwindigkeit c_2 des unten bei F abfließenden Wassers:

Fig. 472.



$$c_2^2 = c_1^2 + 2\,g\,h_1 - v^2$$
$$= c^2 + 2\,g\,h_1 - 2\,v^2$$

oder, wenn das ganze Gefälle $c^2 + 2\,g\,h_1$ durch h bezeichnet wird,

$$c_2^2 = 2\,g\,h - 2\,v^2.$$

Damit nun das Wasser möglichst todt abfließe, muß $c_2 =$ Null und folglich die obere Umfangsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = \sqrt{g\,h}$$

sein.

Die theoretische Leistung des Rades ist dann wie bekannt:

$$L = Q\,h\,\gamma.$$

Da natürlich die mittleren Werthe von c_2 und v_1 nicht ganz Null sein können, so fließt das Wasser noch mit der absoluten Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{c_2^2 + v_1^2}$$

ab, und es wird dadurch dem Rade von dem Arbeitsvermögen $Q\,h\,\gamma$ noch die Leistung

$$\frac{w^2}{2\,g}\,Q\gamma = \frac{c_2^2 + v_1^2}{2\,g}\,Q\gamma$$

entzogen.

Ist der halbe Convergenzwinkel des vom Radmantel gebildeten Körpers, $A\,S\,C = \theta$, also die Neigung dieser Fläche gegen den Horizont, $= 90^0 - \theta$, und der Winkel $c\,A\,v$, um welchen die Richtung Ac des eintretenden Strahles von der Richtung Av der Umdrehungsgeschwindigkeit beim Eintritt A abweicht, $= \alpha$, so hat man für den Neigungswinkel $c\,A\,c_0 = \nu$ des Strahles gegen den Horizont, der Gleichung

$$c\,sin.\,\nu = c_1\,cos.\,\theta = c\,sin.\,\alpha\;cos.\,\theta \quad \text{zu Folge,}$$

$$1) \quad sin.\,\nu = sin.\,\alpha\;cos.\,\theta$$

und dagegen für den Winkel $v\,A\,c_0 = \delta$, um welchen die Horizontalprojection $A\,c_0$ der Strahlrichtung von der Bewegungsrichtung $A\,v$ des Rades abweicht, da

$$v\,tang.\,\delta = v\,tang.\,\alpha\;sin.\,\theta,$$

$$2) \quad tang.\,\delta = tang.\,\alpha\ sin.\,\theta.$$

Wenn man dem Rade die Form einer ebenen Kreisfläche giebt, so erhält man ein Tangentialrad mit ebenen Schaufeln, und hat in den obigen Formeln $\theta = 90^0$, also

$$sin.\,\theta = 1 \text{ und } cos.\,\theta = 0^0$$

einzusetzen, so daß $v = 0$ und $\delta = \alpha$ folgt, und daher der Wasserstrahl in horizontaler Richtung an den Radumfang zu führen ist.

Wenn dagegen der obere Theil des Rades cylindrisch geformt ist, so hat man $\theta = 0$ Grad, daher

$$cos.\,\theta = 1 \text{ und } sin.\,\theta = 0,$$

so daß dann

$$v = \alpha \text{ und } \delta = 0$$

folgt, und daher der Wasserstrahl tangential an das Rad geführt werden muß.

Anmerkung. Das im Vorstehenden untersuchte Rad ist auch unter dem Namen der Danaide von Burdin bekannt. Die ältere Danaide von Manouri d'Ectot hatte eine hiervon abweichende Construction, wiewohl sie im Principe mit dieser ziemlich übereinstimmte. Dieses Rad bestand in einem Blechcylinder mit vertical und radial gestellten Scheidewänden und einem Ausflußloche in der Nähe der verticalen Drehungsaxe. Das Wasser wurde oben ziemlich tangential eingeführt, ging durch den Zwischenraum von 4 bis 5 Centimeter zwischen der cylindrischen Trommel und den Scheidewänden hindurch, und traf zunächst die Innenfläche dieser Trommel, wodurch es dieselbe sammt dem ganzen, damit fest verbundenen Apparat in Umdrehung setzte. Hierbei floß es allmälig auf den Boden herab und gelangte von da bis zum Ausflußloche. S. Dictionnaire des Sciences mathémat. par Montferrier, Art. Danaide.

§. 241 Man kann auch einer Danaide die Form eines durch eine verticale Scheidewand in zwei gleiche Theile getheilten Gefäßes EKM, Fig. 473 geben. Damit beim Eintritt des aus dem Aufschlagbehälter AB fließenden Wassers kein Stoß eintrete, muß die Geschwindigkeit c desselben der Umdrehungsgeschwindigkeit v_1 des Wassers im Rade an der Eintrittsstelle B gleich sein. Bezeichnet h_1 den Theil des ganzen Radgefälles, welcher auf die Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit verwendet wird, so ist

$$c = v_1 = \sqrt{2\,g\,h_1}.$$

Bezeichnet ebenso h_2 die Druckhöhe des Wassers im Rade, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit desselben im Umfange der Mündung M, so hat man für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2 des Wassers

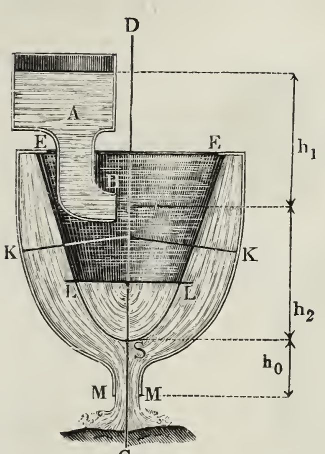
$$c_2^2 = 2\,g\,h_2 - v_1^2 + v^2,$$

oder, wenn die Mündung, und folglich auch v sehr klein ist,

$$c_2^2 = 2\,g\,h_2 - v_1^2.$$

Damit die Geschwindigkeit c_2 möglichst klein, und folglich dem Wasser die größte Arbeitsfähigkeit entzogen werde, muß $v_1^2 = 2 g h_2$, und daher

Fig. 473.



$$v_1 = \sqrt{2 g h_2}$$ sein.

Hiernach folgt

$$h_1 = h_2 = \frac{1}{2} h;$$

es ist also die eine Hälfte des ganzen Maschinengefälles auf die Druckhöhe zur Einführung des Wassers und die andere auf die Höhe des Rades zu verwenden.

Natürlich kann hier, damit das Wasser in gehöriger Menge abfließe, die Geschwindigkeit c_2 nicht = Null, sondern nur sehr klein (4 bis 6 Fuß) sein, und es ist der Ausmündung MM der Inhalt $F = \frac{Q}{c_2}$ zu geben, welchem der Halbmesser

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi c_2}}$$ entspricht.

Da dann das Wasser nicht allein die Geschwindigkeit c_2 in verticaler Richtung, sondern auch eine Umdrehungsgeschwindigkeit hat, deren mittleres Quadrat der Theorie der Trägheitsmomente zufolge (s. Bd. I, §. 288), $= \frac{1}{2} v^2$ ist, so ergiebt sich das Arbeitsvermögen des abfließenden Wassers:

$$L_1 = \left(\frac{c_2^2 + \frac{1}{2} v^2}{2 g}\right) Q \gamma$$

und der Wirkungsgrad des Rades

$$\eta = 1 - \frac{c_2^2}{2 g h} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{2 g h}.$$

Da sich

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{2} . 2 g h} = \sqrt{g h} \quad \text{und}$$

$$v = \frac{r}{r_1} v_1 = \frac{r}{r_1} \sqrt{g h}$$

setzen läßt, so hat man auch

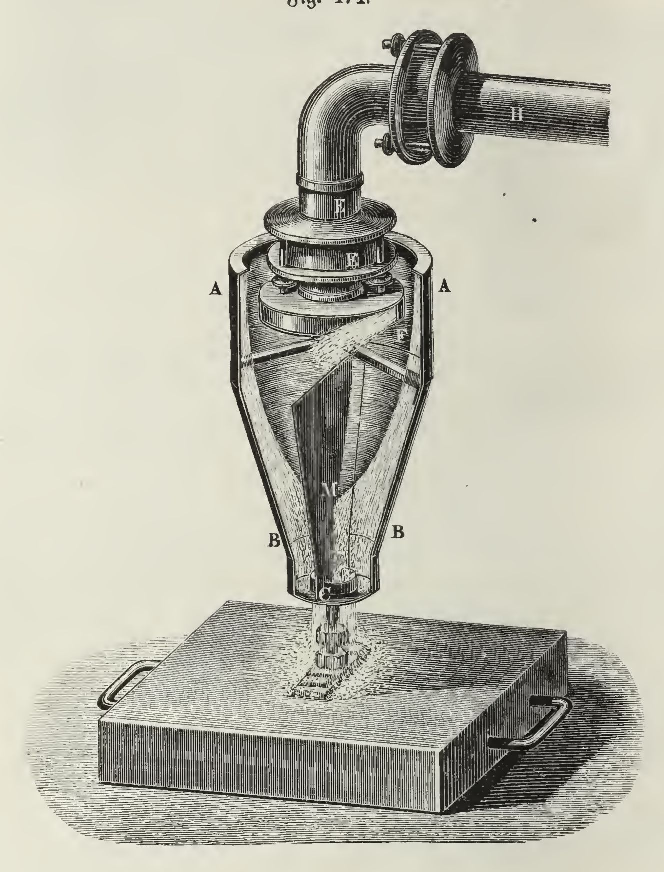
$$\eta = 1 - \frac{c_2^2}{2 g} - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2.$$

Der Scheitel S des Rotationsparaboloides ESE, welches von der freien Oberfläche des Wassers im Rade gebildet wird, steht um die das verlorene Gefälle bildende Höhe $\overline{SM} = h_0 = \frac{c_2^2}{2 g}$ von der Mündung MM ab.

Um die Bildung des Trichters ESE unmittelbar über der Mündung MM zu verhindern, kann man eine Querwand LL einziehen.

In Fig. 474 ist das Modell einer nach den obigen Principien construirten

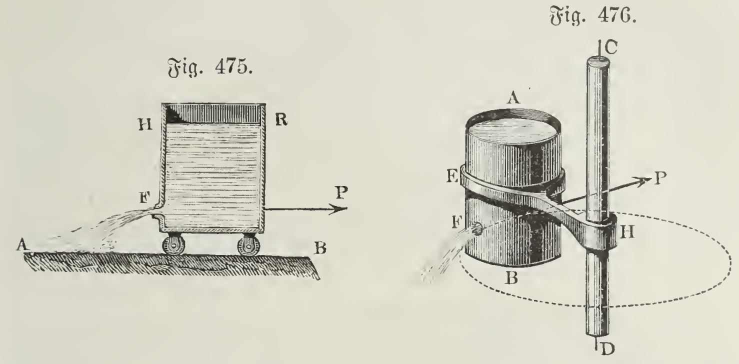
Fig. 474.



Danaide abgebildet. Das Wasser wird hier durch eine gekröpfte Hahnröhre HE zu- und mittels zweier Mundstücke F, F tangential in das Rad ABC eingeführt, sowie durch das Mundstück C ausgetragen. Durch ein auf den unteren cylindrischen Theil BB des Rades aufzusetzendes Vorgelegsrad läßt sich die Umdrehungskraft desselben auf die Arbeitsmaschine übertragen.

§. 242 **Reactionsräder.** Setzt man ein Ausflußgefäß HRF, Fig. 475, auf einen Wagen, so treibt die Reaction des Wassers denselben mit dem

Gefäße in einer der Ausflußbewegung entgegengesetzten Richtung fort; und verbindet man ein Ausflußgefäß *ABF*, Fig. 476, mit einer stehenden Welle *CD*, so wird dieses durch die Reaction *P* des ausfließenden Wassers



ebenfalls in einer der Ausflußbewegung entgegengesetzten Bewegung umgedreht. Ersetzt man nun das unten abfließende Wasser von oben durch anderes, so wird auf diese Weise eine stetige Umdrehung erzeugt. Die Vorrichtung, welche auf diese Weise in Umdrehung gesetzt wird, heißt ein Reactionsrad (franz. roue à réaction; engl. wheel of reaction, wheel of recoil), in Deutschland gewöhnlich ein Segner'sches Wasserrad und in England Barkers mill.

Das einfachste Rad dieser Art ist in Fig. 477 abgebildet. Dasselbe besteht aus einer Röhre *BC*, deren Axe durch eine feststehende Welle *AX* gebildet wird, und aus zwei Röhren (Schwungröhren) *CF* und *CG* mit Seitenmündungen *F* und *G*. Das durch diese Mündungen abfließende Wasser wird durch anderes, oben durch ein Gerinne *K* zugeführtes Wasser ersetzt. Bei Anwendung an Mahlmühlen wird der Läufer oder obere Mühlstein auf *AX* unmittelbar aufgesetzt; bei anderen Anwendungen kann aber die Bewegung mittels eines auf *AX* aufzusetzenden Zahn- oder Riemenrades fortgepflanzt werden.

Fig. 477.

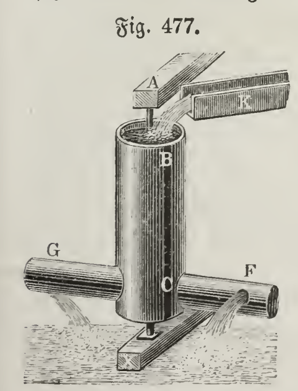


Fig. 478.

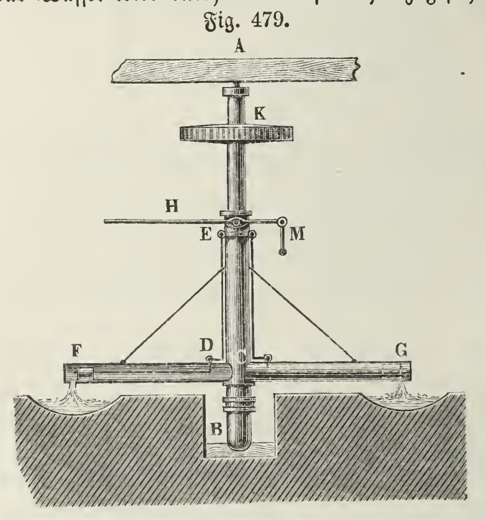


Man hat auch Reactionsräder mit mehreren Schwungröhren oder Schwungkammern angewendet, wie z. B. Fig. 478 im Grundrisse vor Augen führt. Das Ge-

fäß HR ist entweder cylindrisch oder conisch. Um das Wasser ohne Stoß einzuführen, hat Euler ein gleichgeformtes Zuflußgefäß unmittelbar über das Rad gesetzt, und statt des Bodens in demselben ringsum geneigte Leitschaufeln eingesetzt, ähnlich wie später Burdin bei seinen Turbinen (s. Bd. II, §. 234); auch hat Burdin ähnliche Reactionsräder ausgeführt. Hierher gehört auch das Versuchsrad in Band I, §. 504.

Ein einfaches Reactionsrad hat der Verfasser in Vallendar unweit Ehrenbreitenstein im Gange gesehen. Es war vom Herrn Maschineninspector Althans construirt, und diente als Umtriebsmaschine für zwei Lohmahlgänge. Die übrigens sehr zweckmäßige Einrichtung dieses Rades ist aus Fig. 479 zu ersehen. Das Wasser wird durch eine Einfallröhre zugeführt, welche bei B unterhalb des Rades vertical aufwärts gebogen ist. Die stehende Welle AC mit ihren beiden Schwungröhren CF und CG ist von unten herauf hohl und paßt mit ihrem Ende B in das eine Schnauze bildende Ende der Einfallröhre. Damit sich aber diese Welle drehen könne, ohne Wasser bei B durchzulassen, ist in B eine Stopfbüchse, eine Vorrichtung, welche wir erst später näher kennen lernen werden, angebracht. Die rectangulären Seitenmündungen F und G sind durch Schieber zu verschließen und letztere wieder sind durch Stangen und Winkelhebel (D) mit einer die Welle umfassenden Hülse E verbunden, welche durch einen Hebel HM gehoben oder gesenkt werden kann. Oben sitzt das Rad K zur Transmission der Bewegung. Das durch die 9 Zoll weite Einfallröhre zugeführte Wasser tritt bei B in die Steigröhre und bei C in die Schwungröhren, und kommt nun bei F und G zum Ausflusse. Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, daß das ganze Gewicht der umlaufenden Maschine vom Wasser getragen werden und folglich zu einer Reibung an der Basis keine Gelegenheit geben kann. Ist G das Gewicht der Maschine, h die Druckhöhe und $2r$ die Weite der Steigröhre, so hat man für diesen Fall:

Fig. 479.



$$\pi r^2 h \gamma = G,$$

und hiernach den erforderlichen Röhrenhalbmesser

$$r = \sqrt{\frac{G}{\pi h \gamma}}$$

anzuwenden, um diesen Gleichgewichtszustand herbeizuführen.

Das Aufschlagquantum betrug 18 Cubikfuß pr. Minute und das Gefälle 94 Fuß, folglich die disponible Leistung = 1861 Fußpfund. Die Länge einer Schwungröhre maß $12^1/_2$ Fuß, und die Umdrehungszahl pr. Minute war beim Arbeiten, = 30, folglich die Umfangsgeschwindigkeit = 39,3 Fuß.

Anmerkung 1. Die erste Beschreibung eines Reactionsrades, als eine Erfindung Barkers, findet man in Desagulier's Course of expérimental-philosophy, Vol. II, London 1745. Ausführlich über die Theorie und vortheilhafteste Construction dieser Räder handelt Euler in den Memoiren der Berliner Akademie, 1750, 1754.

Anmerkung 2. Die Wirkungsgrade der älteren Reactionsräder waren außerordentlich klein. Schon Nordwall findet einen solchen nur $^1/_3$ von dem eines oberschlägigen Rades. Schitko (s. dessen Beiträge zur Bergbaukunde u. s. w. Wien 1833) fand an einem solchen Rade den höchsten Wirkungsgrad 0,15, also ebenfalls sehr gering.

Theorie der Reactionsräder. Die Wirkungen der Reactionsräder lassen sich theoretisch auf folgende Weise ermitteln. Ist h das Gefälle oder die Tiefe der Mitte der Mündungen unter dem Wasserspiegel in der Einfallröhre, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit derselben, so hat man nach dem Früheren, die den Druck des vor der Mündung befindlichen Wassers messende Höhe: §. 243

$$h_1 = h + \frac{v^2}{2g},$$

und daher die theoretische Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gh + v^2}.$$

Bezeichnet noch φ den Geschwindigkeitscoefficienten, so läßt sich die effective Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \varphi \sqrt{2gh + v^2} \text{ setzen.}$$

Diese Geschwindigkeit ist aber nicht die absolute Geschwindigkeit des Wassers beim Austritte aus dem Rade, denn dasselbe hat noch die in entgegengesetzter Richtung vor sich gehende Umdrehungsgeschwindigkeit v mit dem Rade gemeinschaftlich. Es ist demnach die absolute Geschwindigkeit des austretenden Wassers:

$$w = c - v = \varphi \sqrt{2gh + v^2} - v,$$

und der entsprechende Arbeitsverlust:

$$L_1 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{(\varphi\sqrt{2gh + v^2} - v)^2}{2g} Q\gamma.$$

Den Geschwindigkeitscoefficienten $\varphi = 1$ angenommen, erhält man:

$$L_1 = \frac{(\sqrt{2gh + v^2} - v)^2}{2g} Q\gamma = \left(h - \frac{v(\sqrt{2gh + v^2} - v)}{g}\right) Q\gamma,$$

und zieht man diese von der disponiblen Leistung ab, so bleibt die Nutzleistung:

$$L = \left(h - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma = \frac{v(\sqrt{2gh + v^2} - v)}{g} Q\gamma.$$

Dieselbe fällt um so größer aus, je größer v ist, denn setzt man

$$\sqrt{v^2 + 2gh} = v + \frac{gh}{v} - \frac{g^2h^2}{2v^3} + \cdots,$$

so erhält man:

$$L = v\left(\frac{gh}{v} - \frac{g^2h^2}{2v^3} + \cdots\right) \cdot \frac{Q\gamma}{g},$$

also für $v = \infty$,

$$L = Qh\gamma,$$

die ganze disponible Leistung.

Dieser Umstand, daß die Maximalleistung durch eine unendlich große Umfangsgeschwindigkeit bedingt wird, ist aber ein ungünstiger, weil bei einer großen Umfangsgeschwindigkeit die Nebenhindernisse sehr anwachsen, wie leicht zu ermessen ist, da das unbelastete Rad noch lange nicht unendlich schnell umläuft, und also schon die Nebenhindernisse bei einer zwar großen aber keineswegs beinahe unendlichen Geschwindigkeit alle Wirkung aufzehren. Uebrigens kann auch die Geschwindigkeit des Rades deshalb nicht unendlich groß werden, weil das Wasser durch die $(33 + h)$ Fuß hohe Luft- und Wassersäule, der Schwungröhre höchstens mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2g(33+h)}$ Fuß zugeführt werden kann, und folglich bei einem schnelleren Abflusse desselben, der stetige Ausfluß aufhört. Von Rädern, deren theoretische Maximalleistung bei einer unendlich kleinen oder auch nur bei einer mittleren Geschwindigkeit eintritt, ist aus dem ersteren Grunde ein größerer Wirkungsgrad zu erlangen, als bei den eine unendlich große Umdrehungszahl fordernden Maschinen.

Es ist allerdings noch die Frage, ob die Leistungen bei mittleren oder nicht sehr hohen Umlaufsgeschwindigkeiten bedeutend von der Maximal- oder disponiblen Leistung $Qh\gamma$ abweichen, zu beantworten. Belastet man die Maschine so stark, daß die Geschwindigkeitshöhe, welche der Umfangsgeschwindigkeit entspricht, dem Gefälle gleich, also

$$\frac{v^2}{2g} = h \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2gh}$$

ist, so hat man nach der obigen Formel, die Leistung:

$$L = \frac{\sqrt{2gh}(\sqrt{4gh} - \sqrt{2gh})}{g} Q\gamma = 2(\sqrt{2} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}828\, Qh\gamma \text{ zu erwarten,}$$

macht man aber $\frac{v^2}{2g} = 2h$, so erhält man:

$$L = \frac{\sqrt{4gh}(\sqrt{6gh} - \sqrt{4gh})}{g} Q\gamma = 4(\sqrt{1{,}5} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}899\, Qh\gamma,$$

macht man endlich $\frac{v^2}{2g} = 4h$, so stellt sich

$$L = \frac{\sqrt{8gh}(\sqrt{10gh} - \sqrt{8gh})}{g} Q\gamma = 8(\sqrt{1{,}25} - 1) Qh\gamma$$
$$= 0{,}944\, Qh\gamma$$

heraus; man verliert also im ersten Falle ungefähr 17, im zweiten 10 und im dritten nur 6 Procent von der disponiblen Leistung und ersieht hieraus, daß bei mäßigen Gefällen und bei Anwendung einer Umfangsgeschwindigkeit, welche der dem Gefälle entsprechenden Endgeschwindigkeit nahe kommt, noch immer eine große Wirkung zu erwarten ist. Uebrigens wird auch durch die große Einfachheit dieser Maschine ein großes Gewicht in die Wagschale der Reactionsräder bei Vergleichung derselben mit anderen Rädern gelegt.

Anmerkung. Die Umdrehungs- oder Reactionskraft ist:

$$P = \frac{L}{v} = \frac{\sqrt{2gh + v^2} - v}{g} Q\gamma,$$

und für $v = 0$,

$$P = \frac{\sqrt{2gh}}{g} Q\gamma = \frac{c}{g} Q\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma,$$

wie wir schon in Band I, §. 495 gefunden haben.

Effective Leistung der Reactionsräder. Die im vorigen Paragraphen gefundene Formel §. 244

$$L = \frac{(\sqrt{2gh + v^2} - v)\, v}{g} Q\gamma$$

für die Leistung eines Reactionsrades ändert sich, wenn man den Ausflußwiderstand berücksichtigt, die Ausflußgeschwindigkeit:

$$c = \varphi\sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{\frac{2gh + v^2}{1 + \zeta}}$$

und die Ausflußmenge $Q = Fc = \varphi F \sqrt{2gh + v^2}$ setzt, in folgende um:

$$L = (\varphi\sqrt{2gh + v^2} - v)\frac{v Q\gamma}{g}$$

$$= (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \cdot \frac{\varphi F v \gamma}{g} \sqrt{2gh + v^2},$$

worin φ der Geschwindigkeits- oder Ausflußcoefficient und F die Summe der Inhalte der Ausmündungen bezeichnen. Ist Q gegeben, so läßt sich auch

$$L = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{v Q \gamma}{g}$$

und hiernach der Wirkungsgrad des Rades:

$$\eta = \frac{L}{Q h \gamma} = \left(\frac{Q}{F} - v\right) \frac{v}{g h} \text{ setzen.}$$

Dieser Wirkungsgrad $\eta = (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \frac{v}{gh}$ ist mit $\varphi v \sqrt{2gh + v^2} - v^2$ zugleich ein Maximum, und zwar für

$$\sqrt{2gh + v^2} + \frac{v^2}{\sqrt{2gh + v^2}} = \frac{2v}{\varphi},$$

wie durch Differenziiren u. s. w. nach Band I, Einleitung Art. XIII gefunden werden kann. Durch Umformungen dieser Gleichung stößt man auf die biquadratische Gleichung

$$v^4 + 2ghv^2 = \frac{\varphi^2 g^2 h^2}{1 - \varphi^2},$$

deren Auflösung die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1}$$

giebt, bei welcher der Wirkungsgrad ein Maximum, und zwar da

$$c = \sqrt{2gh + v^2} = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1}$$

ausfällt:

$$\eta = \varphi \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1} - \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1$$

$$= 1 - \sqrt{1 - \varphi^2} \text{ wird.}$$

Die effective Leistung ist hiernach:

$$L = \eta\, Q h \gamma = (1 - \sqrt{1 - \varphi^2})\, Q h \gamma$$

$$= \varphi^2 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} \cdot F \sqrt{g h^3} \cdot \gamma,$$

da das Ausflußquantum

$$Q = \varphi F c = \varphi F \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} + 1}$$

gesetzt werden kann.

Dividiren wir die Leistung durch die Geschwindigkeit v der Röhre im Mittelpunkte der Ausmündungen, so erhalten wir die Reactionskraft:

$$P = (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \frac{Q\gamma}{g}$$
$$= (\varphi \sqrt{2gh + v^2} - v) \sqrt{2gh + v^2} \cdot \frac{\varphi F \gamma}{g},$$

und daher beim stillstehenden Rade:

$$P = \varphi^2 . 2 F h \gamma.$$

Die Richtigkeit der vorstehenden Theorie des Reactionsrades hat der Verfasser durch Versuche bestätigt gefunden. Diese Versuche wurden an einem Modellrade von 1 Meter Durchmesser und $7\frac{1}{2}$ Quadratcentimeter Mündungsquerschnitt bei 4 Decimeter Druckhöhe angestellt, und es sind die Ergebnisse derselben in einer kleinen Schrift, welche in Freiberg unter dem Titel „Versuche über die Leistung eines einfachen Reactionsrades“ erschienen ist, enthalten.

Durch Vergleichung der effectiven Ausflußmenge Q mit dem theoretischen Ausflußquantum:

$$Fc = F \sqrt{2gh + v^2},$$

wurde der Ausflußcoefficient dieses Rades $\varphi = 0{,}9425$ gefunden, und wird nun dieser Werth in die Formel $\eta = 1 - \sqrt{1 - \varphi^2}$ eingesetzt, so erhält man den Maximalwirkungsgrad des Rades:

$$\eta = 1 - \sqrt{1 - 0{,}9425^2} = 1 - \sqrt{0{,}1117} = 0{,}666,$$

was auch die Versuche gaben. Die Umdrehungsgeschwindigkeit, bei welcher dieser Wirkungsgrad eintritt, ist theoretisch

$$v = \sqrt{gh} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1 - \varphi^2}} - 1} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}334}{0{,}334}} \cdot \sqrt{gh} = \sqrt{2gh},$$

also gleich der Fallgeschwindigkeit, welche der Druckhöhe h entspricht; und auf diesen Werth haben auch die Versuche geführt.

Setzen wir endlich den Werth $\varphi = 0{,}9425$ in die Formel

$$P = \varphi^2 . 2 F h \gamma,$$

so erhalten wir die Reactionskraft des Wassers $= 0{,}888 . 2 F h \gamma$, was ebenfalls durch die Versuche bestätigt wurde.

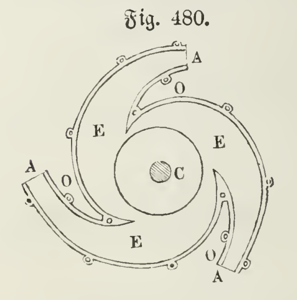
War die Radgeschwindigkeit v über $\sqrt{2gh}$, so machte sich der mit dem Quadrate von v wachsende Luftwiderstand bemerklich, so daß von da an die Abweichung zwischen dem theoretischen und effectiven Wirkungsgrade nahe mit v^3 wuchs, und zuletzt das Rad mit der Maximalgeschwindigkeit $v = 2 . \sqrt{2gh}$ leer umging.

Anmerkung. In der Schrift des Herrn Professors Schubert, „Beitrag zur Berichtigung der Theorie der Turbinen“, stellt der Herr Verfasser über die

Theorie des Reactionsrades mehrere fingirte, einer wissenschaftlichen und naturgemäßen Grundlage entbehrende Behauptungen auf. Ich halte es daher für meine Schuldigkeit, meine Leser vor dem ernsthaften Gebrauche dieser Schrift zu warnen, und deshalb auf meine oben citirte Schrift zu verweisen.

§. 245 **Schottische Turbinen.** In der neueren Zeit giebt man den Reactionsrädern krumme Schwungröhren, und nennt sie gewöhnlich Whitelaw'sche oder Schottische Turbinen. Manouri d'Ectot hat jedoch schon vor längerer Zeit solche Räder in Frankreich ausgeführt. (S. Journal des Mines, 1813, Tom. XXXIII.) Die schottischen, von Whitelaw und Stirrat construirten Turbinen weichen von dem Reactionsrade Manouri's im Wesentlichen nicht ab. (S. Dingler's polytechn. Journal, Band 88, und polytechn. Centralblatt, Band II. 1843, vorzüglich aber die Schrift: Description of Whitelaw's and Stirrat's Patent Watermill, 2 Edit. London and Birmingham, 1843.) Eine besondere Einrichtung der Whitelaw'schen Turbinen besteht darin, daß man die Ausflußmündungen des Wassers durch eine bewegliche Seitenwand erweitern oder verengern und dadurch den Ausfluß selbst reguliren kann. Ein horizontaler Durchschnitt einer solchen Turbine ist in Fig. 480 abgebildet. Diese Turbine besteht aus drei Schwungröhren, das Wasser tritt bei E in diese ein und bei A aus denselben aus. OA ist die um O drehbare, einen Theil der inneren Seitenwand bildende Klappe zum Reguliren des Ausflusses. Die Stellung dieser Klappe während des Ganges läßt sich durch einen ähnlichen Apparat, wie bei dem in Fig. 479 abgebildeten Rade, bewirken.

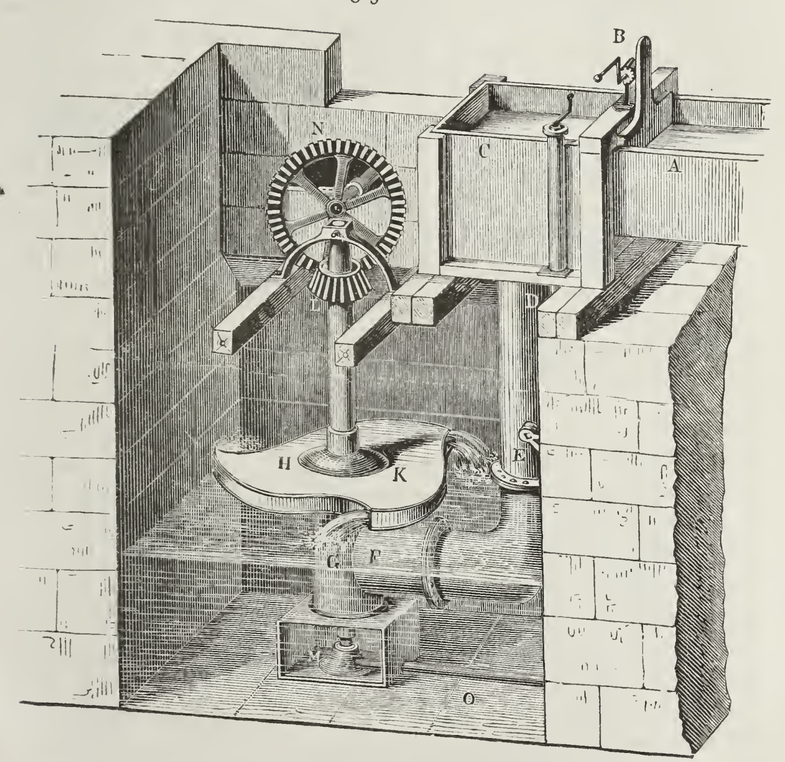
Fig. 480.



Die ganze Zusammenstellung einer Whitelaw'schen Turbine ist aus Fig. 481 zu ersehen. A ist das Wasserzuleitungsgerinne, B ein Schutzbret und C das Einfallreservoir, aus welchem das Wasser in die Einfallröhre DEF läuft. E ist eine Drehklappe, durch welche der Wasserdruck regulirt werden kann. Bei F tritt das Wasser in den feststehenden Cylinder G und von da in das darüber befindliche Rad HK, das auf der stehenden Welle LM festsitzt. Die Reaction des durch drei Radmündungen ausströmenden Wassers treibt das Rad mit der Welle in umgekehrter Richtung um, und diese Bewegung wird durch die Zahnräder L und N zunächst auf eine horizontale Welle übergetragen u. s. w. Das Rad, die Welle, die Einfallröhren u. s. w. sind von Gußeisen; die Pfanne des Stiftes M aber erhält ein Futter von Messing. Das Oel zum Schmieren des Zapfens läuft durch ein bis über den Wasserspiegel im Einfallkasten emporsteigendes Rohr O zu. Nach Redtenbacher (s. dessen Theorie und Bau der

Turbinen und Ventilatoren) kann man die Welle mit ihrem Zapfen ganz vom Wasser absperren, wenn man beide mit einem bis an die obere Deck-

Fig. 481.

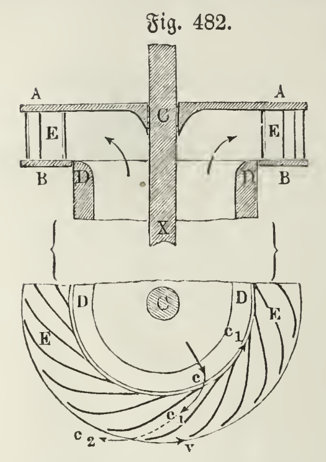


platte des Rades reichenden Gehäuse umgiebt. Von der Theorie und von der geometrischen Construction dieser Maschinen wird erst weiter unten gehandelt.

Reactionsrad von Combes. An die Whitelaw'schen Turbinen schließt sich zunächst das Combes'sche Reactionsrad an. Auch bei diesem fließt das Wasser von unten zu; doch unterscheidet es sich dadurch wesentlich von den ersteren Rädern, daß seine in größerer Anzahl vorhandenen umlaufenden Canäle oder Schwungröhren unmittelbar aneinanderstoßen, und durch krumme, zwischen zwei ringförmige Kränze eingesetzte Schaufeln gebildet werden. Die wesentlichste Einrichtung eines Combes'schen Reactionsrades ist aus Fig. 482 (a. f. S.), welche einen Auf- und einen Grundriß desselben darstellt, ersichtlich. *AA* ist eine den oberen Radkranz bildende, mit der stehenden Welle *CX* fest verbundene Scheibe, *BB* ist der untere, durch die §. 246

zwischen befindlichen Schaufeln $E, E \ldots$ mit der Scheibe AA fest verbundene Radkranz; DD ist der den unteren Theil der Welle umgebende Cylinder, durch welchen das Wasser zugeführt wird, welches am ganzen inneren Radumfange ein- und, nachdem es die Canäle zwischen den krummen Schaufeln durchlaufen hat, am ganzen äußeren Radumfange ausströmt.

Fig. 482.



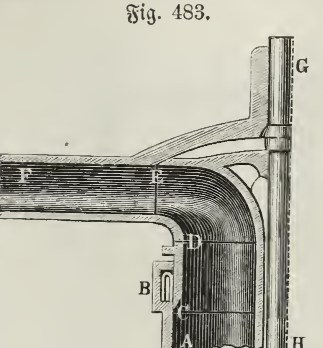
Eine andere wesentliche Abweichung der Combes'schen Reactionsräder von den Whitelaw'schen Turbinen besteht noch darin, daß dieselben keinen wasser- und luftdichten Abschluß zwischen dem Rade B und dem Zuflußreservoir D haben, der bei den Whitelaw'schen Rädern kaum entbehrt werden kann. Der Grund dieser Vereinfachung ist aber folgender. Der Druck des Wassers in einem Ausflußreservoir ist an verschiedenen Stellen sehr verschieden; da wo das Wasser beinahe still steht, drückt es am stärksten, und da wo es am schnellsten läuft, am schwächsten (s. Bd. I, §. 400). Die Geschwindigkeit des Wassers hängt aber wieder von dem Querschnitte des Reservoirs ab, sie steht im umgekehrten Verhältnisse zu diesem Querschnitte; daher kann man dem Wasserdrucke durch Veränderung des Querschnittes eine beliebige Größe ertheilen, und ihn auch gleich Null oder vielmehr dem Atmosphärendrucke gleich machen. Bohrt man nun an der Stelle, wo das Wasser nur mit der Atmosphäre drückt, ein Loch in das Gefäß, so wird durch dasselbe weder Wasser heraus-, noch Luft hineinströmen. Damit aber umgekehrt durch den ringförmigen, übrigens möglichst eng zu machenden Raum zwischen B und D weder Wasser aus-, noch Luft einströme, hat man daher nur nöthig, dem Querschnitte an der Uebergangsstelle eine gewisse Größe zu geben.

Anmerkungen. 1. Die Combes'schen Reactionsräder werden auch oft mit Leitschaufeln versehen, welche das Wasser in bestimmter Richtung in das Rad einführen. Die in Deutschland von Wedding und Nagel ausgeführten Turbinen (erstere in Sagan, letztere in Schwerin) sind insofern den Combes'schen Rädern ähnlich, als sie von unten beaufschlagt werden, in der Construction aber ähneln sie mehr den Fourneyron'schen Turbinen. Es gehört hierher auch die Turbine von Laurent und Deckherr, s. Armengaud's Publication industrielle, vol. 6.

2. Redtenbacher bewirkt den wasserdichten Abschluß zwischen dem Zuflußreservoir AB, Fig. 483, und dem Rade DEF durch einen beweglichen Messingring CD, der vom Wasser durch seinen Druck so stark an die untere

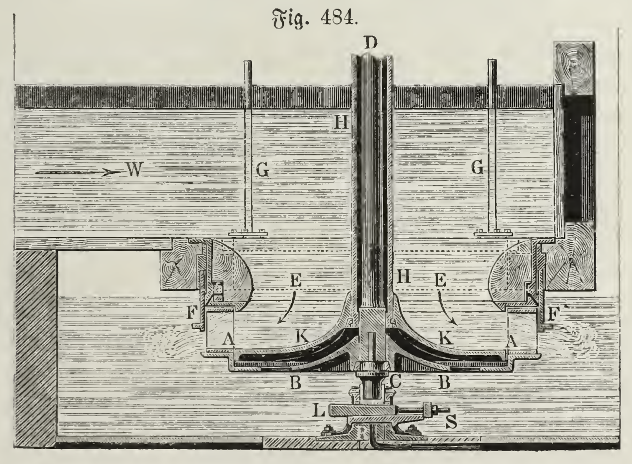
Ringfläche D des Rades angedrückt wird, daß das Wasser an dieser Stelle nicht durchdringen kann. Die Berührungsflächen bei D sind natürlich ganz eben abzuschleifen. Auch ist der Ring selbst durch eine aus ringförmigen, mit Metallringen ausgesteiften Lederriemen bestehende Dichtung B mit dem Zuflußreservoir AB verbunden.

Fig. 483.



Turbine von Cadiat. An die bis jetzt beschriebenen horizontalen Wasserräder reihen sich zunächst die Cadiat'schen Turbinen an. Sie sind ohne Leitschaufeln wie die Whitelaw'schen und Combes'schen Räder, und werden, wie die Fourneyron'schen Turbinen, von oben beaufschlagt. Eigenthümlich ist diesen Rädern noch eine das Rad von außen umschließende kreisförmige Schütze. Einen verticalen Durchschnitt von diesem Rade führt Fig. 484 §. 247

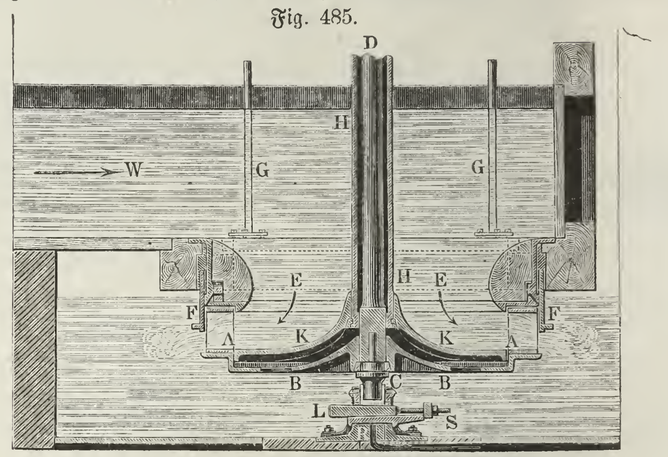
Fig. 484.



vor Augen. AA ist das eigentliche Rad, und BB die Schale, welche dasselbe mit der stehenden Welle CD verbindet. Der Stift C dieser Welle ruht in einer Pfanne, welche wir weiter unten näher kennen lernen werden. EE ist das Reservoir mit kreisförmigem Querschnitte, das oben mit dem Zuleitungscanale W in fester Verbindung ist und unten unmittelbar über dem oberen Radkranze ausmündet. Damit das bei W zufließende, im Reservoir niedersinkende und auf dem Wege EA dem Rade zufließende Wasser so wenig wie möglich in dieser Bewegung gestört werde und keine Contrac-

tion erleide, erweitert sich das Reservoir *EE* sowohl auf- als auch abwärts allmälig, wie aus der Figur deutlich zu ersehen ist. Der Ausfluß des

Fig. 485.

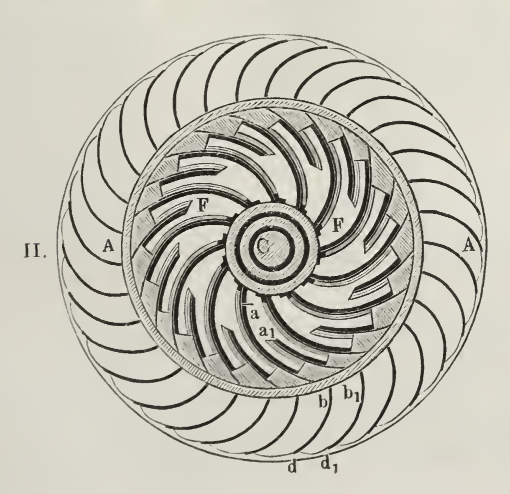


Wassers wird durch eine das Rad von außen umgebende kreisförmige Schütze *FF* regulirt. Das Ziehen oder Senken derselben erfolgt durch vier Stangen mittels eines besonderen Mechanismus, dessen nähere Einrichtung aus der Figur nicht zu ersehen ist. Damit das Wasser nicht zwischen dem Schutzbrete und der Gefäßwand durchdringen kann, ist ein die innere Fläche des Schutzbretes berührender Lederring eingesetzt.

Die stehende Welle *CD* ist noch mit einer Röhre *HH* umgeben, welche den Teller *KK* trägt, der von dem inneren Umfange des unteren Radkranzes umgeben wird, so daß das Wasser nach unten abgesperrt ist und nicht auf die Schale des Rades drückt. Diese Einrichtung (nach Redtenbacher) weicht von der, welche Cadiat angewendet hat, ab, ist aber genau dieselbe wie bei den Fourneyron'schen Turbinen. Cadiat läßt den Teller mit der Röhre ganz weg, und hebt den Druck des Wassers auf die Schale *B* durch einen Gegendruck von unten auf, indem er noch ein zweites Reservoir anbringt, welches die untere Fläche des Rades *A* fast berührt, und mit dem Druckwasser *GH* in Communication gesetzt wird. Jedenfalls ist diese Einrichtung weniger zweckmäßig als die Fourneyron'sche, um so mehr, da es nicht möglich ist, den Austritt des in diesem Reservoir völlig hydrostatisch drückenden Wassers durch den wenn auch noch so engen ringförmigen Spalt zwischen dem Rade und dem Reservoir zu verhindern. Die hier abgebildete Turbine geht, wie man sieht, unter Wasser.

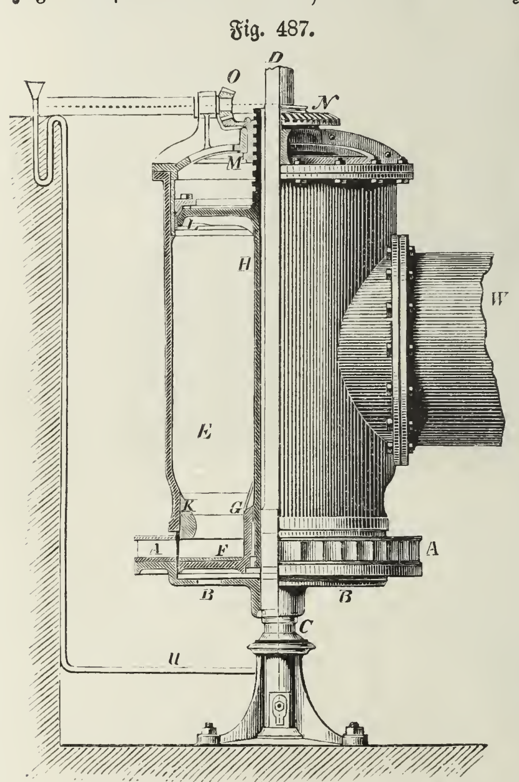
Anmerkung. Eine vollständige und genaue Beschreibung einer Cadiat'schen Turbine ohne Bodenteller und mit Druckwasser unter dem Radteller liefert M. Armengaud d. Aelt. im zweiten Bande seiner Publication industrielle.

Fig. 486.



§. 248 **Fourneyron's Turbinen.** Die Fourneyron'sche Turbine ist, namentlich in ihrer neuesten Einrichtung, eins der vollkommensten horizontalen Wasserräder, wenn sie nach den Regeln der Mechanik richtig ausgeführt wird. Sie geht entweder in freier Luft oder unter Wasser, und ist entweder eine Nieder- oder eine Hochdruckturbine. Bei der Niederdruckturbine fließt das Wasser in das oben offene Ausflußreservoir mit freier Oberfläche zu, wie Fig. 486 (a. v. S.), bei einer Hochdruckturbine hingegen ist das Ausflußreservoir oben verschlossen und das Wasser wird durch eine Röhre, die sogenannte Einfallröhre, von der Seite zugeführt, wie Fig. 487 zeigt. Erstere kommt natürlich bei kleinem und letztere bei großem Gefälle in Anwendung. Im Wesentlichen besteht das eigentliche Rad AA aus zwei horizontalen Kränzen von Eisen, aus einem gußeisernen Teller BB und aus einer stehenden Welle CD, also genau aus denselben Theilen, wie die in Fig. 484 abgebildete Turbine von Cadiat. Das bei W zufließende Wasser tritt zunächst in das cylindrische Reservoir EE. Damit es nicht auf den Radteller BB drücke und dadurch eine bedeutende Erhöhung der Zapfenreibung hervorbringe, wird eine die Radwelle vollkommen umschließende Röhre GH eingesetzt, und an deren unteres Ende ein Bodenteller FF befestigt, welcher den Druck des darüberstehenden Wassers aufnimmt. Auf diesen Teller werden cylindrisch gebogene Bleche, die sogenannten Leitschaufeln, auf-, sowie zwischen den beiden Radkränzen die sogenannten Radschaufeln eingesetzt. Durch die Leitschaufeln, wie $ab, a_1 b_1$ u. s. w., Fig. 486 (Grundriß), erhält das durch den ringförmigen Raum am unteren Ende des

Fig. 487.



Reservoirs EE ausfließende Wasser eine bestimmte Richtung, mit welcher es auch zu dem diese Mündung umschließenden Rade AA gelangt, dessen von den Schaufeln bd, $b_1 d_1$ u. s. w. gebildete Zellen es von innen nach außen durchläuft. Hierbei reagirt das Wasser so stark gegen die hohlen Flächen der Radschaufeln, daß dadurch das ganze Rad in entgegengesetzter Richtung umgedreht wird, während der Zufluß- und Leitschaufelapparat seinen Stand behält.

Um den Ausfluß des Wassers aus dem Reservoir und dadurch den Gang des Rades zu reguliren, wird ein cylindrisches Schutzbret $KLLK$, Fig. 486, in Anwendung gebracht, welches durch drei Stangen $M, M\ldots$ gesenkt und gehoben werden kann. Damit diese Stangen recht gleichmäßig wirken, hat man verschiedene Mechanismen in Anwendung gebracht. Fourneyron kuppelt dieselben durch ein Räderwerk zusammen, Cadiat hingegen durch einen Kurbelapparat. Die Schütze KL besteht aus einem hohlen gußeisernen Cylinder, dessen äußere Oberfläche die innere Seite des oberen Radkranzes fast berührt, weshalb beide genau abzudrehen sind. Damit kein Wasser zwischen der Schütze KL und dem festliegenden Cylinder NN hindurchgehe, wird über LL ein Lederstulp, ähnlich wie bei Pumpenkolben, eingesetzt. Endlich werden auf die Innenfläche des Schützencylinders Holz- oder Metallstücke $K, K\ldots$ aufgeschraubt, und diese unten gut und glatt abgerundet, damit das Wasser ohne Contraction und mit dem kleinsten Verluste an lebendiger Kraft unter denselben zum Ausflusse gelange. Bei Hochdruckturbinen gehen die Schützenstangen entweder durch Stopfbüchsen im Deckel des Ausflußreservoirs, oder es ergreifen dieselben den Schützencylinder von außen, wie z. B. bei der Turbine in St. Blasien. Nach Redtenbacher kann man endlich auch das Reguliren des Ausflusses durch Heben oder Senken des Bodentellers F, Fig. 487, bewirken. Zu diesem Zwecke läuft die Einhüllungsröhre GH oben schraubenförmig aus, und es erhält die Mutter M hierzu ein conisches Zahnrad N, das sich durch ein conisches Getriebe O in Umdrehung setzen läßt. Die Schraubenmutter M ist so gelagert, daß sie keine Verschiebung annehmen kann; es wird daher durch ihre Umdrehung ein Auf- oder Niedergehen der Röhre GH sammt Teller F herbeigeführt. Damit aber das Wasser von oben ganz abgesperrt werde, wird die Röhre GH noch mit einem Kopfteller HL versehen und dessen Umfang ebenfalls durch einen Lederstulp abgedichtet.

Turbinen von Francis. Anstatt das Wasser bei seiner Arbeitsverrichtung von innen nach außen durch das Reactionsrad laufen zu lassen, kann man dasselbe auch, wie bei den Tangentialrädern, von außen nach innen durch das Rad führen. Solche Reactionsräder mit äußerer Beaufschlagung unterscheiden sich von den Tangentialrädern nur dadurch, daß §. 249

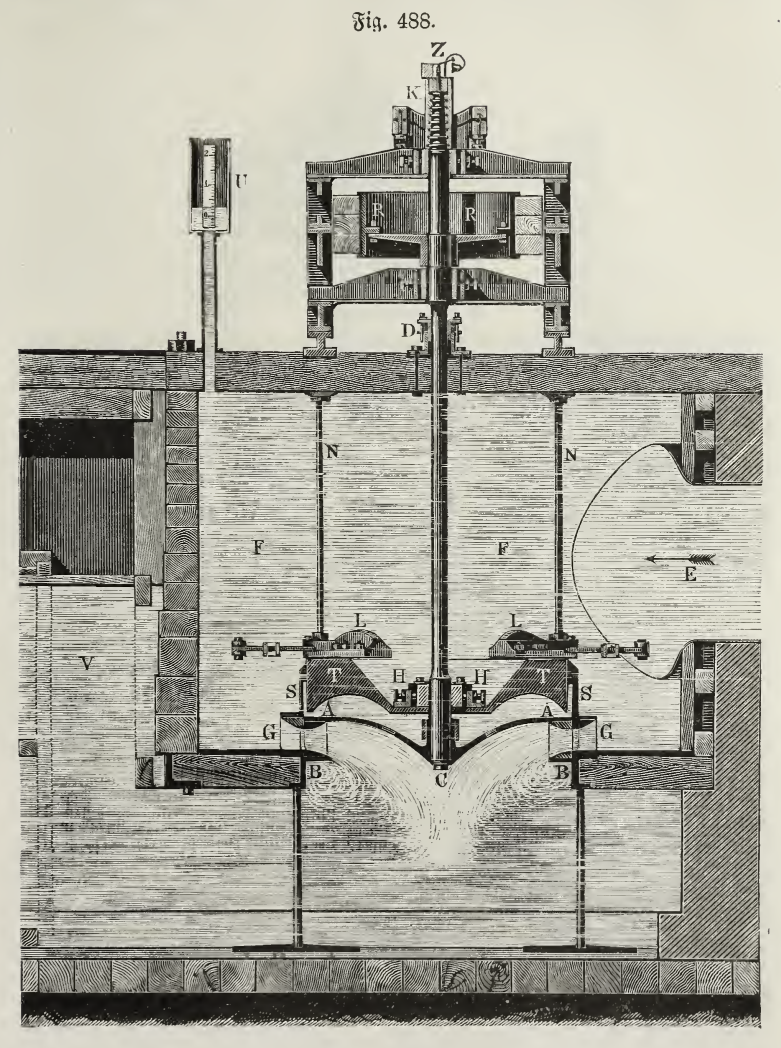
bei denselben das Wasser am ganzen äußeren Radumfange in das Rad eintritt, wogegen es bei den Tangentialrädern nur an einer Stelle in das Rad einströmt, daß folglich bei diesen Turbinen sämmtliche Radcanäle vom Wasser gefüllt werden, während bei den Tangentialrädern das Wasser nur in abgesonderten Partien durch die Radcanäle fließt.

Solche Reactionsräder mit äußerer Beaufschlagung sind in der neueren Zeit von dem Herrn S. B. Howd zu Genova im Staate New-York construirt worden. Diese unter dem Namen Howd oder United-State-Wheels bekannten Turbinen waren größtentheils aus Holz, zwar sehr einfach, jedoch theilweise auch fehlerhaft construirt. Diese Turbinen sind durch Herrn Francis, welcher sie centre-vent wheels nennt, wesentlich verbessert worden (s. die Lowell-Hydraulic-Experiments, by J. B. Francis). Namentlich hat derselbe statt der geraden Leitschaufeln aus Holz krumme Leitschaufeln aus Blech angewendet, sowie auch den Radschaufeln eine zweckmäßigere Gestalt gegeben. Zwei solcher Turbinen mit äußerer Beaufschlagung hat Herr Francis 1849 für die Boot-Cotton-Mills in Lowell ausgeführt, wovon jede bei einem Gefälle von 19 Fuß, ein Leistungsvermögen von 230 Pferdekräfte besitzt.

Den verticalen Durchschnitt eines solchen Rades führt Fig. 488 vor Augen. Es ist E das untere Ende des 8 Fuß weiten und 130 Fuß langen Einfallrohres, welches aus $^3/_8$ Zoll dicken Blechen nach Art der Dampfkessel zusammengenietet ist. Dieses Rohr mündet seitwärts in den oben geschlossenen Rad- oder Schützenkasten FF, dessen Deckel noch 6 bis 7 Fuß unter der Oberfläche des Oberwasserspiegels liegt. Der Radteller ACA hat eine glockenförmige Gestalt und ist von unten an die Welle CD geschoben und mit derselben durch eine Schraube C fest verbunden. Der äußere Raddurchmesser ist 9,338 Fuß, der innere 7,987 Fuß, ferner die innere Radweite $AB = 1{,}23$ Fuß und die äußere $= 0{,}999$ Fuß; es nimmt also diese Weite von außen nach innen zu, während bei dem Leitschaufelapparat GG das Gegentheil statt hat. Die Anzahl der Rad- und Leitschaufeln ist $= 40$, und die Dicke derselben mißt $^2/_8$ und $^3/_8$ Zoll. Der kürzeste Abstand zwischen je zwei Radschaufeln beträgt 0,1384 Fuß, und der zwischen je zwei Leitschaufeln, $= 0{,}1467$ Fuß. Die schmiedeeiserne Welle CDK geht bei D durch eine Stopfbüchse im Deckel des Radkastens, und ihr oberes Ende K ist mit einer Reihe ringförmiger Vorsprünge versehen, womit es in gleichgestalteten ringförmigen Vertiefungen im Lagergehäuse ruht. Durch diese zweckmäßige Aufhängungsweise wird das enorme Gewicht der armirten Welle von 15200 Pfund, auf eine Auflagerungsfläche von 331 Quadratzoll vertheilt, so daß jeder Quadratzoll derselben nur noch mit 46 Pfund belastet ist. Die Transmission der Kraft des Rades erfolgt durch ein unterhalb des Lagergehäuses auf der Welle CD sitzendes Zahnrad, an dessen

Stelle jedoch in der Figur die aus §. 134 bekannte und zur Ausmittelung der Leistungsfähigkeit des Rades dienende Bremsscheibe *RR* sitzt. Am

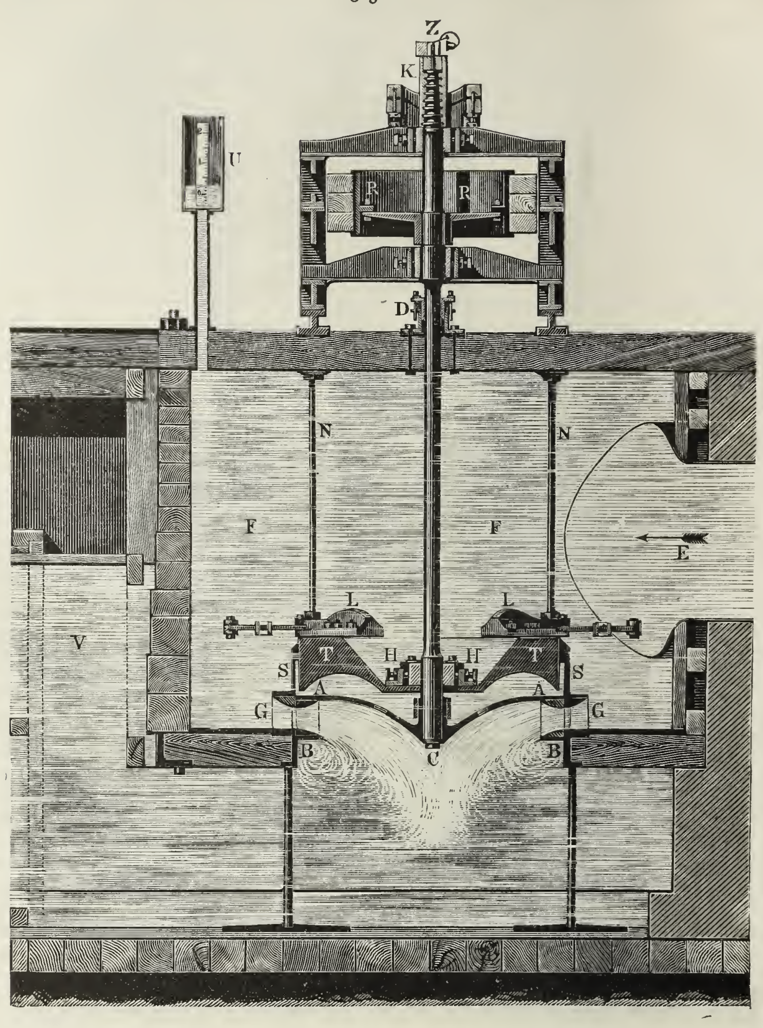
Fig. 488.



äußersten Ende der Welle ist noch ein Zählapparat *Z*, welcher die Beendigung einer gewissen Anzahl von Umdrehungen durch einen Glockenschlag anzeigt, angebracht. Uebrigens ruht die Welle in drei Halslagern, wovon das unterste *HH* auf dem Teller *TT* sitzt, womit der Radteller vor dem Drucke des darüberstehenden Wassers geschützt wird. Dieser Schutzteller ist mittels

der Arme L, L an vier Säulen N, N befestigt. Die ringförmige Schütze SS bewegt sich in einem zwischen dem Rade und dem Leitschaufelapparat

Fig. 489.



frei gelassenen Spielraume, und schließt oben mittels Lederliderung an den genau abgedrehten Umfang des Schutztellers TT an. Der Bewegungsmechanismus derselben ist in der Figur nicht angegeben. Zur Beobachtung des Wasserstandes ober- und unterhalb des Rades dienen besondere Wasserstandsröhren mit Scalen, wovon die eine in U sichtbar ist. Die Turbine geht unter Wasser um.

Zur Bestimmung des Aufschlagwasserquantums diente ein unterhalb V im Unterwasser angebrachter Ueberfall von 14 Fuß Breite. Fig. 490 zeigt einen Theil vom Grundrisse des Rad- und des Leitschaufelkranzes.

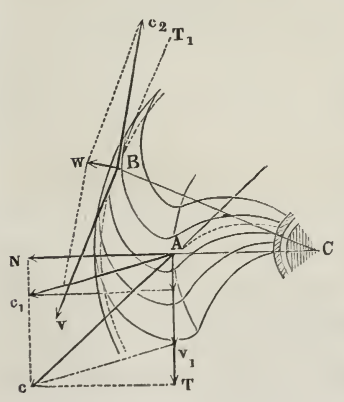
Fig. 490.



Theorie der Reactionsturbinen. Um die mechanischen Verhältnisse und die Leistung der Fourneyron'schen Turbinen ermitteln zu können, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen. §. 250

Der innere Halbmesser $\overline{CA}$, Fig. 491, oder annähernd auch der äußere Halbmesser des Reservoirs, sei $= r_1$, sowie der äußere Radhalbmesser,

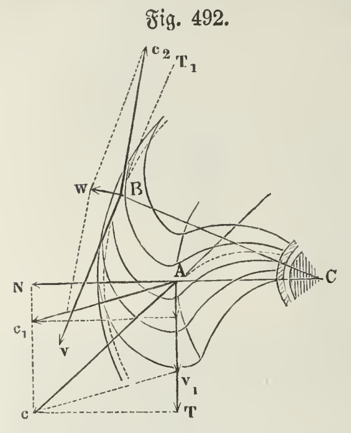
Fig. 491.



$\overline{CB} = r$, die innere Umfangsgeschwindigkeit des Rades, $= v_1$, und die äußere $= v$, ferner die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Reservoir oder Leitschaufelapparat tritt, $= c$, die relative Geschwindigkeit, mit welcher es in die Radcanäle eintritt, $= c_1$, und mit welcher es aus demselben heraustritt, $= c_2$; ferner sei der Winkel $c\,A\,T$, welchen die Richtung des aus dem Reservoir tretenden Wassers mit dem inneren Radumfange einschließt, $= \alpha$, dagegen der Winkel $c_1\,A\,T$, welchen der in die Radzellen eintretende Wasserstrahl

mit dem inneren Radumfange einschließt, $= \beta$, und der Winkel $c_2 B T_1$, welchen der aus den Radzellen ausströmende Strahl mit dem äußeren Radumfange einschließt, $= \delta$. Noch sei der Inhalt aller Ausflußöffnungen des Leitschaufelapparates, $= F$, die Summe der Inhalte aller Eintrittsöffnungen in das Rad, $= F_1$, und die der Inhalte aller Ausflußöffnungen am äußeren Radumfange, $= F_2$; ferner bezeichnen wir das ganze Radgefälle, vom Oberwasserspiegel bis Mitte der Ausmündungen des Rades, oder, wenn das Rad unter Wasser geht, bis Oberfläche des Unterwassers gemessen, durch h, die Höhe des Oberwasserspiegels über der Mitte von den Ausmündungen des Reservoirs oder den Einmündungen des Rades durch h_1, und die Tiefe $(h_1 - h)$ der letzten unter den Ausmündungen des Rades, oder, wenn das Rad unter Wasser geht, unter der Oberfläche des Unterwassers, durch h_2, und setzen endlich die Höhe, welche den Druck des Wassers an der Stelle, wo das Wasser aus dem Reservoir ins Rad tritt, mißt (ohne Rücksicht auf den Druck der Atmosphäre), $= x$.

Fig. 492.



Zunächst ist für die Ausflußgeschwindigkeit c, da sie durch die Druckhöhendifferenz $h_1 - x$ erzeugt wird,

$$\frac{c^2}{2g} = h_1 - x,$$

oder genauer, wenn das Wasser in dem Leitschaufelapparat oder beim Ausflusse aus demselben, durch Reibung u. s. w. die Druckhöhe $\zeta \cdot \frac{c^2}{2g}$ verliert,

$$(1 + \zeta) \frac{c^2}{2g} = h_1 - x.$$

Daher folgt:

$$c = \sqrt{\frac{2g(h_1 - x)}{1 + \zeta}}$$

und umgekehrt,

$$x = h_1 - (1 + \zeta) \frac{c^2}{2g}.$$

Damit das Wasser ohne Stoß in das Rad eintrete, ist es nöthig, daß sich die Ausflußgeschwindigkeit in zwei Seitengeschwindigkeiten zerlegen lasse, wovon die eine der Größe und Richtung nach mit der inneren Radgeschwindigkeit v_1 zusammenfalle, die andere aber mit dem in die Radcanäle eintre-

tenden Strahle einerlei Richtung habe. Dies vorausgesetzt, ist daher auch die Geschwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$, mit welcher das Wasser die Radcanäle zu durchlaufen anfängt, bestimmt durch die bekannte Gleichung

$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit c_2 des Wassers aus dem Rade ergiebt sich aus der Druckhöhe x beim Eintritte, aus der Druckhöhe h_2 beim Austritte, aus der der Eintrittsgeschwindigkeit entsprechenden Höhe $\frac{c_1^2}{2g}$, und aus der der Centrifugalkraft des Wassers in dem Rade entsprechenden Vermehrung der Druckhöhe $\frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ (s. Bd. II, §. 235):

$$\frac{c_2^2}{2g} = x - h_2 + \frac{c_1^2}{2g} + \frac{v^2 - v_1^2}{2g},$$

oder, wenn man die obigen Werthe von x und c_1 einsetzt,

$$\frac{c_2^2}{2g} = h_1 - h_2 - (1 + \zeta)\,\frac{c^2}{2g} + \frac{c^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} - \frac{2\,c\,v_1\,cos.\,\alpha}{2g};$$

oder, da $h_1 - h_2 = h$ das Totalgefälle des Rades ist,

$$c_2^2 = 2\,g\,h + v^2 - 2\,c\,v_1\;cos.\,\alpha - \zeta\,.\,c^2.$$

Nimmt man noch an, daß das Wasser durch seine Reibung und durch seine krummlinige Bewegung in den Radcanälen die Druckhöhe $\frac{\zeta_1\,c_2^2}{2g}$ verliere, so hat man genauer:

$$(1 + \zeta_1)\,c_2^2 = 2\,g\,h + v^2 - 2\,c\,v_1\;cos.\,\alpha - \zeta\,.\,c^2.$$

Da das Aufschlagquantum $Q = Fc = F_1\,c_1 = F_2 c_2$, also:

$$c = \frac{F_2\,c_2}{F} \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{r_1}{r}\,v$$

ist, so folgt endlich für die Geschwindigkeit c_2, mit welcher das Wasser aus dem Rade tritt:

$$\left[1 + \zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right]c_2^2 + 2\,\frac{F_2}{F}\cdot\frac{r_1}{r}\;c_2\,v\,cos.\,\alpha - v^2 = 2\,g\,h.$$

Vortheilhafteste Geschwindigkeit. Um dem Wasser die größte Arbeit zu entziehen, muß bekanntlich die absolute Geschwindigkeit des austretenden Wassers möglichst klein sein. Nun ist aber diese Geschwindigkeit, als Diagonale $\overline{Bw}$ eines aus der Ausflußgeschwindigkeit c_2 und Umdrehungsgeschwindigkeit v construirten Parallelogrammes, §. 251

$$w = \sqrt{c_2^2 + v^2 - 2\,c_2\,v\,cos.\,\delta} = \sqrt{(c_2 - v)^2 + 4\,c_2\,v\left(sin.\frac{\delta}{2}\right)^2};$$

es soll daher $c_2 = v$ und δ möglichst klein sein. Damit aber das Wasser in hinreichender Menge abfließe, ist es allerdings nicht möglich, $\delta =$ Null, sondern nur gestattet, diesen Winkel klein, etwa 10° bis 20° zu machen. Wenn wir also auch die Gleichheit $c_2 = v$ hervorbringen, so bleibt demnach immer noch die kleine absolute Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{4\, c_2\, v \left(sin.\, \frac{\delta}{2}\right)^2} = 2\, v\, sin.\, \frac{\delta}{2},$$

und der entsprechende Arbeitsverlust

$$\frac{w^2}{2g}\, Q\gamma = \frac{\left(2\, v\, sin.\, \frac{\delta}{2}\right)^2}{2g}\, Q\gamma \text{ übrig.}$$

Wegen der Nebenhindernisse ist jedenfalls die relative Austrittsgeschwindigkeit noch etwas kleiner als die Umdrehungsgeschwindigkeit v zu fordern, um eine möglichst große Radleistung zu erhalten; da indessen bei den Turbinen mit Leitschaufeln, wie weiter unten dargethan wird, die Annahme $v = c_2$ sehr nahe den größten Wirkungsgrad giebt und diese Bedingung ohnedies auf sehr einfache Beziehungen führt, so wollen wir im Folgenden nur die Bedingung $v = c_2$ festhalten, und dieselbe mit der letzten Gleichung des vorigen Paragraphen verbinden. Es folgt so:

$$\left[1 + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] v^2 + 2\, \frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r}\, v^2\, cos.\, \alpha - v^2 = 2gh,$$

oder:

$$\left[2\, \frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r}\, cos.\, \alpha + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] v^2 = 2gh,$$

und daher die gesuchte, ziemlich die Maximalleistung versprechende äußere Radgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2\, \frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r}\, cos.\, \alpha + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1}}.$$

Statt des Querschnittsverhältnisses $\frac{F_2}{F}$ kann man auch den Winkel β einführen, welcher die Richtung des in das Rad eintretenden Strahles mit der inneren Umfangsgeschwindigkeit $\overline{Av_1} = v_1$ einschließt. Es fordert nämlich der ungestörte Eintritt in das Rad, daß die absolute Geschwindigkeit c des Wassers durch den Eintritt nicht geändert werde, daß also der radiale Component

$$\overline{AN} = c\, sin.\, \alpha$$

von c auch dem radialen Componenten $c_1\, sin.\, \beta$ von c_1, und der tangentiale Component $c\, cos.\, \alpha$ von c der Tangentialgeschwindigkeit

$$\overline{AT} = c_1 \cos.\beta + v_1$$

des bereits eingetretenen Wassers gleich sei. Hiernach ist also

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta},\ c\cos.\alpha - c_1\cos.\beta = v_1$$

und

$$\frac{c}{v_1} = \frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}.$$

Ueberdies ist noch $Fc = F_2 c_2 = F_2 v = \frac{r}{r_1} F_2 v_1$;

daher folgt

$$\frac{F_2}{F} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{c}{v_1} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}$$

und die in Frage stehende äußere Radgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin.\beta\ \cos.\alpha}{\sin.(\beta - \alpha)} + \zeta\left(\frac{r_1 \sin.\beta}{r\sin.(\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1}},$$

sowie die innere Umfangsgeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{r_1}{r} v = \sqrt{\frac{2gh}{2\frac{\sin.\beta\ \cos.\alpha}{\sin.(\beta - \alpha)} + \zeta\left(\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Ohne Berücksichtigung der Nebenverhältnisse wäre

$$v_1 = \sqrt{\frac{gh\sin.(\beta - \alpha)}{\sin.\beta\cos.\alpha}} = \sqrt{gh(1 - tang.\alpha\ cotang.\beta)}.$$

Wasserdruck. Mit Hülfe der Formel für v läßt sich nun auch der Druck bestimmen, welcher an der Uebergangsstelle aus dem Reservoir in das Rad statt hat, es ist nämlich: §. 252

$$x = h_1 - (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g} = h_1 - (1 + \zeta)\frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}\right)^2$$

$$= h_1 - \frac{(1 + \zeta)h\sin.\beta^2}{2\sin.\beta\cos.\alpha\sin.(\beta - \alpha) + \zeta\sin.\beta^2 + \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2[\sin.(\beta - \alpha)]^2}$$

$$= h_1 - \frac{(1 + \zeta)h}{1 + \cos.2\alpha - cotg.\beta\sin.2\alpha + \zeta + \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{\sin.(\beta - \alpha)}{\sin.\beta}\right)^2}.$$

Lassen wir der Einfachheit wegen, die Widerstände außer Acht, so erhalten wir

$$x = h_1 - \frac{h}{1 + \cos.2\alpha - cotg.\beta\ \sin.2\alpha}.$$

Läuft die Turbine in der freien Luft um, so haben wir bei den zuletzt beschriebenen Turbinen von Fourneyron, Cadiat und Whitelaw, $h_1 = h$, und daher:

$$x = \frac{\cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha}{1 + \cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha} \cdot h;$$

geht aber die Turbine unter Wasser, so ist $h_1 = h + h_2$, und daher:

$$x = \frac{\cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha}{1 + \cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha} \cdot h + h_2.$$

Soll im ersten Falle der Druck Null oder vielmehr dem Atmosphärendrucke gleich sein, so hat man $x = 0$, soll er aber im zweiten Falle dem Drucke des Unterwassers gegen die Radmündungen gleich sein, so hat man $x = h_2$, in beiden Fällen aber $\cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha = 0$, d. i. $\tang. \beta = \tang. 2\alpha$, also $\beta = 2\alpha$ zu machen.

Wenn also der Eintrittswinkel β doppelt so groß ist als der Austrittswinkel α, so ist der Druck an der Stelle, wo das Wasser aus dem Reservoir ins Rad tritt, gleich dem äußeren Luft- oder Unterwasserdrucke.

Auf der anderen Seite ist leicht zu ermessen, daß dieser innere Druck größer ist als der äußere, wenn $\beta > 2\alpha$ und kleiner ist als dieser, wenn $\beta < 2\alpha$ ausfällt. Natürlich ändern sich die Verhältnisse etwas, wenn man, wie nöthig, die Nebenwiderstände berücksichtigt. Es ist nämlich dann für die Gleichheit des äußeren und inneren Druckes:

$$1 + \cos. 2\alpha - \cotg. \beta \sin. 2\alpha + \zeta + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin. (\beta - \alpha)}{\sin. \beta}\right)^2 = 1 + \zeta,$$

oder $\cotg. \beta \sin. 2\alpha = \cos. 2\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 (\cos. \alpha - \cotg. \beta \sin. \alpha)^2$;

setzt man im letzten Gliede $\cotg. \beta = \cotg. 2\alpha = \frac{\cos. 2\alpha}{\sin. 2\alpha}$, so erhält man

$$\cotg. \beta \sin. 2\alpha = \cos. 2\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin. \alpha}{\sin. 2\alpha}\right)^2$$

$$= \cos. 2\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4 (\cos. \alpha)^2},$$

und es folgt:

$$\tang. \beta = \frac{\sin. 2\alpha}{\cos. 2\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{4 (\cos. \alpha)^2}},$$

also β etwas kleiner als 2α.

Vernachlässigen wir wieder ζ und ζ_1, so bekommen wir durch Einführung des Werthes $\beta = 2\alpha$:

$$v_1 = \sqrt{gh\,(1 - tang.\,\alpha\; cotg.\,2\,\alpha)} = \sqrt{\frac{gh(1 + tang.\,\alpha^2)}{2}} = \frac{\sqrt{{}^1/_2\,gh}}{cos.\,\alpha}$$

und $c = \sqrt{2gh}$,

wie sich von selbst versteht. Ist der innere Druck größer als der äußere, so hat man

$$v_1 > \frac{\sqrt{{}^1/_2\,gh}}{cos.\,\alpha} \text{ und } c < \sqrt{2\,gh},$$

und ist er kleiner als dieser, so fällt

$$v_1 < \frac{\sqrt{{}^1/_2\,gh}}{cos.\,\alpha} \text{ und } c > \sqrt{2\,gh}$$

aus.

Die im letzten Paragraphen abgehandelten Druckverhältnisse sind bei Construction von Turbinen von großer Wichtigkeit, weil die Uebergangsstelle zwischen dem Reservoir und dem Rade nicht abgedichtet ist, und immer noch, wenn auch nur sehr enge ringförmige Spalten übrig bleiben, durch welche Wasser heraus, und Luft oder Wasser eindringen kann. Damit keins von beiden eintrete, muß also die Turbine so construirt werden, daß der innere Druck an dem Uebertritte in das Rad dem äußeren Luft- oder Unterwasserdrucke gleich ausfällt, es muß also $\beta = 2\,\alpha$ oder besser, der Gleichung §. 253

$$tang.\,\beta = \frac{sin.\,2\,\alpha}{cos.\,2\,\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{(2\,cos.\,\alpha)^2}}$$

Genüge geleistet werden.

Jedenfalls wird die Leistung einer Turbine eine kleinere, es mag Wasser zwischen dem Reservoir und dem Rade durchgehen oder Luft eindringen, denn in dem einen Falle entzieht sich ein Theil des Aufschlages der Wirkung und im zweiten Falle, wenn Luft oder Wasser eindringt, stört diese die Bewegung des Wassers in den Radzellen. Es ist folglich nöthig, um einen großen Wirkungsgrad zu erhalten, das Rad so nahe wie möglich an den Teller und an die Rückwand anschließen zu lassen und so viel wie möglich der letzten Gleichung Genüge zu leisten.

Wenn aber bei einem kleineren Aufschlagquantum die Schütze gestellt, und dadurch ein kleinerer Inhalt F der Ausflußmündung hervorgebracht wird, so entsteht natürlich eine größere Ausflußgeschwindigkeit c und deshalb wieder eine Verminderung des Druckes (x). War nun dieser schon vorher dem äußeren Luft- oder Unterwasserdrucke gleich, so wird derselbe jetzt bei tieferem Schützenstande kleiner als jener Außendruck sein, und daher Luft oder Wasser von außen durch die ringförmigen Zwischenräume eindringen und am äußeren Radumfange mit ausströmen. Geht die Tur-

bine in freier Luft um, so hat dieses Lufteinsaugen noch den Nachtheil, daß es, wenigstens bei tieferem Schützenstande, den vollen Ausfluß verhindert, so daß das Wasser nur an den convaven Seiten der Radcanäle hinströmt, ohne dieselben auszufüllen, die Reactionsturbine also in eine Druckturbine übergeht. Welches nachtheilige Verhältniß überdies noch bei tieferem Schützenstande eintritt, werden wir weiter unten näher kennen lernen.

Damit nun bei tieferem Schützenstande das nachtheilige Einsaugen und, nach Befinden, das Lostrennen der Wasserstrahlen von den erhabenen Seitenflächen der Radcanäle nicht eintrete, zieht man es vor, die Turbine so zu construiren, daß beim Normalgange des Rades und also bei völlig geöffneter Schütze an der Uebergangsstelle ein mäßiger Ueberdruck x stattfinde, wenn auch eine kleine Wassermenge durch den Zwischenraum zwischen dem inneren Radumfange und dem äußeren Schützenumfange entweicht.

§. 254 **Auswahl von α und β.** Wenn wir in Beziehung auf den Innendruck eine Bestimmung nicht machen, so können wir allerdings den Winkeln α und β sehr verschiedene Werthe beilegen. Die Formel

$$v_1 = \sqrt{g h (1 - tang.\,\alpha\, cotg.\,\beta)} = \sqrt{g h \left(1 - \frac{tang.\,\alpha}{tang.\,\beta}\right)}$$

giebt einen unmöglichen Werth für v_1, wenn $\frac{tang.\,\alpha}{tang.\,\beta} > 1$, also wenn $\alpha < 90^0$ und $\beta < \alpha$ oder wenn $\alpha > 90^0$ und $\beta > \alpha$ ist. Diese Werthe für α und β sind also völlig auszuschließen, weil sie Unmögliches fordern. Ist $\alpha = \beta$, so hat man $v_1 = 0$, auch sieht man, daß die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit um so kleiner ausfällt, je näher sich die Winkel α und β sind. Die Formeln

$$c = \frac{v_1\, sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)} \text{ und } F_2 = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)} F$$

geben für $\beta < \alpha$ stets negative und also ebenfalls Unmögliches fordernde Werthe; es ist daher bei Construction einer Turbine stets nöthig, daß $\beta > \alpha$ und $\alpha < 90^0$ sei.

Zwischen diesen Grenzen kann man natürlich die Werthe von α und β sehr verschieden auswählen, doch führen sie nicht alle auf gleich zweckmäßige Constructionen. Fourneyron nimmt $\beta = 90^0$ und $\alpha = 30^0$ bis 33^0 an. Manche machen β kleiner, andere aber größer als 90^0. Schaufeln nach einem kleineren Werthe von β construirt, haben eine größere Krümmung als Schaufeln mit einem stumpfen β. Größere Krümmungen geben aber auch größere Hindernisse bei ihrer Durchlaufung und verhindern vielleicht gar den vollen Ausfluß. Aus diesem Grunde ist es daher anzurathen, den Winlel β eher stumpf als spitz, ihn vielleicht 100 bis 120^0 zu machen. Der Winkel α würde dann, wenn der Innendruck dem äußeren das Gleich-

gewicht halten soll, 50 bis 55° ausfallen. Damit aber die von den Leitschaufeln gebildeten Canäle nicht sehr divergiren, und auch beim tieferen Schützenstande noch kein Saugen eintrete, macht man diesen Winkel nur 30 bis 40°, und wenn die Turbine in freier Luft geht, vielleicht gar nur 25 bis 30°. Sehr klein macht man aber α auch schon deshalb nicht, weil mit α auch der Inhalt der Ausflußöffnung und daher auch das Ausflußquantum abnimmt, oder vielmehr bei gegebenem Aufschlage das Rad zu groß ausfällt. Auf der anderen Seite ist noch zu berücksichtigen, daß die Verluste mit v^2 gleichmäßig wachsen, und daß daher eine Turbine unter übrigens gleichen Umständen einen größeren Wirkungsgrad hat, wenn sie langsam umläuft, als wenn sie eine große Umdrehungsgeschwindigkeit hat. Diesem zufolge sollte man also so construiren, daß die Winkel α und β nicht sehr von einander abweichen, und daher der Innendruck kleiner als der Außendruck ausfällt. Ist b die den Luftdruck messende Höhe einer Wassersäule, so kann man den absoluten Wasserdruck an der Uebergangsstelle durch die Höhe $b + x$ messen, und fällt nun diese Druckhöhe Null aus, so fließt das Wasser mit der Maximalgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{2g(h_1 - x)} = \sqrt{2g(h_1 + b)}$$

aus dem Reservoir. Wäre endlich $b + x$ negativ, also $x < -b$, so würde an der Uebergangsstelle ein luftleerer Raum entstehen, denn das Wasser würde durch die Radcanäle in größerer Menge ab- als durch das Reservoir zufließen, es würde daher Luft vom äußeren Radumfange aus eintreten und deshalb das Ausflußverhältniß ganz gestört werden. Führen wir nun in der Formel für

$$x = h - \frac{h}{1 + cos.\,2\alpha - cotg.\,\beta\; sin.\,2\alpha},\quad x = -b$$

ein, so erhalten wir:

$$1 + cos.\,2\alpha - cotg.\,\beta\; sin.\,2\alpha = \frac{h}{h+b},$$

demnach:

$$tang.\,\beta = \frac{sin.\,2\alpha}{1 + cos.\,2\alpha - \frac{h}{h+b}} = \frac{(h+b)\; sin.\,2\alpha}{(h+b)\; cos.\,2\alpha + b},$$

und daher die entsprechende vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{g\,h\left(1 - tang.\,\alpha \cdot \frac{(h+b)\; cos.\,2\alpha + b}{(h+b)\; sin.\,2\alpha}\right)} = \frac{h}{cos.\,\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h+b)}}.$$

Turbinen ohne Leitschaufeln. Bei den Turbinen ohne Leitschaufeln läßt sich $\alpha = 90°$ setzen, weil hier das Wasser auf dem kürzesten Wege, d. h. radial auswärts, aus dem Reservoir ausfließt. Aus die- §. 255

sem Gesichtspunkte sind nun auch die Turbinen von Combes, Cadiat und Whitelaw zu betrachten. Setzen wir in der Formel für die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit $\alpha = 90^0$ ein, so erhalten wir:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\frac{2\,sin.\beta\,cos.90^0}{cos.\beta} + \xi\left(\frac{sin.\beta}{cos.\beta}\right)^2 + \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\xi\,(tang.\beta)^2 + \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}};$$

und ohne Rücksicht auf die hydraulischen Nebenhindernisse

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{0}} = \infty.$$

Eine unendlich große Geschwindigkeit kann aber das Rad aus doppelten Gründen nicht annehmen, denn erstens erreicht dieselbe schon ihre Grenze, wenn die disponible Arbeit von den Widerständen aufgezehrt wird, wenn also

$$Q\,h\,\gamma = \left(\frac{w^2}{2\,g} + \xi\,\frac{c^2}{2\,g} + \xi_1\cdot\frac{c_2^2}{2\,g}\right)Q\,\gamma,$$

d. i.

$$h = \left[\left(2\,sin.\frac{\delta}{2}\right)^2 + \xi\left(\frac{r_1}{r}tang.\beta\right)^2 + \xi_1\right]\frac{v^2}{2\,g},$$

also

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\left(2\,sin.\frac{\delta}{2}\right)^2 + \xi\left(\frac{r_1}{r}\,tang.\beta\right)^2 + \xi_1}}$$

ist, und zweitens hört für den Werth $x = -\,b$, d. i.

$$h - \frac{c^2}{2\,g} = -\,b, \text{ oder } \frac{c^2}{2\,g} = b + h,$$

oder

$$\frac{1}{2\,g}\left(\frac{r_1}{r}\cdot\frac{v\,sin.\beta}{sin.(\beta - 90^0)}\right)^2 = b + h,$$

also bei

$$v = \frac{r}{r_1}\,cotg.\beta\sqrt{2\,g\,(b + h)},$$

der volle Ausfluß auf, und es treten ganz andere Verhältnisse ein, weil das Wasser aus dem Reservoir nicht in der Menge nachströmen kann, in welcher es durch die Radcanäle bei gefülltem Querschnitte abgeführt wird.

Uebrigens giebt aber auch die obige Formel

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,h}{\xi\,(tang.\beta)^2 + \xi_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}},$$

wenn man die Erfahrungszahlen ζ und ζ_1 einsetzt, v noch lange nicht ∞. Selbst bei der besten Construction, Abglättung und Abrundung des Leitschaufelapparates läßt sich der Geschwindigkeitscoefficient φ nicht größer als 0,96, und daher der entsprechende Widerstandscoefficient:

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$$

nicht kleiner als $\frac{1}{0,96^2} - 1 = 0,08$, also circa 8 Procent setzen; bei Turbinen ohne diesen Apparat fällt zwar der Widerstand in demselben weg, jedoch bleibt immer noch ein gewisser Verlust beim Eintritte in die Radcanäle übrig, der bei den Rädern von Combes und Cadiat vielleicht nur 5, bei den Whitelaw'schen Reactionsrädern aber 10 und noch mehr Procente betragen kann, da hier die Canäle zu weit sind, als daß sie allen in sie eintretenden Wasserfäden eine bestimmte Richtung (β) geben könnten. Der dem Reibungs- und Krümmungswiderstande in den Radcanälen entsprechende Widerstandscoefficient ζ_1 läßt sich, wie wir weiter unten sehen werden, 0,05 bis 0,15 annehmen, und wir erhalten daher für die Turbinen ohne Leitschaufeln, wenn wir $\zeta_1 = 0,1$ einsetzen, die vortheilhafteste Geschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh}{0,05\,(tang.\,\beta)^2 + 0,1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}},$$

und für die Whitelaw'schen Reactionsräder:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh}{0,1\,(tang.\,\beta)^2 + 0,1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Setzen wir noch $\beta = 60^0$ und $\frac{r}{r_1} = {}^4/_3$, so erhalten wir im ersten Falle:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh}{0,148 + 0,178}} = 1,75\sqrt{2\,gh},$$

und im zweiten:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh}{0,296 + 0,178}} = 1,45\sqrt{2\,gh}.$$

Damit übrigens bei den Rädern ohne Leitschaufelapparat das Wasser ohne oder mit möglichst kleinem Stoße eintrete, muß der bekannten Gleichung

$$\frac{F_2}{F} = \frac{r_1}{r}\,\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - 90^0)} - \frac{r_1}{r}\,tang.\,\beta$$

Genüge geleistet werden. Da nun aber F_2 durch den Schützenstand be-

stimmt ist, so folgt, daß die Maximalleistung nur bei einem gewissen Schützenstande erlangt werden kann.

§. 256 **Allgemeine Theorie.** Das Nullsetzen der absoluten Ausflußgeschwindigkeit w führt nur bei den Leitschaufelturbinen nahe auf die Maximalleistung, bei Turbinen ohne Leitschaufeln, sowie bei allen Turbinen, wo der Leitschaufelwinkel α nahe 90^0 ist, fällt dagegen der Einfluß der Nebenhindernisse auf den Gang des Rades zu groß aus, als daß $w = 0$, also $v = c_2$ gesetzt werden könnte.

Um für alle Reactionsturbinen die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit zu finden, ist es nöthig, zuerst einen vollständigen Ausdruck für die Leistung der Turbine zu entwickeln, und dann das Maximum derselben in Hinsicht auf diese Geschwindigkeit zu bestimmen.

Die der disponiblen Leistung $Qh\gamma$ durch die Nebenhindernisse entzogenen Arbeiten sind

$$\zeta \frac{c^2}{2g} Q\gamma + \zeta_1 \frac{c_2^2}{2g} Q\gamma,$$

und der aus der lebendigen Kraft des mit der absoluten Geschwindigkeit w fortfließenden Wassers erwachsende Arbeitsverlust ist:

$$\frac{w^2}{2g} Q\gamma = \left(\frac{c_2^2 + v^2 - 2 c_2 v \cos. \delta}{2g}\right) Q\gamma;$$

folglich ist die übrigbleibende Radleistung:

$$L = \left(h - \zeta \frac{c^2}{2g} - \zeta_1 \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_2^2 + v^2 - 2 c_2 v \cos. \delta}{2g}\right) Q\gamma$$

$$= \left(h - \frac{(1 + \zeta_1) c_2^2 + v^2 - 2 c_2 v \cos. \delta + \zeta c^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Nun ist aber nach §. 250:

$$(1 + \zeta_1)\, c_2^2 = 2gh + v^2 - 2 c v_1 \cos. \alpha - \zeta c^2,$$

daher folgt:

$$L = \left(\frac{c v_1 \cos. \alpha + c_2 v \cos. \delta - v^2}{g}\right) Q\gamma.$$

Da ferner $c = \frac{v_1 \sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)} = \frac{r_1}{r} \frac{v \sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)}$ (s. §. 251) ist, so hat man:

$$c_2^2 = \frac{2gh + \left[1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin. \beta \cos. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)} - \zeta \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \left(\frac{\sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)}\right)^2\right] v^2}{1 + \zeta_1};$$

bezeichnet man daher noch

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin. \beta \cos. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)} \text{ durch } \varphi,$$

sowie

$$1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin.\beta\ cos.\alpha}{sin.(\beta-\alpha)} - \zeta\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\left(\frac{sin.\beta}{sin.(\beta-\alpha)}\right)^2 \text{ durch } \psi,$$

so erhält man:

$$c\,v_1\,cos.\,\alpha = \varphi v^2 \text{ und}$$

$$c_2\,v\,cos.\,\delta = v\,cos.\,\delta\sqrt{\frac{2gh + \psi v^2}{1+\zeta_1}}$$

$$= \frac{cos.\,\delta}{\sqrt{1+\zeta_1}}\,v\sqrt{2gh + \psi v^2},$$

und daher:

$$L = \left(\frac{cos.\,\delta}{\sqrt{1+\zeta_1}}\sqrt{2gh+\psi v^2} - (1-\varphi)\,v\right)\frac{v\,Q\gamma}{g}$$

$$= \frac{cos.\,\delta\,.\,Q\gamma}{g\sqrt{1+\zeta_1}}\left(\sqrt{2gh+\psi v^2} - \frac{(1-\varphi)\sqrt{1+\zeta_1}\,v}{cos.\,\delta}\right)v$$

$$= \frac{cos.\,\delta\,.\,Q\gamma}{g\sqrt{1+\zeta_1}}\left(\sqrt{2gh+\psi v^2} - \chi v\right)v,$$

wenn man auch noch $\frac{(1-\varphi)\sqrt{1+\zeta_1}}{cos.\,\delta}$ durch χ bezeichnet.

Dieser Ausdruck wird mit $\sqrt{2gh+\psi v^2}\,.\,v - \chi v^2$ ein Maximum, und zwar für $\chi v = \frac{gh+\psi v^2}{\sqrt{2gh+\psi v^2}}$ oder

$$v^4 + \frac{2gh}{\psi}v^2 = \frac{g^2h^2}{\psi(\chi^2-\psi)},$$

und es ergiebt sich durch Auflösung dieser Gleichung die gesuchte Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\left(\frac{\chi - \sqrt{\chi^2-\psi}}{\psi\sqrt{\chi^2-\psi}}\right)gh},$$

worin

$$\psi = 1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\frac{sin.\beta\ cos.\alpha}{sin.(\beta-\alpha)} - \zeta\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\left(\frac{sin.\beta}{sin.(\beta-\alpha)}\right)^2$$

und

$$\chi = \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\frac{sin.\beta\ cos.\alpha}{sin.(\beta-\alpha)}\right]\frac{\sqrt{1+\zeta_1}}{cos.\,\delta}$$

einzusetzen ist.

Setzt man ζ und ζ_1, sowie auch $\delta = 0$, läßt man also die Nebenhindernisse und andere Verluste außer Acht, so hat man:

$$\psi = 1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\frac{sin.\beta\ cos.\alpha}{sin.(\beta-\alpha)}$$

und

$$\chi = 1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin.\,\beta\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)},$$

folglich:

$$\chi^2 - \psi = \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 \left(\frac{sin.\,\beta\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)}\right)^2,$$

$$\sqrt{\chi^2 - \psi} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin.\,\beta\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)},$$

$$\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi} = 1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin.\,\beta\ cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)} = \psi$$

und

$$v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\chi^2 - \psi}} \cdot g h} = \frac{r}{r_1}\sqrt{\frac{g h\, sin.\,(\beta - \alpha)}{sin.\,\beta\ cos.\,\alpha}},$$

wie schon oben §. 251 gefunden worden ist.

Setzen wir endlich den erst gefundenen Werth für v in die obige Leistungsformel

$$L = \frac{cos.\,\delta\,.\,Q\gamma}{g\sqrt{1 + \zeta_1}}\left(\sqrt{2 g h + \psi v^2} - \chi v\right) v$$

ein, so erhalten wir folgenden Ausdruck für die Maximalleistung der Turbine:

$$L = \left(\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi}\right)\frac{cos.\,\delta}{\sqrt{1 + \zeta_1}} \cdot Q h \gamma.$$

Da nach dem Obigen, bei Vernachlässigung der Nebenhindernisse,

$\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi} = \psi$, sowie
$\sqrt{1 + \zeta_1} = 1$ und
$cos.\,\delta = 1$

ist, so ergiebt sich, wie zu erwarten stand, dann die Maximalleistung:

$L = Q h \gamma =$ dem vorhandenen Arbeitsvermögen.

Hat man mit Hülfe der Formeln

$$v = \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\sqrt{{}^{\circ} - \psi}} \cdot g h}$$

und

$$v_1 = \frac{r_1}{r} v$$

die Umdrehungsgeschwindigkeiten v und v_1 bestimmt, so kann man auch die Geschwindigkeiten

$$c = \frac{v_1\, sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)},$$

$$c_1 = \frac{c\, sin.\, \alpha}{sin.\, \beta} \text{ und}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh + \psi v^2}{1 + \zeta_1}} = \sqrt{\frac{\chi + \sqrt{\chi^2 - \psi}}{(1 + \zeta_1)\sqrt{\chi^2 - \psi}} \cdot gh}$$

berechnen, und endlich die erforderlichen Querschnitte durch die Querschnitte

$$F = \frac{Q}{c},\ F_1 = \frac{Q}{c_1} \text{ und } F_2 = \frac{Q}{c_2}$$

ermitteln.

Hat man es mit einer Turbine ohne Leitschaufeln zu thun, so sind zwar dieselben Formeln in Anwendung zu bringen, nur ist hier

$$cos.\, \alpha = cos.\, 90^0 = 0,$$

folglich

$$\psi = 1 - \zeta \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 (tang.\, \beta)^2$$

und

$$\chi = \frac{\sqrt{1 + \zeta_1}}{cos.\, \delta}$$

einzusetzen.

Einfluss der Schützenstellung. Die Turbinen stehen in einer §. 257
Beziehung den ober- und mittelschlägigen Wasserrädern wesentlich nach. Wenn bei einem der letzteren Räder ein kleineres Wasserquantum vorhanden oder eine kleinere Arbeit zu verrichten nöthig ist, und man zu diesem Zwecke die Schütze tiefer stellt, so wird, wie wir wissen, der Wirkungsgrad wegen der schwächeren Zellenfüllung eher größer als kleiner; bei einer Turbine findet aber das Gegentheil statt, es wird hier der Wirkungsgrad bei tieferem Schützenstande ein kleinerer, weil nun das Wasser mit Stoß in das Rad tritt. Dieses Verhältniß ist nun deshalb ein sehr ungünstiges, weil man gerade bei einem kleineren Aufschlage ökonomischer mit der Arbeit umzugehen Ursache hat, als bei einem größeren oder vielleicht im Ueberfluß vorhandenen Aufschlage. Daß aber der Verlust an Arbeit bei einem tieferen Schützenstande ein sehr beträchtlicher sein kann, wird sich aus Folgendem ergeben.

Zerlegen wir die Geschwindigkeiten c und c_1 in ihre radiale und tangentiale Componenten

$$c\, sin.\, \alpha,\quad c\, cos.\, \alpha,\quad c_1\, sin.\, \beta \text{ und } c_1\, cos.\, \beta,$$

und subtrahiren wir je zwei derselben von einander, so bleiben die relativen Geschwindigkeiten

$$c\, sin.\, \alpha - c_1\, sin.\, \beta \text{ und } c\, cos.\, \alpha - c_1\, cos.\, \beta;$$

da aber noch das Wasser im Rade mit diesem die Geschwindigkeit v_1 gemeinschaftlich hat, so ist in Wirklichkeit die letztere relative Geschwindigkeit

$$= c\, cos.\, \alpha - c_1\, cos.\, \beta - v_1.$$

Einem bekannten Gesetze zufolge ist nun der einer plötzlichen Aufhebung dieser Geschwindigkeiten entsprechende Verlust an Druckhöhe (s. Bd. I, §. 436):

$$y = \frac{1}{2g}[(c\, sin.\alpha - c_1\, sin.\beta)^2 + (c\, cos.\alpha - c_1\, cos.\beta - v_1)^2],$$

oder an mechanischer Leistung:

$$Y = y\,Q\gamma = [(c\, sin.\alpha - c_1\, sin.\beta)^2 + (c\, cos.\alpha - c_1\, cos.\beta - v_1)^2]\,\frac{Q\gamma}{2g}.$$

Führen wir in dieser Formel

$$c_2 = v \quad \text{und} \quad v_1 = \frac{r_1}{r}\,v,$$

ferner

$$c = \frac{F_2}{F}\,v \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{F_2}{F_1}\,v$$

ein, so erhalten wir diesen Arbeitsverlust:

$$Y = \left[\left(\frac{F_2\, sin.\alpha}{F} - \frac{F_2\, sin.\beta}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2\, cos.\alpha}{F} - \frac{F_2\, cos.\beta}{F_1} - \frac{r_1}{r}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Hiernach läßt sich beurtheilen, welche Leistung einer Turbine entgeht, wenn sie den Formeln

$$F_1\, sin.\alpha = F\, sin.\beta$$

und

$$F_1\, cos.\alpha = F\, cos.\beta + \frac{FF_1}{F_2}\cdot\frac{r_1}{r}$$

nicht Genüge leistet. Wenn aber auch diesen Forderungen bei dem Normalgange, d. i. bei völlig geöffneter Schütze, entsprochen wird, so geschieht es doch nicht mehr, wenn die Schütze tiefer steht und F einen kleineren Werth F_x annimmt. Dieser Arbeitsverlust ist dann bei der Geschwindigkeit

$$c_2 = v = \sqrt{\frac{gh\, sin.(\beta - \alpha)}{sin.\beta\ cos.\alpha}}:$$

$$Y = \left[\left(\frac{F_2\, sin.\alpha}{F_x} - \frac{F_2\, sin.\beta}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{F_2\, cos.\alpha}{F_x} - \frac{F_2\, cos.\beta}{F_1} - \frac{r_1}{r}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma,$$

oder hierin

$$F\, sin.\beta = F_1\, sin.\alpha$$

und

$$F\, cos.\beta + \frac{FF_1}{F_2}\cdot\frac{r_1}{r} = F_1\, cos.\alpha$$

eingesetzt,

$$Y = \left[\left(\frac{1}{F_x} - \frac{1}{F}\right)^2 (F_2\, sin.\alpha)^2 + \left(\frac{1}{F_x} - \frac{1}{F}\right)^2 (F_2\, cos.\alpha)^2\right]\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma$$

$$= \left(\frac{F_2}{F_x} - \frac{F_2}{F}\right)^2 \frac{v^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Setzen wir nur beispielsweise $\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2} h$, was bei den Turbinen von Fourneyron zulässig ist, so erhalten wir:

$$Y = \left(\frac{F_2}{F_x} - \frac{F_2}{F}\right)^2 \cdot \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} Q h \gamma;$$

also bei halb geöffneter Schütze, wo $F_x = \frac{1}{2} F$ ist,

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{F_2 r}{F r_1}\right)^2 Q h \gamma.$$

Man ersieht hieraus, daß dieser Verlust dadurch herabgezogen werden kann, daß man die Verhältnisse $\frac{F_2}{F}$ und $\frac{r}{r_1}$ klein, also überhaupt die Ausmündung des Rades und den äußeren Radhalbmesser klein, die Ausmündungen und den Halbmesser des Reservoirs aber groß macht.

Da $\frac{F_2}{F} = \frac{r_1 \sin.\beta}{r \sin.(\beta - \alpha)}$ ist, so hat man im letzten Falle auch

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}\right)^2 Q h \gamma,$$

und folglich für $\beta = 90^0$ und $\alpha = 20^0$:

$$Y = 0{,}57\, Q h \gamma.$$

Es gehen also in diesem Falle 57 Procent an Leistung verloren.

In der Regel hört bei tieferen Schützenstellungen, wenn $F_x < \frac{1}{2} F$ ist, der volle Ausfluß ganz auf, indem das Wasser die Radcanäle nicht mehr vollständig ausfüllt, und das Rad in eine Druckturbine übergeht.

Stellapparate. Um den Arbeitsverlust, welcher bei einem tieferen §. 258 Schützenstande eintritt, zu vermeiden oder mindestens zu ermäßigen, und um den vollen Ausfluß des Wassers aus dem Rade nicht zu verlieren, hat man in der neuesten Zeit mancherlei Vorrichtungen und namentlich Fourneyron zu diesem Zwecke die Etagenräder (s. §. 248, Fig. 486) in Anwendung gebracht. Dieselben Räder sind von anderen Turbinen nur insofern verschieden, als sie durch eine oder zwei ringförmige Scheidewände in zwei oder drei Räume abgetheilt sind, so daß bei tieferem Schützenstande eine oder zwei Abtheilungen ganz abgeschlossen und das Wasser nur durch die übrigen Abtheilungen oder Etagen geht. Diese Räder erfüllen natürlich ihren Zweck nicht vollständig. Anders ist es aber bei dem in Fig. 493 (a. f. S.) abgebildeten Apparate von Combes. Hier befindet sich zwischen beiden Radkränzen AA und BB ein Teller DD, der sich durch Stangen $E, E \ldots$ mit Hülfe eines einfachen Mechanismus, selbst während des Ganges der Maschine, heben und senken läßt und immer so gestellt wird, daß das bei FF zuströmende Wasser bei seinem Ausflusse den Raum AD vollstän-

dig ausfüllt. Jedenfalls erfüllt dieses Rad seinen Zweck vollständig, nur ist seine Ausführung schwer und kostbar.

Fig. 493.

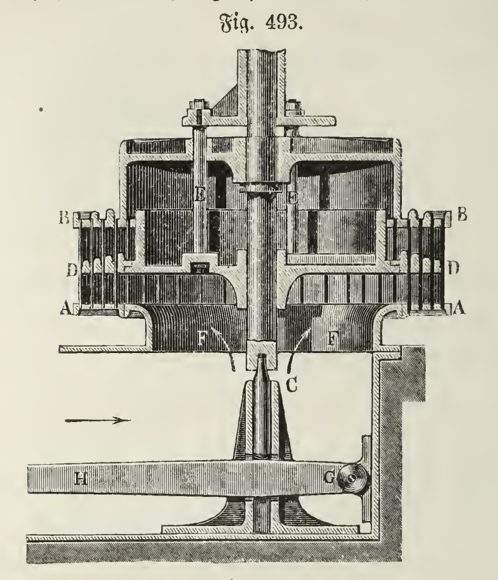
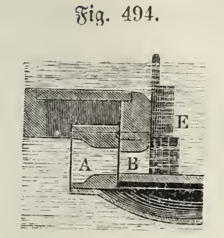
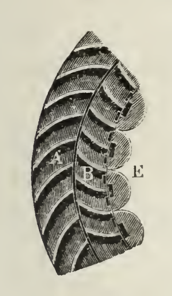


Fig. 494.





Eine ähnliche Construction, wo auch das Wasser von unten zufließt, hat die Turbine von Laurent und Deckherr (s. Armengaud, Publ. Ind. Vol. 6, auch die Zeitschrift „der Ingenieur“ Bd. II). Bei dieser Turbine ist sowohl der obere Radkranz als auch der Radteller verstellbar, um nicht allein die Radweite, sondern auch die Höhe des Leitschaufelapparates, entsprechend der Größe des Aufschlags, abändern zu können. Natürlich sind beide mit den nöthigen Durchschnitten versehen, damit sie über die Rad- und Leitschaufeln hinweggezogen werden können.

Die Turbinen von Callon sowie auch die von Gentilhomme sind ebenfalls so construirt, daß das, wenn auch in kleiner Menge zufließende Wasser noch die Radzellen bei seiner Bewegung durch dieselben ausfüllt. Einen Theil der Callon'schen Turbine stellt Fig. 494 sowohl im Aufals auch im Grundrisse vor.

Man sieht, der Leitschaufelapparat B ist hier oben ganz zugedeckt und von innen durch ein System von Schützen $E, E \ldots$, wovon jede über zwei Leitschaufeln weggeht, zu verschließen. Um den Ausfluß des Wassers zu reguliren, hat man also nur eine gewisse Anzahl von Schützen zu heben und die übrigen ganz niederzulassen. Obgleich durch diesen Ausflußapparat das Wasser in jedem Falle ohne Stoß in das Rad eintreten kann, so besitzt doch dieses Rad noch insofern einen gewissen Grad von Unvollkommenheit,

als hier das Wasser wenig oder gar nicht durch Reaction wirken kann, da es nicht in ununterbrochenen Strömen durch dessen Canäle hindurchfließt. Bei diesem abwechselnden Leeren und Füllen der Radcanäle sind die Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 unaufhörlichen Schwankungen unterworfen, wenn x nicht $= 0$, also β nicht $= 2\alpha$ ist. Während z. B. bei noch ungefülltem Radcanale $c = \sqrt{2gh}$ ist, fällt bei vollständiger Füllung des Canales

$$c = \sqrt{2g(h-x)}$$

aus; so oscillirt mit jedem Füllen und Leeren, oder während eine Radzelle von einer verschlossenen Schütze zur anderen rückt, die Geschwindigkeit c innerhalb der Grenzen

$$\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad \sqrt{2g(h-x)}$$

unaufhörlich. Wenn nun die Maximalleistung nur bei einem bestimmten Werthe von v und $c_2 = \frac{Fc}{F_2}$ zu erreichen ist, so fällt in die Augen, daß bei einem veränderlichen Werthe von $c_2 = \frac{Fc}{F_2}$ dieselbe nicht erlangt werden kann.

Bei der Turbine von Gentilhomme wird derselbe Zweck durch Kreissectoren erreicht, welche mittels Zahnrad und Getriebe so gestellt werden, daß sie einen Theil des Leitschaufelapparates verschließen. Jedenfalls ist diese Einrichtung noch unvollkommener als die bei der Callon'schen Turbine.

Anmerkung. Eine ähnliche Stellvorrichtung wie die Combes'sche giebt auch der Ingenieur Hänel an. S. deutsche Gewerbzeitung, 1846.

Druckturbinen. Es ist nun noch nöthig, eine Vergleichung zwischen §. 259
den seither betrachteten Reactionsturbinen und den Stoß- und Druckturbinen, in welche jene allemal übergehen, wenn die Schütze C, Fig. 495, die größere Hälfte der Radweite AB verschließt, anzustellen. Da das Wasser W die Radcanäle nur zum Theil anfüllt, so ist bei einem Gange in freier Luft der übrige Theil mit Luft angefüllt, es ist daher auch der Druck unmittelbar vor dem Rade dem Atmosphärendrucke gleich, und die Geschwindigkeit stets $c = \sqrt{2gh}$, und nicht von dem Gange des Rades abhängig. Nun haben wir aber für die Austrittsgeschwindigkeit:

Fig. 495.

$$c_2^2 = 2gh + v^2 - 2cv_1 \cos. \alpha,$$

und für die Maximalleistung:

$$c_2 = v,$$

daher gilt für diese Turbinen die Regel:

$$2\,c\,v_1\;cos.\,\alpha = 2\,g\,h,$$

oder $c = \sqrt{2\,g\,h}$ substituirt:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{2\,cos.\,\alpha}.$$

Für die Reactionsturbinen haben wir

$$v_1 = \sqrt{g\,h\,(1 - tang.\,\alpha\;cotg.\,\beta)}$$

gefunden; und wir sehen daher, daß die Bedingungen für die Maximalleistung beider zusammenfallen, wenn $\frac{1}{2\,cos.\,\alpha^2} = 1 - tang.\,\alpha\;cotg.\,\beta$ oder $tang.\,\beta = tang.\,2\,\alpha$, also $\beta = 2\,\alpha$ ist; welche Beziehung uns allerdings schon insofern bekannt ist, da wir sie unter der Bedingung $x = 0$ gefunden haben. Es findet also insofern ein wesentlicher Unterschied zwischen den Turbinen beider Classen statt, als die Geschwindigkeit der Maximalleistung bei der einen Classe nicht von β abhängt, bei der anderen aber durch β bedingt ist, und daß nur für $\beta = 2\,\alpha$ diese Geschwindigkeit für beide Classen eine und dieselbe ist. Während man also die Geschwindigkeit v_1 durch Auswahl des Winkels β bei den Reactionsturbinen innerhalb sehr weiter Grenzen beliebig machen kann, ist bei den Druckturbinen eine solche Wahl gar nicht gestattet.

In Beziehung auf die Leistungen beider Räder läßt sich aber Folgendes als Thatsache anführen. Wenn man bei einer Reactionsturbine die Schütze allmälig tiefer nieder läßt, so stellt sich ein kleinerer Wirkungsgrad heraus; hat man dieselbe endlich so tief gestellt, daß das Wasser die Radcanäle nicht mehr zu füllen vermag und die Turbine in eine Druckturbine übergeht, so wird plötzlich der Wirkungsgrad ein größerer, weil nun der durch die plötzliche Geschwindigkeitsveränderung herbeigeführte Arbeitsverlust wegfällt. Bei noch tieferen Stellungen nimmt der Wirkungsgrad wieder allmälig ab. Diesem zufolge scheint allerdings den Druckturbinen ein ansehnlicher Vorzug vor den Reactionsturbinen eingeräumt werden zu müssen, allein derselbe ist wegen anderer Beziehungen doch nicht überwiegend, und nur dann zuzugestehen, wenn eine Turbine mit sehr veränderlichen Wassermengen gespeist wird und nicht unter Wasser umläuft. Da das in das Rad eintretende Wasser hier einen viel weiteren Raum vorfindet, als es bei seiner Geschwindigkeit nöthig hat, so nimmt es in demselben unregelmäßige Seitenbewegungen an, und tritt nicht nur nicht mit der oben berechneten Geschwindigkeit c_2 aus, sondern verliert auch einen Theil seines Arbeitsvermögens, welchen die besonderen Widerstände bei den unregelmäßigen Bewegungen und das Zerreißen des Wassers verzehren. Hiervon liefern zahlreiche Beobachtungen den sichersten Beweis, und es läßt sich derselbe an jeder Turbine auch sogleich führen, wenn man sie mit der vortheilhaftesten

Geschwindigkeit einmal als Reactions- und einmal als Druckturbine umlaufen läßt. Immer giebt die Turbine bei vollem Ausflusse und völlig geöffneter Schütze einen größeren Wirkungsgrad, als bei einem durch einen tieferen Schützenstand hervorgebrachten unvollen Ausflusse.

Bei Turbinen, welche unter Wasser gehen, erfolgt stets ein voller Ausfluß; diese Räder sind also nur Reactionsturbinen. Von ihnen ist natürlich ebenfalls bei völlig geöffneter Schütze ein größerer Wirkungsgrad zu erwarten, als von den in freier Luft umlaufenden Druckturbinen; dagegen läßt sich auch bestimmt darauf rechnen, daß bei tieferem Schützenstande, wo die Schutzmündung nur $^2/_3$ oder noch ein kleinerer Theil der Radweite ist, der Wirkungsgrad der ersteren Turbine sich kleiner herausstellt, als bei einer Druckturbine. Es ist hiernach der große Nutzen der Etagen oder der Stellkränze zu ermessen.

Anmerkung. Die älteren Fourneyron'schen Turbinen waren bloße Druckturbinen; nachdem man aber von den größeren Leistungen der Reactionsturbinen vielfache Beweise erlangt hat, werden jetzt fast nur Reactionsturbinen construirt. Mehrere in hiesiger Umgegend im Gange befindliche Druckturbinen sprechen durch ihre kleinen Wirkungsgrade ebenfalls nicht zu Gunsten dieser Räder.

Leistung der Reactionsturbinen. Wir können nun auch die Leistung einer Reactionsturbine mit innerer Beaufschlagung ausmitteln. Das disponible Arbeitsquantum ist, bei der Aufschlagmenge Q und dem Gefälle h: §. 260

$$L = Qh\gamma.$$

Hiervon gehen aber die Verluste ab, welche das Wasser beim Durchgange durch die Rad- und Leitschaufelcanäle in Folge der Reibung u. s. w. erleidet. Da das Wasser mit der Geschwindigkeit c aus dem Leitschaufelapparate tritt, so können wir den Druckhöhenverlust beim Durchgange des Wassers durch diesen setzen:

$$h_1 = \zeta \frac{c^2}{2g},$$

und da es mit einer Geschwindigkeit c_2 aus den Radcanälen strömt, so können wir den Druckverlust beim Durchgange des Wassers durch diese Canäle durch eine Widerstandshöhe

$$h_2 = \zeta_1 \cdot \frac{c_2^2}{2g}$$

messen.

Nach den Versuchen des Verfassers ist für gut construirte Canäle der Widerstandscoefficient $\zeta = \zeta_1 = 0{,}05$ bis $0{,}10$ zu setzen. (S. den Aufsatz im polytechn. Centralblatt, 1850, Lieferung III, betitelt: „Versuche über den Widerstand, welchen das Wasser beim Durchgange durch die Turbinencanäle erleidet.“)

Zu diesen Druckverlusten kommt noch die Geschwindigkeitshöhe $\frac{w^2}{2g}$ des abfließenden Wassers, welche mit der lebendigen Kraft desselben dem Rade entzogen wird. Wir können daher die effective Leistung der Turbine setzen:

$$L_1 = [h - (h_1 + h_2 + h_3)]\, Q\gamma$$
$$= \left(h - \frac{\zeta c^2 + \zeta_1 c_2^2 + w^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Für den vortheilhaftesten Gang hat man $c_2 = v$, ferner $w = 2v\, sin. \frac{\delta}{2}$ und, da $c r_1\, sin. \alpha = c_2 r\, sin. \delta$ ist,

$$c = \frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha} \cdot c_2 = \frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha} \cdot v,$$

folglich, wenn man noch $\zeta_1 = \zeta$ annimmt,

$$L_1 = \left[h - \left(\zeta \left[1 + \left(\frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha}\right)^2\right] + 4\left(sin. \frac{\delta}{2}\right)^2\right) \frac{v^2}{2g}\right] Q\gamma$$
$$= \left[1 - \left(\zeta \left[1 + \left(\frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha}\right)^2\right] + 4\left(sin. \frac{\delta}{2}\right)^2\right) \frac{v^2}{2gh}\right] Qh\gamma,$$

also ist der Wirkungsgrad der Turbine

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{Qh\gamma}$$
$$= 1 - \left(\zeta \left[1 + \left(\frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha}\right)^2\right] + 4\left(sin. \frac{\delta}{2}\right)^2\right) \frac{v^2}{2gh}.$$

Nach dem Obigen (§. 251) ist aber

$$\frac{v^2}{2gh} = \frac{1}{\zeta \left[1 + \left(\frac{r_1\, sin. \beta}{r\, sin. (\beta - \alpha)}\right)^2\right] + 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin. \beta\, cos. \alpha}{sin. (\beta - \alpha)}},$$

oder, da $c = \frac{v_1\, sin. \beta}{sin. (\beta - \alpha)} = \frac{r_1 v\, sin. \beta}{r\, sin. (\beta - \alpha)} = \frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha} v$, also

$sin. \delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin. \alpha\, sin. \beta}{sin. (\beta - \alpha)}$ sein muß,

$$\frac{v^2}{2gh} = \frac{1}{\zeta \left[1 + \left(\frac{r\, sin. \delta}{r_1\, sin. \alpha}\right)^2\right] + 2\, cotg. \alpha\, sin. \delta};$$

daher läßt sich endlich der Wirkungsgrad der Turbine

$$\eta = 1 - \frac{\zeta \left[1 + \left(\frac{r \sin. \delta}{r_1 \sin. \alpha}\right)^2\right] + 4 \left(\sin. \frac{\delta}{2}\right)^2}{\zeta \left[1 + \left(\frac{r \sin. \delta}{r_1 \sin. \alpha}\right)^2\right] + 2 \operatorname{cotg.} \alpha \sin. \delta}$$

setzen.

Von der hier gefundenen Leistung ist noch der Arbeitsverlust abzuziehen, welchen die Reibung am Stifte des Rades herbeiführt. Ist G das Gewicht der umlaufenden Turbine, r_2 der Halbmesser ihres Zapfens oder Stiftes und bezeichnet φ den Reibungscoefficienten, so haben wir diesen Arbeitsverlust:

$$L_2 = {}^2/_3\, \varphi\, G \cdot \frac{r_2}{r} v \quad \text{(s. Bd. I, §. 188).}$$

Die im Obigen entwickelten Formeln und Regeln gelten nicht allein für Turbinen mit innerer, sondern auch für solche mit äußerer Beaufschlagung, nur hat man hier v und v_1, sowie r und r_1 mit einander zu vertauschen, also unter r den inneren und r_1 den Radhalbmesser, sowie unter v die innere und unter v_1 die äußere Radgeschwindigkeit zu verstehen.

Uebrigens ist nur bei Turbinen, welche unter Wasser gehen, h von Wasserspiegel zu Wasserspiegel zu nehmen, bei Turbinen, welche in freier Luft umlaufen, hingegen von Oberwasserspiegel bis Mitte der Ausmündungen des Rades. Im letzteren Falle geht also durch das Freistellen, von Mitte der Ausmündungen bis Unterwasserspiegel gemessen, ein Theil des Totalgefälles verloren, wogegen den unter Wasser gehenden Turbinen durch die Reibung des Wassers am Rade ein Verlust erwächst.

Anmerkung. Bei Hochdruckturbinen ist auch noch der Arbeitsverlust, welchen die Reibung des Wassers in den Einfallröhren veranlaßt, abzuziehen.

Da schon wegen der Bewegungshindernisse des Wassers in den Rad- und Leitschaufelcanälen der vortheilhafteste Gang nicht genau für $c_2 = v$ statt hat, so wird dieses um so mehr der Fall sein, wenn das Wasser mit Stoß in das Rad eintritt. Lassen wir eine Turbine nicht mit der vortheilhaftesten Geschwindigkeit umlaufen, setzen wir aber voraus, daß die Schütze völlig geöffnet, folglich §. 261

$$F c = F_1 c_1, \text{ oder}$$
$$c \sin. \alpha = c_1 \sin. \beta$$

sei, so haben wir für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2, statt

$$\left[1 + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 + \frac{2 F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} c_2 v \cos. \alpha - v^2 = 2 g h$$

(aus §. 250),

$$\left[1 + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 + \frac{2 F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} c_2 v \cos. \alpha - v^2 = 2 g (h - y),$$

oder, nach §. 257:

$$\left[1 + \zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 + \left[\left(\frac{F_2 \cos.\alpha}{F} - \frac{F_2 \cos.\beta}{F_1}\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v\right]^2$$
$$+ \frac{2 F_2}{F} \frac{r_1}{r} c_2 v \cos.\alpha - v^2 = 2 g h$$

zu setzen.

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man c_2 durch v ausdrücken, und setzt man nun diesen Werth in die Leistungsformel

$$L_1 = \left(h - y - \frac{\zeta c^2 + \zeta_1 c_2^2 + w^2}{2 g}\right) Q \gamma$$
$$= \left[h - \frac{1}{2 g}\left(\left[\zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[\left(\frac{F_2 \cos.\alpha}{F} - \frac{F_2 \cos.\beta}{F_1}\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v\right]^2 + (c_2^2 - 2 c_2 v \cos.\delta + v^2)\right)\right] Q \gamma$$

ein, so läßt sich durch dieselbe die einer beliebigen Umdrehungsgeschwindigkeit v entsprechende Leistung der Turbine berechnen.

Geht die Turbine ohne Last um, so ist ihre Leistung = Null, und daher:

$$\left[\zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 + \left[\left(\frac{F_2 \cos.\alpha}{F} - \frac{F_2 \cos.\beta}{F_1}\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v\right]^2$$
$$+ c_2^2 - 2 c_2 v \cos.\delta + v^2 = 2 g h.$$

Zieht man diese Gleichung von der obigen Gleichung für c_2 ab, so erhält man folgenden einfachen Ausdruck für die nun mit v_0 zu bezeichnende Maximalumdrehungszahl:

$$2 v_0^2 = 2 \cdot \frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} c_2 v_0 \cos.\alpha + 2 c_2 v_0 \cos.\delta,$$

oder:

$$v_0 = \left(\frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} \cos.\alpha + \cos.\delta\right) c_2,$$

sowie:

$$c_2 = \frac{v_0}{\frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} \cos.\alpha + \cos.\delta}.$$

Wenn wir diesen Werth von c_2 in die Gleichung

$$\left[1 + \zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 + \left[\left(\frac{F_2 \cos.\alpha}{F} - \frac{F_2 \cos.\beta}{F_1}\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v_0\right]^2$$
$$+ \frac{2 F_2}{F} \frac{r_1}{r} c_2 v_0 \cos.\alpha - v_0^2 = 2 g h$$

setzen, so erhalten wir dadurch eine Formel zur Bestimmung der Geschwin-

digkeit v_0, mit welcher das Rad unbelastet umläuft, und es läßt sich nun dieselbe mit der Geschwindigkeit $v = c_2$ vergleichen, wobei das Wasser ohne Stoß in das Rad tritt, und die Leistung des letzteren nahe ein Maximum ist.

Anmerkung. Bei den gewöhnlichen Leitschaufelturbinen ist δ nahe $= \alpha$ und klein, folglich auch $cos. \alpha = cos. \delta$ nahe $= 1$, sowie $\frac{F_2}{F} = \frac{r}{r_1}$, und daher für den Leergang des Rades:

$$c_2 = \frac{v_0}{\frac{F_2}{F} \cdot \frac{r_1}{r} cos. \alpha + cos. \delta} \text{ nahe } = \frac{v_0}{2}.$$

Setzen wir nun noch $\frac{r_1}{r} = \frac{3}{4}$ und $\zeta_1 = \zeta = 0,1$, so erhalten wir:

$$\left[1 + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2 = (1 + 0,1 \,.\, {}^{16}/_9 + 0,1) \frac{v_0^2}{4} = 0,32\, v_0^2,$$

ferner $F_1 = F$ und $cos. \beta = cos. \alpha$ angenommen:

$$\left[\left(\frac{F_2}{F} cos. \alpha - \frac{F_2}{F_1} cos. \beta\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v_0\right]^2 = \left(\frac{r c_2}{2 r_1} - \frac{r_1 v_0}{r}\right)^2 = ({}^1/_3 - {}^3/_4)^2 v_0^2$$
$$= 0,17\, v_0^2$$

und

$$2 \frac{F_2}{F} \frac{r_1}{r} c_2 v_0 cos. \alpha = v_0^2,$$

so daß nun

$$(0,32 + 0,17 + 1 - 1)\, v_0^2 = 2\, g h, \text{ oder}$$

$$0,49 \frac{v_0^2}{2 g} = h$$

folgt.

Für die Geschwindigkeit $v = c_2$ des Rades, wobei dasselbe nahe die Maximalarbeit verrichtet, ist annähernd

$$\left(1 + \zeta \frac{F_2}{F} + \zeta_1\right) c_2^2 = 1,28\, v^2,$$

ferner

$$\left[\left(\frac{F_2}{F} cos. \alpha - \frac{F_2}{F_1} cos. \beta\right) c_2 - \frac{r_1}{r} v\right]^2 = ({}^2/_3 - {}^3/_4)^2 v^2 \text{ nahe} = 0,01 \quad \text{und}$$

$$2 \frac{F_2}{F} \frac{r_1}{r} c_2 v\, cos. \alpha = 2\, v^2,$$

daher:

$$(1,29 + 2 - 1)\, v^2 = 2\, g h,$$

so daß sich

$$2,29 \cdot \frac{v^2}{2 g} = h \quad \text{ergiebt.}$$

Hiernach folgt nun:

$$\frac{v_0^2}{v^2} = \frac{2,29}{0,49} \text{ nahe } = 5 \quad \text{und}$$

$$\frac{v_0}{v} = \sqrt{5} = 2,22.$$

In Folge der Zapfenreibung muß dieses Verhältniß noch etwas kleiner ausfallen. In der That, es führen auch die angestellten Versuche gewöhnlich auf das

Verhältniß $\frac{v_0}{v} = 2$; d. h. es läuft erfahrungsmäßig, die Turbine unbelastet noch einmal so schnell um als während ihrer größten Arbeitsverrichtung.

§. 262 **Anordnung der Leitschaufelturbinen.** Wir haben nun die nöthigsten Regeln zur Berechnung, Anordnung und Construction der Turbinen mit innerer Beaufschlagung zu entwickeln. Jedenfalls können wir das Aufschlagquantum Q und das Gefälle h als gegeben ansehen; und wäre statt Q die Leistung L gegeben, so würde sich wenigstens Q aus L und aus dem Wirkungsgrade η (circa 0,75) durch die Formel

$$Q = \frac{L}{\eta h \gamma}$$

berechnen lassen. Die übrigen Größen r, r_1, α, β, δ, v, n, e u. s. w. sind nun theils beliebig, theils erfahrungsmäßig anzunehmen, theils theoretisch zu bestimmen. Zunächst nimmt man den Winkel α beliebig an. Bei den Rädern ohne Leitschaufeln ist er bekanntlich als 90° in Rechnung zu bringen, bei den Leitschaufelturbinen, von welchen zunächst die Rede ist, hat man

1) $\alpha = 20$ bis 30^0

zu machen, ersteres bei hohem, letzteres bei kleinem Gefälle, um dort nicht zu weite und hier nicht zu enge Ausflußöffnungen, also dort nicht zu kleine und hier nicht zu große Räder zu erhalten.

Der Eintrittswinkel β ist durch die Auswahl von α gewissermaßen schon bestimmt. Damit das Wasser ohne Druck in das Rad eintrete, müßte $\beta = 2\alpha$ sein, weil aber dieser Druck abnimmt, wenn die Schütze tiefer gestellt wird, so macht man, um keinen negativen Druck zu erhalten, β größer als 2α, am besten möchte vielleicht

2) $\beta = 2\alpha + 20^0$ bis $2\alpha + 30^0$

anzunehmen sein.

Das Verhältniß $v = \frac{r}{r_1}$ der Radhalbmesser zu einander ist

3) zwischen den Grenzen 1,25 bis 1,5 auszuwählen.

Aus leicht begreiflichen Gründen ist bei einem großen Werthe von β und bei einem großen Rade das kleinere Verhältniß, bei einem kleineren Werthe von β und bei einem kleineren Rade aber das größere Verhältniß auszuwählen.

Der Austrittswinkel δ ist durch die Formel

4) $sin.\,\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin.\,\alpha\; sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)} = \frac{sin.\,\alpha\; sin.\,\beta}{v^2\, sin.\,(\beta - \alpha)}$

bestimmt.

Dieser Winkel darf, damit dem abfließenden Wasser so viel wie möglich Arbeitsvermögen entzogen werde, nicht über 20 Grad betragen, und es sind deshalb die Werthe von α, β und $\nu = \frac{r}{r_1}$ so zu nehmen, daß δ unter 20 Grad ausfällt. Manche, z. B. Combes und Callon, suchen δ dadurch herabzuziehen, daß sie dem Rade außen eine größere Weite geben als innen; da aber dadurch der volle Ausfluß des Wassers gefährdet wird, so ist diese Construction mit Vorsicht anzuwenden.

Um ferner die Halbmesser des Rades und des Ausflußreservoirs zu ermitteln, wollen wir, in Uebereinstimmung mit den besseren der bekannten Turbinen, zur Bedingung machen, daß die Geschwindigkeit des Wassers im Reservoir 3 Fuß nicht überschreite. Legen wir aber diese Geschwindigkeit zu Grunde und lassen wir dabei die Querschnitte der Wellenröhre und der Schütze außer Acht, so können wir setzen:

$$Q = 3\,\pi r_1^2,$$

und folglich umgekehrt, den äußeren Halbmesser des Ausflußgefäßes oder den inneren Radhalbmesser:

$$5)\quad r_1 = \sqrt{\frac{Q}{3\pi}} = 0,326\,\sqrt{Q},$$

wo r_1 in Fuß und Q in Cubikfuß zu nehmen sind.

Aus diesem Radius folgt nun der äußere Radhalbmesser:

$$6)\quad r = \nu r_1.$$

Die innere Radgeschwindigkeit bestimmt sich ferner durch die Formel

$$7)\quad v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2\sin.\beta\cos.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)} + \zeta\left(\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)}\right)^2 + \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich aber die Austrittsgeschwindigkeit:

$$8)\quad c = \frac{v_1 \sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)},$$

und der Querschnitt:

$$9)\quad F = \frac{Q}{c} = \frac{Q\sin.(\beta-\alpha)}{v_1\sin.\beta},$$

ferner die Eintrittsgeschwindigkeit:

$$10)\quad c_1 = \frac{c\sin.\alpha}{\sin.\beta} = \frac{v_1\sin.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)}$$

und der Querschnitt:

$$11)\quad F_1 = \frac{Q}{c_1} = \frac{Q\sin.(\beta-\alpha)}{v_1\sin.\alpha}$$

endlich die äußere Rad- sowie die Austrittsgeschwindigkeit:

$$12)\ v = c_2 = \frac{r}{r_1}\, v_1,$$

sowie der Inhalt sämmtlicher Austrittsmündungen des Rades:

$$13)\ F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{Q}{v_1} = \frac{r_1}{r} \cdot \frac{Fc}{v_1}.$$

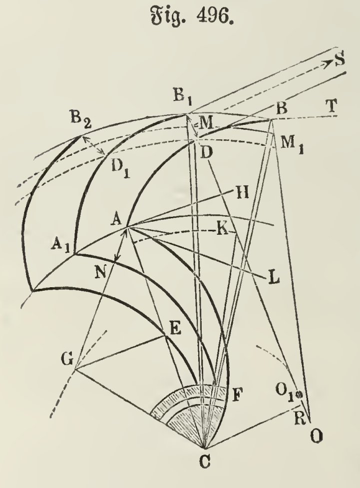
Ueberdies können wir noch die Zahl der Umdrehungen des Rades pr. Minute, nämlich

$$14)\ u = \frac{30\, v}{\pi\, r} = 9{,}55\ \frac{v}{r}$$

angeben.

§. 263 Es bleibt nun noch übrig, Regeln zur Berechnung der Radschaufelzahl und der Dimensionen der Radmündungen abzuleiten. Die Ausflußöffnungen des Rades, welche zusammen den Inhalt $F_2 = \frac{Q}{c_2}$ haben sollten, bilden nicht den äußeren Umfang des Rades, sondern sie sind durch die äußeren Schaufeln B_1, B_2 u. s. w., Fig. 496, gelegte Querschnitte $B_1 D$, $B_2 D_1$ u. s. w. Auch haben wir unter r in den obigen Formeln nicht den Halbmesser CB_1 des äußeren Radumfanges, sondern die Entfernung CM der Mitte der Mündung $B_1 D$ von der Umdrehungsaxe, sowie unter v nicht die Umdrehungsgeschwindigkeit von B, sondern von M zu verstehen. Ist nun δ der Winkel SMT, welchen die Axe des bei $B_1 D$ aus dem Rade tretenden Strahles mit der Tangente MT oder der Normale zum Halbmesser $CM = r$ einschließt, ferner n die Anzahl der Radschaufeln, s ihre Stärke, d die Weite $B_1 D$ der Ausmündungen, e die Radweite oder Schaufelhöhe und λ das Verhältniß $\frac{e}{d}$, so läßt sich der Querschnitt der Ausmündungen des Rades setzen:

Fig. 496.



$$F_2 = n d e = n \lambda d^2 = \frac{n e^2}{\lambda},$$

daher umgekehrt, die Anzahl der Radschaufeln:

$$n = \frac{\lambda F_2}{e^2}.$$

Da die Schaufeln den Querschnitt nse einnehmen, so ist auch

$$F_2 = (2\pi r \sin.\delta - ns)\,e$$
$$= \left(2\pi r \sin.\delta - \frac{\lambda F_2 s}{e^2}\right) e,$$

daher die Radhöhe:

$$e = \frac{F_2}{2\pi r \sin.\delta - \frac{\lambda F_2 s}{e^2}},$$

und annähernd,

$$e = \frac{F_2}{2\pi r \sin.\delta}\left(1 + \frac{\lambda F_2 s}{2\pi r e^2 \sin.\delta}\right)$$
$$= \frac{F_2}{2\pi r \sin.\delta}\left(1 + \frac{2\pi r \sin.\delta\,.\,\lambda s}{F_2}\right).$$

Das Dimensionsverhältniß der Ausflußmündungen, d. i.

1) $\lambda = \frac{e}{d}$,

wird = 2 bis 5 genommen, und zwar ersteres bei langen und weniger gekrümmten, und letzteres bei kurzen und stärker gekrümmten Radcanälen, damit der volle Ausfluß nicht verloren geht. Nun folgt die Radhöhe:

2) $e = \frac{F_2}{2\pi r \sin.\delta}\left(1 + 2\pi r \sin.\delta\cdot\frac{\lambda s}{F_2}\right)$,

ferner die Weite der Ausmündungen:

3) $d = \frac{e}{\lambda}$,

und die Schaufelanzahl:

4) $n = \frac{\lambda F_2}{e^2}$.

Was endlich noch die Anzahl n_1 der Leitschaufeln anlangt, so kann man diese unter folgender Voraussetzung bestimmen.

Wir haben oben $\frac{F}{F_2} = \frac{2\pi r_1 \sin.\alpha}{2\pi r \sin.\delta}$ gesetzt; es ist aber auch, bei der Leitschaufelstärke s_1:

$$\frac{F}{F_2} = \frac{2\pi r_1 \sin.\alpha - n_1 s_1}{2\pi r \sin.\delta - ns};$$

soll daher beiden Gleichungen entsprochen werden, so hat man nur

$$\frac{n_1 s_1}{ns} = \frac{r_1 \sin.\alpha}{r \sin.\delta}$$

zu setzen, oder, da gewöhnlich $s_1 = s$ ist, das Verhältniß der Anzahl der Leitschaufeln zu der der Radschaufeln:

5) $\frac{n_1}{n} = \frac{sin.\,\alpha}{v\;sin.\,\delta}$.

§. 264 **Schaufelconstruction.** Die Schaufeln werden in der Regel nach Kreisbögen gekrümmt; bei den Leitschaufeln reicht ein Bogen aus, bei den Radschaufeln sind aber hierzu zwei tangential an einander anschließende Bögen nothwendig. Wie nun die Halbmesser dieser Bögen zu finden, und wie die letzteren an einander anzusetzen sind, wird aus Folgendem hervorgehen. Man beschreibe mit $\overline{CM} = r$, Fig. 497, einen Kreis, trage die Tangente MT auf und lege an diese den Ausflußwinkel $SMT = \delta$, dessen Bestimmung im vorigen Paragraphen gezeigt wurde. Mit Hülfe des Theilwinkels $\varphi = \frac{360^0}{n}$ u. s. w. bestimme man nun die Größe

Fig. 497.

$$\frac{1}{2}\,d_1 = r\,sin.\,\delta\,tang.\frac{\varphi}{2},$$

und trage dieselbe zu beiden Seiten von M aus als $MB_1 = MD$ rechtwinkelig auf MS auf. Ferner ziehe man den Halbmesser CB_1, lege an denselben den Theilwinkel $B_1CB = \varphi$ an und beschreibe aus dem Axpunkte C durch B_1 und D die Kreise $B_1B\,..$ und $D_1D\dots$ Der erstere dieser Kreise giebt den äußeren Radumfang an, und die Punkte B, B_1 in demselben sind die äußeren Schaufelenden. Zieht man dann BO so, daß der Winkel $BOD = BCB_1 = \varphi$ ausfällt, so erhält man in O das Centrum und in $BO = DO$ den Halbmesser a des vom äußeren Schaufelstücke gebildeten Bogens BD. Macht man noch $B_1O_1 = DO$, so erhält man ebenso das Centrum O_1 des Endstückes B_1D_1 der folgenden Schaufel. Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht aus Folgendem hervor.

Es ist die gerade Linie oder Sehne, welche die benachbarten Mündungsmitten M und M_1 mit einander verbindet,

$$\overline{MM_1} = 2\,\overline{CM}\,sin.\frac{\varphi}{2} = 2\,r\,sin.\frac{\varphi}{2},$$

ferner der Winkel $MOM_1 = \varphi$, und der Winkel

$$OMM_1 = 90^0 - SMM_1 = 90^0 - (SMT + TMM_1)$$
$$= 90^0 - \left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right),$$

endlich der Winkel

$$MM_1O = 180^0 - (MOM_1 + OMM_1) = 90^0 - \left(\frac{\varphi}{2} - \delta\right);$$

folglich, da nach dem bekannten trigonometrischen Sinussatze:

$$\frac{OM_1}{MM_1} = \frac{sin.\, OMM_1}{sin.\, MOM_1} \text{ und } \frac{OM}{MM_1} = \frac{sin.\, OM_1M}{sin.\, MOM_1}$$

ist,

$$\overline{OM_1} = \frac{2\, r\, sin.\frac{\varphi}{2}\, sin.\left[90^0 - \left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right)\right]}{sin.\, \varphi} = \frac{r\, cos.\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right)}{cos.\frac{\varphi}{2}}$$

$$= r\, cos.\, \delta - r\, sin.\, \delta\, tang.\frac{\varphi}{2} \text{ und}$$

$$\overline{OM} = \frac{2\, r\, sin.\frac{\varphi}{2}\, sin.\left[90^0 - \left(\frac{\varphi}{2} - \delta\right)\right]}{sin.\, \varphi} = \frac{r\, cos.\left(\frac{\varphi}{2} - \delta\right)}{cos.\frac{\varphi}{2}}$$

$$= r\, cos.\, \delta + r\, sin.\, \delta\, tang.\frac{\varphi}{2}.$$

Da nun aber $\overline{MD} = \overline{MB_1} = \overline{M_1B} = \frac{d_1}{2} = r\, sin.\, \delta\, tang.\frac{\varphi}{2}$ ist, so folgt:

$$\overline{OB} = \overline{OM_1} + \overline{M_1B} = r\, cos.\, \delta,$$

sowie auch

$$\overline{OD} = \overline{OM} - \overline{MD} = r\, cos.\, \delta.$$

Es ist also der gesuchte Krümmungshalbmesser des äußeren Schaufelstückes BD:

$$\overline{OB} = \overline{OD} = a = r\, cos.\, \delta,$$

und derselbe auch leicht dadurch construirend zu finden, daß man vom Axpunkte C aus eine Parallele CR zu, und vom Mündungsmittelpunkte M ein Perpendikel MR auf MS zieht; das abgeschnittene Stück MR ist dann die Länge $a = r\, cos.\, \delta$ des gesuchten Halbmessers:

$$\overline{OB} = \overline{OD} = \overline{O_1B_1}.$$

Bei dieser Construction kommt das Schaufelende B_1 ganz parallel zum gegenüberliegenden Schaufelelemente D zu liegen, und es fließt deshalb auch der Strahl ganz ohne Contraction aus. Wenn man diesen Parallelismus nicht herstellt, so stellt sich allemal ein Nachtheil heraus; divergiren die Tangenten von B_1 und D nach außen, so läuft man Gefahr, den vollen Ausfluß zu verlieren, und convergiren dieselben, so entsteht eine partielle Contraction und der Strahl schlägt dann gegen die äußere Fläche von BD (s. Bd. I, §. 414).

Das innere Stück DA einer Radschaufel läßt sich in der Regel ebenfalls nach einem Kreisbogen krümmen. Der Halbmesser $\overline{KD} = \overline{KA} = a_1$ dieses Kreisbogens wird auf folgende Weise gefunden. Im Dreiecke CMK ist $\overline{CM} = r$, $\overline{MK} = a_1 + \frac{d_1}{2}$ und $\angle\, CMK = SMT = \delta$, daher:

$$\overline{CK^2} = r^2 + \left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right)^2 - 2\,r\left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right) cos.\,\delta.$$

Im Dreiecke CAK hingegen ist $\overline{CA} = r_1$, $\overline{AK} = a_1$ und $CAK = 180^0 - \beta$, daher:

$$\overline{CK^2} = r_1^2 + a_1^2 + 2\,r_1\,a_1\,cos.\,\beta.$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke folgt nun:

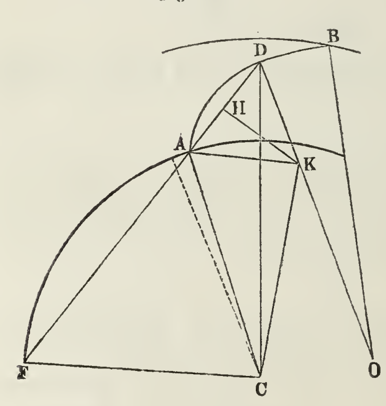
$$r^2 + a_1 d_1 + \frac{d_1^2}{4} - 2\,r\,a_1\,cos.\,\delta - r\,d_1\,cos.\,\delta = r_1^2 + 2\,r_1\,a_1\,cos.\,\beta,$$

und hieraus ergiebt sich der gesuchte Halbmesser:

$$a_1 = \frac{r^2 - r_1^2 - r\,d_1\,cos.\,\delta + \frac{d_1^2}{4}}{2\,(r\,cos.\,\delta + r_1\,cos.\,\beta) - d_1}.$$

Durch Construction findet man diesen Halbmesser auf folgende Weise. Man lege in C an CD, Fig. 498, die gegebene Winkelsumme $DCF = \delta + 180^0 - \beta$ an, mache den Schenkel $\overline{CF} = \overline{CA} = r_1$, und ziehe DF. Der Durchschnittspunkt A dieser Linie mit dem inneren Radumfang ist der zweite Endpunkt des gesuchten Bogens, dessen Centrum K nun gefunden wird, wenn man in der Mitte H der Sehne AD ein Perpendikel errichtet, und dasselbe bis zum Durchschnitt K mit $D\,O$ fortführt. Die Richtigkeit dieser Construction geht aus Folgendem hervor. Da $\overline{CF} = \overline{CA} = r_1$, und $\overline{KA} = \overline{KD} = a_1$ ist, so sind auch die Winkel CAF und CFA, so wie die Winkel DAK und ADK einander gleich, und es läßt sich daher

Fig. 493.



$$\angle CAK = 180^0 - \angle FAC - \angle KAD = 180^0 - \angle CFA - \angle ADK$$
$$= 180^0 - \angle CFA - \angle CDF - \angle CDK \text{ setzen.}$$

Nun ist aber $180^0 - \angle CFA - \angle CDF = DCF = \delta + 180^0 - \beta$, und $CDK = \delta$; daher folgt

$$\angle CAK = \delta + 180^0 - \beta - \angle CDK = 180^0 - \beta.$$

Da dieser Winkel von den Halbmessern CA und KA der Kreisbögen AF und DA eingeschlossen wird, so ist folglich der Winkel, unter welchem diese Bögen in A zusammenstoßen, $= 180^0 - \angle CAK = \beta$, wie verlangt wird.

Was endlich noch den Krümmungskreis einer Leitschaufel anlangt, so können wir dessen Halbmesser und Mittelpunkt dadurch finden, daß wir AL, Fig. 497, unter dem bekannten Winkel α an die Tangente AH des inneren Radumfanges anlegen, hierauf ein Perpendikel errichten und zuletzt dieses durch eine andere, in der Mitte E des Halbmessers CA errichtete Normale in G schneiden. Dieser Punkt G ist nun das Centrum der Leitschaufel AF, welche man nun entweder ganz oder nur zum Theil bis zur Röhre, welche die Welle umgiebt, fortführt. Der Halbmesser $\overline{GA} = \overline{GC} = a_2$ dieser Schaufel ist

$$a_2 = \frac{r_1}{2\, cos.\, \alpha}.$$

Die Mittelpunkte der Bögen von den übrigen Schaufeln befinden sich in mit CO, CK und CG beschriebenen Kreisen.

Beispiel. Es ist für ein Gefälle von 5 Fuß und ein Aufschlagquantum von 30 Cubikfuß die Construction, Anordnung und Berechnung einer Fourneyron'schen Turbine zu vollziehen.

Wählen wir:

1) $\alpha = 30^0$,
2) $\beta = 100^0$ und
3) $\nu = \frac{r}{r_1} = 1{,}35$

aus, so erhalten wir:

$$sin.\, \delta = \frac{sin.\, \alpha \;\, sin.\, \beta}{\nu^2 \; sin.\, (\beta - \alpha)} = \frac{sin.\, 30^0 \; sin.\, 80^0}{1{,}35^2 \,.\, sin.\, 70} = 0{,}28752,$$

und hiernach:

4) $\delta = 16^0\, 42'$.

Es ist ferner der innere Radhalbmesser:

5) $r_1 = 0{,}326 \sqrt{Q} = 0{,}326 \sqrt{30} = 1{,}785$ Fuß,

wofür aber $= 1{,}80$ genommen werden soll, daher der äußere Radhalbmesser:

6) $r = \nu \,.\, r_1 = 1{,}35 \,.\, 1{,}8 = 2{,}43$ Fuß,

wofür wir $= 2{,}45$ Fuß nehmen wollen, so daß nun die Kranzbreite

$$r - r_1 = 2{,}45 - 1{,}80 = 0{,}65 \text{ Fuß}$$

ausfällt.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse wäre ferner die innere Radgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{gh\,(1 - tang.\, \alpha \; cotg.\, \beta)} = \sqrt{5 \,.\, 31{,}25\,(1 + tang.\, 30^0 \,.\, cotg.\, 80^0)}$$
$$= \sqrt{156{,}25 \,.\, 1{,}10182} = 13{,}105 \text{ Fuß},$$

mit Rücksicht auf die hydraulischen Hindernisse aber, wenn man $\zeta = \zeta_1 = 0{,}075$ annimmt,

$$7)\ v_1 = \sqrt{\left(\frac{2\,g\,h}{\frac{2\,sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)} + \zeta\left[\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2 + \nu^2\right]}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{62{,}5\,.\,5}{\frac{2\,sin.\,80^0\,cos.\,30^0}{sin.\,70^0} + 0{,}075\left[\left(\frac{sin.\,80^0}{sin.\,70^0}\right)^2 + 1{,}35^2\right]}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{312{,}5}{1{,}8152 + 0{,}075\,.\,2{,}9208}\right)} = \sqrt{\left(\frac{312{,}5}{2{,}03426}\right)} = 12{,}394 \text{ Fuß.}$$

Nun folgt die äußere Radgeschwindigkeit:

$$8)\ v = \nu\,v_1 = 1{,}35\,.\,12{,}394 = 16{,}732 \text{ Fuß,}$$

und die Geschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus dem Leitschaufelapparate:

$$9)\ c = \frac{v_1\,sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)} = \frac{12{,}394\,sin.\,80^0}{sin.\,70^0} = 12{,}989 \text{ Fuß,}$$

ferner die relative Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

$$10)\ c_1 = \frac{c\,sin.\,\alpha}{sin.\,\beta} = \frac{v_1\,sin.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)} = 6{,}595 \text{ Fuß,}$$

und die relative Austrittsgeschwindigkeit:

$$c_2 = v = 16{,}732 \text{ Fuß,}$$

endlich die absolute Austrittsgeschwindigkeit:

$$11)\ w = 2\,v\,sin.\frac{\delta}{2} = 2\,.\,16{,}732\,.\,sin.\,8^0\,21' = 4{,}860 \text{ Fuß.}$$

Die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute ist

$$12)\ u = 9{,}55 \cdot \frac{v}{r} = 9{,}55 \cdot \frac{16{,}732}{2{,}45} = 65{,}22.$$

Nun folgen die Querschnitte der Ausmündungen:

$$13)\ F = \frac{Q}{c} = \frac{30}{12{,}989} = 2{,}3096 \text{ Quadratfuß, und}$$

$$14)\ F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{v} = \frac{30}{16{,}732} = 1{,}7930 \text{ Quadratfuß.}$$

Nimmt man ferner das Dimensionsverhältniß der Ausflußmündungen des Rades, $\lambda = 4$, und die Stärke einer Radschaufel, $s = 3$ Linien $= 0{,}02$ Fuß, so erhält man die Radweite:

$$15)\ e = \frac{F_2}{2\,\pi\,r\,sin.\,\delta}\left(1 + 2\,\pi\,r\,sin.\,\delta \cdot \frac{\lambda\,s}{F_2}\right)$$

$$= \frac{1{,}793}{2\,\pi\,.\,2{,}45\,sin.\,16^0\,42'}\left(1 + \frac{2\,\pi\,.\,2{,}45\,sin.\,16^0\,42'\,.\,4\,.\,0{,}02}{1{,}793}\right)$$

$$= \frac{1{,}793}{4{,}424}\left(1 + \frac{4{,}424\,.\,0{,}08}{1{,}793}\right) = 0{,}4053\,(1 + 0{,}1974)$$

$$= 0{,}485 \text{ Fuß} = 5{,}82 \text{ Zoll,}$$

ferner die Weite der Ausmündungen:

$$16)\ d = \frac{e}{\lambda} = \frac{0{,}485}{4} = 0{,}12125 \text{ Fuß} = 1{,}45 \text{ Zoll,}$$

folglich die Anzahl der Radschaufeln:

17) $n = \frac{\lambda F_2}{e^2} = \frac{1,793 \,.\, 4}{0,485^2} = 30,$

wofür 32 zu nehmen sein möchte; und endlich die Anzahl der Leitschaufeln, wenn man denselben ebenfalls 3 Linien Stärke giebt,

18) $n_1 = \frac{n\, s\, sin.\, \alpha}{\nu\, s_1\, sin.\, \delta} = \frac{32 \,.\, sin.\, 30^0}{1,35\, sin.\, 16^0\, 42'} = 40.$

In der Regel macht man jedoch die Anzahl der Leitschaufeln nie größer als die der Radschaufeln. Der Theilwinkel des Rades ist bei 32 Schaufeln:

19) $\varphi = \frac{360^0}{32} = 11\frac{1}{4}$ Grad;

hiernach die halbe theoretische Mündungsweite (ohne Rücksicht auf die Schaufeldicke s):

20) $\frac{d_1}{2} = r\, sin.\, \delta\, tang.\, \frac{\varphi}{2} = 2,45 \,.\, 0,28752\, tang.\, 5^0\, 37\frac{1}{2}'$

$= 0,06938$ Fuß $= 0,8325$ Zoll,

folglich die ganze Mündungsweite, ohne Rücksicht auf die Blechstärke:

21) $d_1 = 0,13876$ Fuß $= 1,6651$ Zoll.

Der Krümmungshalbmesser des äußeren Radschaufelstückes ist:

22) $a = r\, cos.\, \delta = 2,45\, cos.\, 16^0\, 42' = 2,347$ Fuß.

Ferner ist der Halbmesser des inneren Bogens einer Radschaufel:

23) $a_1 = \frac{r^2 - r_1^2 - r\, d_1\, cos.\, \delta + \frac{1}{4}\, d_1^2}{2\,(r\, cos.\, \delta + r_1\, cos.\, \beta) - d_1}$

$= \frac{2,45^2 - 1,80^2 - 2,45 \,.\, 0,13876\, cos.\, 16^0\, 42' + \frac{1}{4} \,.\, 0,13876^2}{2\,(2,45 \,.\, cos.\, 16^0\, 42' + 1,80\, cos.\, 100^0) - 0,13876}$

$= \frac{2,7673 - 0,3256}{2 \,.\, 2,0341 - 0,13876} = \frac{2,4417}{3,9294} = 0,6214$ Fuß.

Für die Centriwinkel dieses Bogens hat man

$\varphi_1 = 180^0 - \beta - \delta + \sigma - \tau,$

wo $\sigma = \angle\, ACK$ und $\tau = \angle\, MCK$ durch folgende Formeln zu bestimmen sind:

$$tang.\, \sigma = \frac{a_1\, sin.\, \beta}{r_1 + a_1\, cos.\, \beta} \quad \text{und} \quad tang.\, \tau = \frac{\left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right) sin.\, \delta}{r - \left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right) cos.\, \delta}.$$

Es ist

$$tang.\, \sigma = \frac{0,6214\, sin.\, 80^0}{1,80 - 0,6214\, cos.\, 80^0},$$

hiernach $\sigma = 19^0\, 53'$, und

$$tang.\, \tau = \frac{0,6908\, sin.\, 16^0\, 42'}{2,45 - 0,6908\, cos.\, 16^0\, 42'},$$

hiernach $\tau = 6^0\, 20'$, daher der Centriwinkel des inneren Bogenstückes der Radschaufeln:

24) $\varphi_1 = 180^0 - 100^0 - 16^0\, 42' + 19^0\, 53' - 6^0\, 20' = 76^0\, 51'.$

Endlich ist noch der Halbmesser der Leitschaufeln:

25) $a_2 = \frac{r_1}{2\, cos.\, \alpha} = \frac{1,8}{2\, cos.\, 30^0} = 1,0392$ Fuß.

Das Arbeitsvermögen der Wasserkraft beträgt:

$$L = Qh\gamma = 30.5.61,75 = 9262,5 \text{ Fußpfund.}$$

dagegen die Arbeit der Turbine:

$$L_1 = \left(1 - \frac{\zeta(c^2 + v^2) + w^2}{2gh}\right) Qh\gamma$$

$$= \left(1 - 0,016 \cdot \frac{0,075\ (12,989^2 + 16,732^2) + 4,860^2}{5}\right) . 9262,5$$

$$= [1 - 0,0032\ (0,075 . 448 + 23,62)] . 9262,5$$

$$= (1 - 0,1830) . 9262,5 = 0,817 . 9262,5 = 7567,5 \text{ Fußpfund.}$$

Wenn diese Turbine in freier Luft umgehen soll, hat man noch ein gewisses Freistellen nöthig, welches, da die halbe Radhöhe $e = 0,2425$ Fuß beträgt, recht gut auf $\frac{1}{2}$ Fuß zu schätzen ist, und daher einen Arbeitsverlust von $30 . 0,5 . 61,75 = 926,25$ Fußpfund verursacht. Um den Wasserverlust beurtheilen zu können, muß die Druckhöhe x hinter der Schütze bekannt sein. Es ist nach dem Obigen:

$$x = h - (1 + \zeta)\frac{c^2}{2g} = 5 - 1,075 . 0,016 . 12,989^2$$

$$= 5 - 2,9019 = 2,0981 \text{ Fuß,}$$

und daher die entsprechende Ausflußgeschwindigkeit:

$$w_1 = \sqrt{2gx} = 7,906\sqrt{2,0981} = 11,45 \text{ Fuß.}$$

Wäre nun der kreisförmige Spalt zwischen Rad und Schütze $1\frac{1}{2}$ Linie weit, also sein Querschnitt

$$G = 2\pi r . \frac{1}{288} = \frac{2 . 1,8 . \pi}{288} = \frac{\pi}{80} = 0,0393 \text{ Quadratfuß,}$$

so betrüge, bei einem Ausflußcoefficienten $\mu = 0,7$, die verloren gehende Wassermenge:

$$Q_1 = 0,7\, G w_1 = 0,7 . 0,0393 . 11,45 = 0,315 \text{ Cubikfuß,}$$

und dieser entspräche ein Arbeitsverlust von

$$Qh\gamma = 0,315 . 5 . 61,75 = 97,25 \text{ Fußpfund.}$$

Endlich geht noch ein kleiner Theil der Arbeit durch die Zapfenreibung verloren. Wiegt das armirte Wasserrad 3000 Pfund, ist der Zapfenhalbmesser desselben, $r_2 = 1\frac{1}{2}$ Zoll $= \frac{1}{8}$ Fuß und der Reibungscoefficient $\varphi = 0,075$, so hat man die Arbeit der Zapfenreibung:

$$\varphi\, G \frac{r_2}{r} v = 0,075 . 3000 \cdot \frac{16,732}{8 . 2,45} = 192 \text{ Fußpfund.}$$

Bringen wir noch die letzten drei Arbeitsverluste, d. i.

$$926,25 + 97,25 + 192 = 1215,5 \text{ Fußpfund}$$

in Abzug, so bleibt uns die effective Radleistung:

$$L_1 = 7567,5 - 1215,5 = 6352 \text{ Fußpfund} = 12,45 \text{ Pferdekräfte,}$$

und es fällt der Wirkungsgrad nur $\eta = \frac{6352}{9262,5} = 0,686$ aus.

§. 265 **Turbinen ohne Leitschaufeln.** Die Dimensionsverhältnisse der Turbinen ohne Leitschaufeln sind nur zum Theil wie die der Leitschaufelturbinen auszuwählen und zu berechnen. Das Wasser tritt hier auf dem kürzesten Wege, nämlich radial aus dem Ausflußreservoir; es ist hier folglich

$\alpha = 90$ Grad. Der Winkel β wird hier größer, nämlich 140 bis 160° genommen, um einen möglichst kleinen negativen Druck (x) an der Uebergangsstelle zu erhalten und dadurch das Einsaugen von Luft oder Wasser durch den Spielraum so viel wie möglich zu vermeiden. Das Halbmesserverhältniß $\nu = \frac{r}{r_1}$ nimmt man hier nur 1,15 bis 1,30, weil außerdem, wegen des großen Werthes von β, die Radcanäle zu lang ausfallen würden. Um den Arbeitsverlust beim Eintritt des Wassers aus dem Reservoir in das Rad möglichst herabzuziehen, läßt man das Wasser nur mit 2 Fuß Geschwindigkeit zutreten, und macht deshalb den inneren Radhalbmesser

$$1)\ r_1 = \sqrt{\frac{Q}{2\pi}} = 0{,}4\sqrt{Q} \text{ Fuß},$$

also den äußeren:

$$2)\ r = \nu r_1 = 0{,}4\,\nu\sqrt{Q} \text{ Fuß}.$$

Setzen wir ferner

$$1 - \zeta\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 tang.\,\beta^2 = 1 - \zeta\,\frac{tang.\,\beta^2}{\nu^2} = \psi \text{ und}$$

$$\frac{\sqrt{1+\zeta_1}}{cos.\,\delta} = \chi,$$

wobei wir meist $\zeta = \zeta_1 = 0{,}075$ und δ annähernd 10 bis 20° annehmen können, so erhalten wir die vortheilhaftesten Umdrehungsgeschwindigkeiten des Rades:

$$3)\ v = \sqrt{\left(\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\sqrt{\chi^2-\psi}}\right)g h} \text{ und}$$

$$4)\ v_1 = \frac{r_1}{r}\,v = \frac{v}{\nu},$$

wonach sich nun die Ausflußgeschwindigkeiten

$$5)\ c = -\,v_1\,tang.\,\beta \text{ und}$$

$$6)\ c_2 = \sqrt{\frac{2gh + \psi v^2}{1+\zeta_1}}$$

berechnen lassen. Die Umdrehungszahl des Rades ist

$$7)\ u = \frac{30\,v}{\pi r} = 9{,}55\,\frac{v}{r}.$$

Nun folgen die Querschnitte der Ausmündungen

$$8)\ F = \frac{Q}{c} \text{ und}$$

$$9)\ F_2 = \frac{Q}{c_2},$$

daher ist die Radhöhe

$$10)\quad e = \frac{F}{2\pi r_1}.$$

Bezeichnet ferner $\lambda = \frac{e}{d}$ d. i. das Dimensionsverhältniß der Ausmündungen, so hat man, da $n d e = F_2$ ist, $n e^2 = \lambda F_2$, und daher die nöthige Anzahl der Radschaufeln:

$$11)\quad n = \frac{\lambda F_2}{e^2},$$

und endlich, da $(2\pi r \sin.\delta - n s) e = F_2$ ist, wenn s die Schaufelstärke bezeichnet, für den nöthigen Austrittswinkel:

$$12)\quad \sin.\delta = \frac{F_2 + n s e}{2\pi r e} = \frac{(e + \lambda s) F_2}{2\pi r e^2}$$

Fällt δ zu groß, viel über 15 Grad aus, so muß man entweder β oder ν größer annehmen.

Beispiel. Es ist für ein Gefälle von 5 Fuß und für einen Aufschlag von 30 Cubikfuß pr. Secunde die Anordnung und Berechnung einer Cadiat'schen Turbine zu vollziehen (vergl. das letzte Beispiel). Nehmen wir $\beta = 150^0$ und $\nu = 1,2$ an, so erhalten wir den Radhalbmesser:

1) $r_1 = 0,4\sqrt{Q} = 0,4\sqrt{30} = 2,19$, oder sicherer 2,25 Fuß, und

2) $r = \nu r_1 = 1,2 . 2,25 = 2,70$ Fuß.

Setzen wir $\zeta = \zeta_1 = 0,075$ und nehmen wir einstweilen $\delta = 15$ Grad an, so ist:

$$\psi = 1 - \zeta\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 tang.\,\beta^2 = 1 - 0,075\,\frac{(tang.\,30)^2}{1,44} = 0,9826$$

und

$$\chi = \frac{\sqrt{1 + \zeta_1}}{cos.\,\delta} = \frac{\sqrt{1,075}}{cos.\,15^0} = 1,0734,$$

daher folgen die Radgeschwindigkeiten:

$$3)\quad v = \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\sqrt{\chi^2 - \psi}}\cdot gh} = \sqrt{\frac{1,0734 - 0,4118}{0,9826 . 0,4118}\cdot 31,25 . 5}$$

$$= \sqrt{\frac{0,6616 . 156,25}{0,9826 . 0,4118}} = 15,985 \text{ Fuß, und}$$

$$4)\quad v_1 = \frac{v}{\nu} = \frac{15,985}{1,2} = 13,321 \text{ Fuß,}$$

dagegen die Ausflußgeschwindigkeiten:

5) $c = -v_1\, tang.\,\beta = 13,321\, tang.\, 30^0 = 7,692$ Fuß und

$$6)\quad c_2 = \sqrt{\frac{2gh + \psi v^2}{1 + \zeta_1}} = \sqrt{\frac{312,5 + 251,1}{1,075}} = 22,897 \text{ Fuß.}$$

Die Umdrehungszahl des Rades ist

$$7)\quad u = 9,55\cdot\frac{v}{r} = 9,55\cdot\frac{15,985}{2,70} = 56,54.$$

Hieraus ergeben sich die Querschnitte der Ausmündungen:

8) $F = \frac{Q}{c} = \frac{30}{7,692} = 3,900$ Quadratfuß, und

9) $F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{30}{22,897} = 1,3102$ Quadratfuß,

und es ist nun die erforderliche Radweite:

10) $e = \frac{F}{2\pi r_1} = \frac{3,900}{2\pi . 2,25} = 0,2759$ Fuß;

nimmt man ferner das Dimensionsverhältniß $\lambda = 2$ an, so erhält man die Anzahl der Schaufeln:

11) $n = \frac{\lambda F_2}{e^2} = \frac{2 . 1,3102}{0,2759^2} = 34,$

wofür 32 genommen werden soll, und, wenn man die Schaufelstärke $= 0,015$ Fuß voraussetzt,

$$sin. \delta = \frac{F_2 + nse}{2\pi r e} = \frac{1,3102 + 32 . 0,015 . 0,2759}{2\pi . 2,7 . 0,2759} = \frac{1,3102 + 0,132}{5,4 . 0,2759\,\pi}$$
$$= \frac{1,442}{4,681} = 0,3081,$$

daher ist der Austrittswinkel;

12) $\delta = 17^0\, 56'$.

Der Wirkungsgrad dieses Rades ist, ohne Rücksicht auf Wasserverlust, Zapfenreibung u. dergl.:

$$\eta = (v\sqrt{2gh + \psi v^2} - \varphi v^2)\frac{Q\gamma}{\chi g Q h \gamma} = \frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\chi\psi}$$
$$= \frac{0,6616}{0,9826 . 1,0734} = 0,627.$$

(Vergl. das Beispiel im vorigen Paragraphen.)

Schottische Turbinen. Die schottische Turbine oder das Reactionsrad mit getrennten Radcanälen (Schwungröhren) ist insofern etwas anders als die Cadiat'sche Turbine zu behandeln, als hier das Wasser wegen der großen Breite der Canäle entweder ganz oder wenigstens größtentheils mit Stoß in das Rad tritt, und insofern auch hier eine viel größere Auswahl in der Form und Größe der Radcanäle möglich ist, als bei den Rädern mit aneinander anliegenden Radcanälen. Namentlich kann man hier den Austrittswinkel δ viel kleiner machen, als bei den letzten Rädern. Wegen der beliebig kleinen Anzahl ihrer Canäle eignen sich die schottischen Turbinen vorzüglich zur Aufnahme einer Wasserkraft mit wenig Wasser und viel Gefälle. §. 266

Die Weite der Einfallsröhre oder des Ausflußreservoirs bestimmt sich zunächst, wenn man höchstens eine Zuflußgeschwindigkeit von 6 Fuß zuläßt, durch die Formel:

$$r_1 = \frac{Q}{\sqrt{6\pi}} = 0,23\sqrt{Q}.$$

Den äußeren Halbmesser r macht man zwei-, drei- bis viermal so groß als r_1, je nachdem die Anzahl der Schwungröhren vier, drei oder zwei ist. Die Geschwindigkeiten v, v_1 und c, folglich auch die Querschnitte F_1 und F_2 sind wie bei den Turbinen ohne Leitschaufeln (s. vorigen Paragraph) überhaupt zu bestimmen. Zuletzt folgt die Radhöhe:

$$e = \frac{F}{2\pi r_1},$$

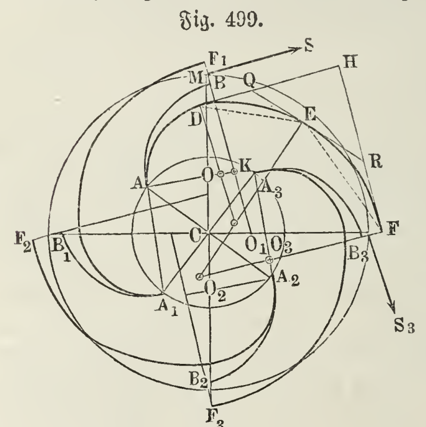
und die äußere Weite der Radcanäle:

$$d = \frac{F_2}{ne}.$$

Jedenfalls ist aber bei der Bestimmung der Geschwindigkeit v der Widerstandscoefficient ζ beim Eintritt größer als 0,075 zu nehmen, da ein schwacher Stoß bei den in so sehr verschiedenen Richtungen in das Rad eintretenden Strahlen nicht zu vermeiden ist; wir können vielleicht, ohne einen beträchtlichen Fehler befürchten zu müssen, $\zeta = 0{,}10$ setzen. Da auch die Schwungröhren sehr lang ausfallen, so müßte auch ζ_1 viel größer als bei den Radturbinen ausfallen, wenn nicht dieses ungünstige Verhältniß durch die größere Weite dieser Röhren etwas wieder ausgeglichen würde, jedoch möchte ζ_1 mindestens $= 0{,}075$ anzunehmen sein.

Die Schwungröhrenaxe $ADEFK$, Fig. 499, krümmt man in der Regel nach einer archimedischen Spirallinie, doch kann man sie auch aus zwei oder drei Kreisbögen wie AD, DE, EF zusammensetzen. Zu diesem Zwecke theilt man den Umfang des Rades in so viel gleiche Theile, als das Rad Schwungröhren erhalten soll, hier z. B. in vier, und zieht nun aus jedem der Theilpunkte eine Gerade, wie z. B. MS, welche um den Winkel δ von der entsprechenden Tangente oder um $SMC = 90^0 + \delta^0$ vom entsprechenden Halbmesser CM abweicht. Ferner trage man rechtwinkelig auf MS von M aus zu beiden Seiten die halbe Mündungsweite $\frac{1}{2} d_1 = MB = MF_1$ auf und beschreibe, nach der in §. 264 gegebenen Regel, aus einem Mittelpunkte K in der Verlängerung von $F_1 B$ durch B einen Kreisbogen AB, welcher den inneren Radumfang in einem Punkte A unter dem gegebenen Winkel β schneidet und in B

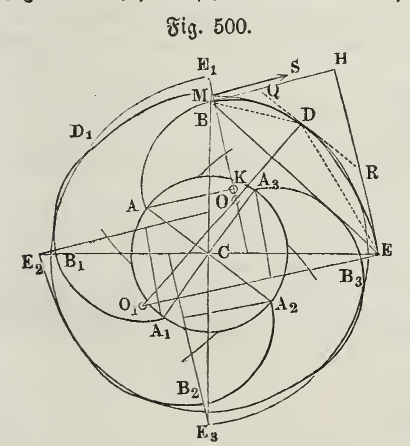
Fig. 499.



parallel zu MS ausläuft. Nach diesem Kreise läßt sich die innere Röhrenwand formen; die äußere Röhrenwand ist aus drei Bögen AD, DE und EF zusammengesetzt, welche sich in D und E tangential an einander anschließen. Der innere Bogen AD hat den kleinsten Halbmesser $OA = OD$, und schneidet, wie AB, den inneren Radumfang unter dem gegebenen Winkel β, der äußere Bogen EF hat den größten Halbmesser $O_2E = O_2F$ und läuft in F, sowie A_3B_3 in B_3 parallel mit der Axe des durch B_3F ausfließenden Wasserstrahles. Durch Constructionen des Bogens $A_3B_3 = AB$ wird die eine in AA_3 ein- und B_3F ausmündende Schwungröhre vollständig bestimmt, und es ist auch leicht zu ermessen, wie durch Wiederholung der angegebenen Constructionen die übrigen Schwungröhren zu zeichnen sind.

Es ist übrigens auch bei einer sehr kleinen Anzahl von Radcanälen nicht nöthig, getrennte Röhren anzuwenden; man kann auch hier, wie sich aus Fig. 500 ersehen läßt, die Radcanäle ohne Zwischenräume an einander anschließen. In diesem Falle ist der Bogen AB Scheidewand zwischen je zwei Radcanälen, und es schließt sich das äußere Schaufelstück BDE in B tangential an AB an. Die Mittelpunkte O und O_1 der Bögen BD und DE lassen sich einfach auf folgende Weise finden. Man verbinde die gegebenen Endpunkte B und E durch eine gerade Linie mit einander, und ziehe durch diese Punkte die von den Halbmessern CB und CE um die Winkel $CBH = 90^0 + \delta$ $CEH = 90^0 - \delta$ abweichenden Linien BH und EH, welche mit BE ein Dreieck BEH bilden. Nun halbire man die Winkel EBH und BEH durch die Geraden BD und ED, ziehe durch D, QR parallel zu BE und DOO_1 rechtwinkelig auf BE, sowie BO rechtwinkelig auf BH und EO_1 rechtwinkelig auf EH; die Durchschnitte O und O_1 zwischen je zwei dieser Perpendikel sind die gesuchten Mittelpunkte der Bögen BD und DE.

Fig. 500.



Die Richtigkeit dieses Verfahrens leuchtet sogleich ein, wenn man erwägt, daß durch die Theilung der Winkel EBH und BEH, und durch das Legen der Parallelen QR die Winkel OBD und ODB, und also auch die Geraden OB und OD einander gleich gemacht, und daß ebenso Gleichheit

zwischen den Winkeln $O_1 DE$ und $O_1 ED$, und also auch zwischen den Linien $O_1 D$ und $O_1 E$ hergestellt worden ist.

Beispiel. Es ist für eine Wasserkraft von 150 Fuß Gefälle und $1\frac{1}{2}$ Cubikfuß Aufschlag pr. Secunde die Anordnung und Berechnung einer schottischen Turbine auszuführen. Zuerst ist der innere Radhalbmesser:

$$r_1 = 0{,}23\sqrt{Q} = 0{,}23\sqrt{1{,}5} = 0{,}282 \text{ Fuß};$$

nehmen wir indessen denselben $= 0{,}3$ Fuß und die Weite der Einfallröhre $= 0{,}75$ Fuß an; bringen wir ferner nur zwei Schwungröhren in Anwendung und machen wir deshalb den äußeren Radhalbmesser $r = 4r_1 = 1{,}2$ Fuß; nehmen wir noch $\beta = 150^0$ und $\delta = 10^0$ an, und setzen wir $\zeta_1 = \zeta = 0{,}100$, so erhalten wir:

$$\psi = 1 - 0{,}1\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 tang.\,\beta^2 = 1 - 0{,}1\,.\,\tfrac{1}{16}\,(tang.\,30^0)^2$$

$$= 1 - 0{,}0021 = 0{,}9979, \text{ und}$$

$$\chi = \frac{\sqrt{1+\zeta_1}}{cos.\,\delta} = \frac{\sqrt{1{,}1}}{cos.\,10^0} = 1{,}0650.$$

Von dem Gefälle $h = 150$ Fuß verbraucht die Reibung des Wassers in der 0,75 Fuß weiten und vielleicht 200 Fuß langen Einfallröhre nach Band I, §. 427 bis 429, den Theil

$$h_2 = 0{,}0213\,.\,0{,}016\,.\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\cdot\frac{l\,Q^2}{d^5} = 0{,}0003408\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\cdot\frac{200\,.\,1{,}5^2}{(0{,}75)^5}$$

$$= 0{,}0003408\,.\,1{,}621\cdot\frac{200\,.\,256}{27} = 0{,}03408\,.\,1{,}621\cdot\frac{512}{27} = 1{,}05 \text{ Fuß},$$

daher dürfen wir auch nur das Gefälle

$$h_1 = h - h_2 = 150 - 1{,}05 = 148{,}95 \text{ Fuß}$$

in Rechnung bringen. Für die vortheilhafteste Geschwindigkeit v ist

$$\frac{v^2}{2gh} = \frac{\chi - \sqrt{\chi^2-\psi}}{2\psi\sqrt{\chi^2-\psi}} = \frac{1{,}065 - \sqrt{1{,}1342 - 0{,}9979}}{1{,}9958\sqrt{1{,}1342-0{,}9979}} = \frac{1{,}065 - \sqrt{0{,}1363}}{1{,}9958\,.\,0{,}3692}$$

$$= \frac{0{,}6958}{0{,}7369} = 0{,}9443,$$

und daher diese Geschwindigkeit selbst:

$$v = \sqrt{0{,}9443}\,.\sqrt{2gh} = 0{,}9718\,.\,7{,}906\sqrt{150} = 94{,}10 \text{ Fuß},$$

und es folgen nun die übrigen Geschwindigkeiten:

$$v_1 = \frac{r_1}{r}v = \frac{v}{4} = 23{,}525 \text{ Fuß},$$

$$c = -v_1\,tang.\,\beta = 23{,}525\,tang.\,30^0 = 13{,}58 \text{ Fuß, sowie}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh+\psi v^2}{1+\zeta_1}} = \sqrt{\frac{9309+8836}{1{,}1}} = \sqrt{\frac{18145}{1{,}1}} = 128{,}43 \text{ Fuß}.$$

Hiernach sind die nöthigen Mündungsquerschnitte:

$$F = \frac{Q}{c} = \frac{1{,}5}{13{,}58} = 0{,}11044 \text{ Quadratfuß und}$$

$$F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{1{,}5}{128{,}43} = 0{,}01168 \text{ Quadratfuß}.$$

Ferner ist die entsprechende Radweite oder Mündungshöhe:

$$e = \frac{F}{2\pi r_1} = \frac{0{,}11044}{0{,}6\,.\,\pi} = 0{,}05859 \text{ Fuß} = 0{,}703 \text{ Zoll},$$

und die Mündungsweite, da die Anzahl der Mündungen $n = 2$ ist,

$$d = \frac{F_2}{ne} = \frac{0{,}01168}{2\,.\,0{,}05859} = 0{,}09967 \text{ Fuß} = 1{,}196 \text{ Zoll}.$$

Das Dimensionsverhältniß $\frac{e}{d}$ ist hiernach nur $\frac{0{,}05859}{0{,}09967} = 0{,}5879$; um dasselbe größer zu machen, müßte man drei oder mehr Schwungröhren in Anwendung bringen.

Der Wirkungsgrad dieses Rades ist ohne Rücksicht auf die Reibungen am Zapfen und in den Einfallröhren:

$$\eta = \frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\chi} = \frac{0{,}6958}{0{,}9979\,.\,1{,}0650} = 0{,}6547.$$

Reactionsräder mit radial einmündenden Schwungröhren. §. 267
Bei den Reactionsrädern, wo die Axen der Schwungröhren radial an das Reservoir anstoßen, erleidet das Wasser mit seinem Eintritte in das Rad einen Stoß und einen entsprechenden Arbeitsverlust, und sind diese Röhren auch nicht einmal gekrümmt, sondern tritt das Wasser durch Seitenmündungen aus den Schwungröhren, so findet auch ein Stoß des Wassers gegen die Endflächen der Schwungröhren statt, der einen zweiten Arbeitsverlust zur Folge hat. Da indessen jetzt in der Regel Räder mit gekrümmten Schwungröhren angewendet werden, so wollen wir in Folgendem nur den Verlust beim stoßweisen Eintritte in das Rad in Betracht ziehen. Die Ausflußgeschwindigkeit ist hier bestimmt durch die Formel

$$(1 + \zeta_1)\, c_2^2 = 2gx + c^2 + v^2 - v_1^2,$$

oder, da $2gx + c^2 = 2gh - \zeta c^2$ ist, durch

$$(1 + \zeta_1)\, c_2^2 = 2gh + v^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] - \zeta c^2;$$

und es folgt hiernach

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh - \zeta c^2 + \left[1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] v^2}{1 + \zeta_1}}.$$

Die dem Arbeitsverluste des Rades entsprechende Geschwindigkeitshöhe ist, da das Wasser beim Eintritte in das Rad plötzlich noch die Tangentialgeschwindigkeit v_1 annehmen muß,

$$y = (c_2^2 + v^2 - 2\,c_2\,v\cos.\delta + v_1^2 + \zeta_1\,c_2^2 + \zeta\,c^2)\cdot\frac{1}{2\,g}$$

$$= \left((1+\zeta_1)\,c_2^2 + \zeta\,c^2 + v^2\left[1+\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right] - 2\,v\,c_2\cos.\delta\right)\cdot\frac{1}{2\,g}$$

$$= \left(g h + v^2 - v\cos.\delta\sqrt{\frac{2\,g\,h - \zeta\,c^2 + \left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]v^2}{1+\zeta_1}}\right)\cdot\frac{1}{g},$$

und sonach folgt die effective Radleistung

$$L = \left(v\cos.\delta\sqrt{\frac{2\,g\,h - \zeta\,c^2 + \left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]v^2}{1+\zeta_1}} - v^2\right)\frac{Q\gamma}{g}$$

$$= \left(v\sqrt{2\,g\,h - \zeta\,c^2 + \psi\,v^2} - \chi\,v^2\right)\frac{Q\gamma}{\chi g},$$

wenn $1 - \left(\frac{r_1}{r}\right)^3$ durch ψ und $\frac{\sqrt{1+\zeta_1}}{\cos.\delta}$ durch χ bezeichnet wird.

Meist ist ζ so klein, daß man

$$L = \left(v\sqrt{2\,g\,h + \psi\,v^2} - \chi\,v^2\right)\frac{Q\gamma}{\chi g}$$

und folglich die vortheilhafteste Geschwindigkeit, wie oben §. 256,

$$v = \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\sqrt{\chi^2 - \psi}}\cdot g\,h}$$

setzen kann.

Läßt man auch noch ζ_1 außer Acht und nimmt $\delta = 0$ Grad an, so erhält man $\chi = 1$, und daher die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\psi}}{\psi\sqrt{1-\psi}}\cdot g\,h} = \sqrt{\frac{1-\frac{r_1}{r}}{\left[1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\frac{r_1}{r}}\,g\,h}$$

$$= \sqrt{\frac{g\,h}{\left(1+\frac{r_1}{r}\right)\frac{r_1}{r}}}.$$

Der Wirkungsgrad ist im letzteren Falle:

$$\eta = \frac{\chi - \sqrt{\chi^2 - \psi}}{\psi\,\chi} = \frac{1-\frac{r_1}{r}}{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{r_1}{r}} = \frac{r}{r+r_1},$$

also um so größer, je länger die Schwungröhren in Beziehung auf die Weite des Zuflußreservoirs sind.

Aus v bestimmt sich $v_1 = \frac{r_1}{r} v$, sowie

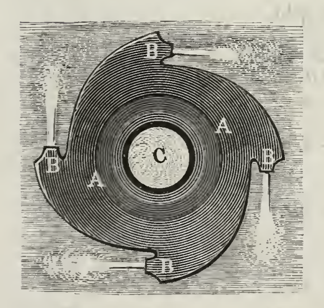
$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh - \zeta c^2 + \psi v^2}{1 + \zeta_1}}, \text{ und } F_2 = \frac{Q}{c_2}.$$

Um den Widerstand beim Eintritte möglichst klein zu erhalten, macht man $\frac{F_2}{F}$ klein, also F groß; am besten aber so groß, daß die Geschwindigkeit c beim Eintritte in den beweglichen Radkörper nicht größer ausfällt, als die des zufließenden Wassers; und um dies zu erreichen, macht man den ringförmigen Querschnitt der Eintrittsmündung gleich dem Querschnitte des Zuleitungsrohres, d. i. $2\pi r_1 e = \pi r_1^2$, also die Radhöhe $e =$ dem halben Halbmesser des Reservoirs. Endlich ergiebt sich hieraus noch die Weite der Ausmündungen des Rades:

$$d = \frac{F_2}{ne}.$$

Wenn man, wie in Fig. 501, statt der getrennten Schwungröhren einen einzigen Schwungring AA anbringt, und das Wasser durch gut abgerundete conoidische Mundstücke $B, B\ldots$ ausfließen läßt, so fallen die hydraulischen Hindernisse im Rade sehr klein aus, da die Bewegung des Wassers in dem Rade, namentlich, wenn man dieses hoch macht, sehr klein ist, und es bleibt dann vorzüglich nur der in diesem Paragraphen in Betracht gezogene Arbeitsverlust beim Uebertritt des Wassers aus der Kernröhre C in das Rad übrig. Der Wirkungsgrad eines solchen höchst einfachen Rades kann sicherlich auch auf $^2/_3$ gesteigert werden.

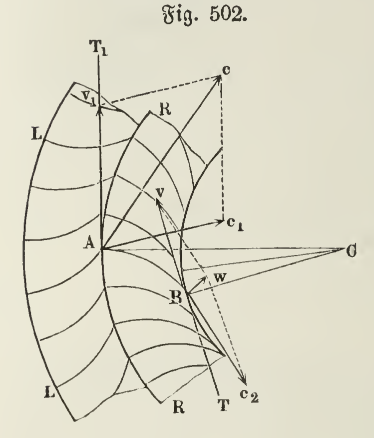
Fig. 501.



Turbinen mit äusserer Beaufschlagung. Die Reactionsturbinen (von Francis) mit äußerer Beaufschlagung s. Fig. 489 und Fig. 490, Seite 580 und 581, sind im Wesentlichen genau so zu beurtheilen wie die Reactionsturbinen (von Fourneyron) mit innerer Beaufschlagung. Es findet zwischen diesen Turbinen dasselbe Verhältniß statt, wie zwischen den Tangentialrädern mit innerer und äußerer Beaufschlagung, s. §. 235 und §. 236. Wenn wir, wie dort, den Halbmesser desjenigen Radumfanges, wo das Wasser eintritt, durch r_1, und denjenigen, wo dasselbe aus dem Rade §. 268

austritt, durch r, sowie, diesem entsprechend, die Umdrehungsgeschwindigkeit des ersteren durch v_1 und die des letzteren durch v bezeichnen, so sind die für die Turbinen mit innerer Beaufschlagung entwickelten Formeln und Regeln auch auf die mit äußerer Beaufschlagung ohne Weiteres anwendbar. Wird bei einer Turbine mit äußerer Beaufschlagung das Wasser durch den Leitschaufelapparat LL, Fig. 502, dem Rade RR mit der Geschwindigkeit c so zugeführt, daß die Richtung desselben um den Winkel $\overline{cAv_1} = \alpha$ von dem mit der Geschwindigkeit v_1 umlaufenden Radumfang abweicht, so ist (vergl. §. 250) für die relative Eintrittsgeschwindigkeit c_1,

Fig. 502.



$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2\,c v_1 \cos.\alpha,$$

und ist δ der Winkel TBc_2, unter welchem sich die Radschaufeln an den inneren Radumfang anschließen, so hat man für die relative Austrittsgeschwindigkeit $\overline{Bc_2} = c_2$, da bei der Bewegung von A nach B, durch die Centrifugalkraft das Arbeitsvermögen $\left(\frac{v_1^2 - v^2}{2g}\right) Q\gamma$ verloren geht,

$$(1 + \zeta_1)\,\frac{c_2^2}{2g} = x - h_2 + \frac{c_1^2}{2g} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g}$$
$$= x - h_2 + \frac{c^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} - \frac{2\,c v_1 \cos.\alpha}{2g},$$

oder, wenn man

$$(1 + \zeta)\,\frac{c^2}{2g} = h_1 - x,$$

und $h_1 + h_2 = h$ einführt,

$$(1 + \zeta_1)\,c_2^2 = 2gh + v^2 - 2\,c v_1 \cos.\alpha - \zeta c^2,$$

genau wie für die Turbinen mit innerer Beaufschlagung. Die im Obigen gefundene innere Radgeschwindigkeit ist natürlich hier bei den Turbinen mit äußerer Beaufschlagung die äußere Radgeschwindigkeit, nämlich

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2 \sin.\beta \cos.\alpha}{\sin.(\beta - \alpha)} + \zeta\left(\frac{\sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Da nun hier $\frac{r}{r_1}$ ein echter, bei der Turbine mit innerer Beaufschlagung aber ein unechter Bruch ist, so folgt, daß unter übrigens gleichen Umständen und Verhältnissen, die vortheilhafteste äußere Radgeschwindigkeit bei Turbinen

mit äußerer Beaufschlagung ein wenig größer ausfällt als die innere Radgeschwindigkeit bei Turbinen mit innerer Beaufschlagung. Jedenfalls ist aber die Geschwindigkeitsdifferenz klein genug, daß wir näherungsweise annehmen dürfen, diese Geschwindigkeiten sind einander gleich. Nun verhalten sich aber bei gleichen Geschwindigkeiten die Umdrehungszahlen umgekehrt wie die entsprechenden Halbmesser r und r_1; ist folglich u die Umdrehungszahl einer Turbine mit innerer sowie u_1 die einer solchen mit äußerer Beaufschlagung, und ν das Verhältniß des äußeren Radhalbmessers zum inneren, so hat man

$$\frac{u_1}{u} = \frac{1}{\nu}, \text{ daher } u_1 = \frac{u}{\nu}.$$

Es macht also bei den gemachten Voraussetzungen eine Turbine mit äußerer Beaufschlagung weniger Umdrehungen als eine solche mit innerer Beaufschlagung. Da auch dem Vorstehenden zufolge, $c_2 = v$ bei den ersteren Turbinen kleiner ist als bei den letzteren, so fallen auch die hydraulischen Widerstände bei jenen kleiner aus als bei diesen. Dieser Vorzug wird aber dadurch wieder aufgehoben, daß, wie die Formel

$$sin. \delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{sin. \alpha \; sin. \beta}{sin. (\beta - \alpha)}$$

nachweist, die Turbinen mit äußerer Beaufschlagung einen größeren Austrittswinkel erfordern als die mit innerer Beaufschlagung, und folglich auch in der lebendigen Kraft des abfließenden Wassers mehr Arbeitsvermögen verlieren als die letzteren, wie auch aus der Formel für den Wirkungsgrad η, §. 260 zu ersehen ist.

Beispiel. Es sei für ein Gefälle $h = 5$ Fuß und für $Q = 30$ Cubikfuß (vergl. Beispiel §. 264) die Reactionsturbine mit äußerer Beaufschlagung anzuordnen und zu berechnen. Wollten wir, wie in dem angeführten Beispiele $\alpha = 30^0$, $\beta = 100^0$ und $\nu = \frac{r}{r_1} = \frac{1}{1,35}$ in Anwendung bringen, so würden wir für δ den übermäßigen Werth von $72\frac{3}{4}$ Grad erhalten. Machen wir hier deshalb

1) $\alpha = 20^0$,

2) $\beta = 60^0$,

und

3) $\nu = \frac{4}{5} = 0,8$,

so erhalten wir:

$$sin. \delta = \frac{sin. \alpha \; sin. \beta}{\nu^2 sin. (\beta - \alpha)} = \frac{sin. 20^0 \, sin. 60^0}{0,64 \, sin. 40^0} = 0,7200,$$

und hiernach

4) $\delta = 46^0 \, 3'$.

Nehmen wir nun den äußeren Radhalbmesser

5) $r_1 = 2,45$ Fuß

an, so ist der erforderliche innere Radhalbmesser:

6) $r = \nu . r_1 = 0,8 . 2,45 = 1,96$ Fuß.

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse wäre die erforderliche äußere Radgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{gh\,(1 - tang.\,\alpha\; cotang.\,\beta)} = \sqrt{31{,}25\;5\,(1 - tang.\,20^0\; cotang.\,60^0)}$$
$$= \sqrt{156{,}25\,.\,0{,}78986} = 11{,}11 \text{ Fuß},$$

mit Rücksicht auf diese Hindernisse folgt dagegen, wenn man die Widerstandscoefficienten $\zeta = \zeta_1 = 0{,}075$ setzt,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh}{\frac{2\,sin.\,\beta\; cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)} + \zeta\left[\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)}\right)^2 + \nu^2\right]}}$$
$$= \sqrt{\frac{312{,}5}{\frac{2\,sin.\,60^0\; cos.\,20^0}{sin.\,40} + 0{,}075\left[\left(\frac{sin.\,60}{sin.\,40}\right)^2 + 0{,}64\right]}},$$

d. i.:

$$7)\quad v_1 = \sqrt{\frac{312{,}5}{2{,}5321 + 0{,}075\,.\,2{,}455}} = \sqrt{\frac{312{,}5}{2{,}7162}} = 10{,}726 \text{ Fuß}.$$

Die innere Radgeschwindigkeit ist nun

$$8)\quad v = \nu\,.\,v_1 = 0{,}8\,.\,10{,}726 = 8{,}581 \text{ Fuß}.$$

Die Geschwindigkeit des Wassers vor seinem Eintritt in das Rad ist:

$$9)\quad c = \frac{v_1\, sin.\,\beta}{sin.\,(\beta - \alpha)} = \frac{10{,}726\; sin.\,60^0}{sin.\,40^0} = 14{,}451 \text{ Fuß},$$

und die relative Geschwindigkeit des eintretenden Wassers:

$$10)\quad c_1 = \frac{v_1\, sin.\,\alpha}{sin.\,(\beta - \alpha)} = \frac{10{,}726\; sin.\,20^0}{sin.\,40} = 5{,}694 \text{ Fuß}.$$

Hieraus folgt die absolute Austrittsgeschwindigkeit

$$11)\quad w = 2\,v\, sin.\,\frac{\delta}{2} = 2\,.\,8{,}581\; sin.\,23^0\,1^1/_2{}' = 6{,}712 \text{ Fuß}.$$

Ferner die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute:

$$12)\quad u = 9{,}55\,\frac{v_1}{r_1} = 9{,}55 \cdot \frac{10{,}726}{2{,}45} = 41{,}81.$$

Die Querschnitte der Ausmündungen sind:

$$13)\quad F = \frac{Q}{c} = \frac{30}{14{,}451} = 2{,}076 \text{ Quadratfuß}.$$

und

$$14)\quad F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{Q}{v} = \frac{30}{8{,}581} = 3{,}496 \text{ Quadratfuß}.$$

Nimmt man das Dimensionsverhältniß $\lambda = \frac{e}{d} = 2$ und die Metallstärke einer Radschaufel, $s = 3$ Linien $= 0{,}02$ Fuß an, so erhält man, da

$$2\,\pi\, r\, sin.\,\delta = 2\,\pi\,.\,1{,}96\; sin.\,46^0\,3' = 8{,}866 \text{ ist},$$

die innere Radhöhe:

$$15)\quad e = \frac{F_2}{2\,\pi\, r\, sin.\,\delta} + \lambda s = \frac{3{,}496}{8{,}866} + 2\,.\,0{,}02 = 0{,}3943 + 0{,}04$$
$$= 0{,}4343 \text{ Fuß} = 5{,}212 \text{ Zoll};$$

ferner die Weite der Radcanäle bei der Ausmündung:

16) $d = \frac{e}{\lambda} = \frac{5,212}{2} = 2,606$ Zoll,

die Anzahl der Radschaufeln:

17) $n = \frac{\lambda F_2}{c^2} = \frac{2 \,.\, 3,496}{(0,4343)^2} = 37,$

und die der Leitschaufeln:

18) $n_1 = \frac{n \, sin. \, \alpha}{\nu \, sin. \, \delta} = \frac{37 \, sin. \, 20^0}{0,8 \, sin. \, 46^0 \, 3'} = \frac{37 \,.\, 0,342}{0,8 \,.\, 0,720} = 22.$

Francis macht die Anzahl der Leitschaufeln gleich der der Radschaufeln, und zwar $n = n_1 = 40$.

Die Leistung dieser Turbine ist:

$$L_1 = \left(1 - \frac{\zeta\,(c^2 + v^2) + w^2}{2\,g\,h}\right) Q h \gamma$$

$$= \left(1 - \frac{0,016}{5}\,[0,075\,(14,451^2 + 8,581^2) + 6,712^2]\right) . \, 9262,5$$

$$= [1 - 0,0032\,(0,075 \,.\, 281,46 + 45,05)] \,.\, 9262,5$$

$$= (1 - 0,0032 \,.\, 66,16) \,.\, 9262,5 = (1 - 0,2116) \,.\, 9262,5$$

$$= 0,7884 \,.\, 9262,5 = 7302 \text{ Fuß},$$

also etwas kleiner als die Leistung der Turbine mit innerer Beaufschlagung, im Beispiel zu §. 264.

Turbinenwelle. Bei Anordnung einer Turbine für eine gegebene Wasserkraft hat man außer den Hauptdimensionen auch noch einige Hauptstärken zu berechnen. Namentlich ist die Stärke der Turbinenwelle und die ihres Zapfens, ferner die Wandstärke des Schützenreservoirs u. s. w. nach den Regeln der Festigkeitslehre zu bestimmen. §. 269

Die Stärke der Turbinenwelle ist aus der Leistung und der Umdrehungszahl der Maschine, den Regeln der Torsionsfestigkeit entsprechend, zu bestimmen. Die für horizontale Wasserradwellen (§. 191) entwickelte Formel

$$d = 0,361 \sqrt[3]{Pa} = 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll},$$

wo P die Umdrehungskraft der Maschine in Pfund, L die Leistung derselben in Pferdekräften, a den Radhalbmesser r in Fuß, sowie u die Umdrehungszahl pr. Minute bezeichnen, findet hier ihre unmittelbare Anwendung.

Die Stärke d_1 des Zapfens der stehenden Welle macht man gewöhnlich $^2/_3\,d$ bis $^3/_4\,d$, wiewohl sie nach den gewöhnlichen Regeln der Festigkeitslehre kleiner sein könnte. Nimmt man den zulässigen Druck pr. Quadratzoll Querschnittsfläche 1500 Pfund an, so ist bei dem Gewichte G der armirten Turbinenwelle:

$$1500 \, \frac{\pi d_1^2}{4} = G,$$

und daher:

$$d_1 = \sqrt{\frac{G}{375\,\pi}} = 0{,}02913\,\sqrt{G},$$

wofür wir

$$d_1 = 0{,}03\,\sqrt{G} \text{ Zoll}$$

setzen wollen.

Diese Formel gilt jedoch nur für langsam umgehende stehende Wellen, z. B. für Göpel; den viel schneller umlaufenden Turbinenzapfen ist wegen der größeren Wärmeentwickelung eine größere Stärke zu geben. Hier ist es nöthig, die Stärke mit der Umdrehungszahl u wachsen zu lassen, und ziemlich angemessen

$$d_1 = 0{,}03\,\sqrt{(1 + 0{,}01\,u)\,G}$$

zu setzen, wobei u die Umdrehungszahl der Turbinenwelle bezeichnet.

Die Wellenköpfe oder diejenigen Theile der Turbinenwelle, wo der Radteller und wo das Transmissionsrad aufsitzen, sind wegen der Schwächung durch die Spur für einen Keil stärker zu machen, als die übrige Welle. Gewöhnlich macht man die Stärke dieser Köpfe $= \frac{5}{4}\,d$ und die Wanddicke der Hülsen, womit sowohl der Radteller als auch das Transmissionsrad auf den Wellenköpfen aufsitzen, $= \frac{1}{3}\,d$; es ist also hiernach der äußere Durchmesser einer solchen Hülse:

$$d_2 = \frac{5}{4}\,d + 2 \cdot \frac{1}{3}\,d = \frac{23}{12}\,d.$$

Der Radteller muß eine dem Kraftmomente Pa der Turbine entsprechende Stärke besitzen. Ist s die Stärke dieses Tellers an der Welle, wo er an seiner Hülse ansitzt, so hat man den Inhalt der cylindrischen Fläche, womit er mit der Hülse zusammenhängt: $\pi\,d_2\,s$, und bezeichnet, wie gewöhnlich, K den Festigkeitsmodul, so hat man die Kraft zum Abdrehen des Tellers von seiner Hülse, $= \pi\,d_2\,s\,K$ und folglich das Moment desselben:

$$Pa = \pi\,d_2\,s\,K\,\frac{d_2}{2} = \frac{1}{2}\,\pi\,d_2^2\,s\,K.$$

Führt man für K den Sicherheitsmodul $T = 1800$ Pfund ein (s. Bd. I, §. 264), so erhält man die gesuchte Tellerstärke:

$$s = \frac{Pa}{900\,\pi\,d_2^2},$$

oder, da

$$Pa = 12 \cdot 4584\,\frac{L}{u} \text{ Zollpfund}$$

ist, (s. §. 191)

$$s = 19{,}2\,\frac{L}{u\,d_2^2} = 5{,}23\,\frac{L}{u\,d^2}.$$

In der Praxis macht man, um dem Teller die nöthige Steifigkeit zu geben, diese Stärke viel größer als dieser Ausdruck angiebt, und zwar gleich der Stärke des Bodentellers. Letztere läßt sich wie folgt berechnen.

Denken wir uns diesen Teller massiv, und nehmen wir an, daß derselbe durch den Druck des darüber stehenden Wassers längs seines Durchmessers $2r_1$ in zwei Hälften zertheilt werde. Bei der Druckhöhe h, ist die drückende Kraft auf jede Hälfte:

$$P = \frac{1}{2}\pi r_1^2 h \gamma,$$

und, da der Schwerpunkt eines Halbkreises um

$$y = \frac{4 r_1}{3\pi}$$

vom Mittelpunkte abweicht, (s. Band I, §. 113) das Moment dieser Kraft:

$$Py = \frac{1}{2}\pi r_1^2 h \gamma \cdot \frac{4 r_1}{3\pi} = \frac{2}{3} r_1^3 h \gamma.$$

Dieses Moment ist aber auch, der Theorie der relativen Festigkeit zufolge, da $2r_1$ die Breite und s die Höhe der Bruchfläche ausdrücken (s. Band I, §. 236):

$$Py = \frac{2 r_1 . s^2 T}{6};$$

setzen wir daher beide Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir folgende Formel zur Bestimmung der Tellerstärke:

$$\frac{2 r_1 s^2 T}{6} = \frac{2}{3} r_1^3 h \gamma \quad \text{oder} \quad s^2 = \frac{2 r_1^2 h \gamma}{T}.$$

Führen wir nun noch $\gamma = 61,75$ und $T = 7000$ Pfund ein, so erhalten wir die gesuchte Tellerstärke:

$$s = r_1 \sqrt{\frac{2 . 61,75 h}{7000}} = r_1 \sqrt{0,01764 h} = 0,132 r_1 \sqrt{h} \text{ Zoll},$$

wobei r_1 und h in Fußen auszudrücken sind.

Der nöthigen Steifigkeit wegen setzt man (s. Band I, §. 363) noch 0,33 Zoll zu, nimmt also:

$$s = 0,12 r_1 \sqrt{h} + 0,33 \text{ Zoll an.}$$

Beispiel. Für die im Beispiel zu §. 264 berechnete Turbine ist, da hier die Leistung $L = 16$ Pferdekräfte und die Umdrehungszahl $u = 65$ gesetzt werden kann, die erforderliche Wellenstärke:

$$d = 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} = 6 \sqrt[3]{\frac{16}{65}} = 6 . 0,63 = 3,80,$$

wofür $= 4$ Zoll zu nehmen sein möchte.

Wäre das Gewicht der armirten Turbinenwelle $G = 3600$ Pfund, so würde nach der oben angegebenen Formel, die nöthige Zapfenstärke

$$d_1 = 0,03 \sqrt{(1 + 0,01 . 65)\, 3600} = 1,8 \sqrt{1,65} = 2,28 \text{ Zoll}$$

betragen, wofür aber $d_1 = 2,5$ Zoll zu setzen sein möchte.

Die erforderliche Stärke des Bodens sowie auch die des Radtellers ist:

$$s = 0,12 . 1,8 \sqrt{5} + 0,33 = 0,216 . 2,24 + 0,33 = 0,81 \text{ Zoll.}$$

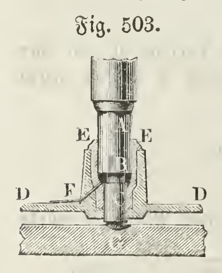
§. 270 **Zapfenlager der Turbinen.** Ein sehr wichtiger Theil einer Turbine ist der Zapfen und die Lagerung desselben. Das oft beträchtliche Gewicht der Turbine und die große Umdrehungsgeschwindigkeit derselben erzeugen an der Basis des Zapfens oder Stiftes ein so großes Reibungsmoment, daß ein sehr schnelles Abführen desselben eintritt, wenn derselbe nicht mit der größten Sorgfalt geölt wird. Es haben deshalb auch die meisten Turbinenconstructeure immer besonders ihr Augenmerk auf die Herstellung dauerhafter Turbinenstifte verwendet. Wenn man beobachtet, daß die Turbinenstifte viel eher abgeführt werden, als die Zapfen anderer stehender Wellen, so hat diese Abweichung theils in der mit der großen Umdrehungsgeschwindigkeit verbundenen Erhitzung des Stiftes und theils in dem unvollkommenen und durch den Zutritt des Wassers erschwerten Schmieren oder Oelen ihren Grund. Um diesem Uebelstande so viel wie möglich zu begegnen, hat man die Turbinen möglichst leicht und vorzüglich ihre Welle nicht unnöthig lang zu machen, ferner die sich reibenden Flächen möglichst groß, also den Stift sehr dick (in der Regel nur wenig schwächer als die Welle selbst) zu machen, ferner den Zutritt des Wassers zwischen den Reibungsflächen möglichst zu verhindern, und endlich einen ununterbrochenen Strom von Oliven- oder besser, Nußöl, zwischen die Berührungs- oder Reibungsflächen durchzuleiten.

Außer der Unterstützung am Stifte oder unteren Zapfen ist natürlich auch noch eine Lagerung am oberen Ende der Welle oder in der Nähe desselben anzubringen.

Eine sehr einfache, jedoch nur bei wenig Druck anwendbare Zapfenlagerung zeigt Fig. 484, Seite 573. Es ruht hier der Zapfen C in einer Pfanne von Rothguß, die innerhalb eines auf der Radstubensohle aufgeschraubten Pfannenträgers durch Stellkeile LS nach Bedürfniß gehoben oder gesenkt werden kann. Das Oel wird durch ein Rohr R zugeführt, welches neben den Stellkeilen durch den Boden der Pfanne geht.

Die Einrichtung eines Zapfens nach Cadiat führt Fig. 503 vor Augen.

Fig. 503.

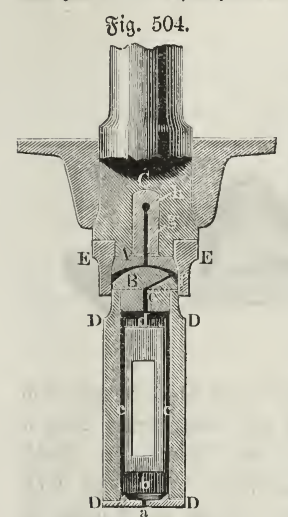


A ist der Fuß der stehenden Welle, B ist ein gehärteter Stahlstift, welcher entweder durch eine Schraube, oder durch Rippen mit A fest verbunden wird; C ist das Lager desselben, welches ebenfalls aus hartem Stahle besteht, $DEED$ ist das auf der Sohle fest aufsitzende Lagergehäuse aus Gußeisen, EE ist die messingene Lagerschale, welche die Welle seitlich unterstützt, und den Zutritt des Wassers zum Zapfen verhindert, F ein Rohr, durch welches das Oel in den zwischen B und E befindlichen leeren Raum geführt wird, endlich stellt G den Hebel oder Stellkeil zum Heben oder Senken der Turbine vor.

Am complicirtesten ist der Lagerungs- und Schmierapparat von Four-

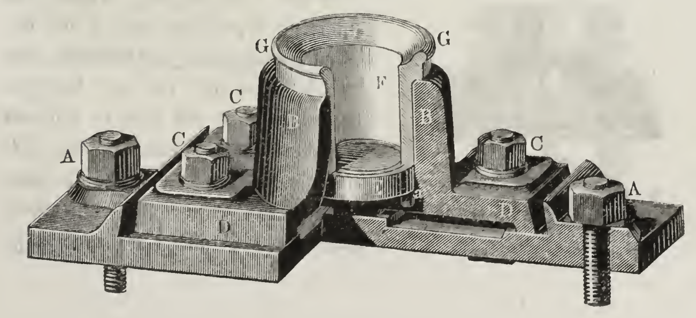
neyron. Die allgemeine Einrichtung desselben ist aus Fig. 486 zu ersehen, zur Kenntnißnahme der speciellen Einrichtung wird aber Fig. 504 dienen. Aus Fig. 486 ist wenigstens zu entnehmen, wie das Zapfenlager *Z* auf einem um *O* drehbaren Hebel *OR* aufruht, und wie derselbe durch eine Zugstange *RS* mittels einer Schraube *S* gehoben oder gesenkt werden kann. Auch sieht man in *U* noch das Rohr zum Zuführen des Oeles. Der lebhafteren Circulation des Oeles wegen ist es gut, wenn die Einmündung des Rohres möglichst hoch, mindestens aber über dem Spiegel des Oberwassers steht. Die sich reibenden Theile *A* und *B*, Fig. 504, bestehen aus gehärtetem Stahl. Der obere Theil *A* ist mit der Welle *C* fest verbunden, der Untertheil *B* hingegen sitzt in einem Gehäuse *DD* fest, welches in dem Zapfenständer *Z* mittels des Hebels *OR*, Fig. 486, auf- oder niedergeschoben werden kann. Des sicheren Standes wegen ist die Grundfläche *A*, Fig. 504, in Form eines Kugelsegmentes ausgehöhlt und die Kopffläche von *B* ebenso gewölbt, auch werden beide noch durch einen Metallmantel *EE* umgeben, der überdies noch den Zweck hat, das Oel zwischen den Reibungsflächen zurückzuhalten. Das durch ein Rohr zugeleitete Oel tritt bei *a* in den hohlen Raum *b*, von da durch die Canäle *c*, *c* in den Raum *d*. Aus diesem fließt es durch drei von unten senkrecht und von oben schief auslaufende Canäle *ef*... am Umfange des Stahllagers in die Höhe bis zu den Reibungsflächen, wo ihm durch drei radiallaufende Furchen hinreichende Gelegenheit zur Ausbreitung gegeben wird. Endlich geht noch von der Mitte dieser Flächen aus eine Bohrung *gh* in die Welle hinein, durch welche das Oel nach außen abfließen und in Circulation erhalten werden kann.

Fig. 504.



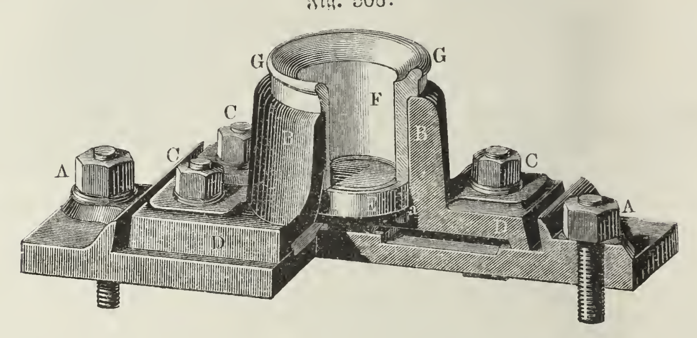
Ein vollständiges festes Zapfenlager ist in Fig. 505 abgebildet. *AA* ist

Fig. 505.



die durch zwei Schraubenbolzen A, A aufgeschraubte Sohlplatte, BB ist das Lagergehäuse mit seiner durch vier Schraubenbolzen $C, C \ldots$ auf die

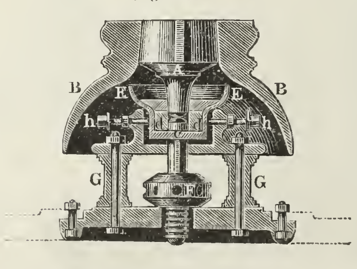
Fig. 506.



Sohlplatte befestigten Fußplatte DD. Im Inneren des Lagergehäuses liegt die mit einer kreisrunden Schmierrinne versehene und durch einen Stift a auf der Fußplatte festgehaltene Spurplatte E aus Bronze oder Stahl, und darüber sitzt die messingene cylindrische Lagerschale oder Büchse FG, welche den stehenden Zapfen der Turbine umgiebt. Wenn die Turbine in freier Luft umläuft, so kann die Schmiere aus dem Behälter GG durch verticale Rinnen nach der Rinne in der Spurplatte geführt werden, steht aber das Zapfenlager unter Wasser, so muß man das Schmieröl durch besondere Röhrchen und Seitencanäle in $BB \ldots$ dem Zapfen zuführen und von demselben ableiten.

Um das Wasser von einem Turbinenzapfen ganz abzuhalten, kann man die sogenannte atmosphärische Schmierung von Laurent in Anwendung bringen. Das Wesentliche derselben besteht darin, daß man eine Taucherglocke an dem Fuße der Turbinenwelle befestigt, welche den Turbinenzapfen umgiebt; die in dieser Glocke eingeschlossene Luft verhindert den Zutritt des Wassers zu dem Inneren des Zapfenlagers. Die Einrichtung eines Zapfenlagers mit atmosphärischer Schmierung ist aus Fig. 507 zu ersehen.

Fig. 507.



Es ist A der Turbinenzapfen und BB die Taucherglocke, ferner c die stählerne Spurplatte und d die den Zapfen umgebende Zapfenbüchse. Letztere befinden sich in dem Lagergehäuse, welches sich oben in eine mit Schmieröl anzufüllende Schaale EE endigt. Dieses Lagergehäuse ruht mittels der Stellschraube F auf einem gußeisernen Stuhl GG und läßt

sich nicht allein durch diese Schraube nach Bedürfniß heben und senken, sondern auch durch andere Seitenschrauben h, h in horizontaler Richtung einstellen.

Man schützt auch die Turbinenzapfen vor dem Zutritt des Wassers dadurch, daß man die Turbinenwelle aufhängt. Eine solche Aufhängung haben wir schon oben in §. 249, Fig. 488, an einer Turbine mit äußerer Beaufschlagung kennen gelernt, und eine andere Aufhängungsweise wird bei den Fontaine'schen Turbinen angewendet, wovon erst weiter unten die Rede sein kann.

Anmerkung. Hierher gehört auch die von Girard empfohlene Anwendung des Wasserdruckes zur Verminderung der Zapfenreibung. Siehe „Note sur les éxperiences de surfaces glissantes et sur leurs applications aux pivots des arbres verticaux, in Comptes rendues de l'Academie des Sciences à Paris, T. 55. Auch Dingler's polytechn. Journal, Bd. 167.

Vergleichung der Turbinen. Aus einer Vergleichung der Turbinen von Fourneyron, Cadiat und Whitelaw unter einander geht Folgendes hervor. Jedenfalls ist die Turbine mit Leitschaufelapparat die mechanisch vollkommnere Construction, da durch dieselbe dem Wasser beinahe alles Arbeitsvermögen (durch Gleichmachung von c_2 und v) entzogen werden kann, was bei den Turbinen ohne diesen Apparat nicht möglich ist. Mit Berücksichtigung aller Nebenverhältnisse erfordern alle drei Turbinen ziemlich eine und dieselbe Radgeschwindigkeit, nämlich §. 271

$$v = 0,7\,\sqrt{2gh} \text{ bis } \sqrt{2gh},$$

um die Maximalgleichung hervorzubringen; nur sind diese Maximalleistungen verschieden, nämlich bei den Fourneyron'schen Turbinen circa 0,75, bei den Cadiat'schen Turbinen 0,65 und bei den Whitelaw'schen Turbinen nur 0,50 bis 0,60 Procent der Totalleistung. Diese Verhältnisse verändern sich jedoch mit der Größe des Aufschlages; während bei einer Whithelaw'schen Turbine durch eine Veränderung der Ausmündungen der Wirkungsgrad sich nicht wesentlich ändert, fällt derselbe bei den übrigen Turbinen bedeutend kleiner aus, sowie die Schütze bei einem schwächeren Aufschlage tiefer gestellt wird. Uebrigens findet zwischen den übrigen Turbinen noch der Unterschied statt, daß bei einer äußeren Schütze der Ausfluß stets voll bleibt, bei einer inneren Schütze aber, wenn dieselbe ungefähr die halbe Radhöhe bedeckt, die Radcanäle von dem Wasser nicht vollständig gefüllt werden.

Was den Wasserverlust anlangt, welcher durch die ringförmigen Spalten zwischen Rad und Schütze u. s. w. erfolgt, so ist dieser bei den Fourneyron'schen Turbinen am kleinsten, größer bei den Whitelaw'schen und noch größer bei den Cadiat'schen Turbinen, weil der innere Wasserdruck bei den

ersteren Turbinen, zumal bei besseren Constructionen, den Atmosphärendruck nicht viel übertrifft, bei den letzteren Turbinen dieser Druck aber in der Regel ziemlich groß ist, und diese Räder ohnedies eine Spalte (bei der Schütze) noch mehr haben, als die anderen Turbinen. Uebrigens sind die Turbinen ohne Leitschaufelapparat, und zumal die Whitelaw'schen, jedenfalls einfacher und leichter vortheilhaft zu construiren, als die Fourneyron'schen Turbinen mit Leitschaufeln, die überdies noch durch fremdartige Körper, welche durch das Aufschlagwasser zugeführt werden, in ihrer vortheilhaften Nutzleistung mehr gestört werden können, als die ersteren Räder.

Im Allgemeinen läßt sich behaupten, daß die Turbinen von Fourneyron und Cadiat vorzüglich zur Benutzung von kleinen oder mittleren Gefällen (unter 30 Fuß) und von großen Aufschlagmengen, die Schottischen Turbinen aber mehr zur Verwendung hoher Gefälle und kleiner Wassermengen sich eignen.

Ganz besonders lassen sich aber auch die Tangentialräder zur Benutzung hoher Gefälle anwenden.

Anmerkung. Bei den Turbinen ohne Leitschaufelapparat, namentlich, wenn dieselben ein hohes Gefälle haben, besitzt das abfließende Wasser noch eine große absolute Geschwindigkeit $w = c_2 - v$ (vergleiche die berechneten Beispiele) und es wird dadurch dem Rade selbst ein beachtenswerther Theil von mechanischer Leistung entzogen. Dieser Verlust läßt sich aber beseitigen oder sehr ermäßigen, wenn man die lebendige Kraft des abfließenden Wassers zum Umtriebe eines zweiten Rades verwendet. Eine derartige Construction hat der Herr Ober-Bergrath Althans an einer Lohmühle zu Vallendar bei Ehrenbreitenstein ausgeführt. Die wesentliche Einrichtung derselben ist in Fig. 508 zu ersehen. AEA ist ein gewöhnliches Reactionsrad mit vier krummen Schwungröhren und 120 Fuß Gefälle (vergl. §. 245), und BB ist ein größeres Schaufelrad, welches durch das aus A, A ausfließende Wasser in Umdrehung gesetzt wird. Da beide Räder in umgekehrten Richtungen umlaufen, so sind sie noch durch ein besonderes Räderwerk mit einander in Verbindung zu setzen. Uebrigens gewährt das äußere Rad noch den Vortheil, daß es mit als Schwungrad dient, und dadurch einen gleichförmigeren Gang in die ganze Maschine bringt (s. inner-österreichisches Gewerbeblatt, Jahrgang 5, 1843).

Fig. 508.



§. 272 **Versuche an Turbinen.** Versuche über die Leistungen der zuletzt betrachteten Reactions-Turbinen mit Ausströmung von innen nach außen sind zwar in großer Anzahl bekannt gemacht worden, nur möchte nicht allen Angaben hierüber das nöthige Vertrauen geschenkt werden können. Mit diesen in manchen Beziehungen so vortrefflichen Maschinen Wirkungsgrade von 0,85

bis 0,95 erlangt haben zu wollen, ist geradezu zu widerlegen und, gelinde beurtheilt, nur Täuschungen zuzuschreiben. Da dem Ausflusse des Wassers durch die vollkommenste Mündung ein Geschwindigkeitscoefficient $\varphi = 0,97$ zukommt (s. Bd. I, §. 405), so findet schon bei der Einführung in das Rad durch den Leitschaufelapparat der Arbeitsverlust

$$\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \frac{c^2}{2\,g}\, Q\gamma = 0,06\, \frac{c^2}{2\,g}\, Q\gamma$$

statt; da ferner die Reibung des Wassers in einer Röhre, welche im Mittel 3mal so lang als weit ist (nach Band I, §. 430),

$$0,019\,.\,3 \cdot \frac{v^2}{2\,g}\, Q\gamma = 0,057\, \frac{v^2}{2\,g}\, Q\gamma$$

Leistung consumirt und ungefähr $\frac{v^2}{2\,g} = \frac{c^2}{2\,g} = h$ ist, so bleiben wegen dieser Hindernisse schon nur 88 Proc. Leistung übrig; rechnet man nur 1 Proc. auf den Krümmungswiderstand, 2 Proc. Verlust wegen des Stoßes an den Schaufelenden und 3 Proc. auf das Arbeitsvermögen, welche das abfließende Wasser behält, und nimmt man selbst auf andere Hindernisse, wie z. B. auf die im Leitschaufelapparate u. s. w. nicht Rücksicht, so bleiben nur 82 Proc. Nutzleistung übrig; und wir können gewiß eine Turbine als eine höchst vorzügliche ansehen, wenn dieselbe den Wirkungsgrad 0,75 bis 0,80 hat. (Vergl. §. 260.) Es geben aber auch die Versuche von unparteiischen Experimentatoren, wie z. B. von Morin, Brückmann u. A., Wirkungsgrade von diesen Rädern an, welche zwar 0,80 nahe kommen, jedoch diesen Werth nie vollkommen erreichen.

Morin rapportirt die Ergebnisse seiner Versuche in der Schrift: Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical, appelées Turbines, Metz et Paris, 1838. Zunächst handelt er von den Versuchen, welche er an einer Fourneyron'schen Turbine zu Moussay angestellt hat. Dieses Rad hatte 0,85 Meter äußeren Durchmesser, 0,11 Meter Höhe, 7,5 Meter Gefälle und 0,738 Cubikmeter Aufschlagwasser pr. Sec., machte also eine Wasserkraft von 73,8 Pferdekräften zu Gute. Das allgemeinste Ergebniß dieser Versuche war: das Rad mochte mehr oder weniger unter Wasser gehen, es gab bei 180 bis 190 Umdrehungen pr. Min. die größte Nutzleistung von 69 Procent des ganzen Arbeitsvermögens. War die Umdrehungszahl circa 50 Procent kleiner oder größer, so sank übrigens dieser Wirkungsgrad nur um 7 bis 8 Procent. Hierbei war die Schütze fast vollständig aufgezogen, wurde aber dieselbe bis zur halben Radhöhe niedergelassen, so fiel der Wirkungsgrad um 8 Procent. Bei einem Gange in freier Luft würde dieses Fallen gewiß noch größer gewesen sein.

Nächstdem theilt Morin in der genannten Abhandlung die Resultate

seiner ausgedehnten Versuche an einer Turbine in Mühlbach mit. Dieses Kreiselrad hatte 2 Meter äußeren Durchmesser und $^1/_3$ Meter Höhe; sein Gefälle betrug $3^1/_2$ bis $3^3/_4$ Meter, und sein Aufschlag $2^1/_2$ Cubikmeter pr. Sec.; es nahm also eine disponible Wasserkraft von 117 bis 125 Pferdekräften auf. Bei 50 bis 60 Umgängen pr. Min. und bei dem stärksten Schützenzuge gab es die größte Nutzleistung von 78, die jedoch, weil Morin bei der Wassermessung einen zu kleinen Ausflußcoefficienten angenommen hat, vielleicht nur 75 Procent zu setzen ist. Dieser große Wirkungsgrad verminderte sich auch um 2 bis 4 Procent, wenn die Umdrehungszahl 40 Procent größer oder kleiner war, als die angegebene. Es änderte sich der Wirkungsgrad nicht, wenn das Rad wenig oder tief (1 Meter) unter Wasser ging. Ebenso trat keine ansehnliche Veränderung des Wirkungsgrades ein, wenn sich der Aufschlag im Verhältnisse 3 zu 5 veränderte. Auch verminderte sich der Wirkungsgrad mit der Höhe des Schützenstandes so, daß z. B. bei 00,5 Meter Schützenzug und bei der vortheilhaftesten Umdrehungszahl (58) der Wirkungsgrad nur 0,373 ausfiel. Uebrigens stellte Morin noch besondere Versuche über das Verhältniß $\frac{v}{\sqrt{2gh}}$ an, und fand, ganz der Theorie entsprechend, daß dieses Verhältniß mit v (wegen Einflusses der Centrifugalkraft) wächst, dagegen abnimmt, wenn der Schützenstand ein größerer wird.

§. 273 Redtenbacher theilt in seiner Schrift „über die Theorie und den Bau der Turbinen und Ventilatoren“ noch die Resultate der an einer Turbine zu Siebenen in der Schweiz angestellten Versuche mit. Diese Turbine hatte folgende Dimensionen und Verhältnisse: $r_1 = 0{,}938$ Meter, $r = 1{,}128$ Meter; $h = 1$ Meter; $e = 0{,}254$ Meter; $Q = 0{,}2$ Cubikmeter; $\alpha = 12^0$, $\beta = 45^0$, $\delta = 10^0$ u. s. w. Die Hauptergebnisse der Versuche mit diesem Rade waren folgende: Beim Schützenzuge $e_1 = 0{,}1$ Meter war die vortheilhafteste Umdrehungszahl 17,5 und der entsprechende größte Wirkungsgrad $\eta = 0{,}464$; war der Schützenzug $e_1 = 0{,}2$ Meter, so trat der größte Wirkungsgrad $\eta = 0{,}646$ bei 21,1 Umdrehungen pr. Minute ein; und betrug der Schützenzug $e_1 = 0{,}254$ Meter, so fiel, bei 20,6 Umdrehungen, der Maximalwirkungsgrad nur 0,640 aus. Diese verhältnißmäßig sehr kleinen Wirkungsgrade mißt Redtenbacher wohl mit Recht der zu großen Krümmung der Radschaufeln bei. Uebrigens ging die Turbine in freier Luft um.

Außer anderen interessanten Folgerungen, welche Redtenbacher aus den Wirkungen und den Verhältnissen der bekannten Fourneyron'schen Turbinen zieht, möge besonders die hervorgehoben werden, daß ein solches Rad bei der Maximalleistung und bei völlig aufgezogener Schütze halb so viel Umdrehungen macht, als wenn es ganz leer, d. i. ohne Arbeit zu verrichten, umläuft.

Die Versuche, welche Combes an seinen Reactionsrädern mit und ohne Leitschaufelapparat angestellt hat, führen ebenfalls auf kleinere Wirkungsgrade. An einem Modellrade ohne Leitschaufeln von 0,14 Meter äußerem Durchmesser und mit 25 Schaufeln betrug im günstigsten Falle, bei 335 Umdrehungen pr. Minute, 0,48 Meter Gefälle und 285 Litres Aufschlag pr. Minute, der Wirkungsgrad nur 0,511. Bei einem Modellrade von derselben Größe, mit 20 Leitschaufeln und 30 Radschaufeln und mit den Winkelgrößen $\alpha = 30^0$, $\beta = 90^0$ hat sich höchstens, und zwar bei 0,81 Meter Druckhöhe, 199 Umdrehungen pr. Minute und 372 Liter Aufschlag pr. Minute, der Wirkungsgrad $\eta = 0{,}566$ herausgestellt. An einem Rade im Großen, welches zur Bewegung von Pumpen in Paris diente, wurde der Wirkungsgrad ebenfalls nur 0,53 gefunden. Dieses Rad hatte einen äußeren Durchmesser von 0,97 Meter, eine Höhe von 0,16 Meter, ein Gefälle von 0,91 bis 1,83 Meter und einen Aufschlag zwischen 400 und 85 Liter pr. Secunde. Die Zahl der Radschaufeln betrug 36, während die Leitschaufeln ganz fehlten und die Zahl der Umdrehungen pr. Minute war bei der Maximalleistung von 117,75 Kilogrammeter = 75.

Ausführliche Versuche mit zwei Fourneyron'schen Turbinen sind auch noch von Morris in Delaware angestellt worden. S. Journal of the Franklin Institute. Dec. 1843, auch polytechn. Centralblatt 1844, Heft X.) Das erste der beiden Versuchsräder hatte $4^2/_3$ Fuß äußeren Durchmesser und 8 Zoll Höhe, sein Gefälle betrug circa 6 Fuß und sein Aufschlag im Mittel 1700 Cubikfuß pr. Minute. Der größte Wirkungsgrad von 0,7 stellte sich bei dem größten Schützenzuge von 6 Zoll und bei 52 Umdrehungen oder einer inneren Radgeschwindigkeit $v_1 = 0{,}46\sqrt{2gh}$ heraus. Uebrigens aber variirte für $v_1 = 0{,}5\sqrt{2gh}$ bis $0{,}9\sqrt{2gh}$, η nur zwischen den Grenzen 0,64 bis 0,70. Das zweite Rad hatte 4 Fuß 5 Zoll äußeren Durchmesser, 6 Zoll Höhe, circa $4^1/_2$ Fuß Gefälle und 14 Cubikfuß Aufschlag pr. Secunde. Es ging unter Wasser und gab bei $4^1/_2$ Zoll Schützenzug folgende Leistungen. War $v_1 = 25$ bis 30 Procent von $\sqrt{2gh}$, so ergab sich $\eta = 0{,}63$; war $v_1 = 40$ bis 50 Procent von $\sqrt{2gh}$, so stellt sich $\eta = 0{,}71$ heraus, bei

$$\frac{v_1}{\sqrt{2gh}} = 0{,}45 \text{ oder } u = 49,$$

bekam man die Maximalleistung, nämlich $\eta = 0{,}75$, bei

$$\frac{v_1}{\sqrt{2gh}} = 0{,}5 \text{ bis } 0{,}7, \text{ fiel } \eta = 0{,}60 \text{ aus.}$$

Anmerkung. Neuere Versuche mit einer Etagenturbine sind von Marozeau angestellt worden. Dieselben gaben einen mittleren Wirkungsgrad von 0,6. Siehe

polytechn. Centralblatt, Jahrg. 1848, oder Bulletin de Mulhouse, 1846, Nr. 101. Auch sind vom Herrn Capitain M. Ordinaire de Lacolange neue Versuche an einer Fourneyron'schen Turbine angestellt worden. S. „Civilingenieur", Bd. III. 1857. Herr Lacolange hat diese Versuche in einer besonderen Schrift veröffentlicht, unter dem Titel: Théorie de la turbine Fourneyron d'après M. Weisbach etc., suivie d'expériences etc. Bordeaux 1856.

§. 274 **Hydropneumatisation.** Um die Leistungsfähigkeit der Turbinen zu vergrößern, hat man noch besondere Mittel angewendet. Es gehört hierher vor Allem die Hydropneumatisation von Girard und nächstdem die Anwendung der Diffuser von Boyden. Von beiden Hülfsmitteln möge in Folgendem noch das Wesentliche mitgetheilt werden.

Die Hydropneumatisation von Girard besteht darin, daß man die Radstube der Turbine von oben mit einem luftdichten Mantel umschließt, den durch denselben abgesperrten Raum mit comprimirter Luft anfüllt, und dadurch den Ausfluß des Wassers unter Wasser verhindert. Es ist zwar Thatsache, daß eine Turbine weniger leistet, wenn sie unter Wasser umläuft, als wenn sie sich in freier Luft bewegt; allein diese Differenz ist bei vollständig geöffneter Schütze nicht groß genug, um auf ihre Beseitigung besondere Mittel zu verwenden. Ganz anders ist es aber, wenn die Turbine bei zum Theil niedergelassener Schütze unter Wasser läuft. Wenn das Wasser hierbei noch immer mit vollem Querschnitte aus der Turbine tritt, und dies muß bei der unter Wasser gehenden Turbine stets der Fall sein, so findet beim Eintritte des Wassers aus dem Reservoir ins Rad eine plötzliche Geschwindigkeitsveränderung desselben und, ihr entsprechend, ein namhafter Verlust an Wasserdruck statt. Dieser Verlust fällt um so größer aus, je tiefer die Schütze herabgelassen, je kleiner also die Höhe e_1 der Schützenmündung gegen die Radhöhe e ist. Bezeichnet c die absolute Geschwindigkeit des Wassers bei seinem Eintritte in das Rad, und ist folglich die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus der Schütze $= \frac{e}{e_1}\, c$, so hat man den entsprechenden Druckhöhenverlust:

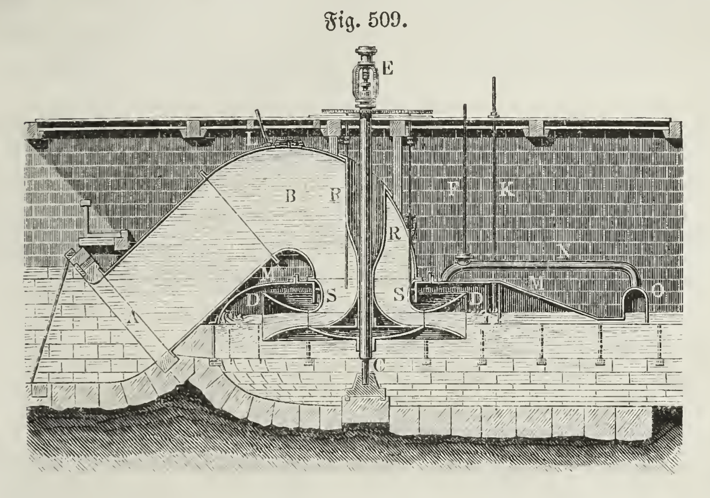
$$\frac{1}{2g}\left(\frac{e}{e_1}\,c - c\right)^2 = \left(\frac{e}{e_1} - 1\right)^2 \frac{c^2}{2g} \text{ (vergl. §. 257.)}$$

Dieser Verlust fällt ganz aus, wenn das Wasser bei seiner Bewegung durch das Rad die Canäle desselben nicht ausfüllt, wenn man es also mit einer Druckturbine zu thun hat. Da nun aber dieser Fall nur beim Ausflusse in die Luft stattfinden kann, so gewährt die Entfernung des Unterwassers von der Radmündung durch Hinzuleitung von Luft bei tiefen Schützenständen einen besonderen Vortheil.

Die Einrichtung einer solchen Turbine mit Hydropneumatisation ist aus Fig. 509 zu ersehen. Die hier abgebildete Turbine hat bei einem Aufschlag von 3 bis 5 Cubikmeter pr. Secunde, das kleine Gefälle von nur 0,450

bis 0,600 Meter, und macht bei einem äußeren Durchmesser von $3^1/_2$ Meter, pr. Minute nur 20 Umdrehungen. Herr Girard hat diese Turbine für eine Spinnerei zu Eindhoven in Holland construirt. Damit das Wasser

Fig. 509.



ungestört in das Rad eintrete, mußte es dem Ausflußreservoir durch ein krummes Rohr AB, nach Art eines Hebers (à siphon), zugeführt werden. Eine Eigenthümlichkeit dieser Turbine ist noch die allmälige Erweiterung (franz. évasement) des Rades DD von innen nach außen. Da hierdurch der Querschnitt F_2 der Ausmündungen der Radcanäle vergrößert, und folglich die Ausflußgeschwindigkeit vermindert wird, so ist dadurch dem Wasser ein größerer Theil seines Arbeitsvermögens zu entziehen, als wenn die Radcanäle an allen Stellen eine und dieselbe Höhe haben. Hierzu gehört allerdings, daß das Wasser bei seinem Austritte aus dem Rade die Radcanäle auch wirklich ausfülle, welches beim Ausflusse in die Luft, sowie bei bedeutender Erweiterung des Rades nach außen, wodurch der Querschnitt F_2 dem Querschnitt F_1 sehr nahe gebracht wird, nicht eintritt, zumal wenn die Schütze nicht ganz geöffnet ist. Die hohle Turbinenwelle CE ist in E aufgehangen und dreht sich um eine schwache feststehende Säule, deren Fuß in C zu sehen ist.

Eine Compressionsluftpumpe, welche durch die Turbine selbst in Bewegung gesetzt wird, drückt die Luft mittels einer Röhre F in die vom Mantel MM umschlossene Radstube, und eine andere Röhre K führt die etwa im Ueberfluß zugepreßte Luft wieder ab, damit der Wasserspiegel unter dem Mantel einen bestimmten Stand behält. In einer Glocke O sammelt sich die von dem Wasser mit fortgeführte Luft, welche durch die Röhre N in den Radstubenraum MM wieder zurückgeführt wird. Die Einrichtung, Auf-

hängung und Bewegung der Schütze SS ist die gewöhnliche. Das Rohr RR, welches die Turbinenwelle umgiebt, hat einen länglichen Querschnitt, um der Bewegung des Wassers so wenig wie möglich Hindernisse in den Weg zu legen. Die im Scheitel des Hebers AB sich ansammelnde Luft läßt sich mittels einer Röhre L durch eine kleine Saugpumpe entfernen.

§. 275 **Boyden's Diffuser.** Nicht allein bei den Turbinen von Girard, sondern auch bei älteren und neueren Turbinenconstructionen, wie z. B. bei denen von Boyden und Francis, hat man den Radkränzen eine conische Form gegeben, um den Querschnitt F_2 der Ausflußöffnung zu vergrößern. Welcher Vortheil hierdurch erlangt wird, geht aus Folgendem hervor. Bezeichnet e die äußere und e_1 die innere Radhöhe, so hat man

$$\frac{c_2}{c} = \frac{v}{c} = \frac{F}{F_2} = \frac{r_1\, e_1 \sin.\alpha}{r\, e \sin.\delta}$$

zu setzen, so daß für den Austrittswinkel δ der Ausdruck

$$\sin.\delta = \frac{r_1}{r}\,\frac{e_1}{e}\,\frac{c}{v}\,\sin.\alpha = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{e_1}{e}\,\frac{\sin.\alpha\,\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)}$$

folgt, während bei Turbinen mit ebenen Radkränzen, wo $e_1 = e$ ist,

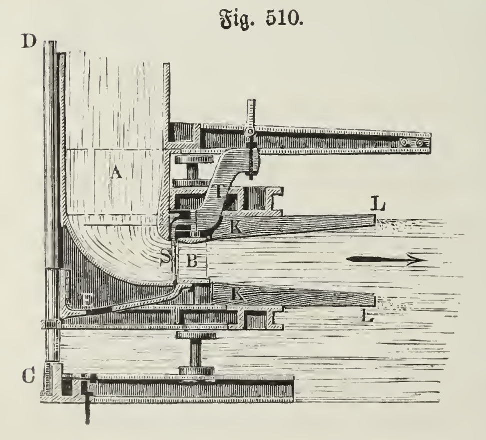
$$\sin.\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin.\alpha\,\sin.\beta}{\sin.(\beta-\alpha)},$$

(s. §. 262) ausfällt.

Man kann also den Austrittswinkel δ, und folglich auch die absolute Austrittsgeschwindigkeit w noch dadurch herabziehen und von dem abfließenden Wasser noch mehr Arbeitsfähigkeit auf das Rad übertragen, wenn man die äußere Radweite e größer macht als die innere Radweite e_1.

Ein anderes Hülfsmittel, um denselben Zweck zu erreichen, besteht ferner in der Anwendung des Diffuser von Boyden. Derselbe besteht in einem sich ebenfalls von innen nach außen allmälig erweiternden ringförmigen Raume, welcher das Rad rund umschließt und durch welchen das Wasser aus dem Rade in die Radstube oder in das Unterwasser geführt wird. Fig. 510 zeigt den Durchschnitt von einem Theil einer solchen Turbine mit

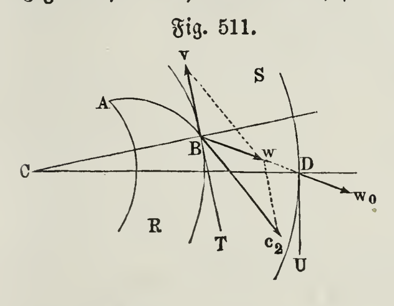
Fig. 510.



Diffuser, nach Francis. CD ist die rechte Hälfte der Turbinenwelle, A das Zuflußreservoir, BE das Rad, KL, KL sind die aus Holzdauben zusammengesetzte Kränze, welche den Diffuser bilden. Der Schützenring S bewegt sich zwischen dem Rade und dem Ausflußreservoir und wird mittels der Arme T u. s. w. von dem umlaufenden Rade selbst eingestellt.

Die Wirkung dieses Diffusers geht aus Folgendem hervor. Es sei ABR, Fig. 511, ein Theil des Rades, sowie BDS ein Theil des Diffusers. Die relative Geschwindigkeit c_2, mit welcher das Wasser bei B aus dem Rade tritt, vereinigt sich mit der Umdrehungsgeschwindigkeit v des Rades, und es resultirt hieraus die absolute Austrittsgeschwindigkeit w, mit welcher das Wasser in den Diffuser tritt. Das Wasser durchläuft diesen Diffuser beinahe in einer geraden Linie BD und tritt dann bei D mit einer zu bestimmenden Geschwindigkeit w_0 aus. Setzen wir die Halbmesser $CB = r$, $CD = r_0$, sowie die innere und äußere Weite des Diffusers e und e_0, ferner den Austrittswinkel TBc_2, wie früher, $= \delta$, den Winkel TBD, unter welchem das Wasser in den Diffuser tritt, $= \theta$, und den Winkel UDw_0, unter welchem es aus demselben heraustritt, $= \theta_0$. Dann haben wir, da

Fig. 511.



$$\frac{sin. CDB}{sin. CBD} = \frac{CB}{CD},$$

d. h.

$$\frac{cos. \theta_0}{cos. \theta} = \frac{r}{r_0}, \text{ und } r e v \, sin. \delta = r e w \, sin. \theta = r_0 e_0 w_0 \, sin. \theta_0$$

ist, die Austrittsgeschwindigkeit

$$w_0 = \frac{r}{r_0} \frac{e}{e_0} \frac{v \, sin. \delta}{sin. \theta_0} = \frac{r}{r_0} \frac{e}{e_0} \frac{w \, sin. \theta}{sin. \theta_0} = \frac{r}{r_0} \frac{e}{e_0} \frac{w \, sin. \theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0} cos. \theta\right)^2}}.$$

Da nun $\frac{r}{r_0}$ und $\frac{e}{e_0}$ echte Brüche sind, so ist $w_0 < w$, und folglich das Arbeitsvermögen $\frac{w_0^2}{2g} Q\gamma$ des Wassers bei seinem Austritte aus dem Diffuser kleiner als das Arbeitsvermögen $\frac{w^2}{2g} Q\gamma$ desselben beim Austritte aus dem Rade.

Hierzu kommt aber noch, daß auch w bei Anwendung des Diffusers größer ist als ohne denselben. Sehen wir von den hydraulischen Widerständen ab,

und setzen wir die hydraulische Druckhöhe beim Uebergange des Wassers aus dem Rade in den Diffuser, $= y$, so haben wir

$$c_2^2 = 2g(h_1 - y) + v^2 - 2cv_1 \cos.\alpha$$

und

$$w_0^2 = w^2 + 2g(y - h_2).$$

Nehmen wir nun noch $c_2 = v$ an, so ist $\theta = 90 + \frac{\delta}{2}$ und es folgt

$$w_0^2 = w^2 + 2g(h_1 - h_2) - 2cv_1 \cos.\alpha$$
$$= w^2 + 2gh - 2cv_1 \cos.\alpha,$$

oder,

$$w = 2v \sin.\frac{\delta}{2},$$

$$c = \frac{v_1 \sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}$$

und

$$w_0 = \frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\,\frac{v \sin.\delta}{\sin.\theta_0} = \frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\,\frac{v\sin.\delta}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_0}\sin.\frac{\delta}{2}\right)^2}}$$

eingesetzt,

$$\left[2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin.\beta\cos.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)} - \left(2\sin.\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\,e}{r_0\,e_0}\right)^2 \frac{(\sin.\delta)^2}{1-\left(\frac{r}{r_0}\sin.\frac{\delta}{2}\right)^2}\right] v^2 = 2gh,$$

und daher die entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = \sqrt{\frac{gh}{\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin.\beta\cos.\alpha}{\sin.(\beta-\alpha)} - 2\left(\sin.\frac{\delta}{2}\right)^2\left[1 - \left(\frac{r\,e}{r_0\,e_0}\right)^2 \frac{\left(\cos.\frac{\delta}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{r}{r_0}\sin.\frac{\delta}{2}\right)^2}\right]}}.$$

Diesen Werth hat man in die Formel

$$w_0 = \frac{r\,e}{r_0\,e_0}\,\frac{v\sin.\delta}{\sin.\theta_0}$$

einzusetzen, um die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers zu ermitteln.

Beispiel. Im Beispiele zu §. 264 wurden die vortheilhaftesten Umdrehungsgeschwindigkeiten, $v_1 = 13{,}105$ Fuß und $v = 1{,}35 \,.\, 13{,}105 = 17{,}692$ Fuß gefunden, wonach sich die absolute Abflußgeschwindigkeit

$$w = 2v\sin.\frac{\delta}{2} = 2\,.\,17{,}692\sin.8^0\,21' = 5{,}139 \text{ Fuß},$$

und folglich der entsprechende Arbeitsverlust

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = 0{,}016\,.\,(5{,}139)^2\,Q\gamma = 0{,}423\,Q\gamma$$

herausstellt.

Wenn man aber das Rad mit einem Diffuser umgiebt, dessen Halbmesser $r_0 = 2\,r$, und äußere Weite $e_0 = \frac{4}{3}\,e$ ist, so hat man, da:

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = (1/2)^2 = 1/4 \quad \text{und} \quad \left(\frac{r\,e}{r_0\,e_0}\right)^2 = (1/2 \cdot 3/4)^2 = 9/64\,;$$

und $\left(sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2 = (sin.\,8^0\,21')^2 = 0,02109$ ist,

$$2\left(sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r\,e}{r_0\,e_0}\right)^2 \frac{\left(cos.\,\frac{\delta}{2}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{r_0}\,sin.\,\frac{\delta}{2}\right)^2}\right] = 0,04218\left(1 - 9/64 \cdot \frac{1-0,02109}{1-0,00527}\right)$$

$$= 0,04218\,.\,(1 - 0,1384) = 0,03634,$$

und daher die entsprechende Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades:

$$v = \sqrt{\frac{156,25}{\left(\frac{1,00}{1,35}\right)^2 .\, 0,9076 - 0,03634}} = \sqrt{\frac{156,25}{0,4617}} = 18,396 \text{ Fuß}.$$

Nun folgt die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Diffuser fließt:

$$w_0 = 3/8 \cdot \frac{18,396\,sin.\,16^0\,42'}{\sqrt{1 - 0,00527}} = \frac{6,898\,.\,0,2874}{\sqrt{0,99473}} = 1,988 \text{ Fuß},$$

und endlich die hierdurch verlorene mechanische Arbeit:

$$\frac{w_0^2}{2\,g}\,Q\,\gamma = 0,016\,.\,(1,988)^2\;Q\,\gamma = 0,0632\;Q\,\gamma,$$

wogegen bei derselben Turbine ohne Diffuser dieser Verlust

$$\frac{w^2}{2\,g}\,Q\gamma = 0,423\;Q\,\gamma,$$

also nahe 7mal so groß ausfällt.

Da $Q = 30$ Cubikfuß ist, so beträgt

$$\frac{w^2}{2\,g}\,Q\,\gamma = 0,423\,.\,30\,.\,61,75 = 784 \text{ Fußpfund}$$

und

$$\frac{w_0^2}{2\,g}\,Q\,\gamma = 0,0632\,.\,30\,.\,61,75 = 117 \text{ Fußpfund}.$$

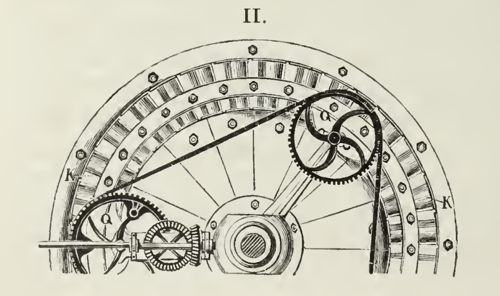
Fontaine's Turbine. Die Turbinen von Fontaine, Henschel und Jonval weichen insofern von den Fourneyron'schen Turbinen ab, als sich bei ihnen der Leitschaufelapparat nicht neben, sondern über dem Rade befindet, und dadurch das Wasser nicht von innen nach außen, oder von außen nach innen, sondern von oben nach unten auf das Rad geführt wird, und nicht am äußeren Umfange, sondern an der Grundfläche aus dem Rade tritt. Bei der Bewegung des Wassers von oben nach unten in den ebenfalls durch krumme Schaufeln gebildeten Canälen spielt die Centrifugalkraft nur eine untergeordnete Rolle, indem die Schwerkraft an die Stelle derselben tritt. Zwischen der Turbine von Fontaine und der von Henschel findet aber der Unterschied statt, daß bei jener die Oberfläche des Unterwas- §. 276

sers unmittelbar unter oder über dem Rade steht, daß dagegen bei dieser das aus dem Rade strömende Wasser eine Wassersäule über die Oberfläche des Unterwassers bildet, die ebenso auf den Gang des Rades ihren Einfluß ausübt, als wenn sie über dem Rade stünde. Die Jonval'sche Turbine ist eine verbesserte Hensel'sche Turbine.

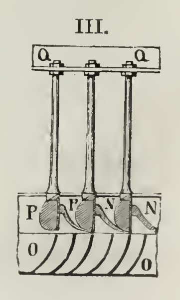
Fig. 512.

I.

II.



III.

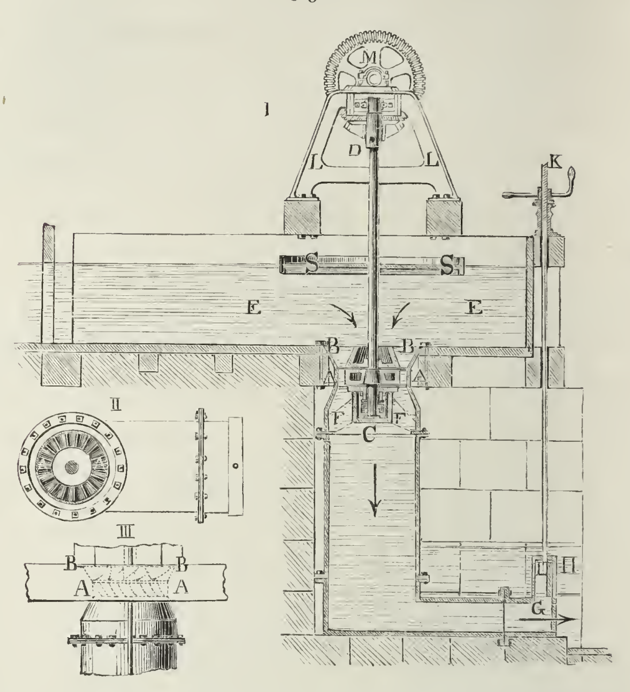


Die Einrichtung einer Fontaine'schen Turbine ist aus Fig. 512 (I. und II.), welche dieselbe in einem verticalen Durchschnitte und im Grundrisse vorstellt, zu ersehen. *AA* ist das Rad, *BB* der Radteller, welcher statt der Radarme das Rad mit der hohlen Welle *CCDD* fest verbindet. Damit der Zapfen nicht unter Wasser gehe, endigt sich die Welle *CD* in einem Auge *GG*, durch welches der stählerne Stift *FS* gesteckt ist, der durch die Schraubenmutter *S* tiefer oder höher gestellt werden kann, und in einer stählernen Pfanne im Kopfe *F* einer feststehenden Säule *EF* umläuft. Durch eine über dem Auge *G* eingesetzte stehende Welle *H* wird die Umdrehung des Rades fortgepflanzt. Um die stehende Welle gegen das Wasser zu schützen, wird sie wie bei einer Fourneyron'schen Turbine, mit einem Mantel *ZZ* umgeben. Der Leitschaufelapparat *KK* ist auf die Balken *L*, *L* aufgeschraubt und mit ihm ist auch ein Teller *KMMK* verbunden, der ein cylindrisches Metalllager *MM* enthält, durch das, in Gemeinschaft mit einem höher stehenden Lager *DD*, die Turbinenwelle *CD* während ihrer Umdrehung in sicherem Stande erhalten wird. Die Gestalt einer Leitschaufel *N* und einer Radschaufel *O* ist aus III. zu ersehen. Zum Reguliren des Aufschlages dient ein Schützenapparat, welcher aus so vielen einzelnen Schützen *P*, *P*... besteht, als das Rad Leitschaufeln *N*, *N*... hat. Diese Schützen sind mit abgerundeten Holzstücken bekleidet und laufen in Nuthen, welche in die cylindrischen Mäntel des Leitschaufelapparates eingelassen sind. Die Schützenstangen *PQ*, *PQ*... sind durch einen eisernen Ring *QQ* fest mit einander verbunden, der durch drei Zugstangen *QR*, *QR*..., gehoben oder gesenkt werden kann. Zu diesem Zwecke werden die Enden *R*, *R*... dieser Stangen schraubenförmig zugeschnitten und Zahnräder *T*, *T*... aufgesetzt, deren Naben Schraubenmuttern bilden und deren Umfänge durch eine Kette ohne Ende mit einander verbunden sind. Wird nun mit Hülfe einer Kurbel *W* und vermittelst eines Räderwerkes *UV* das eine Rad *T* in Umdrehung gesetzt, so laufen die übrigen Räder gleichmäßig mit um, und es werden dadurch auch alle drei Zugstangen gleichmäßig angezogen oder niedergelassen.

Jonval's Turbine. Ansichten einer Jonval'schen Turbine sind unter Fig. 513 (a. f. S.) enthalten. Man nennt diese Turbinen wohl auch doppeltwirkende, weil bei ihnen das Wasser durch Druck und Zug (Saugen) zugleich wirkt. *AA* ist das ebenfalls durch einen Teller mit der stehenden Welle *CD* verbundene Rad, *BB* der darüberstehende, in das Aufschlaggerinne *EE* conisch einmündende Leitschaufelapparat. Das Zapfenlager ruht in einem Gehäuse *C*, welches durch die Träger *FF* unterstützt und festgehalten wird. Die Lage der Leit- und Radschaufeln, sowie ein Theil des Aeußeren von der Röhre, in welcher das Rad eingeschlossen ist, führen II. und III. vor Augen. Um die Oberfläche des Oberwassers ruhig zu er- §. 277

halten, wird ein hölzerner Schwimmer SS aufgelegt, und um den Gang des Rades zu reguliren, wird eine Schütze G in Anwendung gebracht, welche

Fig. 513.



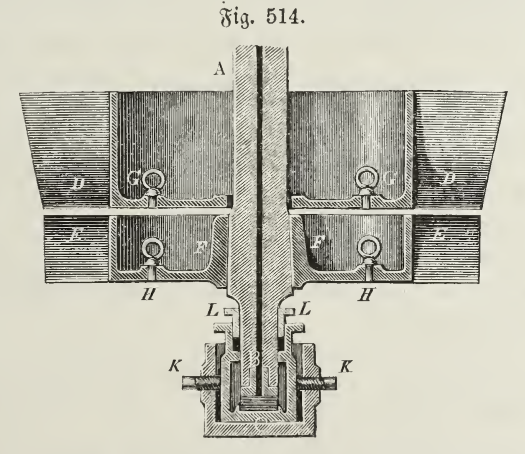
sich durch eine Kurbel und Schraube höher oder tiefer stellen läßt. Je nachdem die Schütze höher oder tiefer steht, fließt natürlich auch mehr oder weniger Betriebswasser in das Unterwasser H ab, kann also auch das Rad mehr oder weniger Arbeit verrichten. Der Ständer LL trägt das Lager für den oberen Zapfen der Welle CD und das Lager einer liegenden Welle, auf welche die Umdrehung des Rades mittels eines conischen Räderwerkes M zunächst übergetragen wird. Bei kleinen Rädern kann das Reservoir, in welchem das Rad eingeschlossen ist, aus gußeisernen Röhren zusammengesetzt werden, bei größeren Rädern hingegen muß man es aus Quadern aufmauern.

Man ersieht aus dem soeben Mitgetheilten, daß die Turbinen von Fontaine und von Jonval in den Haupttheilen und in den wesentlichsten Verhältnissen vollkommen übereinstimmen, und kann daher auch leicht ermessen, daß sich für beide eine und dieselbe Theorie entwickeln lassen müsse. Bei beiden Rädern steht das Oberwasser in einer gewissen Höhe h_1 über der Ein-

trittsstelle in das Rad; was aber das Unterwasser anlangt, so steht dessen Oberfläche bei der Jonval'schen Turbine um eine gewisse Höhe h_2 unter dem Rade, während sie bei der Fontaine'schen Turbine bis zum Rade reicht, oder sogar über dem Rade steht. In Beziehung auf das Reguliren des Ganges beider Turbinen muß noch bemerkt werden, daß die Fontaine'sche Turbine mit einer inneren, dagegen die Jonval'sche mit einer äußeren Schütze ausgerüstet, daß also insofern jene mit einer Fourneyron'schen und diese mit einer Cadiat'schen Turbine zu vergleichen ist.

Die Henschel'schen oder Jonval'schen Turbinen sind in der neueren Zeit vielfach und mit sehr gutem Erfolge angewendet worden. Der verticale Durchschnitt eines einfachen Rades dieser Art ist in Fig. 514 abgebildet. Die Welle AB ist längs ihrer Axe durchbohrt, um den Berührungsflächen

Fig. 514.



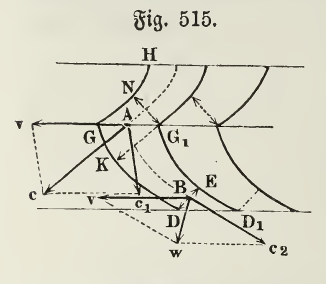
zwischen dem Zapfen B und der Spurplatte C Oel zuführen zu können. Es ist DD der Leitschaufelapparat (das Leitrad) und $EEFF$ das eigentliche Rad (Laufrad); die Bodenteller GG und HH sind mit Spunden G und H versehen, wodurch die Unreinigkeiten, wie Sand, Schmand u. s. w., von Zeit zu Zeit abgelassen werden können. Wie der Zapfen durch Schrauben KK centrirt und durch eine Stopfbüchse vor dem Zutritt des Wassers geschützt werden kann, ist aus der Figur deutlich zu erkennen.

Anmerkung. Mit Recht rügt Herr Professor Rühlmann in der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieurvereins Bd. I, und zwar im „Beitrag zur Geschichte der horizontalen Wasserräder", daß die sogenannte Jonval'sche oder Köchlin'sche Turbine keine Jonval'sche, sondern eine Erfindung des Herrn Oberbergrath Henschel in Cassel ist. Herr Henschel hat schon 1837 eine solche Turbine entworfen und 1841 in einer Steinschleiferei zu Holzminden aufgestellt. Herr Sectionsrath Rittinger nennt die Räder Rohrturbinen.

§. 278 **Theorie der Fontaine-Henschel'schen Turbinen.** Bei Entwickelung der Theorie der Fontaine-Henschel'schen Turbinen wollen wir folgende, mit dem Obigen in möglichster Uebereinstimmung befindliche Bezeichnungen gebrauchen.

Der Neigungswinkel einer Leitschaufel HNG gegen den Horizont, oder der sogenannte Eintrittswinkel $NGG_1 = cAv$, Fig. 515, sei $= \alpha$, der Winkel $c_1 A v$, welchen der Radschaufelkopf A mit der Radbewegung einschließt, $= \beta$, und der Winkel DD_1E, unter welchem der Radschaufelfuß D_1 den Horizont schneidet, sei $= \delta$; ferner sei die absolute Eintrittsgeschwindigkeit $\overline{Ac}$ des Wassers in das Rad $= c$, die dem mittleren Radhalbmesser $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ entsprechende Radgeschwindigkeit $\overline{Av} = v$, die relative Eintrittsgeschwindigkeit $\overline{Ac_1} = c_1$ und die Austrittsgeschwindigkeit $\overline{Bc_2} = c_2$. Endlich sei auch, wie früher, F die Summe der Inhalte aller Querschnitte NG_1 des aus dem Leitschaufelapparate strömenden Wassers, F_1 die Summe der oberen Querschnitte G_1K, und F_2 die Summe der unteren Querschnitte DE der Radcanäle.

Fig. 515.



Ist nun wieder ζ der Coefficient des Wiederstandes in den Leitschaufelcanälen und x die den Druck des in das Rad eintretenden Wassers messende Höhe, so hat man auch hier:

$$(1 + \zeta)\, c^2 = 2g\,(h_1 - x),$$

und mit Berücksichtigung des durch die Höhe b (32,84 Fuß) einer Wassersäule zu messenden Atmosphärendruckes:

$$(1 + \zeta)\, c^2 = 2g\,(b + h_1 - x).$$

Für die relative Eintrittsgeschwindigkeit bleibt wie oben,

$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2\,cv\,\cos.\alpha.$$

Ist ferner a die Radhöhe, y die Höhe einer den Druck des Wassers unmittelbar unter dem Rade messenden Wassersäule und ζ_1 der Coefficient des Widerstandes in den Radcanälen, so hat man für die relative Austrittsgeschwindigkeit:

$$(1 + \zeta_1)\, c_2^2 = 2g\,(a + x - y) + c_1^2$$
$$= 2g\,(b + h_1 + a - y) + v^2 - 2\,cv\,\cos.\alpha - \zeta c^2.$$

Wenn man nun wieder, um dem Wasser so viel wie möglich Arbeitsvermögen zu entziehen, $c_2 = v$ annimmt und überdies

$$c = \frac{v \sin.\beta}{\sin.(\beta - \alpha)}$$

einsetzt, so erhält man für die Umdrehungsgeschwindigkeit v des Rades

$$\left[2\,\frac{sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)}+\zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2+\zeta_1\right]v^2=2g\,(b+h_1+a-y),$$

und daher die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit:

$$v=\sqrt{\frac{2g\,(b+h_1+a-y)}{2\,\frac{sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)}+\zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2+\zeta_1}}.$$

Die Druckhöhe y ist in dem Falle, wenn die Turbine in freier Luft umgeht, der den Atmosphärendruck messenden Höhe b gleich, in dem Falle aber, wenn sie unter Wasser geht, $= b + h_2$, wo h_2 die Höhe des Unterwasserspiegels über der Grundfläche des Rades bezeichnet, und endlich in dem Falle, wenn sie über Wasser geht, wie bei der Jonval'schen Turbine, $= b - h_2 + z$, wo h_2 die Tiefe des Unterwasserspiegels unter der Grundfläche des Rades und z die Geschwindigkeitshöhe des durch die Schütze aus dem Reservoir in das Unterwasser strömenden Betriebswassers ist. Das Totalgefälle ist bei dem Gange des Rades in freier Luft:

$$h = h_1 + a,$$

beim Gange unter Wasser:

$$h = h_1 + a - h_2,$$

und beim Gange über Wasser:

$$h = h_1 + a + h_2,$$

daher hat man denn für die ersten beiden Fälle:

$$v=\sqrt{\frac{2gh}{2\,\frac{sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)}+\zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2+\zeta_1}},$$

und für den letzten:

$$v=\sqrt{\frac{2g\,(h-z)}{2\,\frac{sin.\,\beta\,sin.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)}+\zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)}\right)^2+\zeta_1}},$$

und es läßt sich auch, wenn die Mündung G, durch welche das Gefäß mit dem Unterwasser communicirt, sehr groß ist, also das Wasser sehr langsam abfließt,

$$z=\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{G}\right)^2=0$$

setzen.

Aus der Geschwindigkeit $v = c_2$ läßt sich auch die absolute Eintrittsgeschwindigkeit

$$c=\frac{v\,sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)},$$

und die Druckhöhe

$$x = b + h_1 - (1 + \zeta) \frac{c^2}{2g} = b + h_1 - (1 + \zeta) \frac{v^2 \sin. \beta^2}{2g \sin. (\beta - \alpha)^2}$$

berechnen. Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist

$$x = b + h_1 - \frac{h \sin. \beta}{2 \cos. \alpha \sin. (\beta - \alpha)},$$

und läßt man den Atmosphärendruck unbeachtet,

$$x = h_1 - \frac{h \sin. \beta}{2 \cos. \alpha \sin. (\beta - \alpha)}.$$

Es fällt $x = 0$, oder vielmehr dem äußeren Luftdrucke (b) gleich aus, wenn

$$h_1 = \frac{h \sin. \beta}{2 \cos. \alpha \sin. (\beta - \alpha)}$$

ist.

Der durch den unvollkommenen Anschluß herbeigeführte Wasserverlust hängt von der Differenz zwischen dem inneren Drucke (x) und dem äußeren Drucke an der Uebergangsstelle ab, und ist bei der Fontaine'schen Turbine ein anderer als bei der Jonval'schen Turbine. Damit das Wasser in zusammenhängenden Strömen zufließe, darf x nie gleich Null, muß also

$$b + h_1 > \frac{h \sin. \beta}{2 \cos. \alpha \sin. (\beta - \alpha)}$$

sein; damit sich ferner das Wasser nicht von der Grundfläche des Rades trenne, darf auch nicht $y =$ Null, es muß also

$$b - h_2 + z > 0,$$

d. i.

$$h_2 < b + z \quad \text{oder} \quad h_2 < b + \frac{1}{2g} \left(\frac{Q}{G}\right)^2$$

also bei einem großen Inhalte der Ausflußöffnung G,

$$h_2 < b$$

sein. Es darf also hiernach die Höhe des Rades über der Oberfläche des Unterwassers nie die Wasserbarometerhöhe $b = 32,84$ Fuß erreichen.

Wenn bei der Jonval'schen Turbine das Reservoir hoch und eng ist, so daß sich das Betriebswasser mit einer nicht unbedeutenden Geschwindigkeit in demselben bewegt, so hat man noch einige Verluste in diesem Reservoir zu berücksichtigen, wie z. B. die Wasserreibung, den Krümmungswiderstand, den Stoß bei der plötzlichen Geschwindigkeitsveränderung u. s. w. Es ist aber rathsam, um alle diese Verluste möglichst unschädlich zu machen, dem Reservoir mehr Weite zu ertheilen, als dem Radraume.

§. 279 **Leistung der Fontaine-Henschel'schen Turbinen.** Die Leistung einer Fontaine-Henschel'schen Turbine läßt sich übrigens fast ganz wie die einer Fourneyron'schen Turbine und zwar dadurch ermitteln, daß

wir von der Totalleistung $Qh\gamma$ die den Nebenhindernissen entsprechenden mechanischen Arbeiten in Abzug bringen. Zunächst ist der Verlust in dem Leitschaufelapparate:

$$L_1 = \zeta \cdot \frac{c^2}{2g} Q\gamma,$$

und dann der in den Radcanälen:

$$L_2 = \zeta_1 \cdot \frac{c_2^2}{2g} Q\gamma,$$

ferner der Verlust, welcher der lebendigen Kraft des Wassers bei seinem Austritte aus dem Rade entspricht,

$$= \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{\left(2\, v\, sin. \frac{\delta}{2}\right)^2}{2g} Q\gamma.$$

Bei der Jonval'schen Turbine kommt hierzu noch der Arbeitsverlust, welcher der Erzeugung der Austrittsgeschwindigkeit w_1 durch den Schieber entspricht und

$$= \frac{w_1^2}{2g} Q\gamma = \frac{1}{2g} \cdot \frac{Q^3}{G^2} \gamma$$

zu setzen ist. Hiernach können wir also die ganze Radleistung

$$L = \left(h - (\zeta c^2 + \zeta_1 c_2^2 + w^2 + w_1^2) \cdot \frac{1}{2g}\right) Q\gamma$$

setzen, und nun auch leicht ermessen, daß dieser Verlust um so größer ausfällt, je größer der Austrittswinkel δ und je größer die Abflußgeschwindigkeit w_1, oder je kleiner die Austritts- oder Schützenmündung G ist. Bei völlig geöffneter Schütze und weitem Reservoir ist $w_1 = 0$ zu setzen. Man ersieht hieraus, daß auch bei der Turbine von Henschel der Wirkungsgrad um so mehr abnimmt, je kleiner das Aufschlagquantum oder je tiefer die Schützenstellung ist. Was die Fontaine'sche Turbine anlangt, so finden bei ihr in Beziehung auf die Schützenstellung dieselben Verhältnisse statt wie bei der Fourneyron'schen Turbine, denn es wird auch hier durch das Niederlassen der Schütze ein stoßweiser Eintritt des Wassers in das Rad und dadurch auch eine Krafttödtung herbeigeführt.

Aus Allem ist zu entnehmen, daß die Wirkungsgrade dieser Turbinen von Fontaine und Henschel nicht ansehnlich größer oder kleiner ausfallen können, als die der Fourneyron'schen Turbinen unter übrigens gleichen Umständen, was auch durch die weiter unten angeführten Versuche vollkommen bestätigt wird. Nach den Versuchen des Verfassers ist auch hier $\zeta = \zeta_1 = 0{,}075$ zu nehmen.

§. 280 **Anordnung der Fontaine-Henschel'schen Turbinen.** Wir haben nun noch die Hauptregeln zur Anordnung und Construction der Fontaine-Henschel'schen Turbinen anzugeben. Zuerst nimmt man die Radschaufelwinkel β und δ willkürlich an, den letzten möglichst klein, nämlich 15° bis 20°, den ersteren aber etwa 100° bis 120°. Aus β und δ folgt sogleich der Leitschaufelwinkel α, indem man zur Verhinderung eines stoßweisen Eintrittes setzt:

$$c_1 \sin. \beta = c_2 \sin. \delta = v \sin. \delta \text{ und } \frac{c_1}{v} = \frac{\sin. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)},$$

also durch Combination:

$$\frac{\sin. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)} = \frac{\sin. \delta}{\sin. \beta};$$

es folgt nämlich hiernach:

$$\frac{\sin. (\beta - \alpha)}{\sin. \alpha \sin. \beta} = \frac{1}{\sin. \delta},$$

oder:

$$1)\ cotg. \alpha = cotg. \beta + \frac{1}{\sin. \delta}.$$

Aus den Winkeln α und β ergiebt sich nun die mittlere Radgeschwindigkeit:

$$2)\ v = \sqrt{\frac{2 g h}{2 \frac{\sin. \beta \cos. \alpha}{\sin. (\beta - \alpha)} + \zeta \left(\frac{\sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1}},$$

und die Eintrittsgeschwindigkeit:

$$3)\ c = \frac{v \sin. \beta}{\sin. (\beta - \alpha)}.$$

Hieraus folgen ferner die Querschnitte

$$4)\ F = \frac{Q}{c} \text{ und}$$

$$5)\ F_2 = \frac{Q}{v}.$$

Die Radweite oder Schaufellänge e, in radialer Richtung gemessen, läßt man in einem schicklichen Verhältnisse $\nu = \frac{e}{r}$ zum mittleren Radhalbmesser r stehen. Bei kleinen Turbinen kann man $\nu = 0,4$, bei großen aber $\nu = 0,2$ annehmen. Ebenso ist für das Verhältniß $\lambda = \frac{e}{d}$ der Schaufellänge oder der Länge e der Ausmündungen zur Weite d derselben ein bestimmter Werth $= 2$ bis 4 zu setzen; ist daher n die Anzahl der Radschaufeln und s die Stärke derselben, so hat man nicht nur

$$F_2 = 2\pi r e sin.\, \delta - n s e = \frac{2\pi e^2}{\nu} sin.\, \delta - n s e,$$

sondern auch

$$F_2 = n d e = \frac{n e^2}{\lambda},$$

und daher:

$$F_2 = \frac{2\pi e^2}{\nu} sin.\, \delta - \frac{\lambda F_2 s}{e},$$

woraus nun die Schaufellänge

$$6)\ e = \sqrt{\frac{\nu F_2}{2\pi\, sin.\, \delta}} \left(1 + \lambda s \sqrt{\frac{\pi\, sin.\, \delta}{2 \nu F_2}}\right)$$

folgt und sich weiter die Mündungsweite

$$7)\ d = \frac{e}{\lambda},$$

der mittlere Radhalbmesser

$$8)\ r = \frac{e}{\nu},$$

und die Anzahl der Radschaufeln

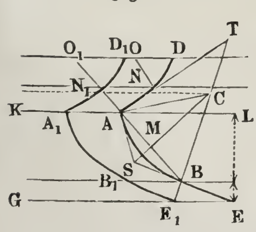
$$9)\ n = \frac{F_2}{d e} = \frac{\lambda F_2}{e^2}$$

ergiebt.

Die Anzahl n_1 der Leitschaufeln nimmt man gleich oder höchstens um ein Viertel kleiner als die der Radschaufeln, und die Radhöhe a macht man ungefähr der Radweite oder Schaufellänge gleich.

Schaufelconstruction. Die Schaufeln bilden windschiefe Flächen, §. 281 deren Erzeugungslinie auf der einen Seite rechtwinkelig durch die Radaxe und auf der anderen Seite durch eine Leitlinie geht, welche man sich auf einen mit dem mittleren Radhalbmesser r beschriebenen Cylindermantel verzeichnet denken kann. Da nun durch Abwickelung eines Cylindermantels auf eine Ebene ein Rechteck entsteht, so kann man Linien in dieses verzeichnen, welche beim Wiederaufwickeln des Rechteckes auf den Cylinder als Leitlinien für die Schaufelflächen dienen können. Diese abgewickelten Leitlinien lassen sich am besten aus geraden Linien und Kreisbögen zusammensetzen. Ist LK, Fig. 516, der abgewickelte Kreis, in welchem das Rad und der Leitschaufelapparat sich berühren, so findet man die Linie AND für die Leitschaufel, wenn man

Fig. 516.

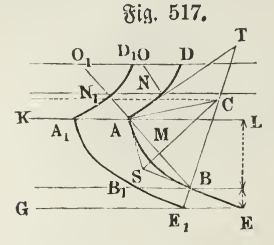


$$A A_1 = \frac{2\pi r}{n}$$

absticht, und AN, $A_1 N_1 \ldots$ so zieht, daß der

Neigungswinkel $NAL = N_1 A_1 L \ldots = \alpha$ ausfällt; wenn man ferner $A O_1$ winkelrecht gegen $A_1 N_1$ fällt und nun aus dem Durchschnitte O_1 dieser Normale $A O_1$ mit einer den Leitschaufelapparat oben begrenzenden Parallelen zu KL einen Kreisbogen $N_1 D_1$, und auf gleiche Weise aus einem anderen Punkte O den Bogen ND u. s. w. beschreibt; AND, $A_1 N_1 D_1$ u. s. w. sind nun die abgewickelten Leitlinien von den Leitschaufeln. Um nun die Leitlinien für die Radschaufeln zu finden, ziehen wir im Abstande $EL =$ der Radhöhe a die Gerade EG parallel zu KL, machen

Fig. 517.



$$EE_1 = \frac{2\pi r}{n},$$

und legen die Geraden EB, $E_1 B_1$ u. s. w. so, daß die Winkel $BEG = B_1 E_1 G$ dem Austrittswinkel δ gleich werden; ferner fälle man die $E_1 B$ perpendicular auf BE und lege AB so an, daß der Winkel

$$ABC = ASC = \frac{\beta + \delta}{2}$$

wird; errichtet man endlich in der Mitte M der Linie AB das Perpendikel MC, so schneidet dieses von BT das Centrum C des Bogens AB ab, welcher das obere Stück von der abgewickelten Leitlinie einer Radschaufel ausmacht, während die Gerade BE den unteren Theil derselben bildet.

Man sieht leicht ein, daß bei dieser Construction der Leit- und Radschaufeln das Wasser ohne Contraction, und zwar mit den Querschnitten AN_1 und BE_1 aus dem Leitschaufelapparate und aus dem Rade austritt.

Beispiel. Es ist die Anordnung und Berechnung einer Henschel'schen Turbine zu vollziehen, welcher ein Aufschlagquantum Q von 8 Cubikfuß pr. Secunde bei einem Gefälle h von 12 Fuß zu Gebote steht. Nehmen wir $\delta = 15^0$, und $\beta = 110^0$ an, so erhalten wir:

$$cotg.\, \alpha = cotg.\, \beta + \frac{1}{sin.\, \delta} = -\, cotg.\, 70^0 + \frac{1}{sin.\, 15^0}$$
$$= -\, 0{,}3640 + 3{,}8637 = 3{,}4997,$$

hiernach ist

1) $\alpha = 15^0\, 57'$,

also nahe 16^0 zu machen. Setzen wir nun $\zeta = \zeta_1 = 0{,}08$, so finden wir die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit im Theilkreise:

$$2)\ v = \sqrt{\frac{2gh}{2\frac{sin.\,\beta\,cos.\,\alpha}{sin.\,(\beta-\alpha)} + \zeta\left(\frac{sin.\,\beta}{sin.\,\beta-\alpha}\right)^2 + \zeta_1}}$$

$$= \frac{7{,}906\sqrt{12}}{\sqrt{\frac{2\,sin.\,110^0\,cos.\,16^0}{sin.\,94^0} + 0{,}08\left[1+\left(\frac{sin.\,110^0}{sin.\,94^0}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{7{,}906\sqrt{12}}{\sqrt{1{,}8110+0{,}1510}} = \frac{7{,}906\sqrt{12}}{\sqrt{1{,}9620}} = 19{,}55 \text{ Fuß},$$

und hieraus wieder die entsprechende Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers:

$$3)\ c = \frac{v\,sin.\,\beta}{sin.\,(\beta-\alpha)} = \frac{19{,}55\,sin.\,110^0}{sin.\,94^0} = 18{,}415 \text{ Fuß}.$$

Aus diesen Geschwindigkeiten berechnen sich die Querschnitte der Ausmündungen:

$$4)\ F = \frac{Q}{c} = \frac{8}{18{,}415} = 0{,}4344 \text{ Quadratfuß und}$$

$$5)\ F_2 = \frac{Q}{v} = \frac{8}{19{,}55} = 0{,}4092 \text{ Quadratfuß}.$$

Nimmt man nun das Verhältniß $\nu = \frac{e}{r} = 0{,}3$ und das Dimensionsverhältniß $\lambda = \frac{e}{d} = 3{,}5$ an, und setzt man die Schaufelstärke $s = 0{,}02$ Fuß, so erhält man die nöthige Radweite oder Schaufellänge:

$$6)\ \ e = \sqrt{\frac{\nu F_2}{2\pi\,sin.\,\delta}}\left(1+\lambda s\sqrt{\frac{\pi\,sin\ \delta}{2\,\nu\,F_2}}\right)$$
$$= 0{,}2748\,.\,1{,}1274 = 0{,}310 \text{ Fuß},$$

ferner die Mündungsweite:

$$7)\ \ d = \frac{e}{\lambda} = \frac{0{,}310}{3{,}5} = 0{,}08855 \text{ Fuß},$$

den mittleren Radhalbmesser:

$$8)\ \ r = \frac{e}{\nu} = \frac{0{,}310}{0{,}3} = 1{,}033 \text{ Fuß},$$

und die Radschaufelanzahl:

$$9)\ \ n = \frac{F_2}{de} = \frac{0{,}4092}{0{,}310\,.\,0{,}08855} = \frac{40{,}92}{2{,}7} = 15{,}1\ldots,$$

wofür 16 anzunehmen sein möchte. Die Anzahl der Leitschaufeln kann eben so groß sein. Die Höhe des Rades ist $b = e = 0{,}310$ Fuß und die Weite des Saugrohres ist nur wenige Zoll über $2r = 2{,}066$ Fuß, etwa 2,25 Fuß zu machen.

Die absolute Geschwindigkeit des aus dem Rade tretenden Wassers ist

$$w = 2\,v\,sin.\frac{\delta}{2} = 2\,.\,19{,}55\,sin.\,7^1/_2{}^0 = 5{,}104 \text{ Fuß}.$$

und die Geschwindigkeit des Wassers in der Saugröhre, da der Querschnitt derselben $= \frac{2{,}25^2\,.\,\pi}{4} = 3{,}976$ Quadratfuß beträgt,

$$w_1 = \frac{Q}{3{,}976} = \frac{8}{3{,}976} = 2{,}012 \text{ Fuß}.$$

Es ist folglich die zu erwartende effective Radleistung:

$$L = \left(h - [\zeta\,(c^2 + v^2) + w^2 + w_1^2] \cdot \frac{1}{2g}\right) Q\gamma$$
$$= (12 - 0{,}016 \,.\, [0{,}08\ (18{,}415^2 + 19{,}55^2) + 5{,}104^2 + 2{,}012^2])\, 8 \,.\, 61{,}75$$
$$= (12 - 0{,}016\ [0{,}08\ (339 + 382) + 26{,}05 + 4{,}05]) \,.\, 494$$
$$= [12 - 0{,}016\ (57{,}7 + 30{,}10)] \,.\, 494 = (12 - 1{,}405) \,.\, 494$$
$$= 5234 \text{ Fußpfund.}$$

Durch die Zapfenreibung und durch die hydraulischen Hindernisse im Saugrohre kann diese Leistung bis auf 4800 Fußpfund = 10 Pferdekräfte herabgezogen werden. Der entsprechende Wirkungsgrad ist dann

$$\eta = \frac{4800}{8 \,.\, 12 \,.\, 61{,}75} = \frac{4800}{5928} = 0{,}80.$$

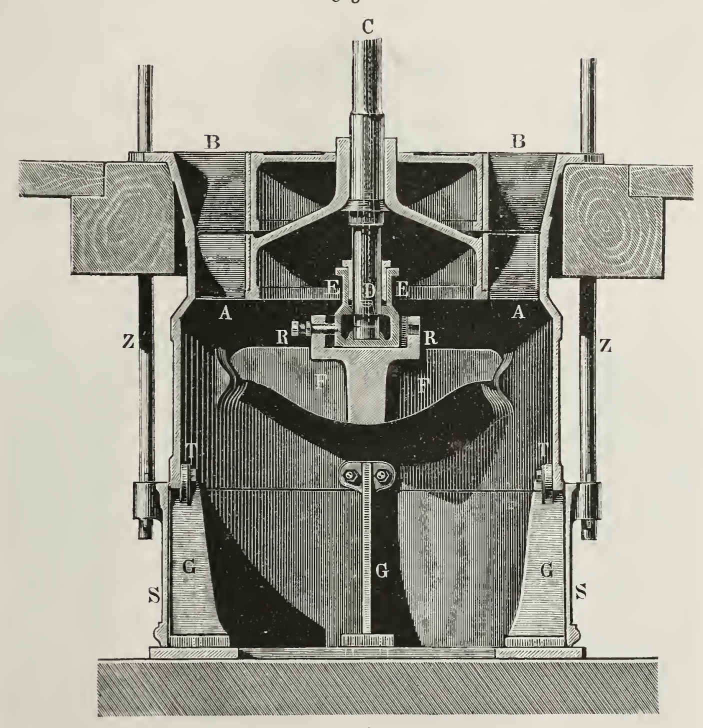
Wenn bei einem kleineren Aufschlag die Schütze oder Klappe im Saugrohr gestellt wird, so fällt natürlich diese Leistung noch kleiner aus.

§. 283 **Regulirungsmittel der Henschel'schen Turbinen.** Zum Reguliren des Aufschlages einer Jonval'schen Turbine hat man in neuerer Zeit statt der Schütze noch mehrfache Mittel angewendet, namentlich hat man hierzu im Saugrohre eine Drehklappe (s. Bd. I, §. 444) oder am Fuße desselben eine Röhren- oder eine sogenannte Perspectivschütze angebracht. Die letztere besteht im Wesentlichen aus einer kurzen Röhre SS, Fig. 518, welche an das untere Ende TT der Saugröhre anschließt und das Gestelle GG der letzten umgiebt, so daß sie mittels der Zugstangen Z, Z senkrecht emporgezogen und die ringförmige Abflußöffnung unter derselben nach Bedürfniß größer oder kleiner gemacht werden kann. Die in der Figur abgebildete Turbine (nach Reichenbach in Augsburg) zeichnet sich noch durch die Lagerung des Zapfens D aus. Wie man sieht, ruht derselbe in einem Gehäuse EE, welches sich mittels Schrauben R, R auf einem festen Gestelle FF centrisch einstellen läßt, und bei welchem der Zutritt des Wassers zu den Reibungsflächen durch eine Stopfbüchse verhindert wird.

Bei anderen Turbinen desselben Systemes (franz. turbines en dessus) regulirt man den Zufluß des Wassers durch Verengung oder partielle Verschließung des Leitschaufelapparates, ähnlich wie bei Turbinen von Fontaine in Fig. 512, III. Hierher gehören unter anderen die Turbinen von Cheneval und die von Girard (s. Le Génie industrielle, Tome XII und XIII). Bei den ersteren hat jede Leitschaufel eine verticale Schütze, welche sich durch einen Hebel und mittels Daumen, Räderwerke u. s. w. auf- oder niederstellen läßt; bei den Turbinen von Girard lassen sich je drei Turbinencanäle durch einen horizontalen Schieber bedecken, welcher durch Hebel und mittels eines Räderwerkes u. s. w. bewegt wird. Beide Turbinen haben eine von oben nach unten zu zunehmende Radweite, und lassen daher einen kleineren Austrittswinkel δ zu als die cylindrischen Turbinen (§. 275).

Bei den Turbinen von Girard ist jedoch diese Erweiterung (franz. évasement) so groß, daß sich ein voller Ausfluß nicht erwarten läßt, um so mehr,

Fig. 518.



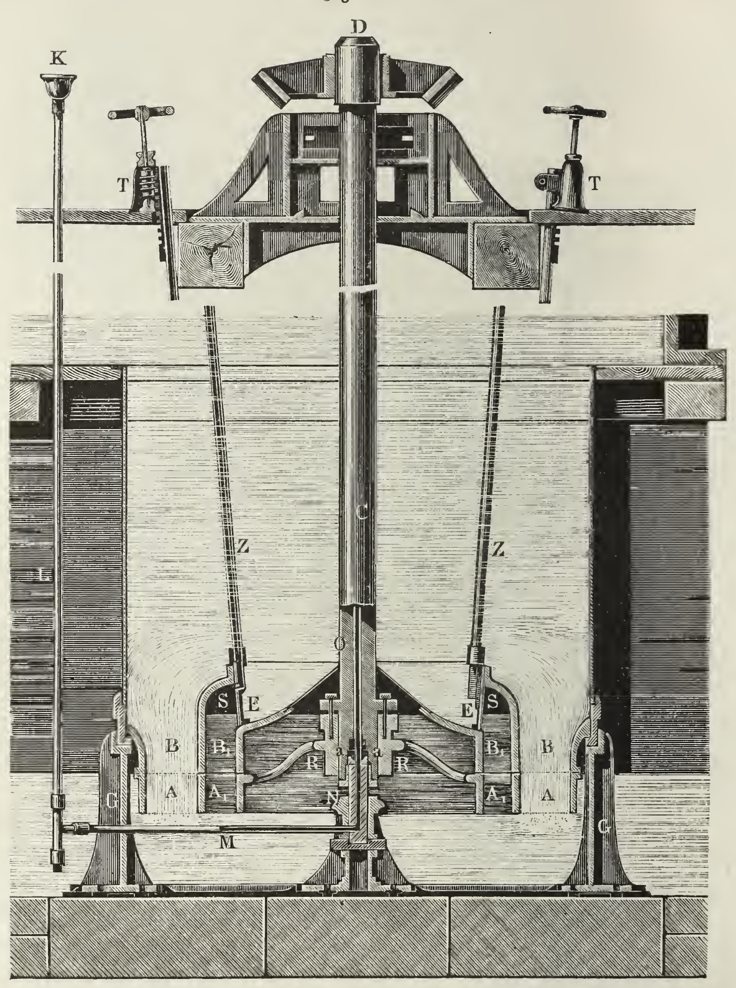
da diese Turbinen hydropneumatisirt sind und folglich in der comprimirten Luft umlaufen.

Die angeführten Regulirungsapparate haben den großen Mangel, daß sie nur durch einen Verlust an lebendiger Kraft in Wirksamkeit treten können (vergl. §. 258); vollkommener läßt sich aber derselbe Zweck erreichen, wenn man das ganze Rad sammt Leitschaufelapparat durch cylindrische Zwischenwände in Kammern abtheilt, und die eine oder die andere dieser Kammern von oben verschließt, wobei man ganz dasselbe erreicht wie bei den Fourneyron'schen Turbinen mit Etagen.

Eine solche Turbine mit zwei Abtheilungen ist in Fig. 519 (a. f. S.) abgebildet. Es ist AA die äußere und $A_1 A_1$ die innere Radkammer, sowie BB die äußere und $B_1 B_1$ die innere Abtheilung des Leitschaufelapparates. Während das hier von einem Mantel umgebene Rad durch die Arme $A_1 R, A_1 R$ und durch die Hülse RR mit der stehenden Welle CD verbunden ist, ruht der

ganze Leitschaufelapparat auf dem Gestelle GG auf. Die Scheidewand des Leitschaufelapparates ist oben nach innen gebogen, und daher die innere Ab-

Fig. 519.



theilung des letzteren nur durch eine ringförmige Seitenöffnung EE zugänglich. Diese Oeffnung läßt sich durch Schieber S, S, wovon je einer über 1, 2 bis 3 Leitschaufelcanäle weggreift, beliebig verschließen, und es dienen hierzu die Zugstangen Z, Z. Die letzteren sind hohl, communiciren oben mit der freien Luft und unten mit dem oberen Raume im Leitschaufelapparate, um bei geschlossenen Schiebern das Aufsteigen des Wassers in der

inneren Radabtheilung zu verhindern. Das Aufziehen und Niederlassen dieser Stangen erfolgt durch Schrauben ohne Enden $T, T \ldots$ Das Schmieröl wird dem Zapfen N der Turbine durch ein Rohr KLM zugeführt, steigt in einer dünnen Bohrung senkrecht im Zapfen bis zu den Reibungsflächen empor, und fließt durch eine senkrechte Bohrung in der stehenden Welle CD ab. Damit sich die Zapfen dieser Turbinen in ihren Lagern nicht klemmen, giebt man den letzteren zuweilen ein Kugelgelenk, oder zwei sich rechtwinkelig kreuzende Cylindergelenke, wie z. B. hier aa vor Augen führt.

Versuche an der Fontaine'schen Turbine. Ueber die Leistungen der Turbinen von Fontaine und von Jonval hat man in der neueren Zeit sehr zuverlässige Versuche angestellt (s. Comptes rendus de l'Académie des Sciences à Paris, Bd. XXII und XXIII, 1846, oder polytechn. Centralblatt, Bd. VIII, 1846). Versuche mit der Fontaine'schen Turbine sind aber auch schon früher von den Civilingenieuren Alcan und Grouvelle ausgeführt worden (s. Bulletin de la Société d'encouragement, Bd. XLIV oder polytechn. Centralblatt, Bd. VI). Diese Versuche führen darauf, daß auch bei den Fontaine'schen Turbinen (wie bei den Fourneyron'schen) der größte Wirkungsgrad bei dem höchsten Schützenstande eintritt, und daß die Leistung bei veränderter Druckhöhe weniger abnimmt, als bei verändertem Aufschlagquantum. Die Turbine zu Badeney bei Chalons sur Marne, deren Leistung von Alcan und Grouvelle ermittelt wurde, hatte 1,6 Meter äußeren Durchmesser und 0,12 Meter Höhe, das Gefälle derselben betrug circa 1,7 Meter, ihr Aufschlagquantum 420 Liter und ihre Nutzleistung circa 8 Pferdekräfte. Als Hauptresultat dieser Versuche hat sich herausgestellt, daß bei einer Umdrehungszahl u von 30 bis 50, der mittlere Wirkungsgrad 0,67 war. Eine, allerdings schon mehrere Jahre im Gange befindliche Fourneyron'sche Turbine gab fast unter denselben Verhältnissen, η nur $= 0{,}60$. §. 284

Morin stellte seine Versuche an einer in der Pulvermühle zu Bouchet befindlichen Turbine an. Das Versuchsrad hatte 1,2 Meter mittleren Durchmesser und 0,25 Meter Weite, es war mit 24 Leit- und 48 Radschaufeln ausgerüstet und hatte circa $1^1/_2$ Meter Gefälle bei 0,25 Cubikmeter Aufschlag. Es wurden an demselben Versuche bei 2, 3 und 4 Centimeter Schützenzug angestellt und folgende Hauptresultate erlangt. War die Schütze ganz aufgezogen und die Zahl der Umdrehungen pr. Minute $= 45$, so fiel der Wirkungsgrad am größten, und zwar 0,69 bis 0,70 aus, bei niedrigeren Schützenstellungen aber, wo der Aufschlag um $^1/_4$ kleiner war, ergab sich $\eta = 0{,}57$. Der Wirkungsgrad veränderte sich mit der Geschwindigkeit des Rades nur wenig; denn bei 35 Umdrehungen war er noch 0,64 und bei 55 noch 0,66. Es hat sich überhaupt, und nament-

lich auch noch bei einigen mit 1 Meter Gefälle angestellten Versuchen ergeben, daß die Abweichung von der vortheilhaftesten Geschwindigkeit $^1/_4$ derselben betragen kann, ohne daß der Wirkungsgrad über 4 bis 6 Proc. kleiner wird. Ueberdies ergab sich, daß die größte Kraft, bei welcher das Rad anfing, unregelmäßig zu gehen, beinahe $1^1/_2$ mal so groß war, als die bei der Maximalleistung ausgeübte Kraft. Bei den Versuchen ging das Rad wenige Centimeter unter Wasser. Aus diesen Resultaten läßt sich entnehmen, daß die Turbine von Fontaine den vorzüglichen hydraulischen Kraftmaschinen beizuzählen ist. Ein besonderer Vorzug dieses Rades besteht überdies noch darin, daß dessen Zapfen ganz außerhalb des Wassers steht. Derselbe Zweck wird jedoch auch durch die graissage atmosphérique von Decker und Laurent erreicht, wo der untere Theil der Turbinenwelle mit einer Taucherglocke, die mit der Welle umläuft, umgeben ist. Die von dieser Glocke umschlossene Luft schützt hier den Zapfen gegen den Zutritt des Wassers und wird durch eine kleine Luftpumpe immer in der nöthigen Spannung erhalten.

§. 285 **Versuche an der Jonval'schen Turbine.** Die Versuche über die Leistungen der Jonval'schen Turbinen sind nicht minder günstig ausgefallen, als die der Fontaine'schen Turbinen. Die Patentinhaber der Jonval'schen Turbine, Andrée Köchlin und Comp., haben die Ergebnisse der Versuche an zwei Rädern aus ihrer Werkstatt im Bulletin de la Société industr. de Mulhouse, 1845 (s. Dingler's polytechn. Journal, Bd. 94, 1844) bekannt gemacht; wir theilen hiervon jedoch nur Folgendes mit. Eine Turbine von 0,95 Meter Durchmesser, 0,20 Meter Höhe, welche sich 0,80 Meter unter dem Spiegel des Oberwassers befand, übrigens aber ein Gefälle von 1,7 Meter und einen Aufschlag von 550 Liter pr. Secunde benutzte, gab bei 73 bis 95 Umdrehungen pr. Minute, 0,75 bis 0,90 Wirkungsgrad. Mit Recht hält Morin diese Werthe für zu groß, und glaubt an denselben wegen einer unrichtigen Bestimmung der Aufschlagmengen, Correctionen anbringen zu müssen, welche dieselben auf 0,63 bis 0,71 zurückführen.

Morin selbst machte Versuche an einer Turbine von 0,810 Meter äußerem Durchmesser, 0,120 Meter innerer Weite und 18 Schaufeln, welche bei 1,7 Meter Gefälle mit 200 bis 300 Liter Aufschlag pr. Secunde arbeitete. Im Ganzen gelangte Morin zu folgenden Resultaten: im Normalzustande, bei ungehindertem Ein- und Austritte des Wassers, war die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute circa 90 und der Wirkungsgrad 0,72. Wurden Verengungsstücke auf das Rad aufgesetzt, so fiel der Wirkungsgrad nur dann viel kleiner (0,63) aus, wenn dieselben den Querschnitt der Eintrittsmündungen in das Rad bedeutend verengten. Der Wirkungsgrad veränderte sich nicht ansehnlich, wenn die Geschwindigkeit um $^1/_4$ größer oder

kleiner war, als bei dem Normalumgange des Rades. Durch das Tieferstellen der Schütze wurde der Wirkungsgrad ansehnlich kleiner, woraus folgt, daß dieselbe ein sehr unvollkommener Regulator des Rades ist. Wurde z. B. durch die Schütze der Querschnitt des abfließenden Wassers auf 0,4 des Werthes beim Normalzustande zurückgeführt, so ergab sich η höchstens $= 0,625$.

Auch Redtenbacher theilt einige Versuche an einer Jonval'schen Turbine mit, und findet den höchsten Wirkungsgrad bei völlig geöffneter Schütze und ohne Bedeckung des Rades durch Blechsectoren, $= 0,62$. Zugleich hat er, wie bei den Fourneyron'schen Turbinen, gefunden, daß das Rad leer ungefähr zweimal so viel Umdrehungen macht, als im Normalzustande bei Verrichtung der Maximalleistung.

Ausgedehnte Versuche über die Wirkung dreier Köchlin-Jonval'schen Turbinen sind von den Herren Hülsse, Bornemann und Brückmann in Vereinigung mit dem Verfasser in der Fischer'schen Papierfabrik zu Bautzen angestellt und von Herrn Brückmann im polytechn. Centralblatt, 1849, Lieferung Nr. 17 beschrieben worden. §. 286

Das größere dieser Räder hatte einen äußeren Durchmesser von 1,4 Meter, und eine Radweite von $\frac{1}{6} . 1,4 = 0,233$ Meter; sein Kranz lag ungefähr 2,3 Meter unter dem Oberwasserspiegel, während das ganze Gefälle im Mittel 4,28 Meter betrug. Die Anzahl der Radschaufeln war 18, und die der Leitschaufeln 24. Die Versuche mit einem unmittelbar auf die Turbinenwelle aufgesetzten Bremsdynamometer gaben bei dem Aufschlag von 0,672 Cubikmeter pr. Secunde und bei 80 bis 100 Umdrehungen pr. Minute, eine Leistung von circa 2115 Meter-Kilogramm, welche dem Wirkungsgrade 0,745 entspricht. Da die Reibung des 850 Kilogramm schweren Rades auf der Basis des 8,98 Centimeter starken Zapfens noch 234 Meter-Kilogramm Arbeit verzehrte, so ist die Leistung des Wassers im Rade 2349 Meter-Kilogramm, während das Arbeitsvermögen des Wassers $672 . 4,28 = 2876$ Meter-Kilogramm betrug, und daher der hydraulische Wirkungsgrad des Rades:

$$\eta = \frac{2349}{2876} = 0,815.$$

Das mittlere Rad hatte 0,963 Meter äußeren und $\frac{2}{3} . 0,963 = 0,642$ Meter inneren Durchmesser, und die Schaufelzahl desselben betrug 18, dagegen die des Leitschaufelapparates 20. Die dynamometrischen Versuche an diesem Rade gaben bei einem Gefälle von 4,42 Meter, einen Aufschlag von 0,370 Cubikmeter pr. Secunde, und bei einer Umdrehungszahl von 115 bis 145, eine effective Leistung von 1289 Meter-Kilogramm, und hier-

nach einen Wirkungsgrad von $\frac{1289}{1635} = 0,8$, der nach Hinzurechnung der Reibung des 493 Kilogramm schweren Rades auf der 7,62 Centimeter breiten Zapfenbasis, auf 0,82 steigt.

Das kleine Rad hatte endlich 0,612 äußeren und 0,393 inneren Durchmesser, und seine Schaufelanzahl betrug, wie die des Zuleitungsapparates, nur 12. Es lag dasselbe nur 1,4 Meter unter dem Oberwasserspiegel, während das ganze Gefälle 4,513 Meter maß. Bei 0,197 Cubikmeter Aufschlag pr. Secunde und einer Umdrehungszahl von 180 bis 220 pr. Minute gab dieses Rad noch den Wirkungsgrad 0,70, welcher sich durch Hinzurechnen der Reibung des 229 Kilogramm schweren Rades an der Basis seines 6,35 Centimeter dicken Zapfens, auf 0,715 steigert.

Nicht minder günstig sind die Ergebnisse der dynamometrischen Versuche ausgefallen, welche Herr Brückmann an einer Köchlin-Jonval'schen Turbine in der Spinnerei des Herrn Mattausch zu Franzensthal in Böhmen angestellt, und welche derselbe ebenfalls im polytechn. Centralblatt, und zwar im Jahrgang 1849, Lieferung 22, veröffentlicht hat. Diese Maschine ist, wie auch die vorigen, aus der Fabrik von Escher, Wyß und Comp. in Zürich hervorgegangen. Das Rad hatte 20 Schaufeln, einen äußeren Durchmesser von 4 Fuß $6^1/_2$ Zoll engl. und einen Schaufelkranz von 9 Zoll Höhe und $9^1/_4$ Zoll Breite. Der sich nach oben etwas erweiternde Leitschaufelapparat hatte nur 15 Schaufeln und seine Höhe betrug ebenfalls 9 Zoll. Die Kranzfläche des Rades lag 1,4 Meter unter dem Oberwasserspiegel, das ganze Gefälle betrug 3 bis 3,1 Meter und der Aufschlag 0,966 bis 1,22 Cubikmeter pr. Secunde. Statt einer Regulirungsklappe war eine bei den Versuchen stets offene Perspectivschütze am Fuße der Saugröhre angebracht, außerdem waren auch noch Deckel vorhanden, wodurch mehrere Einmündungen des Leitschaufelapparates sich zuschließen ließen. Die Versuche des Herrn Brückmann haben auf Folgendes geführt. Bei völlig geöffnetem Leitschaufelapparat und 81 bis 91 Umdrehungen des Rades pr. Minute war die Leistung dieser Turbine 38 Pferdekräfte, welchen der Wirkungsgrad 0,78 entspricht; waren aber drei von den 15 Leitschaufelcanälen bedeckt, so sank der Wirkungsgrad auf 0,75, und waren fünf dieser Canäle bedeckt, so fiel der Wirkungsgrad gar auf 0,65.

§. 287 **Neuere Versuche an einer Fontaine'schen Turbine.** Gründliche dynamometrische Versuche an einer Fontaine'schen Turbine mit zwei Abtheilungen (Fig. 519), hervorgegangen aus der rühmlichst bekannten Fabrik von Escher, Wyß u. Comp. in Zürich, sind 1852 von den Herren Professoren Hülße und Brückmann angestellt worden. Die geprüfte Turbine war eine Umtriebsmaschine in der Papierfabrik des Herrn Grimm rc.

zu Doberschau bei Bautzen. Das Gefälle derselben betrug $16\frac{1}{2}$ Fuß (engl.) und das normale Aufschlagquantum $16\frac{3}{4}$ Cubikfuß pr. Secunde. Das Aufschlagwasser trat aus dem Aufschlaggraben zuerst in einen Einfallkasten von ungefähr 7 Fuß Seitenlänge und 8 Fuß Tiefe, und von da in ein Einfallrohr aus Eisenblech von $4\frac{2}{3}$ Fuß Weite; das letztere führte es in den unten anstoßenden, aus zwei concentrischen Schaufelkränzen bestehenden Leitschaufelapparat, und aus diesem strömte es in einer schrägen Richtung in das unmittelbar darunter stehende zweitheilige Turbinenrad. Der Unterwasserspiegel schwankte zwischen dem Niveau der oberen und dem der unteren Grundfläche des Leitschaufelapparates; es ist folglich diese Maschine eine unter Wasser gehende Fontaine'sche Turbine. Der mittlere Durchmesser der äußeren Radabtheilung betrug 3 Fuß $10\frac{1}{4}$ Zoll und die Weite derselben 2,9 Zoll, ferner der mittlere Durchmesser der inneren Radabtheilung maß 3 Fuß 0,85 Zoll und die Weite derselben 4 Zoll. Die Höhe des Rades betrug $6\frac{1}{2}$ Zoll, der Abstand des Rades vom Leitschaufelapparate $\frac{1}{4}$ Zoll und die Dicke des gußeisernen Zwischenkranzes $1\frac{1}{4}$ Zoll. Die Höhe der Leitschaufelringe maß 6,1 Zoll, die obere Weite des äußeren Ringes $4\frac{1}{4}$ Zoll, und die untere $5\frac{3}{4}$ Zoll. Die Anzahl der Schaufeln des Rades und des Leitschaufelapparates war 24. Die Regulirung der Beaufschlagung der Maschine konnte in der Art erfolgen, daß

1) beide Radabtheilungen vollständig,
2) nur die äußere Radabtheilung vollständig geöffnet,
3) die letztere vollständig und die innere Abtheilung theilweise geschlossen blieb.

Zum Verschließen des inneren Leitschaufelringes dienten eiserne Deckel in Gestalt von Ringstücken. Je zwei dieser Deckel lagen einander gegenüber, und deckten entweder je eine, je zwei, je drei, oder je vier Zellen des Leitschaufelapparates.

Die Turbinenwelle hatte einen Durchmesser von 6 Zoll und ein Gewicht von 1482 Pfund Zollgewicht; sie enthielt unten eine messingene Spurplatte, womit sie auf einem oben abgerundeten feststehenden Gußstahlzapfen von $3\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser lief.

Die Umdrehungskraft wurde durch ein Bremsdynamometer von $6\frac{1}{3}$ Fuß Armlänge, und die Aufschlagmenge durch einen Ueberfall von 8 Fuß Breite gemessen. Die Ergebnisse der an dieser Turbine angestellten Versuche sind, kurz zusammengefaßt, folgende:

1) Bei Beaufschlagung der äußeren Radabtheilung war das mittlere Gefälle:

$$h = 4{,}93 \text{ Meter},$$

das mittlere Aufschlagquantum:

$$Q = 0{,}255 \text{ Cubikmeter},$$

die Umdrehungszahl pr. Minute:

$$u = 60 \text{ bis } 82,$$

und der Wirkungsgrad:

$$\eta = 0{,}573 \text{ bis } 0{,}613.$$

2) Bei vollständiger Beaufschlagung von beiden Radabtheilungen war

$h = 4{,}45$ Meter, $Q = 0{,}485$ Cubikmeter,
$u = 76$, $\eta = 0{,}652$,
$u = 103$, $\eta = 0{,}755$,
$u = 119$, $\eta = 0{,}713$.

3) Beim Verschluß von der Hälfte (12 Zellen) des inneren Leitschaufelapparates:

$h = 4{,}51$ Meter, $Q = 0{,}359$ Cubikmeter,
$u = 69{,}5$, $\eta = 0{,}649$,
$u = 86$, $\eta = 0{,}677$,
$u = 100{,}3$, $\eta = 0{,}657$.

4) Beim Verschluß von Dreiviertel (18 Zellen) des inneren Leitschaufelapparates:

$h = 4{,}57$ Meter, $Q = 0{,}300$ Cubikmeter,
$u = 57$ bis $87\frac{1}{2}$, $\eta = 0{,}576$ bis $0{,}640$.

Wie auch aus theoretischen Gründen folgt, ist der Wirkungsgrad der Turbine bei vollständiger Beaufschlagung beider Radabtheilungen ein Maximum, und es fällt derselbe um so kleiner aus, je mehr Zellen des inneren Leitschaufelapparates bedeckt sind (s. polytechnisches Centralblatt, Jahrgang 1852, Lieferung 14).

Versuche über die Fontaine'schen Turbinen mit Hydropneumatisation u. s. w. nach Girard, sind an einem solchen Rade in der Papierfabrik zu Egreville von den Herren Girard, Dufay, Callon u. s. w. im Jahre 1851 angestellt worden (s. Comptes rendues etc. de l'Académie des Sciences à Paris, T. 33). Diesen Versuchen zufolge, hat eine solche Turbine bei einem Gefälle $h = 1{,}65$ bis $1{,}69$ Meter, einem Aufschlagquantum $Q = 1{,}75$ bis $2{,}22$ Cubikmeter pr. Secunde, einer Umdrehungszahl $u = 20$ bis 24 und einer Nutzleistung von 27 bis 38 Pferdekräften einen Wirkungsgrad von 0,69 bis 0,76. Spätere Versuche an einer solchen Turbine in der Spinnerei zu Haudrecy, wobei $h = 1{,}66 \div 1{,}78$ Meter, $Q = 0{,}54$ bis $1{,}09$ Cubikmeter und $u = 23$ bis 27 war, gaben $\eta = 0{,}70$ bis $0{,}84$, oder im Mittel $\eta = 0{,}75$ (s. Le Génie industrielle, Mars 1855).

Versuche, welche im Conservatoire des arts et métiers zu Paris mit einer kleinen Turbine derselben Art angestellt worden sind, haben auf den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}61$ bis $0{,}76$ geführt (s. Le Génie industrielle, Tome XII, 1856).

Vergleichung der Turbinen unter einander. Vergleichen wir die Fontaine-Jonval'schen Turbinen mit den Fourneyron'schen Turbinen, so finden wir allerdings, daß sie in einigen Beziehungen den letzteren vorzuziehen sind, in anderen Beziehungen aber denselben nachstehen. Zunächst hat eine Turbine von Fontaine u. s. w. den Vorzug vor einer Fourneyron'schen Turbine, daß bei ihr das Wasser bei seinem Eintritte in den Leitschaufelapparat von seiner anfänglichen Bewegung nicht so viel abgelenkt wird, als bei einer Fourneyron'schen Turbine; daß daher auch, wenn die Eintrittsgeschwindigkeit eine und dieselbe ist, bei jener Turbine ein kleinerer Eintrittswiderstand stattfindet, als bei dieser Turbine; oder daß bei jenem Rade eine größere Eintrittsgeschwindigkeit angewendet werden kann, als bei diesem, und also auch jenes Rad kleiner gemacht werden kann, als dieses. Dann besitzt diese Turbine auch noch den Vorzug, daß ihre Leitschaufeln das Wasser mehr in parallelen Fäden einführen, als bei den Fourneyron'schen Turbinen, wo eine Divergenz der in das Rad eintretenden Strahlen unvermeidlich ist. §. 288

Auf der anderen Seite bieten aber auch die alten oder Fourneyron'schen Turbinen ihre Vorzüge dar. Erstens besteht ihr Zapfendruck fast nur in dem Gewichte des armirten Rades, während er bei den neueren Turbinen außerdem noch aus einem Wasserdrucke besteht, der mit der Umdrehungskraft wächst. Es ist also hier unter übrigens gleichen Umständen eine größere Zapfenreibung zu erwarten, als dort. Zweitens, bei den Fourneyron'schen Turbinen bewegen sich die Wassertheilchen neben einander mit gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit, bei den Fontaine-Jonval'schen Turbinen hingegen haben die neben einander niederfließenden Wasserelemente sehr ungleiche Umlaufsgeschwindigkeiten, die äußeren größere und die inneren kleinere. Es erwächst aber hieraus bei diesen Rädern ein wenn auch nur kleiner Stoß beim Eintritte des Wassers in das Rad, eine größere Reibung des Wassers in den Radcanälen und vorzüglich noch eine gewisse Unregelmäßigkeit in der Bewegung des durch das Rad strömenden Wassers, indem die Centrifugalkraft dasselbe nach außen treibt. Endlich besteht ein Vorzug der älteren Turbinen noch in der leichteren Herstellung des Leit- und Radschaufelapparates.

Anmerkungen. 1. Sehr geeignet sind noch die Fontaine'schen Turbinen zur Benutzung der Ebbe- und Fluthkraft. Stellt man ein solches Rad in einen in das Meer ausmündenden Canal und sperrt man durch zwei Schutzbretter auf der einen Seite den unteren und auf der anderen Seite den oberen Theil des Rades ab, so ist das auf der einen Seite höher stehende Wasser gezwungen, durch das Rad hindurchzugehen und dasselbe in Umdrehung zu setzen. Bei dem Umsetzen aus der Fluth in Ebbe, oder umgekehrt aus der Ebbe in Fluth, ist natürlich die Schützenstellung umzukehren.

2. Zu den Vorzügen der Jonval'schen Turbinen rechnet man noch den Um-

stand, daß man dieselben beliebig (natürlich noch nicht 32,84 Fuß) über das Unterwasser stellen kann, ohne einen namhaften Verlust an Wirkung zu verlieren, daß sie daher auch leicht einer Revision und Reparatur zu unterziehen sind, und ihnen durch eine Veränderung des Unterwasserstandes kein Verlust erwächst. Wie aus den Versuchen Marozeau's (s. die am Ende citirte Abhandlung), zugleich aber auch aus der obigen Theorie und aus besonderen theoretischen Untersuchungen Morin's folgt, darf jedoch die Höhe der Turbine über dem Unterwasser eine gewisse Grenze nicht überschreiten, weil sonst das Wasser unmittelbar unter dem Rade die Continuität verliert, wobei, wie leicht zu ermessen, eine kleinere Wirkung eintritt.

§. 289 **Vergleichung der Turbinen mit anderen Wasserrädern.** Wir haben nun noch die Vorzüge und Mängel der Turbinen, und zwar vorzüglich der Reactionsturbinen, gegen die verticalen Wasserräder aufzuzuzählen und gegen einander abzuwägen.

Die Turbinen besitzen zuerst insofern einen großen Vorzug vor den verticalen Wasserrädern, als sie sich fast bei allen Gefällen von 1 bis 500 Fuß anwenden lassen, während die verticalen Wasserräder höchstens eine Wasserkraft von 50 Fuß Gefälle aufzunehmen vermögen. Allerdings sind aber bei verschiedenen Gefällen die Wirkungsgrade der Turbinen verschieden, namentlich fallen dieselben bei kleinen Rädern und hohen Gefällen kleiner aus, als bei mittleren und kleinen Gefällen, weil hier die Nebenhindernisse verhältnißmäßig größer sind als bei größeren Rädern mit mittleren Gefällen. Auf der anderen Seite läßt sich bei hohen Gefällen von 20 bis 40 Fuß von oberschlägigen Wasserrädern ein Wirkungsgrad erzielen, der bei Turbinen nicht erlangt werden kann. Nur bei mittleren Gefällen von 10 bis 20 Fuß kann man von beiden Rädern eine und dieselbe Leistung erwarten; sind aber die Gefälle klein, so geben die Turbinen in jedem Falle eine größere Nutzleistung, als die an deren Stelle gesetzten unterschlägigen Wasserräder. Die Ponceleträder sind höchstens bei Gefällen von 3 bis 6 Fuß den Turbinen an die Seite zu stellen. Die Turbinen haben vor den verticalen Wasserrädern noch den großen Vorzug, daß sie bei verschiedenen Gefällen fast mit gleichem Wirkungsgrade arbeiten, und daß sie besonders durch Stauwasser in ihrem Gange nicht gestört werden, da sie unter Wasser fast mit demselben Vortheil, ja in gewissen Fällen noch mit mehr Nutzen arbeiten, als in freier Luft. Verticale Wasserräder verlieren zwar stets an ihrem Wirkungsgrade, wenn sich ihr Gefälle verändert, jedoch nur dann beträchtlich, wenn die Gefälle selbst klein sind, oder gar ein Waten des Rades im Wasser eintritt. Auf der anderen Seite verursachen aber Veränderungen im Aufschlagquantum bei verticalen Wasserrädern weit weniger Arbeitsverlust, als bei den horizontalen Wasserrädern. Dieses Verhältniß gereicht den ersteren Rädern in ökonomisch-hydraulischer Beziehung zum großen Vortheile. Um die Leistung eines vorher im Normalgange befindlichen verticalen Wasserrades, zu-

mal eines solchen, wo das Wasser hauptsächlich durch den Druck wirkt, nach Bedürfniß zu erhöhen, kann man auf dasselbe eine größere Wassermenge aufschlagen, und um die Leistung eines solchen Rades zu vermindern, braucht man nur demselben weniger Wasser zu geben; in beiden Fällen wird der Wirkungsgrad nicht namhaft kleiner oder größer. Ganz anders ist aber das Verhältniß in diesem Falle bei einer Reactionsturbine. Der vortheilhafte Gang einer solchen findet bei völlig geöffneter Schütze und also auch bei dem größten Aufschlagquantum statt; wenn nun ein kleineres Arbeitquantum gefordert, daher auch ein kleineres Wasserquantum verbraucht, und zu diesem Zwecke die Schütze tiefer gestellt wird, so vermindert man die Leistung nur zum Theil durch Verminderung des Aufschlages, zum Theil aber durch Tödten der lebendigen Kraft des Wassers oder durch Schwächen des Wasserdruckes, und zieht dadurch den Wirkungsgrad herab. Dieses Krafttödten ist mit dem Bremsen oder Hemmen eines Wagens zu vergleichen, welches beim Bergabfahren, wo ein Ueberfluß an lebendiger Kraft vorhanden ist, vorgenommen wird. Während man also bei einem verticalen Wasserrade durch Niederlassen der Schütze nur alles überflüssige Wasser vom Rade absperrt und dieses nach Befinden noch zu anderen Zwecken gebrauchen kann, wird bei den Reactionsturbinen dadurch nur ein Theil des überflüssigen Wassers abgesperrt, das Arbeitsvermögen des anderen Theiles aber im Rade vernichtet.

Bei den Druckturbinen ist, wenn dieselben nicht unter Wasser gehen, und daher die Radcanäle vom durchfließenden Wasser nicht ausgefüllt werden, dieses Leistungsverhältniß günstiger; da hier bei jeder Schützenstellung das Wasser ohne einen Wirbel zu bilden durch die Radcanäle strömt.

In Hinsicht auf Veränderlichkeit in der Umdrehungsgeschwindigkeit findet §. 290
eine große Differenz zwischen den horizontalen und verticalen Wasserrädern nicht statt, bei beiden kann sich die Normalgeschwindigkeit ungefähr um den vierten Theil ihres Werthes vergrößern oder verkleinern, ohne daß die Leistung sich bedeutend vermindert. Was aber die Größe dieser Geschwindigkeit selbst anlangt, so stellt sich allerdings ein großer Unterschied heraus. Mit Ausnahme der unterschlägigen Räder und namentlich der Ponceleträder gehen alle verticalen Wasserräder meist nur mit Umdrehungsgeschwindigkeiten von 4 bis 10 Fuß um, die Turbinen hingegen haben vom Gefälle abhängige, sehr verschiedene und meist weit größere Umlaufsgeschwindigkeiten. Aus diesem Grunde und da überdies noch die Turbinen kleinere Halbmesser haben, als die verticalen Wasserräder, machen sie denn auch in der Regel viel mehr Umdrehungen, als diese Räder. Je nachdem nun die Arbeitsmaschine eine große oder eine kleine Umdrehungszahl, d. i. einen schnellen oder einen langsamen Gang erfordert, wird sich daher auch ein horizontales oder ein verti-

cales Wasserrad mehr zu ihrer Bewegung eignen. Uebrigens aber sind die schnellen Bewegungen einer Maschine eher nachtheilig als vortheilhaft, weil bei ihnen die Nebenhindernisse, wie Reibung, zumal aber Stöße u. s. w., größer ausfallen; und aus diesem Grunde ist es oft vortheilhafter, durch eine Zwischenmaschine die Umdrehungszahl eines Rades in eine größere als in eine kleinere umzusetzen, und daher ein verticales anstatt eines horizontalen Wasserrades anzuwenden.

Ist die Last einer Maschine veränderlich, wie z. B. bei einem Hammerwerke oder Walzwerke u. s. w., so ist die Anwendung eines verticalen Rades ebenfalls vorzuziehen, denn dasselbe wirkt durch seine größere Masse, obgleich es langsamer umläuft, mehr als Regulator als eine Turbine, bei deren Anwendung nicht selten noch ein Schwungrad zur Ausgleichung der veränderlichen Bewegung nöthig ist. Bei constanter Last ist aber den Turbinen ein Vorzug in dieser Beziehung einzuräumen, weil verticale Wasserräder, namentlich wenn sie von Holz sind, oft ein sogenanntes schweres Viertel haben, d. h. gleiche Theile ihres Umfanges nicht gleich schwer sind.

In ökonomischer Beziehung sind die Turbinen den verticalen Wasserrädern wenigstens an die Seite zu stellen, bei hohen Gefällen aber und selbst bei mittleren Gefällen und einem großen Aufschlagquantum, sind dieselben sogar wegen ihrer Wohlfeilheit den verticalen Rädern vorzuziehen. Selbst in Hinsicht der Dauerhaftigkeit ist den Turbinen der Vorzug vor den verticalen Wasserrädern einzuräumen.

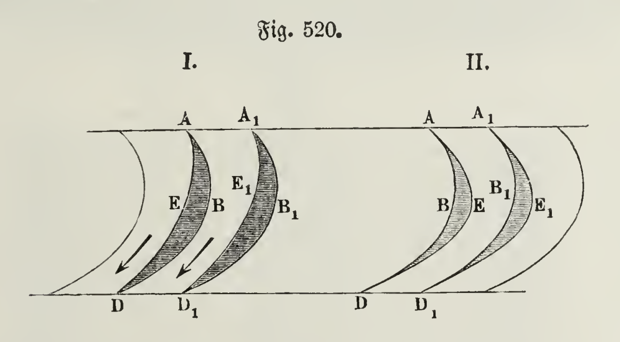
Auf der anderen Seite ist nicht außer Acht zu lassen, daß Turbinen ein reines Wasser zu ihrer Beaufschlagung erfordern, und daß deren Leistung durch zugeführten Sand, Schlamm, Moos, Kräuter, Blätter, Eisstücke, Baumzweige u. s. w. außerordentlich herabgezogen werden kann, was bei den verticalen Wasserrädern nicht zu befürchten ist. Endlich kommt noch in Betracht, daß die Turbinen, und namentlich die Leitschaufelturbinen, schwieriger zu construiren sind, als die verticalen Wasserräder, und daß Abweichungen von den mathematischen Regeln ihrer Construction bei den Turbinen von viel nachtheiligeren Folgen sind, als bei den verticalen Wasserrädern. Deshalb sind denn auch früher so viele Turbinenanlagen mißlungen, und es haben die Turbinen noch nicht diejenige Verbreitung erhalten, die sie verdienen.

§. 291 **Hänel'sche Turbinen mit Rückschaufeln.** Es ist bekannt, daß sich das Wasser beim Durchströmen durch Kropfröhren mit constantem Querschnitt in Folge der Centrifugalkraft von der convexen Seitenwand derselben trennt, und deshalb den Röhrenquerschnitt nicht ausfüllt; auch weiß man, daß sich das Wasser nur in einem druckverzehrenden Wirbel wieder an die Röhrenwand vollständig anschließt, wenn dem Ausfluß des Wassers aus der

Röhre, z. B. durch Verengung ein Hinderniß entgegengesetzt wird. Genau so ist das Verhältniß der Bewegung des Wassers durch die Turbinencanäle. Damit das Wasser diese Canäle mit gefülltem Querschnitt durchlaufe, ist es nöthig, daß der Querschnitt dieser Canäle auf der ganzen Länge nicht constant sei, noch viel weniger zunehme, sondern vom Eintritt bis zum Austritt allmälig immer kleiner und kleiner werde. Um dieses zu erlangen, hat man in der Regel, namentlich dann, wenn der Eintrittswinkel β spitz ist, nöthig, getrennte Radcanäle anzuwenden, oder die Schaufeln mit doppelten Wänden auszurüsten.

An die auf die bekannte Weise construirten Schaufeln ABD, $A_1 B_1 D_1$ Fig. 520, einer Henschel'schen Turbine kann man zu diesem Zwecke noch

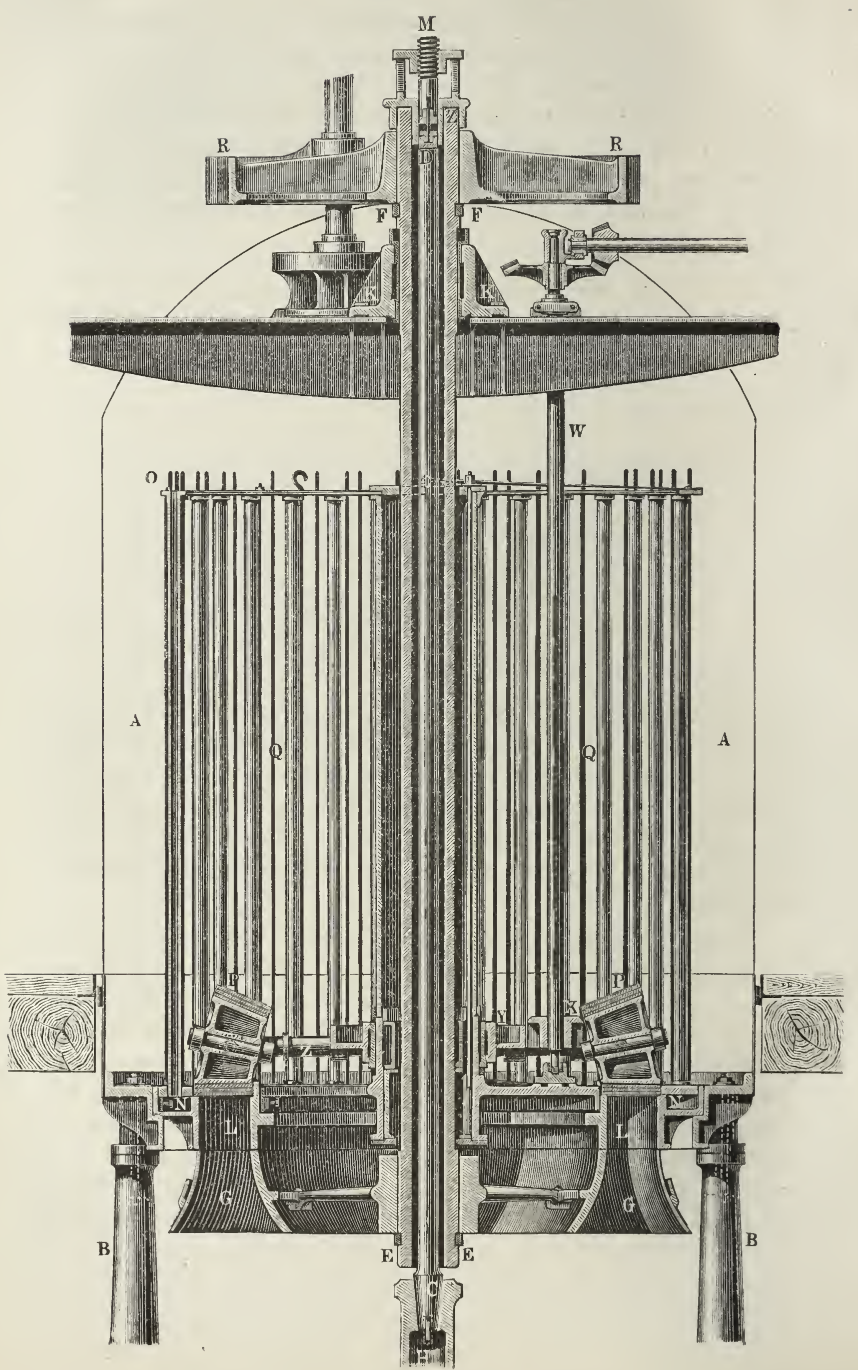
Fig. 520.



die Schaufeln AED, $A_1 E_1 D_1 \ldots$ ansetzen, welche entweder, wie in I, an den concaven oder, wie in II, an den convexen Seiten der Schaufeln ABD, $A_1 B_1 D_1$ hinlaufen. Die dadurch gebildeten Radcanäle, wie $A_1 B D_1$ in I, und $A_1 E D_1$ in II, nehmen, von A nach D gegangen, allmälig an Weite ab, wogegen die Canäle zwischen ABD und $A_1 B_1 D_1$ bei BB_1 weiter sind als bei AA_1 und daher zur Entstehung des Wasserwirbels Veranlassung geben.

Turbinen mit solchen doppelwandigen Schaufeln, und zwar mit Rückschaufel (II, Fig. 520) sind zuerst vom Herrn Maschinendirector Hänel bei einer großen Mühlenanlage zu Rothenburg an der Saale in Anwendung gebracht worden, und haben sich daselbst vorzüglich bewährt. Den Verticaldurchschnitt einer solchen Turbine führt Fig. 521 (a. f. S.) vor Augen. Folgendes ist die wesentliche Einrichtung derselben. Das Zuflußreservoir AA ruht sammt dem Leitrad L auf vier gußeisernen Säulen B, B und die Spindel CD, welche mittels der röhrenförmigen Welle $EFFE$ das Laufrad GG trägt, sitzt im Kopfe H eines Ständers, welcher wie die Säulen B, B von einer kreuzförmigen Sohlplatte getragen wird. Die hohle Welle

Fig. 521.



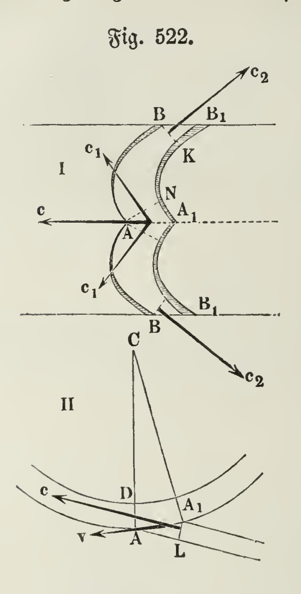
EFFE geht bei *KK* durch ein Halslager, trägt bei *FF* das Transmissionsrad *RR* und endigt sich in einer Schraubenmutter *M*, deren Spindel den stehenden Zapfen *Z* bildet, womit die Welle auf der Säule *CD* ruht. Um die Reibung möglichst herabzuziehen, ist zwischen dem Zapfen und der Spurplatte eine Platte von Hartmetall lose eingesetzt, und wird den Reibungsflächen mittels einer axialen Bohrung Oel zugeführt. Um die sich in den Leitschaufelcanälen ansammelnde Luft zu entfernen, ist am äußeren Umfang des Leitschaufelapparates ein ringförmiger und in Kammern abgetheilter Raum *N,N* angebracht, welcher durch Bohrungen seitwärts mit den Leitschaufelcanälen und durch senkrechte Röhren, wie *NO*, mit der äußeren Luft in Verbindung gesetzt ist. Um fremde Körper, welche mit dem Wasser zugeführt werden, von dem Eintritt in das Rad abzuhalten, ist durch 64 senkrechte Stäbe in Vereinigung mit den 32 Luftröhren ein cylindrischer Rechen *QQ* gebildet, welcher den ganzen Leitschaufelapparat umgiebt. Der Schützenapparat, durch welchen der Gang des Rades regulirt wird, besteht aus zwei conischen Rollen *P, P* und zwei ringförmigen Guttaperchastreifen, deren Enden einerseits an den Leitschaufelapparat und andererseits an den Rollen befestigt sind. Diese Rollen lassen sich nicht allein um ihre geometrische Axe, sondern auch um die Turbinenaxe drehen, wobei sich die Guttaperchastreifen auf dieselben auf- und von dem Einmündungsringe abwickeln lassen, so wie umgekehrt. Zu diesem Zwecke dient die stehende Welle *WX* u. s. w. mit dem Getriebe *X*, welches in den gezahnten Sector *Y* eingreift, an dem die Arme *Z* festsitzen, welche mit ihren gabelförmigen Enden die Axen der Rollen *P,P* ergreifen. Den Guttaperchastreifen ist durch viele nahe an einander stehende eiserne Querschienchen die nöthige Tragfähigkeit ertheilt.

Die Hauptdimensionen einer solchen Turbine sind folgende. Gewöhnliches Gefälle $h = 4$ bis 6 Fuß, Aufschlagquantum $Q = 5$ bis 57 Cubikfuß pr. Secunde, Anzahl der Rad- und Leitschaufeln = 32, mittlerer Durchmesser des Rades 5 Fuß, Ringbreite oben: $7\frac{1}{2}$ Zoll; unten: 15 Zoll, Radhöhe 1 Fuß. Zutrittswinkel $\alpha = 22\frac{1}{2}$ Grad, Eintrittswinkel = 45 Grad, mittlerer Austrittswinkel $\delta = 24\frac{3}{4}$ Grad. Normale Umdrehungszahl $u = 33$. Aus den vom Herrn Maschinendirector Hänel sehr ausführlich angestellten Versuchen ergiebt sich, daß diese Turbine bei mehr oder weniger Eröffnung der Leitschaufelcanäle ($\frac{1}{4}$ bis $\frac{4}{4}$), bei Eintauchungen von 0 bis 1,5 Fuß, und beim Aufschlagquantum Q von 5,3 bis 57 Cubikfuß einen Wirkungsgrad von 0,64 bis 0,70 liefert. Das Nähere ist nachzulesen in Bd. V (1861) der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

Schiele's Turbinen. Wenn ein Wasserstrahl nahe tangential an den mittleren Umfang eines Cylinders antrifft, welcher mit Schaufeln wie *BAB*, $B_1 A_1 B_1 \ldots$, Fig. 522 (a. f. S.), bekleidet und von einem Gehäuse umgeben §. 292

ist, so strömt das Wasser in zwei Theilen längs der Schaufelhälften AB_1 AB hin und gelangt an den Grundflächen des Cylinders bei $B_1 B$ u. s. w. zum Abfluß. Wird dieser Cylinder nur in seiner geometrischen Axe festgehalten, so setzt ihn das an den Schaufeln hinlaufende Wasser in Umdrehung; es bildet daher dann derselbe ein horizontales Wasserrad, und zwar die **Schiele'sche** Turbine. Steht die Radmitte A, um die Höhe h_1 unter dem Oberwasserspiegel, und hat das Wasser beim Eintritt in das Rad den durch die Höhe x gemessenen Druck, so ist die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers

Fig. 522.



$$c = \sqrt{2g(h_1 - x)},$$

und hat das Rad die Umfangsgeschwindigkeit v, so hat man unter der Voraussetzung, daß c nahe tangential gerichtet ist, die relative Anfangsgeschwindigkeit des Wassers im Rade:

$$c_1 = c - v = \sqrt{2g(h_1 - x)} - v.$$

Steht ferner die Radmitte um die Höhe h_2 unter dem Unterwasserspiegel, so hat man für die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2:

$$c_2^2 = c_1^2 + 2g(x - h_2),$$
$$= (c - v)^2 + 2g(x - h_2),$$

oder wenn man noch $c^2 = 2g(h_1 - x)$ und statt $h_1 - h_2$ das ganze Radgefälle h einführt,

$$c_2^2 = 2g(h_1 - x) - 2cv + v^2 + 2g(x - h_2)$$
$$= 2gh - 2cv + v^2.$$

Damit das Wasser möglichst todt vom Rade abfließe, ist das Schaufelende B nahe tangential an den Radumfang zu legen, und $c_2 = v$ zu machen. Unter dieser Voraussetzung ist

$$2gh - 2cv = 0, \text{ und daher } cv = gh.$$

Bezeichnet F den Querschnitt des mit der Geschwindigkeit c zuströmenden Wassers und F_1 den Querschnitt des Wasserstromes im Rade unmittelbar nach seinem Eintritte, wo es die Geschwindigkeit c_1 hat, so ist

$$F_1 c_1 = Fc, \text{ oder } F_1(c - v) = Fc,$$

daher $$c = \frac{F_1 v}{F_1 - F}, \text{ und}$$

$\left(\frac{F_1}{F_1 - F}\right) v^2 = g h$; wonach nun die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{F_1 - F}{F_1} g h} \text{ folgt.}$$

Bezeichnet α den Zutrittswinkel $A_1 A L$ (II), β den Schaufelwinkel $A A_1 N$ (I) beim Eintritt, und δ den Schaufelwinkel $B B_1 K$ beim Austritt, ist ferner a die Höhe des eintretenden Strahles, und e die Schaufelbreite $A D$ (II), so hat man

$$\frac{F}{F_1} = \frac{a \sin.\alpha}{2 e \sin.\beta},$$

und daher auch

$$v = \sqrt{\left(1 - \frac{a \sin.\alpha}{2 e \sin.\beta}\right) g h.}$$

Ebenso ist

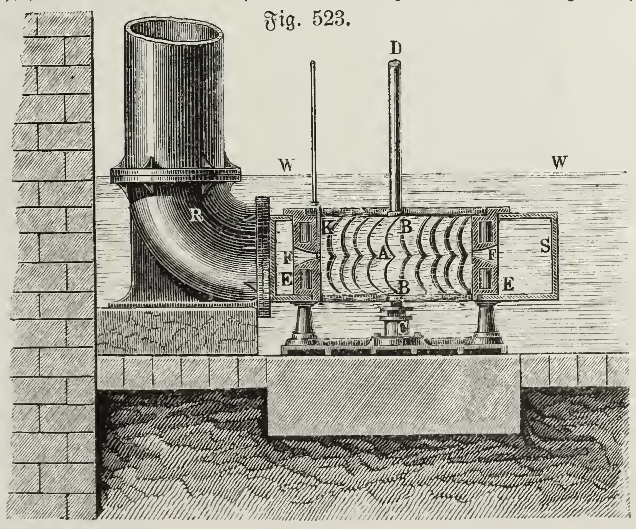
$$a c \sin.\alpha = 2 e c_1 \sin.\beta = 2 e c_2 \sin.\delta,$$

wonach sich für den Austrittswinkel δ

$$\sin.\delta = \frac{c_1}{c_2} \sin.\beta = \frac{c - v}{v} \sin.\beta \text{ ergiebt.}$$

In den Fig. 523 und Fig. 524 (a. f. S.) sind der verticale und der horizontale Durchschnitt einer Schiele'schen Turbine abgebildet. Das eigentliche Rad

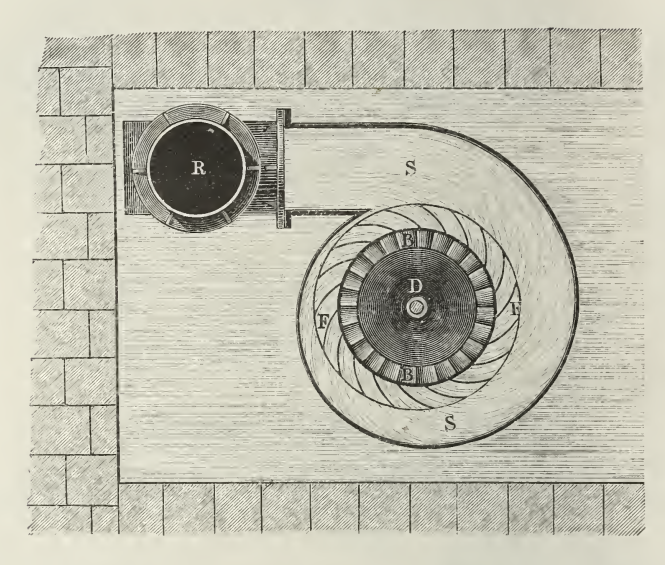
Fig. 523.



BAB sitzt auf der Welle CD und ist von einem Gehäuse EE umgeben, dessen Mitte den kreisförmigen und mit Leitschaufeln versehenen Zutrittscanal FF enthält. Dieses Gehäuse ist wieder von einem spiralförmigen Einlaufe SS

umgeben, welcher sich unmittelbar an die Einfallröhre, durch welche das Aufschlagwasser zugeführt wird, anschließt. Das Letztere wird durch Zu-

Fig. 524.

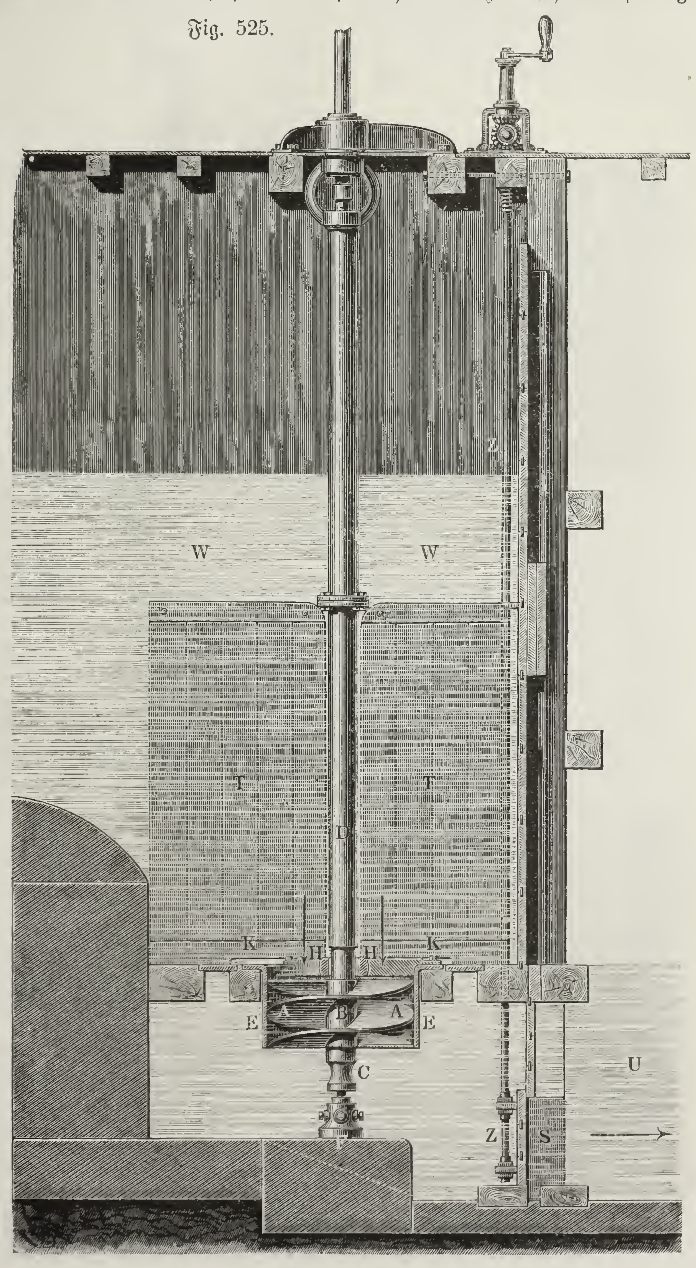


leitungscanäle *F*, *F*... in die Mitte *A* des Rades geführt, läuft von da in zwei Strömen längs der Schaufeln *AB*, *AB* hin, und kommt an den beiden Grundflächen des Rades zum Ausfluß unter dem Wasser *WW*. Um den Zufluß des Aufschlags zu reguliren, sind noch Schieber wie *K* an den Ausmündungen der Einläufe angebracht, wodurch sich dieselben verschließen lassen. Da das Wasser in entgegengesetzten Richtungen an den Radcanälen hinläuft, so übt es keinen Axendruck auf das Rad aus, und da ohne dies das Rad hohl gegossen wird, daß es beinahe im Wasser schwimmt, so fällt bei diesen Rädern die Zapfenwirkung außerordentlich klein aus. Man läßt diese Turbinen auch durch Saugröhren wirken, auch läßt man sie wohl um eine horizontale Axe laufen. S. Dingler's Journal Bd. 164, 1862.

§. 293 **Die Schraubenturbine.** Die Schraubenturbine (franz. turbine-hélice; engl. screw-turbine) ist im Wesentlichen von der Henschel'schen und Fontaine'schen Turbine nicht verschieden. Auch bei ihr fließt das Wasser in den Radcanälen von oben nach unten; aber es werden hier diese Canäle nur durch zwei bis vier sehr lange Schaufeln gebildet, welche nach rings um die Welle herumlaufenden Schraubenflächen gekrümmt sind. Den verticalen Durchschnitt einer solchen Schraubenturbine führt Fig. 525 vor Augen. Diese Turbine ist von Herrn Plataret erbaut und arbeitet in

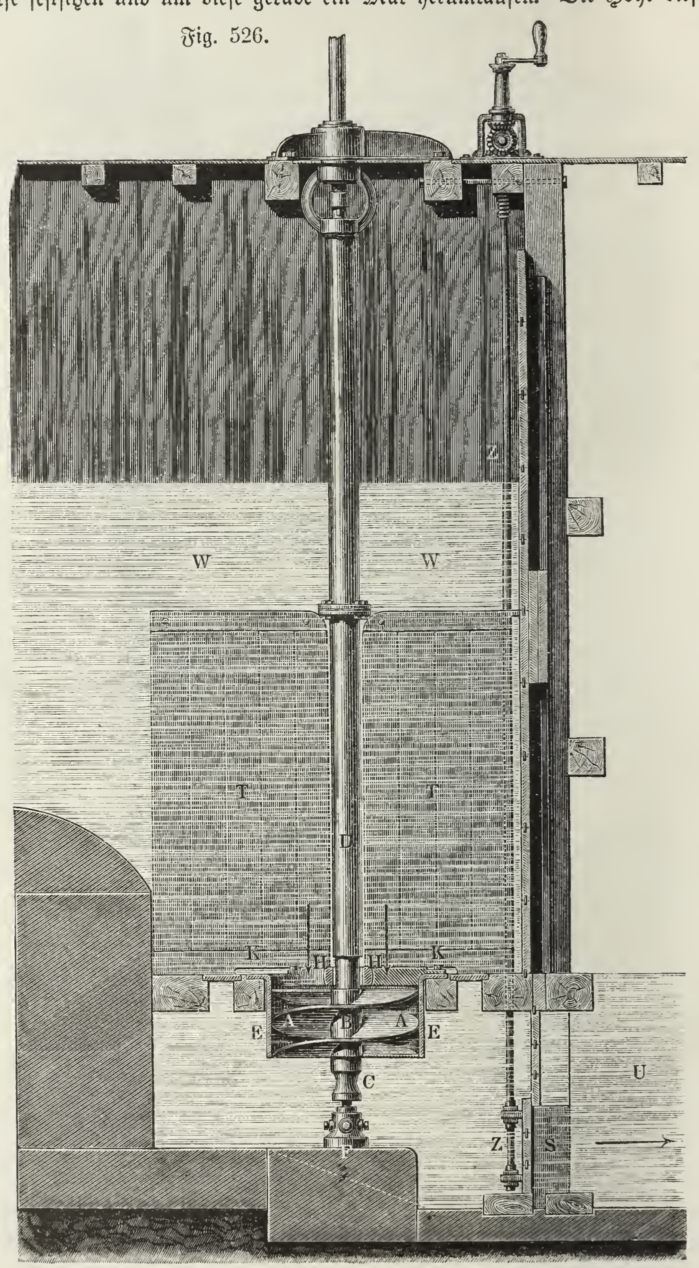
einer Spinnerei zu Saint-Maur bei Paris. Das Rad *A A* dieser Maschine ist aus Gußeisen und besteht im Wesentlichen aus zwei schraubenförmigen

Fig. 525.



Schaufeln, welche auf einer über die Turbinenwelle CD wegzuschiebenden Hülse festsitzen und um diese gerade ein Mal herumlaufen. Die Höhe dieses

Fig. 526.



Rades ist 0,52 Meter, der äußere Durchmesser desselben 1,04 Meter, und der innere oder der der Hülse, = 0,25 Meter, folglich die Ganghöhe einer Schraube = 0,52 Meter, und das äußere Ansteigen derselben:

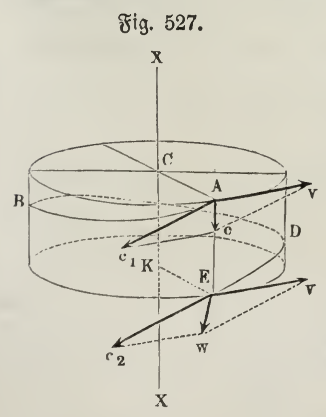
$$tg.\,\alpha = \frac{0,52}{\pi\,.\,1,04} = \frac{0,52}{3,27} = 0,1590, \text{ daher } \alpha = 9^0\,2',$$

dagegen das innere Ansteigen derselben:

$$tg.\,\alpha_1 = \frac{0,52}{\pi\,.\,0,25} = \frac{2,08}{\pi} = 0,6622, \text{ daher } \alpha = 33^0\,31'.$$

Der Inhalt des Querschnittes der beiden Radcanäle berechnet sich, nach Abzug der Eisenstärke, im Ganzen auf 0,14 Quadratmeter. Dieses Rad bewegt sich in einem gut ausgebohrten gußeisernen Mantel EE mit 1 Millimeter Spielraum. Die Turbinenwelle CD ist, wie die der Fontaine'schen Turbine, Fig. 512, aufgehangen und dreht sich um eine cylindrische Säule, welche auf dem Ständer F ruht. Ferner ist HH ein Halslager für diese Welle, welches von einem dreiarmigen Kreuze KK getragen wird. Um das Wirbeln des Aufschlagwassers WW zu verhindern, sind die verticalen Holzthüren T, T eingehangen, welche den ganzen Radstubenraum über dem Rade in zwei Theile theilen. Zum Reguliren des Aufschlages dient eine unter dem Unterwasser U stehende Schütze S, welche sich mittels einer Zugstange ZZ bewegen läßt. Die durch das Bremsdynamometer ermittelte Leistung dieser Maschine ist 20 bis 28 Pferdekräfte bei einem Gefälle von circa 3 Meter und einem Aufschlagquantum von circa 0,850 Cubikmeter pr. Secunde. Die auf eine ungenaue Wassermessung basirte Berechnung der Leistung der Maschine hat auf den Wirkungsgrad $\eta = 0,70$ geführt. Folgende kurze Darstellung wird genügen, um sich von der nicht ganz unvortheilhaften Wirkung des Wassers in den Schraubenturbinen zu überzeugen.

Fig. 527.



Da diese Turbine keinen Leitschaufelapparat hat, so läßt sich annehmen, daß das Wasser, mit einer verticalen Geschwindigkeit c, Fig. 527, in das Rad BD trete, und es ist daher zu fordern, daß die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades,

$$v = c\,cotang.\,\alpha \text{ sei.}$$

Ist $w = \dfrac{\pi u}{30}$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades, so hat man die Umdrehungsgeschwindigkeit im Abstande $\overline{CA} = \overline{KE} = z$ von der Radaxe:

$$v = \omega z,$$

und bezeichnet a die Gang- oder Radhöhe $\overline{AE}$,

so ist für den Neigungswinkel α der schraubenförmigen Schaufel $ABDE$ in eben diesem Abstande z:

$$tang.\,\alpha = \frac{a}{2\,\pi z};$$

es läßt sich setzen:

$$\omega z = c\,cotang.\,\alpha = \frac{2\,\pi z c}{a},$$

und es folgt die Winkelgeschwindigkeit ω, wobei das Wasser allenthalben ohne Stoß in das Rad tritt:

$$\omega = \frac{2\,\pi c}{a}.$$

Für die relative Geschwindigkeit c_1, mit welcher das Wasser seine Bewegung im Rade beginnt, ist

$$c_1^2 = c^2 + v^2,$$

und dagegen für die relative Geschwindigkeit c_2, mit welcher es aus dem Rade tritt:

$$c_2^2 = c_1^2 + 2\,g\,(x - y),$$

wobei x die hydraulische Druckhöhe beim Eintritt sowie y die beim Austritt aus dem Rade bezeichnet, und die hydraulischen Nebenhindernisse unbeachtet gelassen werden.

Da nun noch $c^2 = 2\,g\,(h_1 - x)$ ist, wenn h_1 die Höhe des Wasserstandes über dem Rade bezeichnet, so folgt:

$$c_2^2 = c^2 + v^2 + 2\,g\,(x - y) = v^2 + 2\,g\,(h_1 - y),$$

oder, da endlich $h_1 - y$ das ganze Radgefälle $= h$, so ist:

$$c_2^2 = v^2 + 2\,g h.$$

Um die größte Nutzleistung zu erhalten, müßte $c_2 = v$ sein, welches dieser Formel zufolge nur für $v = \infty$ möglich ist. Es verhält sich hiernach die Schraubenturbine wie jedes andere Reactionsrad ohne Leitschaufeln (s. §. 243 und §. 255).

Setzen wir jedoch v nur sehr groß voraus, so erhalten wir:

$$c_2 = v = \omega z,$$

und es ist folglich die relative Austrittsgeschwindigkeit, wie die Umdrehungsgeschwindigkeit, dem Abstande z von der Radaxe proportional.

Die absolute Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus dem Rade ist

$$w = 2\,v\,sin.\frac{\alpha}{2} = 2\,\omega z\,sin.\frac{\alpha}{2}$$

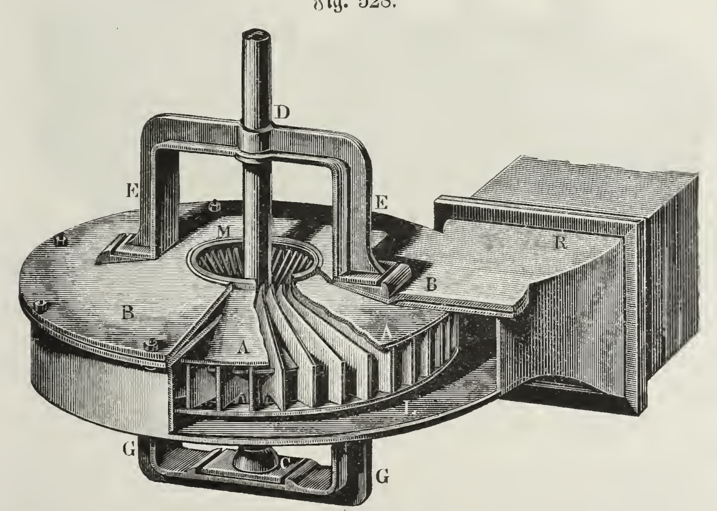
annähernd

$$= 2\,\omega z\,tang.\frac{\alpha}{2} = \omega z\,tang.\,\alpha = \omega z \cdot \frac{a}{2\,\pi z} = \frac{\omega a}{2\,\pi},$$

und folglich auf der ganzen Grundfläche des Rades eine und dieselbe.

Thomson's Turbinen. Bei den Reactionsturbinen von Fourneyron, Fontaine, Francis u. s. w. fließt das Aufschlagwasser so langsam zu, daß man die lebendige Kraft desselben ganz außer Acht lassen kann; man hat aber auch Turbinen, wo das Wasser mit einer Geschwindigkeit zugeführt wird, welche der Umdrehungsgeschwindigkeit derselben ganz oder nahe gleichkommt. Ein solches Rad ist z. B. das Case Water-Wheel von Thomson, welches zum Theil aufgedeckt, in Fig. 528 monodimetrisch abgebildet ist. Das Rad AA besteht aus radialen Schaufeln, welche zwischen conischen §. 294

Fig. 528.

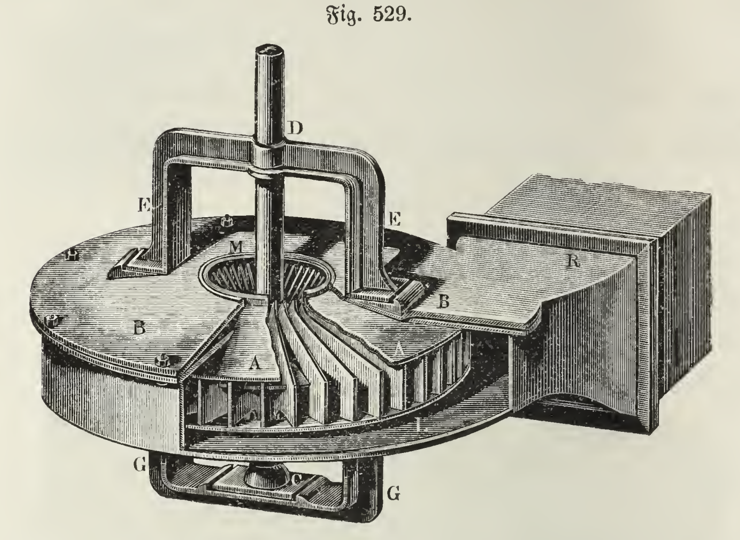


Kränzen sitzen und von außen nach innen an Höhe zunehmen. Die Welle CD ruht in einem Gestelle $EEGG$, welches mit einem Gehäuse BB fest verbunden ist, wodurch das ganze Rad umgeben wird. Dieses Gehäuse schließt sich ziemlich wasserdicht an die inneren Radmündungen M, M an, während es den äußeren Radumfang excentrisch umgiebt, und an einer Seite mit der Röhre R verbunden ist, wodurch das Aufschlagwasser zugeführt wird. In Folge der excentrischen Umschließung des Rades durch das Gehäuse entsteht ein ringförmiger Canal L, welcher an der Einmündung der Einfallröhre die größte Weite hat und sich mit allmälig abnehmender Weite rings um das Rad herumzieht. In diesem Canale bewegt sich das Wasser mit einer Geschwindigkeit v_1, welche die Umfangsgeschwindigkeit des Rades wenig übertrifft. Bei dem Aufschlagquantum Q ist der anfängliche oder größte Querschnitt dieses Canales:

$$F = \frac{Q}{v_1}.$$

Ist x die Druckhöhe des mit der Geschwindigkeit v_1 zugeführten Wassers, h_1 die hydrostatische Druckhöhe an der Zutrittsstelle und ζ der Widerstands-

Fig. 529.



coefficient für die Bewegung des Wassers in dem ringförmigen Canale, so läßt sich

$$2\,g\,(h_1 - x) = (1 + \zeta)\,v_1^2$$

setzen.

Bezeichnet nun noch v die innere Radgeschwindigkeit sowie c_2 die relative Geschwindigkeit des Wassers beim Austritte aus den Radcanälen, und läßt man die übrigen Bezeichnungen wie bei den Tangential- und Reactionsrädern mit äußerer Beaufschlagung, so hat man:

$$(1 + \zeta_1)\,c_2^2 = 2\,g\,(x - h_2) + v^2 - v_1^2$$
$$= 2\,g\,(x - h_2) - \left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] v_1^2$$
$$= 2\,gh - \left[2 + \zeta - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] v_1^2,$$

und daher die äußere Radgeschwindigkeit:

$$1)\; v_1 = \sqrt{\frac{2\,gh - (1 + \zeta_1)\,c_2^2}{2 + \zeta - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Die relative Austrittsgeschwindigkeit c_2 ist beliebig, jedoch möglichst klein (höchstens 4 Fuß) anzunehmen; ebenso soll das Halbmesserverhältniß $\frac{r}{r_1}$ klein

(z. B. $^1/_5$ bis $^1/_4$) sein. Hieraus folgt nach der letzten Formel (1) zunächst die äußere Radgeschwindigkeit v_1, und dann die innere Radgeschwindigkeit:

$$2)\ v = \left(\frac{r}{r_1}\right) v_1,$$

ferner folgt der Querschnitt der Zutrittsmündung:

$$3)\ F = \frac{Q}{v_1},$$

sowie der der Austrittsmündungen:

$$4)\ F_2 = \frac{Q}{c_2}.$$

Setzt man ferner $F_2 = 2\pi r e = 2\pi r^2$, und hiernach die innere Radweite $e = r$, so erhält man den inneren Radhalbmesser:

$$5)\ r = \sqrt{\frac{F_2}{2\pi}},$$

woraus sich dann auch leicht der äußere Halbmesser r_1 bestimmen läßt. Ist noch e_1 die äußere Radweite, so hat man die relative Eintrittsgeschwindigkeit:

$$6)\ c_1 = \frac{r e}{r_1 e_1} c_2.$$

Die Leistung des Rades fällt

$$L = \left[h - \left(\zeta \frac{v_1^2}{2g} + \frac{c_1^2}{2g} + (1 + \zeta_1) \frac{c_2^2}{2g} + \frac{v^2}{2g}\right)\right] Q\gamma$$

$$= \left(h - \left[\zeta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2g} + \left[1 + \zeta_1 + \left(\frac{r e}{r_1 e_1}\right)^2\right] \frac{c_2^2}{2g}\right) Q\gamma$$

aus.

Beispiel. Es ist für das Gefälle $h = 10$ Fuß und für das Aufschlagquantum $Q = 12$ Cubikfuß die Anordnung und Berechnung einer Thomson'schen Turbine zu vollziehen. Setzen wir die relative Austrittsgeschwindigkeit $c_2 = 4$ Fuß, so erhalten wir den Querschnitt der Austrittsmündungen:

$$F_2 = \frac{Q}{c_2} = \frac{12}{4} = 3 \text{ Quadratfuß},$$

und hiernach den inneren Radhalbmesser:

$$r = \sqrt{\frac{F_2}{2\pi}} = \sqrt{\frac{3 \, . \, 7}{2 \, . \, 22}} = \sqrt{\frac{21}{44}} = \sqrt{0{,}4773} = 0{,}691 \text{ Fuß},$$

wofür

$$r = 0{,}70 \text{ Fuß}$$

gesetzt werden möge.

Nehmen wir $\frac{r_1}{r} = 4$ an, so erhalten wir den äußeren Radhalbmesser:

$$r_1 = 4 \, . \, 0{,}7 = 2{,}8 \text{ Fuß}.$$

Die innere Radweite ist $e = r = 0{,}7$ Fuß, wogegen die äußere Radweite $e_1 = 0{,}6$ Fuß gesetzt werden möge, so daß die Eintrittsgeschwindigkeit

$$c_1 = \frac{r\,e}{r_1\,e_1}\,c_2 = \tfrac{1}{4}\,.\,\tfrac{7}{6}\,.\,4 = \tfrac{7}{6} = 1{,}167 \text{ Fuß}$$

ausfällt.

Die äußere Umfangsgeschwindigkeit des Rades ist, wenn man $\zeta = 0{,}5$ und $\zeta_1 = 0{,}2$ annimmt,

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,g\,h - (1 + \zeta_1)\,c_2^2}{2 + \zeta - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}} = \sqrt{\frac{625 - 1{,}2\,.\,16}{2{,}5 - \frac{1}{16}}} = \sqrt{\frac{605{,}8}{2{,}4375}}$$
$$= 15{,}765 \text{ Fuß},$$

dagegen die innere:

$$v = \frac{r}{r_1}\,v_1 = \frac{15{,}765}{4} = 3{,}941 \text{ Fuß},$$

und folglich die Umdrehungszahl des Rades pr. Minute:

$$u = \frac{30\,v}{\pi\,r} = \frac{30\,.\,3{,}941\,.\,7}{22\,.\,0{,}7} = \frac{1182{,}3}{22} = 53{,}74.$$

Hieraus bestimmt sich der größte oder anfängliche Querschnitt des ringförmigen Zuführungscanales:

$$F = \frac{Q}{v_1} = \frac{12}{15{,}765} = 0{,}761 \text{ Quadratfuß},$$

und folglich die Weite desselben:

$$d = \frac{F}{e_1} = \frac{0{,}761}{0{,}6} = 1{,}27 \text{ Fuß}.$$

Nun ist $\left[\zeta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] v_1^2 = 0{,}5625\,.\,15{,}765^2 = 139{,}85$, und

$$\left[1 + \zeta_1 + \left(\frac{r\,e}{r_1\,e_1}\right)^2\right] c_2^2 = 1{,}285\,.\,16 = 20{,}56,$$

folglich das nutzbar gemachte Radgefälle:

$$h_1 = h - \left[\zeta + \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] \frac{v_1^2}{2\,g} - \left[1 + \zeta_1 + \left(\frac{r\,e}{r_1\,e_1}\right)^2\right] \frac{c_2^2}{2\,g}$$
$$= 10 - 0{,}016\,(139{,}85 + 20{,}56) = 10 - 2{,}567 = 7{,}433 \text{ Fuß}.$$

Der Wirkungsgrad des Rades ist:

$$\eta = \frac{7{,}433}{10} = 0{,}7433,$$

und die Leistung desselben:

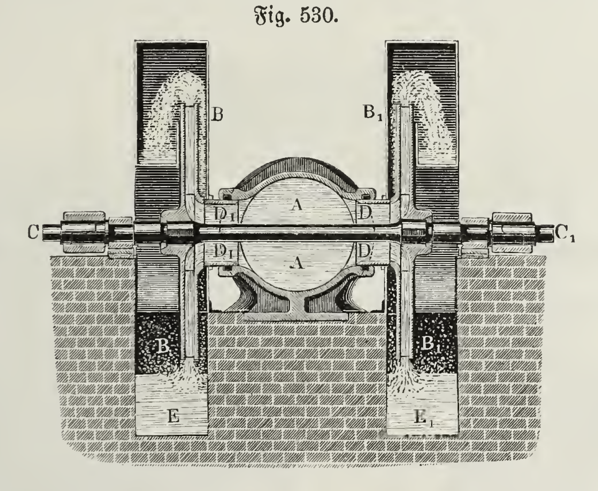
$$L = Q\,h_1\,\gamma = 7{,}433\,.\,12\,.\,61{,}75 = 5508 \text{ Fußpfund} = 11\tfrac{1}{2} \text{ Pferdekräfte}.$$

§. 295 **Turbinen mit horizontaler Axe.** In der neuesten Zeit hat man auch angefangen, verticale Wasserräder nach den Principien der Reactionsturbinen zu erbauen, jedoch ist über deren Nützlichkeit noch wenig Bestimmtes bekannt. Namentlich hat man die Jonval'schen und die Whitelaw'schen Räder auf horizontale Wellen gesetzt (vgl. §. 238). Daß diese Aufstellung nur bei hohem Gefälle von Vortheil sein kann, ist leicht zu er-

messen, da nur hier ein unvermeidlicher Gefällverlust beim Austritte des Wassers aus dem Rade zu übersehen ist. Jedenfalls hat ein solches Rad vor den Turbinen den Vorzug, daß es leichter, sicherer und gegen den Zutritt des Wassers geschützter gelagert werden kann, als eine gewöhnliche Turbine. Nach Jonval und Redtenbacher kann man mit Vortheil zwei Räder einander gegenüber auf eine und dieselbe horizontale Welle setzen, weil dadurch jeder Wasserdruck in der Richtung der Radaxe aufgehoben wird, ohne auf die Zapfen zu wirken.

Die Einrichtung einer verticalen Doppelturbine mit gesonderten Schwungröhren nach Redtenbacher führt Fig. 530 vor Augen. AA ist die zur

Fig. 530.



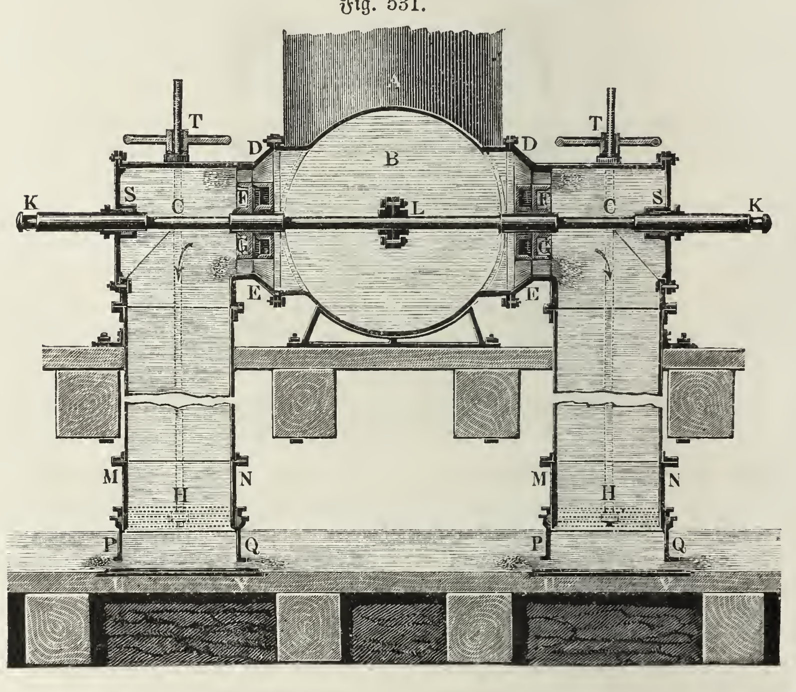
Seite einmündende Einfallröhre, BB das eine und $B_1 B_1$ das andere Rad, CC_1 die horizontale Radwelle, ferner DD und $D_1 D_1$ sind die Liderungsringe (s. Bd. II, §. 246), endlich sind E und E_1 die Abzugsgräben. Man kann sich leicht denken, wie auf gleiche Weise eine Combes'sche oder Fourneyron'sche Turbine aufzustellen ist. Dieselbe bekommt noch einen Leitschaufelapparat vor jedem Rade und fällt natürlich unter denselben Verhältnissen viel kleiner aus. Zum Reguliren des Radganges ist am besten ein in die Einfallröhre einzusetzendes Drosselventil geeignet.

Nach demselben Principe kann man auch eine Verbindung von zwei Jonval'schen Turbinen mit gemeinschaftlicher horizontaler Welle herstellen. Beide einander gegenüberstehende Räder werden aus einem gemeinschaftlichen Reservoir gespeist, führen aber das Wasser in getrennten Abfallröhren nach unten ab. Ein ähnlich construirtes Wasserrad betreibt bei 31 Fuß (engl.) Gefälle mit 6396 Cubikfuß Aufschlag pr. Minute eine Baumwollenspinnerei zu West-Springfield im Staate Massachusetts; es hat 40 Zoll Durchmesser

und macht im normalen Gange 220 Umdrehungen pr. Minute, wobei es einen Wirkungsgrad von 0,65 giebt. Nach dem „American Franklin-Journal“ sollen in dem genannten Staate mehrere solcher Turbinen von 15 bis 140 Pferdekräften bei Gefällen von 9 bis 26 Fuß zum Betriebe an Spinnereien, Papiermühlen, Walzwerken u. s. w. mit Vortheil arbeiten (s. auch das polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1850, Lieferung 9, oder the Civil Eng. and Arch. Journ. 1850, Febr., Seite 68).

Aehnliche Doppelturbinen sind vom Herrn Roschkoff, Oberstlieutenant im Kaiserl. Russ. Bergingenieurcorps zu Katharinenburg, construirt worden. Den verticalen Längendurchschnitt einer solchen Turbine zeigt Fig. 531. Die Einfallröhre *A* mündet in das liegende Reservoir *B* ein, an dieses

Fig. 531.



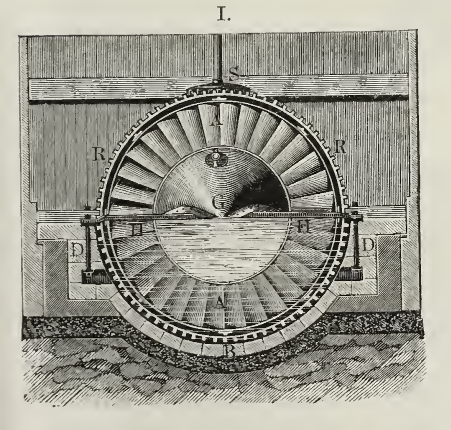
schließen sich zu beiden Seiten die Turbinengehäuse *DES*, *DES* an, und letztere endigen sich in den verticalen Saugröhren *HUV*, *HUV*. Das den Turbinengehäusen durch die Einfallröhre zugeleitete Aufschlagwasser wird mittels der Leitschaufelapparate *DE*, *DE* auf die Räder *FG*, *FG* geführt und fließt, nach vollbrachter Wirkung, durch die Saugröhren ab in das Unterwasser. Zum Reguliren dieses Abflusses dient der mittels eines Schraubenrades *T* und durch Zugstangen zu hebende oder zu senkende Schützenring

PQ (vergl. Fig. 518). Die Turbinenwelle KLK, welche die Räder FG, FG trägt, tritt mittels der Stopfbüchsen S, S aus den Turbinengehäusen heraus, nimmt außen die Vorgelegsräder auf und ruht in deren Nähe auf festen Lagern. Uebrigens möchte es zweckmäßig sein, diese Welle auch auf ein Lager innerhalb des Reservoirs zu legen. Diese Turbine hat vor den anderen Turbinen mit horizontaler Axe den großen Vorzug, daß sie das Gefälle an allen Punkten der Radumfänge gleichmäßig benutzt (s. den „Civilingenieur", Bd. III, 1857).

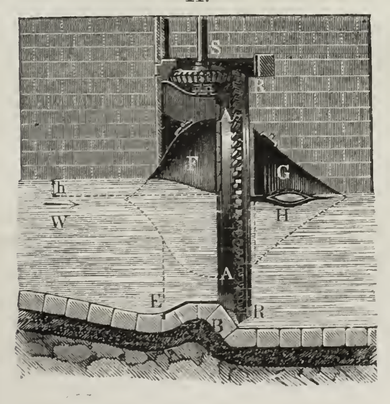
Das Schraubenrad. Von der Schraubenturbine ist das Schraubenrad (franz. roue-hélice; engl. screw-water wheel) wesentlich verschieden. Dieses Rad ist im Wesentlichen eine Burdin'sche Turbine mit horizontaler Axe, ohne Leitschaufeln und mit theilweiser Beaufschlagung (s. §. 234). Es unterscheidet sich dasselbe jedoch insofern noch von den Burdin'schen Turbinen, daß ihm Wasser durch den Aufschlagcanal, und zwar in der Richtung seiner Axe, unmittelbar zugeführt wird. Die Einrichtung eines solchen Schraubenrades ist aus Fig. 532, I und II, zu ersehen. Es stellt hier I die hintere Ansicht und II den verticalen Längendurchschnitt der ganzen Maschine vor. §. 296

Fig. 532.

I.



II.

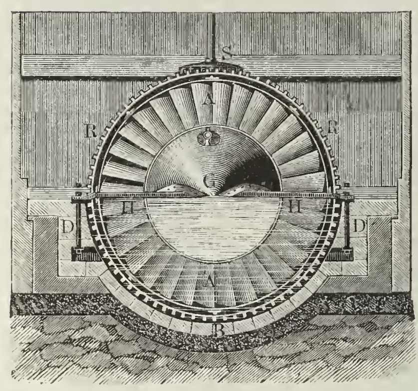


Das eigentliche Rad AA ist, wie das einer gewöhnlichen Fontaine'schen Turbine, mit schraubenförmigen Schaufeln construirt; es hängt dasselbe in einem steinernen Einbau DBD, von welchem es längs der unteren Hälfte seines Umfanges concentrisch umgeben wird. Um das Aufschlagwasser W dem Rade in der erforderlichen Richtung zuzuführen, wird nicht allein das Gerinne vor dem Einbau von einem nach dem Rade zu sich allmälig zusammenziehenden Blechmantel E umgeben, sondern auch noch ein birnförmiger Blechmantel F eingesetzt, welcher mit seiner Basis gegen den inneren ungeschaufelten

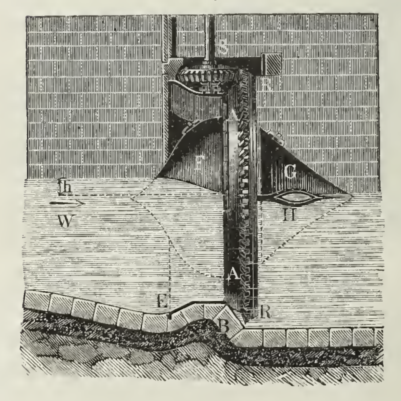
Theil des Rades, und mit seiner Spitze dem Wasserstrome entgegengerichtet ist. Damit ferner das Wasser nach seiner Wirkung im Rade ohne einen Wirbel zu bilden, in das Unterwasser ausfließen könne, ist auch hinter dem Rade ein kegelförmiger Blechmantel G angebracht. Beide Mäntel F und G stehen durch Querarme H, H mit linsenförmigen Querschnitten mit den Seitenmauern D, D des Gerinnes in fester Verbindung, und dienen zugleich der horizontalen Welle des Rades zur Lagerung. Damit der Austrittswinkel δ des Wassers möglichst herabgezogen werden könne, haben die Radcanäle eine von vorn nach hinten allmälig zunehmende Weite, und folglich die beiden Radkränze eine entsprechend conische Gestalt erhalten. Zur Fortpflanzung der Umdrehungskraft dient das conische Zahnrad RR, welches den äußeren Radkranz nahe an der hinteren Seite umgiebt und in das Getriebe S einer stehenden Transmissionswelle eingreift. Wie leicht zu ermessen ist, eignet sich ein solches Schraubenrad besonders zur Zugutemachung einer Wasserkraft mit kleinem Gefälle und großem Aufschlagquantum.

Fig. 533.





II.



Da hier beim Austritt des Wassers aus dem Rade ein Ausfluß unter Wasser statt hat, so ist hierbei die wirksame Druck- oder Geschwindigkeitshöhe für alle durch das Rad strömenden Wassertheile eine und dieselbe, nämlich das Gefälle, oder der Abstand h zwischen dem Ober- und Unterwasserspiegel, und folglich auch die Wirkung des Wassers an allen Stellen des Rades eine und dieselbe (vergl. §. 152).

Aus diesem Grunde findet daher auch die oben (§. 278) entwickelte Theorie der Fontaine'schen Turbinen auf diese Schraubenräder ihre unmittelbare Anwendung, zumal wenn, wie in der Regel, die Geschwindigkeit des zu- und abfließenden Wassers nur eine sehr kleine (höchstens 3 Fuß) ist.

Da die Tiefe des Wassers auf die Wirkungsweise des Wassers im Rade keinen Einfluß hat, so kann dieses Rad bei einem höheren Wasserstande eben so gut arbeiten als bei einem niedrigeren, und es läßt sich folglich dasselbe statt der gewöhnlichen unterschlägigen Räder dann sehr gut verwenden, wenn der Wasserstand im Gerinne ein sehr variabler ist.

Ein solches Wasserrad hat Herr Girard zum Betriebe einer Chocoladenfabrik zu Noisiel (sur Marne) construirt, und zwar für ein mittleres Gefälle von 0,5 Meter und einen Aufschlag von circa 3 Cubikmeter pr. Secunde (siehe die Schrift „Nouveau Récepteur hydraulique, dit Roue-Hélice à axe horizontal, ou Turbine sans directrices, par Girard“, Paris 1855).

Schlußanmerkung. Die Turbinenliteratur hat erst in der neueren Zeit eine größere Ausdehnung erhalten. Da wir im Laufe des Vortrages schon eine große Anzahl von Abhandlungen angeführt haben, so wollen wir im Folgenden nur die vorzüglichsten, namentlich aber die Originalschriften über Reactionsturbinen aufführen. Die erste Abhandlung über die Fourneyron'sche Turbine findet sich im Bulletin de la Société d'encouragement, Jahrgang 1834, deutsch in Dingler's polytechnischem Journal, Bd. LIII. Nach dieser Zeit hat Morin Versuche angestellt, und deren Ergebnisse in der Schrift: Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical, appelées Turbines, Metz et Paris 1838, bekannt gemacht, und es erschien auch die erste gründliche Theorie dieser Räder von Poncelet in den Comptes rendus des séances de l'Acad. de Paris, unter dem Titel: Théorie des effets mécaniques de la Turbine-Fourneyron, Paris 1838. In der zweiten Ausgabe von d'Aubuisson's Hydraulik sind diese Räder kurz und ohne besondere Ansichten abgehandelt. Das Werk von Combes: Recherches théoretiques et expérimentales sur les roues à réaction ou à tuyaux, Paris 1843, ist zwar keineswegs umfassend, jedoch insofern sehr beachtungswerth, als man hier zum ersten Male die hydraulischen Nebenhindernisse bei der Entwickelung berücksichtigt findet, was Poncelet und auch Redtenbacher nicht gethan haben. Das Werk von dem zuletzt genannten Schriftsteller: Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren, Mannheim 1844, ist vorzüglich nach Poncelet's Theorie bearbeitet, übrigens aber die vollständigste und vorzüglichste Schrift über diesen Gegenstand. Ueber die neueren Turbinen giebt es noch folgende beachtungswerthe Abhandlungen: Rapport sur un Mémoire de M. M. A. Koechlin, concernant une nouvelle turbine (Jonval) construite dans leurs ateliers, par Poncelet, Piobert et Morin, ferner Note sur la théorie de la turbine de Koechlin, par Morin, und Note sur l'application de la théorie du mouvement des fluides aux expériences de M. Marozeau, par Morin, im XXII. Bande (1846) der Comptes rendus etc. etc. Einen Auszug hiervon findet man im polytechnischen Centralblatte, Bd. VIII, 1846. Ferner: Expériences et note sur la turbine de M. Fontaine-Baron, par Morin im XXIII. Bande (1846)

der Comptes rendus etc. etc.; deutsch im Auszuge ebenfalls im polytechnischen Centralblatte, Bd. VIII. In Betreff der Jonval'schen und Fontaine'schen Turbinen ist auch noch nachzusehen im Bulletin de la société d'encouragement, Jahrgang 43 und 44, Paris 1844 und 1855. Gute Zeichnungen nebst Beschreibung der Turbinen von Cadiat, Callon, Fourneyron und Gentilhomme findet man auch in Armengaud's Publication industrielle. Wegen Porro's Turbine ist nachzusehen im polytechnischen Centralblatte, Bd. VII, 1846. Die Einrichtung einer Nagel'schen Turbine lernt man aus Dingler's Journal, Bd. XCV, und die einer Passot'schen Turbine aus demselben Journale, Bd. XCIV, kennen. Bourgeois' Schraubenrad (franz. turbine-hélice) ist eine Turbine mit schraubenförmigen Canälen (s. polytechn. Centralblatt Bd. I, 1847). Ebenso Plataret's Schraubenturbine zu St. Maur bei Paris ist im polytechn. Centralblatte, 1849, beschrieben. Eigenthümlich sind die Turbinen von Thomson, nämlich das Patent Case Water Wheel und das Patnet Suction Wheel. Beide Räder werden beschrieben im Mechanics Magazine, Januar 1851. Von den Turbinen von Girard u. s. w. handelt Le Génie industrielle, par Armengaud Frères, Tome XII und Tome XIII, 1856 und 1857. Siehe auch das Notizblatt des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover Bd. III, 1853. Die Theorie der Fourneyron'schen Turbinen mit äußerer Beaufschlagung behandelt Herr Prof. Zeuner in Bd. II des Civilingenieurs. Graphische Tabellen über die wichtigsten Constructionselemente der Turbinen werden von Bornemann in Bd. IV. des Civilingenieurs mitgetheilt. Die Turbinen von Francis u. s. w. behandelt die Schrift: Lowell Hydraulic Experiments etc. by James Francis, Boston 1855. Die Schrift über „die Turbinen oder horizontalen Wasserräder von Harzer, Weimar 1851" ist in der Hauptsache eine Copie von der ersten Auflage des vorliegenden Werkes. Eine neuere Schrift ist Peter Rittinger's Theorie und Bau der Rohrturbinen, Prag 1861 und 1865. Eigenthümlich behandelt sind die Turbinen in Rankine's Manual of the Steam-Engine and other Prime Movers, London and Glasgow 1859. Ueber die Turbine der Londoner Industrieausstellung 1862, ins Besondere über Thomson, vortex water-wheel ist nachzulesen eine Abhandlung von Bernhard Lehmann in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. VII, 1863. Bd. II, (1858); diese Zeitschrift enthält auch eine neue Theorie der horizontalen Wasserräder von R. R. Werner. Eine allgemeine Theorie der Schaufelconstruction für Turbinen theilt F. K. H. Wiebe in Civilingenieur Bd. 5, mit.

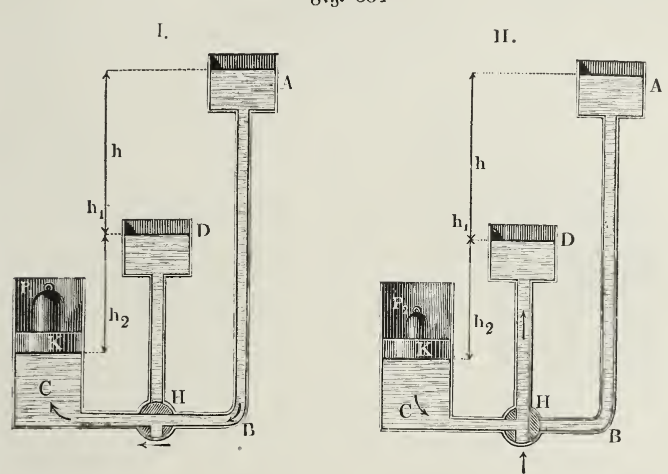
Sechstes Capitel.

Von den Wassersäulenmaschinen.

§. 297 **Wassersäulenmaschinen.** Wassersäulenmaschinen (s. Bd. II, §. 170) werden durch den Druck des in ganz oder nahe aufrecht stehenden Röhren befindlichen Wassers in Umtrieb gesetzt. Die Bewegung derselben ist aber keine

stetig kreisförmige, wie bei den Wasserrädern, sondern sie ist eine **geradlinig wiederkehrende**. Die Haupttheile einer Wassersäulenmaschine sind, wie aus Fig. 534, I. und II., zu ersehen ist, folgende. *A* ist der Sammelkasten für das Wasser, der sogenannte **Einfallkasten**, *AB* die **Einfallröhre**

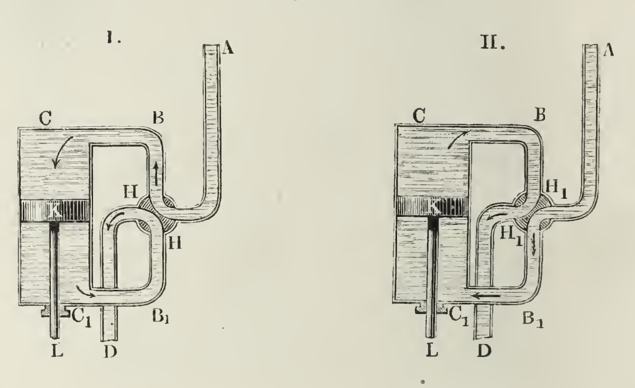
Fig. 534



(franz. tuyau de chute; engl. pressure pipe), *C* ist der **Stiefel** oder **Treibcylinder** (franz. cylindre principal; engl. working-cylinder), in welchem das Wasser zur Wirkung gelangt, indem es den belasteten **Treibkolben** *K* (franz. piston moteur; engl. loaded piston) emportreibt, und *HD* ist die **Austrageröhre** (franz. tuyau de décharge; engl. discharge-pipe). In dem **Communicationsrohre** *BC*, welches die Einfallröhre mit dem Treibcylinder verbindet, befindet sich die sogenannte **Steuerung** (franz. régulateur; engl. regulator), welche hier in einem T-förmig durchbohrten Hahne (franz. robinet; engl. cock) besteht, und dazu dient, die Verbindung zwischen der Einfallröhre und dem Treibcylinder abwechselnd herzustellen und aufzuheben. Im ersten Falle treibt das Wasser den Kolben mit seiner Last P_1 empor, und im zweiten Falle fließt das von der Einfallröhre abgeschlossene und unter dem Treibkolben befindliche Wasser durch den Hahn zurück und durch das Ausgußrohr *HD* aus, während der nun unbelastete Kolben wieder niedergeht. Man hat **einfachwirkende** und **doppeltwirkende**, sowie auch **einstiefelige** und **zweistiefelige Wassersäulenmaschinen**. Bei der einfachwirkenden Wassersäulenmaschine (franz. machine à simple effet; engl. single acting engine), welche Fig. 534 vor Augen führt, wird der Kolben vom Wasser nur nach der einen Richtung fortgetrieben, den entgegengesetzten Weg hingegen durch-

läuft er durch sein eigenes oder durch ein mit ihm verbundenes Gewicht P_2. Bei der **doppeltwirkenden Wassersäulenmaschine** (franz. machine à double effet; engl. double acting engine) hingegen erfolgt sowohl der Auf- als auch der Niedergang des Kolbens durch die Kraft des Wassers. Die Einrichtung einer solchen Maschine giebt Fig. 535, I. und II. an. Man ersieht aus dieser Figur, wie ein Mal (I.) das Kraftwasser den

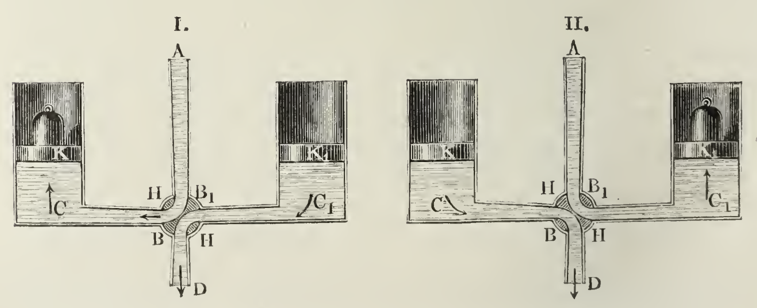
Fig. 535.



Weg ABC einschlägt, den Kolben K niedertreibt und dabei das abgeschlossene Wasser auf dem Wege $C_1 B_1 D$ abfließt, und wie das zweite Mal (II.) das Kraftwasser auf dem Wege $A B_1 C_1$ zum Cylinder gelangt, den Kolben K auf-, und das über ihm befindliche Wasser auf dem Wege CBD forttreibt.

Die bisher behandelten Wassersäulenmaschinen sind **eincylindrige** oder haben nur einen Treibcylinder; man hat aber auch **zweicylindrige** oder Maschinen mit zwei Treibcylindern mit einer Einfallröhre und einer Steuerung, wie in Fig. 536 vorgestellt wird. Während hier (in I.) das Druckwasser ABC den Kolben K aufwärts schiebt, geht der Kolben K_1 nieder und

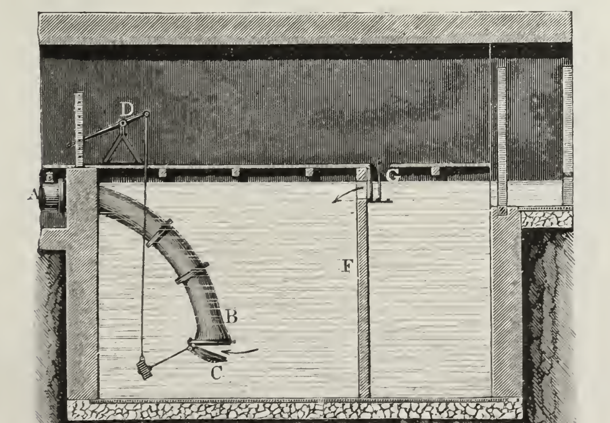
Fig. 536.



bringt das todte Wasser unter ihm auf dem Wege $C_1 B_1 D$ zum Abfluß, und umgekehrt, während (in II.) der Kolben K_1 vom Druckwasser $A B_1 C_1$ zum Aufsteigen genöthigt wird, geht der Kolben K nieder und drückt das abgesperrte todte Wasser durch das Ausgußrohr D fort.

Einfallröhren. Es sind nun die Hauptttheile einer Wassersäulenmaschine §. 298 näher zu beschreiben. Das Betriebswasser für eine Wassersäulenmaschine wird zunächst in dem sogenannten Einfallkasten oder Speisereservoir gesammelt. Es ist sehr zweckmäßig, dieses Bassin möglichst groß herzustellen, damit sich darin das Wasser mehr abklären und beruhigen kann und keine große Veränderungen in dem Niveau des Wasserspiegels eintreten können. Uebrigens ist es noch nöthig, Rechen oder Gitter zum Abhalten fremdartiger Körper, wie Holz, Blätter u. s. w., in dieses Reservoir einzusetzen, und nach Befinden, wenn das Wasser unrein ist, Scheidewände in demselben so anzubringen, daß das Wasser eine schlangenförmige Bewegung auf- und abwärts anzunehmen genöthigt und ihm mehrfache Gelegenheit zum Absetzen seiner Unreinigkeiten gegeben wird. Die Einfallröhre mündet mindestens $1\frac{1}{2}$ Fuß über dem Boden des Bassins und 3 bis 5 Fuß unter dem Wasserspiegel ein, um sowohl das Eindringen von schweren Körpern, als auch um die Entstehung eines Lufttrichters zu verhindern. Auch führt man wohl zu diesem Zwecke die Röhre gekrümmt in das Bassin ein, so daß die Mündung nach unten gerichtet ist. Uebrigens bringt man noch eine Klappe oder einen conischen Zapfen an, wodurch sich die Einmündung verschließen und der Eintritt des Wassers in die Einfallröhre verhindern läßt. In Fig. 537 ist ein solcher Speiseapparat abgebildet. AB ist das gebogene Kopfstück der Einfallröhre, C die Klappe, D ein Hebel zum Stellen der

Fig. 537.



Klappe, F eine Scheidewand und G sind zwei Gitter zum Abhalten schwimmender Körper.

Was nun die Einfallröhren anlangt, so bestehen dieselben in der Regel aus Gußeisen, erhalten eine Länge von 5 bis 8 Fuß und eine Weite von $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der Weite des Treibcylinders. Die Stärke der Röhrenwände beträgt $\frac{3}{4}$ bis $\frac{5}{4}$ Zoll; die kleinere Stärke giebt man den oberen, die größere den unteren Einfallröhren. Am sichersten ist aber die Stärke e durch die Formel

$$e = 0{,}0025\, p d_1 + 0{,}75 \text{ Zoll},$$

wo d_1 die innere Weite in Zollen und p den Wasserdruck in Atmosphären (à 33 Fuß) bezeichnet, zu bestimmen. Die Formel in Bd. I, §. 363, giebt für bloße Röhrenleitungen kleinere Stärken, diese sind aber hier deshalb nicht anwendbar, weil hier das Wasser mit veränderlicher Kraft und beim schnellen Absperren sogar stoßend wirkt. Uebrigens sind die Einfallröhren einzeln vor dem Einsetzen einer Prüfung zu unterziehen. Man verschließt die Röhre zu diesem Zwecke an beiden Enden, füllt dieselbe mit Wasser und setzt dieses durch eine engere Röhre mit einer hydraulischen Presse in Verbindung. Durch wiederholtes Kolbenspiel dieser Presse wird nun ein Druck erzeugt, der den Wasserdruck, welchen die Röhren künftig auszuhalten haben, mehrfach (4- bis 5mal) übertrifft. Wenn die Röhren bei dieser Prüfung kein Wasser durchlassen, so sind sie in Gebrauch zu nehmen. Viele von diesen Röhren halten diese erste Probe nicht aus, sind aber dessenungeachtet vielleicht noch brauchbar, weil sich später ihre Porosität durch Bildung von Rost verliert, was durch eine zweite Probe, mehrere Wochen später, zu ermitteln ist. Bei der unten näher beschriebenen Wassersäulenmaschine zu Huelgoat hat man gesottenes Leinöl zur hydrostatischen Probe verwendet und dadurch den Röhren einen inneren Firnißüberzug gegeben, welcher sie überdies noch vor den chemischen Wirkungen des Wassers schützt.

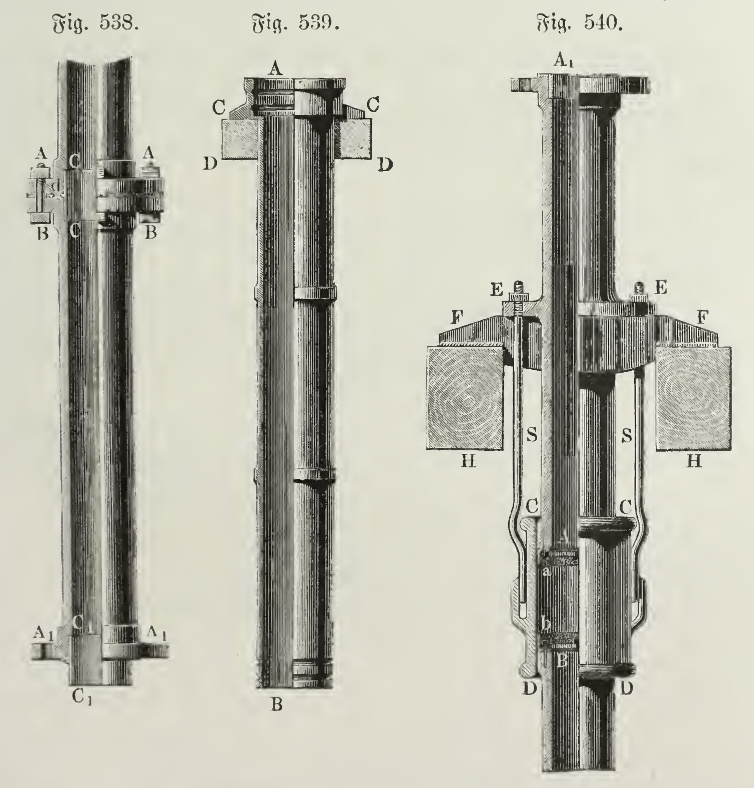
Die Einfallröhren werden mit einander entweder durch **einfache Muffen** oder durch **Kränze und Schrauben** (s. Bd. II, §. 164) verbunden. Zwischen je zwei Kränze kommt eine Scheibe von Blei oder Kitt zu liegen, welche durch die Schrauben in den Kränzen stark zusammengedrückt wird. Des genauen Anschließens wegen gießt man das Blei gleich flüssig in den Zwischenraum zwischen je zwei Kränzen, in deren Stirnflächen noch ringförmige Rinnen ausgespart sind, die das flüssige Blei ebenfalls ausfüllt. Den Kitt verfertigt man aus Kalkmehl, Leinölfirniß und zerhacktem Hanfe. In dem Inneren der Röhren werden die Wechsel sehr oft noch durch Muffe aus Kupferblech, ähnlich wie die Büchsen bei Holzröhren, abgedichtet. Eine Röhrenverbindung mit Kränzen und Muffen ist in Fig. 538 theils von außen, theils im Durchschnitt abgebildet. Die Verbindung der Kränze AA und BB durch Schrauben AB, AB ist im Wesentlichen dieselbe wie bei ge-

wöhnlichen Röhrenleitungen, §. 164; der Muff oder die Büchse CC hat in der Mitte ihrer Außenfläche einen Rand d, welcher in den Wechsel der verbundenen Röhren zu liegen kommt.

Eine einfache Röhre mit Schnauze zeigt Fig. 539. Zur Erzielung einer vollständigen Abdichtung durch Blei u. s. w. sind sowohl in der Schnauze A als auch am äußeren Umfange des unteren Röhrenendes B ringförmige Rinnen angebracht. Zur Vertheilung des Gewichtes der Einfallröhre sind einzelne Röhren, im Abstande von circa 50 Fuß, mit Nasen oder Rändern C, C versehen, womit sie auf Einstrichen D, D zu liegen kommen.

Außer diesen festen Röhrenverbindungen hat man auch noch eine lösbare Muffenverbindung nöthig, damit sich die ganze Einfallröhre ohne Nachtheil setzen, sowie beim Temperaturwechsel ausdehnen oder zusammenziehen könne (s. die Compensationsröhre, Fig. 343, §. 164). Bei der in Fig. 540

Fig. 538. Fig. 539. Fig. 540.



abgebildeten lösbaren Röhrenverbindung sind die etwa 1 Fuß von einander abstehenden Röhrenenden A, B an ihren Stirnflächen mit je einem Lederstulp a, b bedeckt und von einem ausgebohrten Muff $CCDD$ umgeben. Die

obere Röhre AA_1 enthält in der Mitte die Lagerscheibe EE, welche auf den von den Einstrichen H, H unterstützten gußeisernen Trägern F, F ruht und woran die den Muff tragenden Stangen S, S befestigt sind.

§. 299 **Treibcylinder.** Der Stiefel oder Treibcylinder besteht entweder aus Gußeisen, oder, wegen der größeren Politurfähigkeit des Kanonenmetalles, aus letzterem. Um nicht viel Spiele (pr. Minute drei bis sechs) und eben dadurch weniger Arbeitsverlust zu erhalten, macht man den Treibcylinder mehr lang als weit, so daß der Kolbenhub s in demselben $2^1/_2$ bis 6mal so groß ausfällt, als der Kolbendurchmesser d. Die mittlere Geschwindigkeit v des Kolbens macht man ungefähr nur 1 Fuß, damit die mittlere Geschwindigkeit v_1 des Wassers in den Einfallröhren und daher auch die hydraulischen Hindernisse in denselben nicht zu groß ausfallen. Rathsam ist es, mit der letzten Geschwindigkeit noch nicht die Grenze von 10 Fuß zu überschreiten, zweckmäßiger aber, dieselbe nur bis 6 Fuß zu steigern. Nehmen wir $v = 1$ und $v_1 = 6$ Fuß an, so erhalten wir für das Verhältniß der Einfallröhrenweite d_1 zur Cylinderweite d, da das Wasserquantum $= \frac{\pi d^2 v}{4} = \frac{\pi d_1^2 v_1}{4}$ ist,

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt{\frac{v}{v_1}} = \sqrt{1/_6} = 0{,}408;$$

also circa 0,4.

Ist das Aufschlag- oder Speisewasserquantum pr. Secunde $= Q$, so läßt sich für eine doppeltwirkende, oder für eine zweicylindrige einfachwirkende Wassersäulenmaschine setzen:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \cdot v,$$

und hiernach bestimmt sich die nöthige Weite des Treibcylinders:

$$d = \sqrt{\frac{4\,Q}{\pi v}} = 1{,}13 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

also für $v = 1$, $d = 1{,}13 \sqrt{Q}$ Fuß.

Für eine eincylindrige einfachwirkende Wassersäulenmaschine ist

$$Q = 1/_2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}\, v,$$

und daher:

$$d = 1{,}60 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

also für $v = 1$, $d = 1{,}60 \sqrt{Q}$ Fuß zu nehmen.

Hat man nun den Kolbenhub $s = 2^1/_2\, d$ bis $6\, d$ angenommen, so bestimmt sich die Zeit eines einfachen Ganges (Auf- oder Niederganges) durch die Formel:

$$t = \frac{s}{v},$$

also für $v = 1$:

$$t = s \text{ Secunden},$$

und hiernach die Anzahl der Gänge pr. Minute:

$$n_1 = \frac{60''}{t} = \frac{60 \,.\, v}{s},$$

also für $v = 1$, $n_1 = \frac{60}{s}$, die Anzahl der Spiele:

$$n = \frac{n_1}{2} = \frac{30\,v}{s},$$

oder für $v = 1$, $n = \frac{30}{s}$.

Uebrigens ist es zweckmäßiger, bei einer einfachwirkenden eincylindrigen Wassersäulenmaschine den Aufgang etwas langsamer und dafür den Niedergang etwas schneller als mit der mittleren Geschwindigkeit vor sich gehen zu lassen, weil die hydraulischen Hindernisse beim Aufgange größer sind, als beim Rückgange.

Der Treibcylinder ist innerlich genau auszubohren und auszuschleifen, damit sich der Kolben in ihm leicht und vollkommen abschließend auf und nieder bewegen kann. Die Wandstärke macht man wegen des allmäligen Abschleifens, verhältnißmäßig sehr groß; bei den bestehenden Maschinen ist sie 2 bis 3 Zoll; indessen hängt sie jedenfalls auch von der Druckhöhe und Cylinderweite ab, und ist schicklicher durch die Formel

$$e = 0{,}0025\,p\,d + 1{,}25 \text{ Zoll}$$

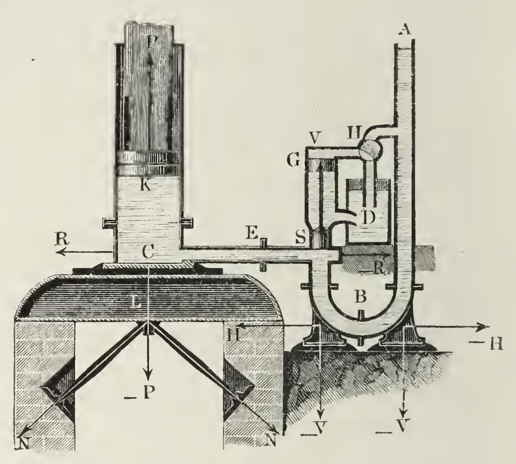
zu berechnen. Zur Verstärkung des Cylinders kann man denselben mit einigen ringförmigen Rippen gießen lassen.

Der Treibkolben wird von der Wassersäule mit einer Kraft P nach unten oder in der Richtung der Kolbenbewegung gedrückt, welche sich messen läßt durch das Gewicht $F h \gamma$ einer Wassersäule, deren Grundfläche F die Kolbenfläche und deren Höhe die senkrechte Tiefe h dieser Fläche unter dem Wasserspiegel im Einfallreservoir ist; und eine gleich große Kraft $(-P)$ in entgegengesetzter Richtung übt diese Wassersäule auf den Boden des Treibcylinders selbst aus. In der Regel beträgt diese Höhe h mehrere hundert Fuß, ist also auch diese Kraft des Wassers sehr beträchtlich und daher nöthig, dem Treibcylinder eine starke Unterstützung zu geben. Da diese Maschinen größtentheils nur zum Wasserheben aus Gruben angewendet werden, so kommen sie in Schächte zu stehen und können daher nicht unmittelbar auf festes Gestein oder Grundmauerung gesetzt werden, sondern es ist nöthig, dieselben durch Gewölbe oder Träger aus Eisen oder starke Balken aus Eichenholz zu un-

terstützen. Bei einigen Maschinen hat man die Cylinder unmittelbar auf gußeiserne Bogen gestellt.

Bei der in Fig. 541 skizzirten Wassersäulenmaschine wird der Treibcylinder von einem Paar eiserner Balken L, welche in der Mitte von gußeisernen Streben unterstützt sind, getragen. Die Kraft $-P$ wird dann zum Theil

Fig. 541.



von diesen Streben aufgenommen, welche in Folge dessen die schräg abwärts gerichteten Schübe N, N gegen die Unterstützungsmauern, und mittels dieser wieder gegen das feste Gestein ausüben.

Ebenso übt auch die Einfallröhre einen ihrem Querschnitte F_1 proportional wachsenden Druck $(-V)$ nach unten aus, welcher eine besondere Unterstützung von unten nöthig macht. Außerdem hat der Treibcylinder noch eine Horizontal= oder Seitenkraft $R = F_2 h \gamma$ auszuhalten, welche mit dem Querschnitte F_2 des Communicationsrohres CS wächst, sowie die Einfallröhre eine mit ihrem Querschnitte F_1 proportional wachsende Seitenkraft $(-H) = F_1 h \gamma$. Diesen Kräften halten die gleichen Gegenkräfte $(-R)$ und H in dem Communicationsrohre BS das Gleichgewicht, so daß zwar die Maschine im Ganzen keinen Druck zur Seite ausübt, dagegen aber ein Bestreben zum Zerbersten in horizontalen Richtungen besitzt, welchem durch die Röhrenschlösser E und B, sowie durch die unterstützenden Sohlplatten entgegenzuwirken ist. Bei der Einrichtung der abgebildeten Maschine hat das gekröpfte Communicationsrohr BS auch noch einen Verticaldruck $(-V)$ auszuhalten, weshalb es erforderlich ist, auch dieses Rohr mit einem auf einer festen Basis stehenden Fuße zu versehen.

Treibkolben. Der Treibkolben, welcher die Kraft des Wassers §. 300
unmittelbar aufnimmt, besteht im Wesentlichsten aus einem außen abgedrehten und in den Treibcylinder einpassenden Cylinder. Um den vollkommenen Abschluß zu bewirken, ohne ein bedeutendes Hinderniß in der Bewegung zu erhalten, wird die sogenannte Liderung (eigentlich wohl Lederung, franz. aber garniture, engl. packing, leathering) angewendet, und dieselbe kann nun entweder an dem Kolben oder an dem Cylinder festsitzen. Im ersten Falle besteht der Kolben aus einem niedrigen Cylinder, der nur $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{2}$ mal so hoch als dick ist, im zweiten Falle bildet er aber einen mit dem Stiefel gleich langen Cylinder, und erhält dann gewöhnlich den Namen Mönchskolben oder Bramahkolben (franz. plongeur; engl. plunger). Die Liderung der Treibkolben besteht in der Regel aus Lederriemen oder in Lederstulpen, seltener aus Lederscheiben oder aus Metallringen; sie muß immer im Verhältniß des Wasserdruckes an die innere Cylinder- oder äußere Kolbenfläche anschließen, damit sie einerseits kein Wasser durchläßt, und andrerseits auch keine zu große Reibung veranlaßt. Aus diesem Grunde sind denn auch die autoclaven oder hydrostatischen Liderungen, wo das Leder oder der abliderude Körper durch das Wasser selbst an die abgeschliffene Fläche angedrückt wird, die vorzüglichsten. In der Regel näht oder nietet man einen solchen Liderungskranz aus 3 bis 4 in Fett getränkten Lederriemen zusammen, und legt ihn nun entweder in am Umfang des Kolbens ausgedrehte ringförmige Rinnen oder befestigt ihn mittels Schrauben und durch einen Metallring umgestülpt auf die Grundfläche des Kolbens.

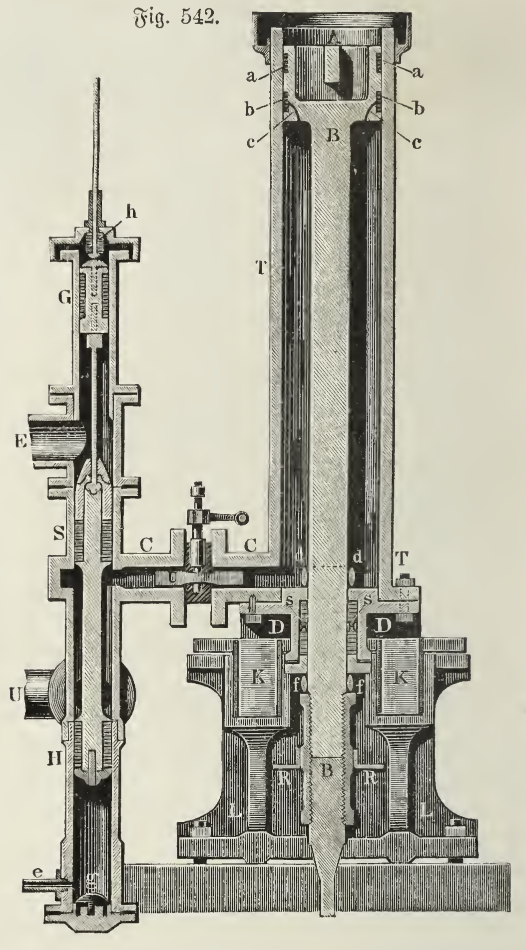
In Fig. 542 (a. f. S.) ist ein Treibkolben (von einer Clausthaler Wassersäulenmaschine) mit eingelegten Liderungskränzen abgebildet. A ist der eigentliche Kolben oder sogenannte Kolbenstock und BB die mit ihm ein Ganzes bildende Kolbenstange, ferner sind aa und bb die Liderungskränze und cc die feinen Bohrungen, durch welche der innere Umfang des unteren Lederkranzes mit dem Druckwasser in Verbindung gesetzt wird.

Die Stulpliderung des Treibkolbens an einer Freiberger Wassersäulenmaschine ist in Fig. 543 (a. f. S. 701) abgebildet. Es ist hier $AABB$ der gußeiserne Kolbenstock, welcher den Fuß D der Kolbenstange umgiebt und darin durch den Splint S befestigt wird. Die Fußplatte AA dieses Kolbenstockes wird vom Lederstulp LL, und dieser wieder von einem eisernen Teller E bedeckt. Sowohl die Fußplatte als auch der Teller sind am Rande gebogen, um dem Stulpe als Lagerflächen dienen zu können. Vier Schraubenbolzen a, a... dienen dazu, den Teller auf den Stulp aufzudrücken und ihn mit der Fußplatte des Kolbenstockes zu befestigen.

Aus der Figur ist noch zu entnehmen, wie der Treibcylinder CC mit seinem Fußstücke F durch eine Schnauze KK und durch Schraubenbolzen

bn, *bn*... verbunden ist. Dieses Fußstück bildet zugleich einen Theil des bei *O* einmündenden Communicationsrohres.

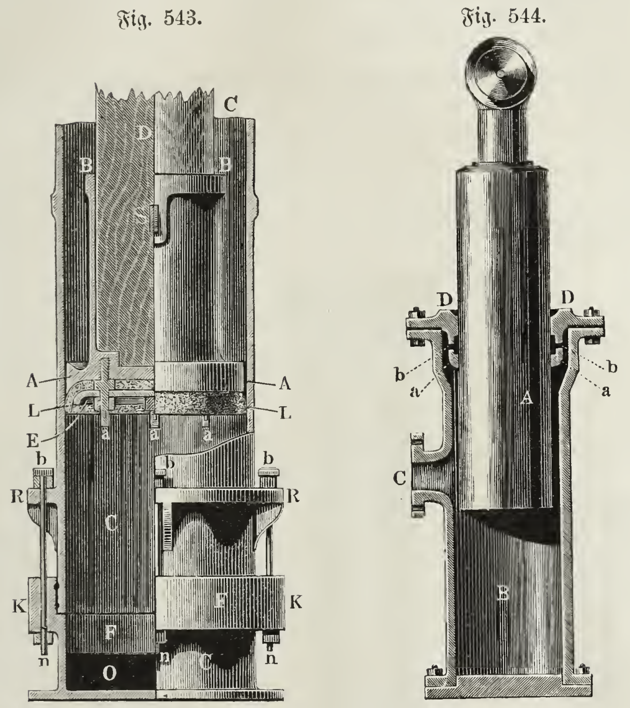
Fig. 542.



Ein Bramahkolben läßt sich ebenfalls hydrostatisch ablidern, wie aus Fig. 544 zu ersehen ist. Hier ist *A* der Kolben, *B* der Cylinder, *C* das Communicationsrohr, *DD* die aufgeschraubte Liderungsbüchse, *aa* der Liderungsring und *bb* die Bohrung für die hydrostatische Liderung. Jedenfalls ist diese Liderung in einer besonderen Büchse leichter herzustellen und leichter zu unterhalten, als die Liderung, welche mit dem Kolben in fester Verbindung steht. Auch empfiehlt sich die Anwendung dieser ungeliderten Kolben noch dadurch, daß es leichter ist, einen Cylinder richtig rund ab- als

auszudrehen. Ein besonderer Vortheil dieser Einrichtung erwächst endlich noch daraus, daß es hier möglich ist, durch Auswechselung des Kolbens und

Fig. 543. Fig. 544.



der Liderungsbüchse die Kraft der ganzen Maschine nach Bedürfniß zu verstärken oder überhaupt zu verändern.

Kolbenstange und Stopfbüchse. Die Treibekolbenstange (franz. tige du piston; engl. piston rod) ist von dem Treibkolben aus entweder nach der Mündung oder nach dem Boden (oder Deckel) des Cylinders gerichtet. Im ersteren Falle bedarf sie keiner besonderen Bearbeitung und kann daher auch von Holz sein, wie aus der Zeichnung in Fig. 543 zu ersehen ist; im zweiten Falle hingegen muß sie durch eine Stopfbüchse gehen, deshalb aber rund abgedreht werden, und kann daher nur aus Eisen oder Kanonenmetall bestehen. Die Stärke einer solchen Stange ist nach der Theorie der absoluten Festigkeit zu bestimmen. §. 301

Ist d der Treibkolbendurchmesser und p der Wasserdruck auf jeden Quadratzoll des Kolbens, so hat man die Kraft desselben:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot p;$$

ist nun aber d_2 die Stärke der Kolbenstange und T der Tragmodul ihres Materials, so hat man das Tragvermögen derselben:

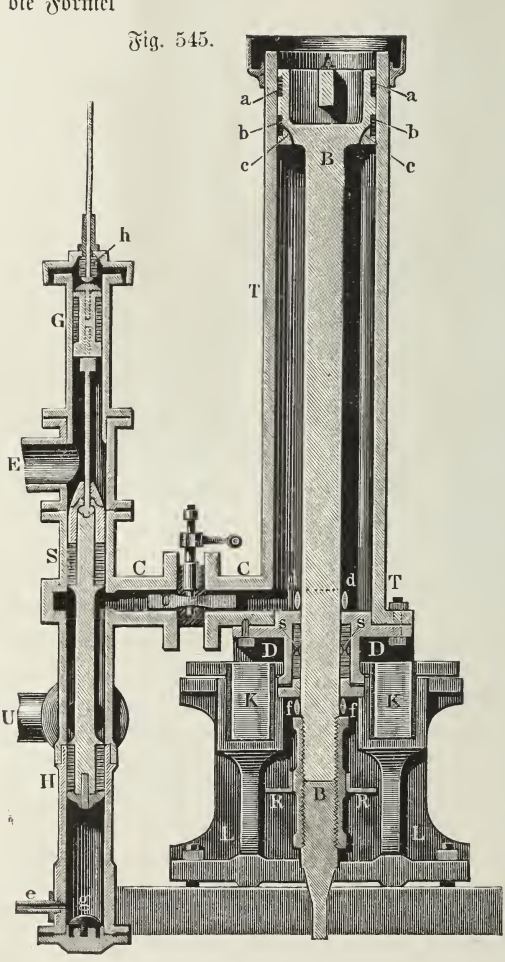
$$P = \frac{\pi d_2^2}{4} T;$$

man erhält daher durch Gleichsetzen beider Kräfte die nöthige Kolbenstangenstärke:

$$d_2 = d\sqrt{\frac{p}{T}}.$$

Hierzu ist T aus der Tabelle in Bd. I, §. 212 zu nehmen, p aber durch die Formel

Fig. 545.



$$p = \frac{h\gamma}{144},$$

wo h die Druckhöhe in Fußen bezeichnet, zu bestimmen.

Für eine Kolbenstange aus Schmiedeeisen, welche bloß einer Zugkraft ausgesetzt ist, kann man $T = 10000$ Pfund, und folglich

$$d_2 = 0{,}01\, d\sqrt{p}$$
$$= 0{,}00655\sqrt{h} \text{ Zoll}$$

setzen.

Stangen, welche die Kraft mittels Druck fortpflanzen, macht man doppelt so stark (vergl. Bd. I, §. 269).

Die Stopfbüchse (franz. boîte á garniture; engl. stuffing-box) ist ein auf einer Endfläche des Cylinders aufsitzendes Gehäuse, welches mit Lederscheiben oder Hanfzöpfen so ausgefüttert ist, daß sich die hindurchgehende Kolben-

stange leicht bewegen läßt, ohne Wasser oder nach Befinden Dampf, Luft u. s. w. hindurch zu lassen. Bei den Wassersäulenmaschinen sind die Stopfbüchsen in der Regel mit Lederscheiben abgelidert, weswegen man sie auch Lederbüchse (franz. boîte à cuir) nennt. Man ersieht aus Fig. 545 in *BB* die Kolbenstange, *DD* die Stopfbüchse, deren Liderung durch einen Deckel *B* zusammengepreßt wird. Zuweilen bringt man zwischen die Lederscheiben noch einen metallenen Ring mit durch feine Bohrungen communicirenden Schmierrinnen, wie *ss*, Fig. 545. Geht die Kolbenstange durch den Deckel der Stopfbüchse, so erhält der Deckel der Stopfbüchse eine Vertiefung zur Aufnahme der Schmiere, geht sie aber durch die Fußplatte des Cylinders, so muß man die Schmiere künstlich zupressen.

Bei der Clausthaler Maschine hat man auch Schmierpressen angewendet, welche mittels eines kleinen Kolbens, der durch ein kleines Gewicht niedergedrückt wird, die Schmiere durch eine feine Röhre, den erwähnten Messingring mit X-förmigem Querschnitt, im Innern der Liderung zupressen.

Die Schmiere besteht aus 6 Theilen Schweinefett, 5 Theilen Talg und 1 Theil Baumöl, besser aber in reinem Olivenöl oder Ochsenklauenöl.

Steuerung. Die Steuerung ist gleichsam die Seele einer Wassersäulenmaschine, durch sie wird diese Maschine erst in den Stand gesetzt, ihre Arbeit ohne Unterbrechung zu verrichten. Sie besteht im Wesentlichen aus zwei Hauptvorrichtungen, wovon die eine das abwechselnde Zulassen und Absperren des Kraft- oder Betriebswassers vom Treibcylinder unmittelbar bewirkt, die andere aber dazu dient, die erste Vorrichtung mit der eigentlichen Kraftmaschine (mit der Treibkolbenstange) zu verbinden, so daß zu ihrer Bewegung eine fremde Hülfe nicht nöthig ist. Wir können recht gut jene Vorrichtung die innere, diese aber die äußere Steuerung nennen. §. 302

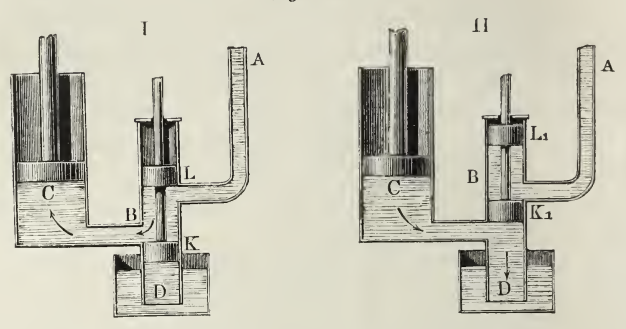
Was die innere Steuerung anlangt, so kommt davon bei den Wassersäulenmaschinen vorzüglich die Kolbensteuerung vor. Aeltere Maschinen haben eine Hahnsteuerung und neuere Wassersäulenmaschinen sind auch wie die Dampfmaschinen, mit Ventil- und Schiebersteuerungen ausgerüstet.

Die Art und Weise, wie die Umsteuerung durch einen Hahn bewirkt wird, ist bereits aus dem Obigen (§. 297) bekannt und die Wirkungsweise eines Steuerkolbens ist aus Folgendem zu ersehen.

Kolbensteuerung. Die Einrichtung der Kolbensteuerung für eine eincylindrige, einfachwirkende Maschine führt Fig. 546, I. u. II. (a. f. S.), vor Augen. Es ist hier *A* die Einfallröhre, *C* der Treibcylinder, *B* der den Steuerkolben einschließende Steuercylinder, *D* das Ausgußrohr, sowie *K* der Steuerkolben und *L* der sogenannte Gegenkolben, welcher nur dazu

dient, durch Erzeugung eines Gegendruckes eine leichtere Bewegung des Steuerkolbens oder der Steuerkolbenstange zu bewirken. Bei der tieferen

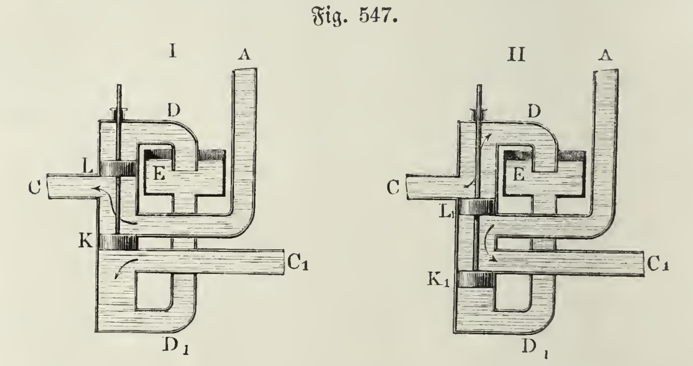
Fig. 546.



Stellung (I.) des Steuerkolbens K ist der Treibcylinder mit der Einfallröhre in Verbindung gesetzt, es kann daher der Treibkolben emporsteigen, bei der höheren Stellung (II.) hingegen sperrt der Steuerkolben K_1 das Kraftwasser ab, es kann daher der Treibkolben nur das unter ihm befindliche Wasser bei D zum Austritte nöthigen.

Die Einrichtung der Kolbensteuerung für eine doppeltwirkende oder für eine zweicylindrige Wassersäulenmaschine läßt sich aus Fig. 547, I. und II., ersehen. Es ist auch hier A die Einfallröhre, sowie C das Communicationsrohr nach dem einen und C_1 nach dem anderen Treib-

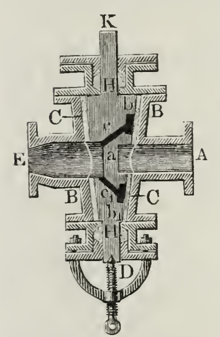
Fig. 547.



cylinder, ferner D der Ausguß für den ersten und D_1 der Ausguß für den zweiten Cylinder. Man sieht nun aus I., wie bei der oberen Kolbenstellung das Kraftwasser mit C in Verbindung gesetzt ist, und das todte Wasser aus C_1 durch D_1 nach E abfließen kann, und aus II., wie bei der tieferen Kolbenstellung das Kraftwasser nach C_1 treten und das abgesperrte Wasser unter dem Treibkolben von C nach D fließen und bei D austreten kann.

Steuerhahn. Der Hahn oder die Piepe kam als Regulator oder §. 303 Umsteuerungsapparat noch bei den alten Wassersäulenmaschinen zu Bleiberg in Kärnthen und bei den von Schitko construirten Wassersäulenmaschinen zu Schemnitz in Ungarn vor. Er hat die Form eines abgekürzten Kegels und sitzt in einem gleichgestalteten Gehäuse; um ihn leicht drehen zu können, läuft er in schwächeren cylindrischen Enden aus, die von Stopfbüchsen umgeben werden. Wegen des starken Abführens setzt man ein hartmetallenes Futter in das Hahngehäuse, was sich leicht auswechseln läßt. In Fig. 548 ist HH der Hahn, BB sein Gehäuse und CC dessen Futter, ferner K der Kopf, an dem die Umdrehungskraft angreift, und D eine Schraube, um den Hahn in seinem Gehäuse nach Bedürfniß zu heben oder zu senken. Die Bohrungen oder Wege des Hahnes sind verschieden, namentlich bei einfach wirkenden einstiefeligen Maschinen anders als bei doppelt wirkenden einstiefeligen oder einfach wirkenden zweicylinderigen Maschinen, wie wir auch schon oben gesehen haben.

Fig. 548.

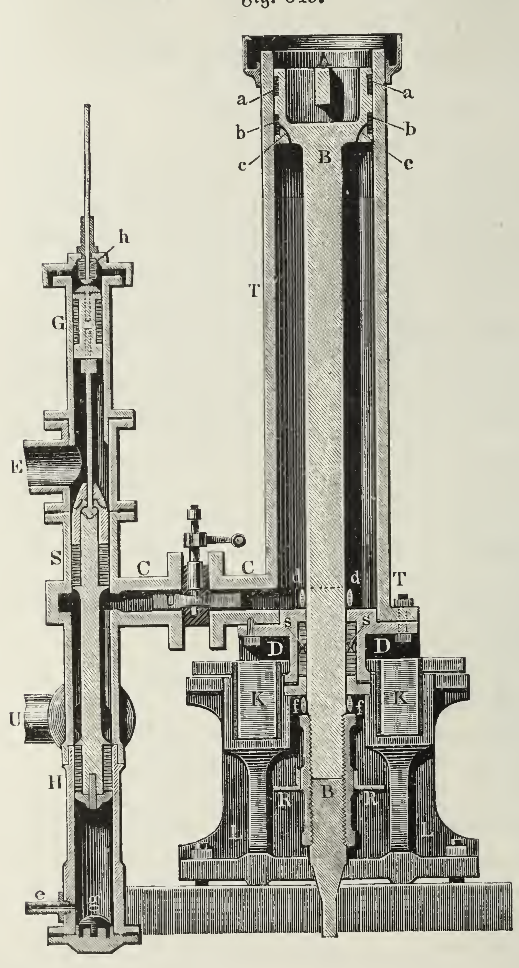


Aendert sich die Bewegungsrichtung des Kraftwassers im Hahne um 90 Grad, so wird der Hahn durch dieses Wasser mit einer Kraft in diagonaler Richtung gegen sein Gehäuse gepreßt, welche bei einer großen Druckhöhe und einem nicht unbedeutendem Querschnitte der Hahnbohrung eine große Reibung und ein starkes Abführen hervorbringt; dieses nachtheilige Verhältniß hat aber Schitko bei seinen Elidirungshähnen, wie Fig. 548 vorstellt, beseitigt, er hat nämlich, der Hauptbohrung a entgegengesetzt, noch zwei Ausschnitte b und b_1 im Hahne angebracht, und diese durch feine Löcher c und c_1 mit jener verbunden, so daß sich in ihnen ein Gegendruck bildet, der bei richtiger Größe der Ausschnitte dem Diagonaldrucke in der Hauptbohrung das Gleichgewicht hält.

Zur Verminderung des Abführens oder wenigstens zur Beseitigung des ungleichförmigen Abführens, trägt es ferner noch bei, wenn man den Hahn nicht bloß um 90^0 hin- und zurückdreht, sondern wenn man denselben immer in derselben Richtung im Kreise herumführt, weil dadurch nach und nach alle Theile im Umfange des Hahnes mit allen Theilen der inneren Mantelfläche in Berührung kommen. Die Hähne sind zuerst vom Herrn Bergrath Brendel angewendet worden und finden sich auch bei den hierortigen, von Herrn Brendel construirten Wassersäulenmaschinen vor. Die näheren Verhältnisse der Brendel'schen Steuerung werden wir aber weiter unten (§. 314) näher kennen lernen.

§. 304 **Steuerkolben.** Was nun die Kolbensteuerung anlangt, so wendet man bei derselben meist Kolben mit Packwerk von über einander liegenden Lederscheiben an, ähnlich wie wir oben (§. 301) bei der Liderung der Stopfbüchsen angegeben haben. Bei der Maschine zu Huelgoat ging der aus Kanonenmetall bestehende Steuerkolben anfangs 7 Jahre ohne Liderung, während der Anwesenheit des Verfassers (1839) wurde aber, da er sich um 1 Millimeter abgeschliffen hatte, statt dessen ein neuer mit einem aus 24 zusammengepreßten Lederscheiben bestehenden, 5 Zoll hohen, vollkommen abgedrehten Packwerk eingesetzt. Reichenbach hat auch Kolben mit einem zinnenen Liderringe angewendet, und in der neueren Zeit hat man bei den baierischen Maschinen eine vereinigte Lederstulp- und Zinnringliderung vortheilhaft gefunden.

Fig. 549.



Wenn am Ende des Treibkolbenspieles der Steuerkolben *S*, Fig. 549, emporsteigt und die Wassersäule allmälig vom Cylinder *TT* absperrt, also das Wasser in seiner Bewegung auf dem Wege *EC* gehemmt wird, so preßt es den Steuerkolben einseitig, und es giebt dadurch zu einem sehr starken Abführen des Steuerkolbens Veranlassung; um aber dies zu verhindern, führt man das Ende des Communicationsrohres *CD*, Fig. 550, ganz um den Steuercylinder *S* herum, so daß es diesen voll-

kommen umschließt, und das Wasser von allen Seiten her auf den auf- oder niedersteigenden Kolben drücken muß. Jedenfalls leidet bei dieser Einrichtung die Liderung noch etwas, weil sie sich hier beim Durchgange CD ausdehnen kann und bei dem höheren oder tieferen Kolbenstande wieder zusammengedrückt wird, und deshalb ist denn die Zu- und Abführung des Wassers aus dem Treibcylinder in den Steuercylinder durch Löcher, wie Fig. 551

Fig. 550.

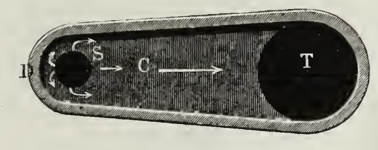
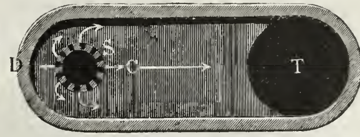


Fig. 551.



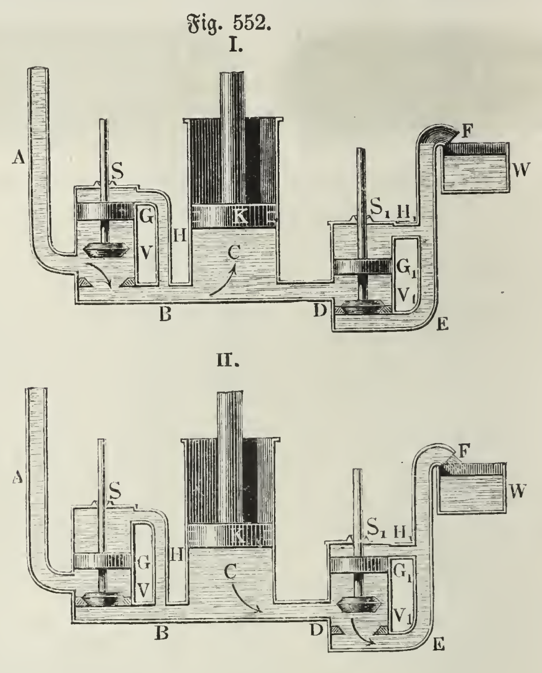
im horizontalen Durchschnitte vor Augen führt, in dieser Beziehung noch besser, obwohl in anderer Beziehung wieder ein Nachtheil, nämlich dem durchfließenden Wasser ein größeres hydraulisches Hinderniß, erwächst.

Von Wichtigkeit auf den Gang einer Wassersäulenmaschine ist noch die Form des Steuerkolbens S, Fig. 549. Es darf nämlich die Communication zwischen C und E nicht plötzlich aufgehoben und dadurch die Bewegung der Wassersäule in der Einfallröhrentour nicht momentan vernichtet werden, weil sonst eine bedeutende Erschütterung in der Maschine, die sich auch durch ein starkes Geräusch kundgiebt, entsteht, welche nicht selten das Zersprengen der Röhren oder das Ausgehen derselben in den Schlössern zur Folge gehabt hat. Um diesen Stoß oder den sogenannten Widder des Wassers zu beseitigen, hat man natürlich nur nöthig, das Absperren des Kraftwassers allmälig vor sich gehen zu lassen. Dies ist aber nur durch eine langsame Bewegung und durch eine besondere Form des Steuerkolbens zu bewirken. Von den Mitteln, eine langsame Steuerkolbenbewegung hervorzubringen, kann erst in der Folge die Rede sein, was aber die Gestaltung des Kolbens anlangt, so ist es nöthig, den Kopf des letzteren, oder vielmehr denjenigen Theil desselben, welcher die Absperrung zunächst bewirkt, conisch zu formen, oder auf denselben einen conischen Hut aufzusetzen, welcher eine ringförmige Mündung zwischen C und E herstellt, die sich mit dem Aufgange des Steuerkolbens allmälig mehr und mehr verengt, bis sie endlich ganz verschwindet und dadurch die Communication aufgehoben wird. Außerdem bringt man auch wohl noch Einschnitte in dem Kolbenstock selbst an, welche, von oben nach unten gehend, sich zuletzt allmälig verlaufen, so daß anfangs noch immer eine schwache Communication zwischen C und E übrig bleibt, wenn auch der eigentliche Steuerkolbenstock schon ringsum von dem Steuercylinder umschlossen wird, und dieser Kolben erst nach Durchlaufen des letzten Theiles seines Weges vollkommen absperrt. Bei der Wassersäulenmaschine zu Claus-

thal ist die Conicität und die Elidirung des Steuerkolbens zugleich angewendet; bei der Maschine zu Huelgoat hingegen, ist dieser übrigens faßförmig abgerundete Kolben mit 10 Ausschnitten versehen.

§. 305 **Ventil- und Schiebersteuerung.** Die Art und Weise, wie sich die Steuerung einer Wassersäulenmaschine durch Ventile einrichten läßt, führt Fig. 552, I. und II., vor Augen. Es ist hier V das Einlaß- und V_1 das Auslaßventil,

Fig. 552.

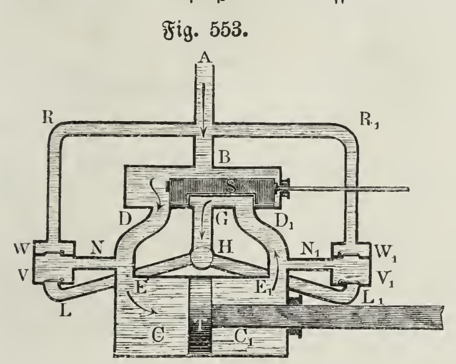


jedes in einem besonderen Steuercylinder S und S_1 enthalten. Beim Aufgange des Treibkolbens (in I.) ist V geöffnet und V_1 geschlossen, so daß das Wasser ungehindert aus der Einfallröhre A durch die Ventilöffnung hindurch und mittels des Communicationsrohres B nach dem Treibcylinder C treten kann; beim Niedergange des Treibkolbens (in II.) ist hingegen V geschlossen und V_1 geöffnet, so daß das Wasser aus dem Treibcylinder C durch das Communicationsrohr D und durch die Oeffnung des Ventils V_1 hindurch nach dem Austragerohr EF strömen und in den Wasserkasten W ausfließen kann. Um die Bewegung der Ventile so viel wie möglich zu erleichtern, wendet man noch Gegenkolben G und G_1 an, welche mit den entsprechenden Ventilen auf einer und derselben Stange zu sitzen kommen, und setzt den Raum über dem ersten Gegenkolben (G) durch ein Rohr H mit dem

Communicationsrohre B, sowie den Raum über dem zweiten Gegenkolben (G_1) durch ein Rohr H_1 mit der Austrageröhre EF in Communication. Ist der Querschnitt eines solchen Kolbens nahe gleich dem des mit ihm auf derselben Stange sitzenden Ventiles, so drückt dann das Wasser auf die ganze Verbindung fast eben so stark ab- als aufwärts, und es fordert daher die Bewegung derselben nur eine kleine Kraft.

Die Wirkungsweise einer Schiebersteuerung ist aus einer in Fig. 553 abgebildeten liegenden Wassersäulenmaschine zu ersehen. Beim Hingange des Treibkolbens T fließt das Wasser aus der Einfallröhre AB bei B in die Steuerkammer BDD_1 und von da bei D in das nach dem Treibcylinder C führende Communicationsrohr DE. Hat der Treibkolben seinen Hinweg zurückgelegt, so wird der Schieber S zurückgeschoben, so daß er die entgegengesetzte Stellung einnimmt. Hierbei kommt der Canal im Schieber S über die Mündung D des Communicationsrohres DE und über die Mündung G der Abfluß- oder Austragröhre GH zu stehen, so daß das Kraftwasser auf dem Wege ABD_1E_1 zum Treibcylinder C_1 gelangen und den Treibkolben zurücktreiben, sowie das vom letzteren aus dem Treibcylinder C herausgedrückte Wasser durch den Schiebercanal hindurch in die genannte Röhre GH treten und zum Ausflusse gelangen kann. Ist der Treibkolben wieder links angelangt, so wird der Schieber wieder rechts geschoben und es beginnt bei der abgebildeten Stellung desselben ein neues Kolbenspiel.

Fig. 553.

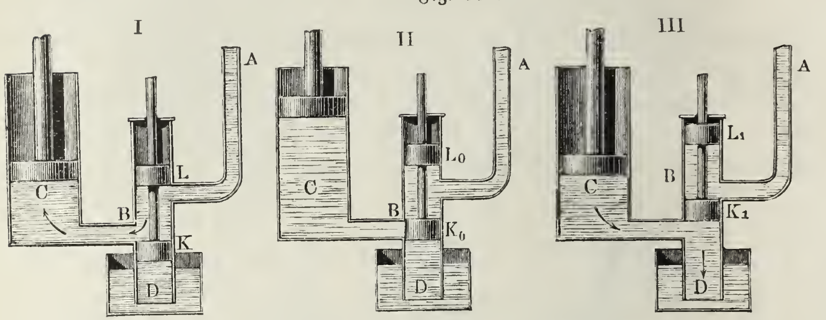


Die übrige Einrichtung der Steuerung wird weiter unten (§. 307) beschrieben werden.

Eigenthümlichkeit der Steuerung der Wassersäulenmaschinen. Die Vorrichtung zur Bewegung der Steuerung einer Wassersäulenmaschine ist eine ziemlich complicirte, und deshalb meist zusammengesetzter, als bei den Dampfmaschinen, weil man es hier mit einem fast incompressibeln und unausdehnbaren Körper, dem Wasser, zu thun hat, welches sogleich seinen Druck verliert, wenn es auf allen Seiten von der drückenden Wassersäule abgesperrt wird. In dem Augenblicke, wenn der Steuerkolben K_0, Fig. 554 (II. a. f. S.), bei seinem Aufgange das Druckwasser AB vom Treibcylinder C absperrt, ist auch der Druck des Wassers auf den Treib- §. 306

kolben aufgehoben, und es durchläuft dann der letztere in Folge seiner Trägheit noch einen kleinen Weg, ohne daß ihm das darunter befindliche Wasser

Fig. 554.



folgen kann. Es entsteht folglich hierbei unter dem Treibkolben ein luftleerer Raum, und es bleibt nur noch der Druck der Luft auf die äußere Kolbenfläche in Wirksamkeit. Bezeichnet h die Druckhöhe des Wassers vor dem Absperren durch den Steuerkolben, ferner b die Höhe einer den Atmosphärendruck messenden Wassersäule, sowie F den Inhalt der Treibkolbenfläche und γ die Dichtigkeit des Wassers, so ist die der Treibkolbenlast gleich zu setzende Kraft des Wassers vor dem Absperren:

$$P = Fh\gamma,$$

dagegen die durch den Druck der Luft auf die äußere Kolbenfläche nach dem Absperren erwachsende Vergrößerung der Kolbenlast:

$$P_1 = Fb\gamma,$$

und daher die ganze Last des Treibkolbens, wodurch derselbe nach dem Absperren des Kraftwassers in Ruhe versetzt wird:

$$P + P_1 = F(h + b)\gamma.$$

Bezeichnet nun noch $M = \frac{G}{g}$ die träge Masse des Kolbens sammt Gestänge, sowie v die Geschwindigkeit desselben im Augenblicke des Absperrens, und folglich $\frac{Mv^2}{2} = \frac{Gv^2}{2g}$ das Arbeitsvermögen der trägen Masse der Maschine, so läßt sich der Weg s_1, welchen der Treibkolben nach dem Absperren zurücklegt, bis er zur Ruhe übergeht, durch den Ausdruck

$$s_1 = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Kraft}} = \frac{G}{F(h + b)\gamma}\,\frac{v^2}{2g}$$

bestimmen.

Da nun v klein ist, meist nicht über **1** Fuß, folglich $\frac{v^2}{2g}$ nicht über 0,016 Fuß beträgt, und auch das Verhältniß $\frac{G}{F(h+b)\gamma}$ meist nur eine mäßige

Größe hat, so fällt der Weg s_1 des Treibkolbens während seiner verzögerten Bewegung nur sehr klein aus.

Wenn nun der Steuerkolben mit der Kraftmaschine unmittelbar in Verbindung stände und daher die Bewegung des Steuerkolbens von der des Treibkolbens abhinge, so würde dieser Kolben während der Zurücklegung seines letzten Wegtheiles s_1 nicht im Stande sein, die Umsteuerung vollständig zu beendigen, d. i. den Steuerkolben in die Stellung K_1 (III.) zu bringen, wobei das Aufschlagwasser durch das Austragrohr D abfließen und der Treibkolben ungehindert niedergehen kann.

Noch ungünstiger stellt sich dieses Verhältniß heraus, wenn der Treibkolben am Ende seines Rückweges durch Herabschieben des Steuerkolbens das Umsteuern bewirken soll. Wenn hierbei der Steuerkolben nach K_0 (II.) gekommen ist, so wird dem austretenden Wasser durch K_0 der Weg durch den Steuercylinder gänzlich versperrt und folglich auch der niedergehende Treibkolben plötzlich in seiner Bewegung aufgehalten. Mit diesem fast momentanen Inruhesetzen der trägen Massen des Treibkolbens sammt Gestänge u. s. w. ist nun nicht allein eine bedeutende und höchst nachtheilige Erschütterung der Maschine, sondern auch der Nachtheil verbunden, daß nun auch der Steuerkolben nicht weiter abwärts bewegt wird und folglich die ganze Arbeitsverrichtung ihr Ende erreicht hat.

Diese Unzulänglichkeiten kommen übrigens nicht allein bei der Kolbensteuerung, sondern auch bei allen übrigen Steuerungen in ähnlicher Art vor. Es ist daher nöthig, dieselben durch besondere mechanische Hülfsmittel zu beseitigen.

Hülfsmittel einer regelmässigen Steuerung. Die mechanischen Hülfsmittel zur Herstellung einer regelmäßigen Steuerung der Wassersäulenmaschinen sind verschieden, je nachdem die Maschine §. 307

1) bloß eine geradlinig auf- und nieder-, oder hin- und zurückgehende Bewegung hat, oder

2) dieselbe außer ihrer ursprünglich absetzend geradlinigen Bewegung noch eine stetige Kreisbewegung besitzt, welche letztere natürlich durch besondere Zwischenmaschinen erst aus der ersteren abgeleitet werden muß.

Die Umsetzung der absetzenden geradlinigen Bewegung in eine stetige Kreisbewegung ist jedoch an einer eincylindrigen einfach wirkenden Wassersäulenmaschine nicht leicht ausführbar; es gehört hierzu mindestens eine doppelt wirkende Wassersäulenmaschine. Durch zwei gekuppelte doppelt wirkende Maschinen, wovon die eine um den halben Hub vor der anderen vorausgeht, wird derselbe Zweck noch vollkommener erreicht.

Bei diesen Wassersäulenmaschinen mit stetiger Kreisbewegung verbindet man die Steuerkolbenstange so mit dem Rotationsmechanismus, daß sie von

demselben in derselben Zeit ein Mal auf- und nieder- oder hin- und zurückbewegt wird, während der Treibkolben ein vollständiges Spiel verrichtet. Damit hierbei der letztere in seiner Bewegung nicht unterbrochen oder gestört werde, bedient man sich folgender Hülfsmittel:

1) Man giebt dem Steuerkolben K_0 (II.) eine so kleine Höhe, daß er beim Durchgange durch die Einmündung des Communicationsrohres in den Steuercylinder diese Mündung nicht ganz verschließt und folglich über oder unter K_0 eine Communication des Treibcylinders mit dem Steuercylinder übrig bleibt. In diesem Falle fließt während des mittleren Standes des Steuerkolbens eine kleine Wassermenge unmittelbar aus A nach D und wird folglich der Maschine Kraftwasser entzogen.

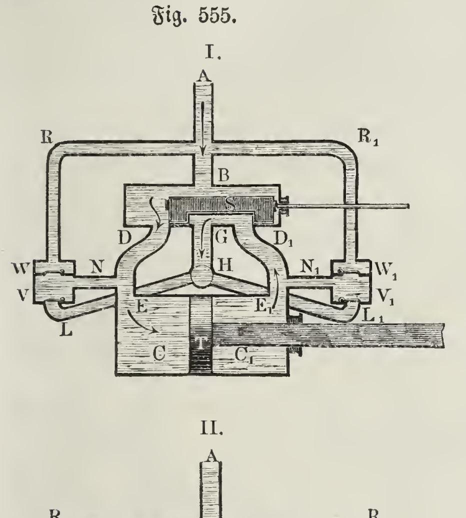
2) Man führt vom Communicationsrohre aus eine Seitenröhre in das Austragrohr oder in das Unterwasser und verschließt deren Einmündung in das erstere durch ein sich nach Innen öffnendes Ventil (Saugventil), sowie eine Seitenröhre in das Einfallrohr und versperrt deren Einmündung in das Communicationsrohr durch ein Ventil (Steigventil), welches sich nach außen, d. i. nach diesem Seitenrohre zu, öffnet. Wenn nun der Steuerkolben K bei seinem Aufgange in die Stellung K_0 (II. Fig. 554) kommt, und folglich den Zutritt des Wassers aus A nach C verhindert, so öffnet sich das erstere der genannten Ventile und es wird hierbei so viel Wasser aus dem Austragrohre angesaugt, als nöthig ist, um den während dieser Absperrung vom Treibkolben durchlaufenen Raum auszufüllen; wenn hingegen der Steuerkolben bei seinem Niedergange in die angegebene Stellung gelangt, und folglich der Abfluß des Wassers aus C nach D verhindert wird, so öffnet sich das zweite oder Steigventil, und es wird das während dieses Verschlusses vom Treibkolben verdrängte Wasser durch dieses Ventil hindurch- und in die Einfallröhre zurückgedrängt.

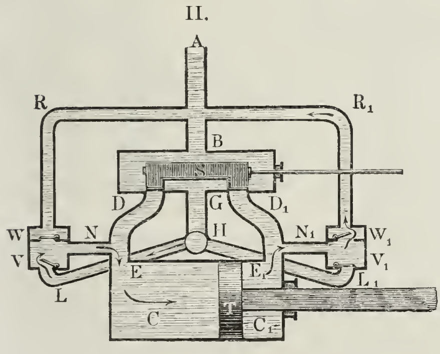
Obgleich bei dem Eröffnen dieser Ventile die Treibkolbenkraft große Veränderungen erleidet, so erwächst jedoch daraus noch keineswegs ein Stoß, sondern nur eine bedeutende Geschwindigkeitsveränderung des Treibkolbens.

Das Spiel einer solchen Steuerung mit Saug- und Druckventil ist aus Fig. 555, I. und II., zu ersehen, welche eine doppelt wirkende liegende Wassersäulenmaschine mit Rotationsbewegung vorstellt, wobei das Steuerkolbensystem durch einen Schieber oder Schiebventil (franz. tiroir; engl. slide-valve) ersetzt ist. Bei der Stellung des Schiebers S in I. fließt das Aufschlagwasser aus der Einfallröhre AB in die Schieberkammer BDD_1 und von da durch das Communicationsrohr DE in den Treibcylinder C, und treibt dabei den Treibkolben von links nach rechts, während das Wasser, welches vorher gewirkt hat, durch das Communicationsrohr E_1D_1 in den Schiebercanal S und von da durch das Austragrohr GH geführt wird.

Gegen Ende des Treibkolbenschubes hat sich der Schieber S (II.) so weit nach links bewegt, daß er die Einmündungen D und D_1 von beiden Communicationsröhren in der Steuerkammer bedeckt, und folglich weder Wasser aus der Einfallröhre AB nach dem Treibcylinder, noch Wasser aus dem letzteren in die Austragröhre GH gelangen kann. Bei der weiteren Fortbewegung des Treibkolbens öffnet sich das linke Saugventil V, wobei eine Communication des linken Cylinderraumes C mit der Austragröhre H hergestellt und Wasser aus H durch das Rohr HL nach V und von da weiter durch NE nach dem Treibcylinder geführt wird; und ebenso öffnet sich das rechte Druckventil W_1, wobei die Communication des rechten Cylinderraumes C_1 mit der Einfallröhre AB hervorgebracht und der Abfluß des Wassers aus C_1 mittels der Röhren N_1 und R_1 nach der Einfallröhre ermöglicht wird. Später rückt der Schieber noch weiter nach links, wobei die Einmündung D_1 des Communicationsrohres $E_1 D_1$ in die Steuerkammer frei wird und sich der Schiebercanal über die Einmündungen D und G stellt. Das nun auf die rechte Kolbenfläche drückende Kraftwasser schiebt den Treibkolben von rechts nach links, während das vor der linken Kolbenfläche befindliche Wasser aus C auf dem Wege $EDGH$ zum Ausflusse gelangt. Nun nimmt auch der Schieber eine umgekehrte Bewegung an und deckt auf eine kurze Zeit die Einmündungen D und D_1 der Communicationsröhren zum zweiten Male, wobei sich das rechte Saugventil V_1 sowie das linke Druckventil W öffnet und folglich der Treibkolben ohne weitere Störung seinen Rückweg vollenden kann.

Fig. 555.





§. 308 **Steuerungsarten.** Bei den einfach wirkenden und überhaupt bei allen denjenigen Wassersäulenmaschinen, welche bloß eine absetzende Bewegung in gerader Linie haben, ist es nicht möglich, die Steuerung unmittelbar mit der Kraftmaschine zu verbinden, oder die Bewegung der Steuerkolbenstange unmittelbar von der Bewegung der Treibkolbenstange abzuleiten, da hier in dem Augenblicke, wo der Steuerkolben oder Steuerschieber die Communication des Treibcylinders mit dem Steuercylinder oder der Steuerkammer aufhebt, nicht allein der Treibkolben, sondern auch der mit ihm verbundene Steuerkolben zur Ruhe kommt. Damit der Steuerkolben den übrigen Theil seines Weges zurücklegen kann, während der Treibkolben stillsteht, ist daher noch ein Zwischenapparat erforderlich, welcher auch noch dann auf den Steuerkolben wirkt, wenn der Treibkolben bereits zur Ruhe übergegangen ist. Dieser Apparat kann aber im Wesentlichen bestehen:

1) in einem Gewichte, welches von der Kolbenstange bei ihrem Aufgange mit emporgehoben und von ihr in dem Augenblicke fallen gelassen wird, wenn sie ihren Weg zurückgelegt hat, oder

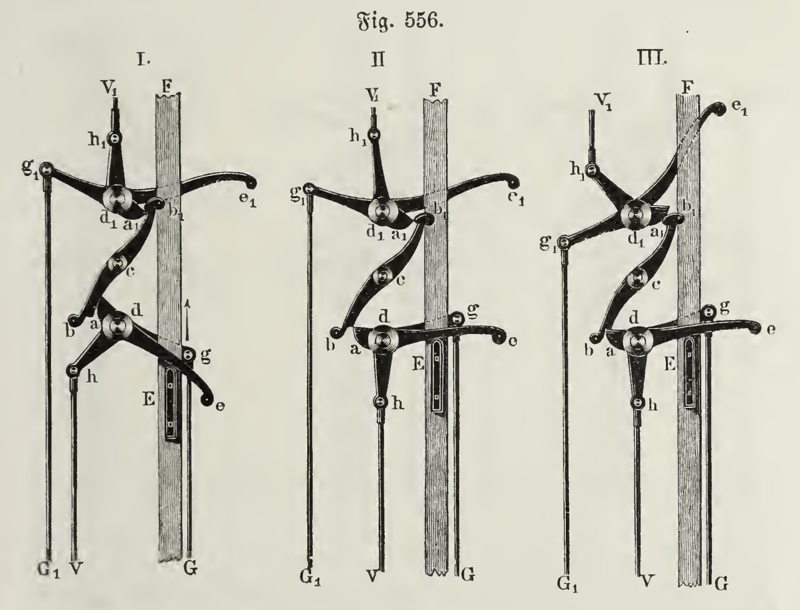
2) in einer Feder, welche während der Treibkolbenbewegung gespannt, und am Ende derselben losgelassen wird, oder endlich

3) in einer zweiten oder Hülfswassersäulenmaschine, welche von der Kraftmaschine unmittelbar gesteuert wird und deren Treibkolben die Steuerkolbenstange in Bewegung setzt, während der Treibkolben der Hauptmaschine seinen letzten Wegtheil durchläuft und auf eine kurze Zeit ruht. Man hat also hiernach von einander zu unterscheiden: Gewichtssteuerung, Federsteuerung und Wasserdrucksteuerung.

Die Gewichtssteuerung besteht hauptsächlich aus einem Mechanismus, durch welchen die Kraftmaschine während ihrer Bewegung ein Gewicht hebt, welches bei seinem Niederfallen im Augenblicke, wenn der Zugang zu dem Treibcylinder von dem Steuerhahn oder Steuerkolben u. s. w. versperrt ist, diesen Steuerkörper durch die zweite Hälfte seines vorgeschriebenen Weges führt und auf diese Weise das Umsteuern bewirkt. Man findet die Gewichtssteuerung bei den älteren und unvollkommneren Wassersäulenmaschinen unter den Namen Fallbocksteuerung, Hammersteuerung, Wagensteuerung, Pendelsteuerung u. s. w. angewendet; in neueren Zeiten hat man auch die Gewichte zur Umsteuerung durch Ventile und zwar in der Art angebracht, daß die Kraftmaschine das Zuschließen des einen und das fallende Gewicht das Eröffnen des anderen Ventiles besorgt. Die Einrichtung einer solchen Gewichtssteuerung ist ganz dieselbe wie bei Dampfmaschinen mit Ventilsteuerung. Im Wesentlichen besteht dieses Steuerungssystem aus mehreren Hebeln in Verbindung mit einem Sperrhaken oder einer Sperrklinke, weshalb man sie auch Hebelsteuerung oder Sperrklinkensteuerung (franz. encliquetage; engl. spring catsch) nennt.

Sperrhaken. Der wesentlichste Bestandtheil bei der Hebelsteuerung §. 309
ist die Sperrklinke; dieselbe ist nöthig, um das Verschließen der Ventile durch die Maschine unmittelbar, und das Oeffnen derselben durch niederfallende Gewichte hervorbringen lassen zu können. Wie dies möglich ist, wird aus der Beschreibung der Fig. 556, I., II. und III., vollkommen erhellen. Die Sperrklinke selbst ist $b c b_1$; sie läßt sich um die horizontale

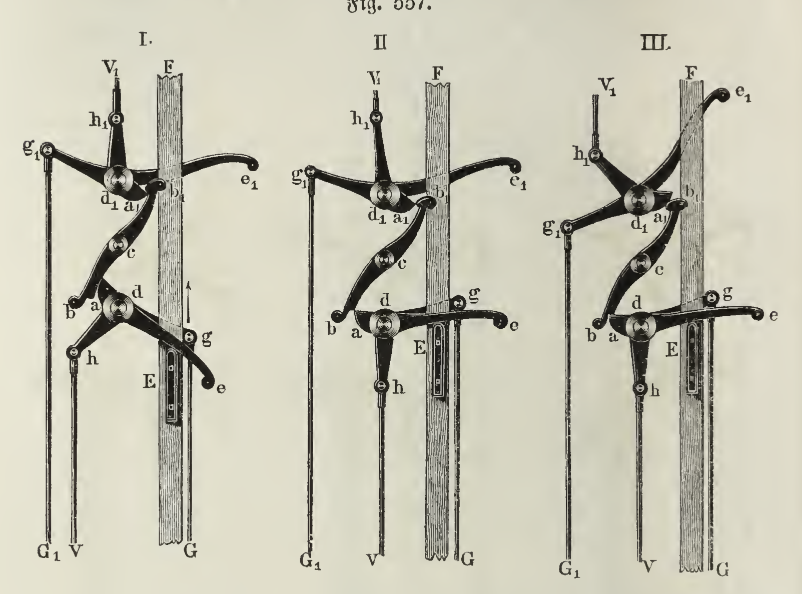
Fig. 556.



Axe c drehen und endigt sich in Haken b und b_1. Unter derselben befindet sich eine horizontale Welle d mit einem Zahne a und mit drei Armen e, g, h, und über derselben eine solche Welle d_1 mit einem Zahne oder Dorne a_1 und drei Armen e_1, g_1 und h_1. In I. greift der Zahn a_1 in den Haken b_1, wogegen a über b steht; in II. ist der Eingriff zwischen a_1 und b_1 aufgehoben, und in III. greift der Zahn a in den Haken b und es liegt a_1 über b_1; geht in I. a nieder, so erleidet $b c b_1$ eine kleine Drehung und es hakt sich, wie in II., a_1 aus b_1; geht aber in III. a_1 nieder, so erfolgt eine umgekehrte Bewegung von $b c b_1$ und es wird a aus b ausgehakt. Sind nun an den Armen $d g$ und $d_1 g_1$ beider Wellen d und d_1 Gewichte G und G_1 angehangen, so werden dieselben die Wellen in Umdrehung setzen, sowie ihre Zähne a und a_1 frei sind oder sich von den Fesseln der Sperrklinke befreit haben; und sind nun noch an den Armen $d h$ und $d_1 h_1$ mittels Stangen $h V$ und $h_1 V_1$ u. s. w. die Steuerventile angeschlossen, so werden dieselben durch dieses Niederfallen der Gewichte geöffnet. Zur Umdrehung der Wel-

len d und d_1 nach den entgegengesetzten Richtungen dienen ferner die Arme oder Klauen de und $d_1 e_1$; wird de (I.) von unten nach oben geführt, so geht hV nieder, es verschließt sich folglich das Ventil V, es wird aber auch a_1 frei; es fällt nun $g_1 G_1$ nieder und zieht dabei V_1 auf; wird hingegen

Fig. 557.

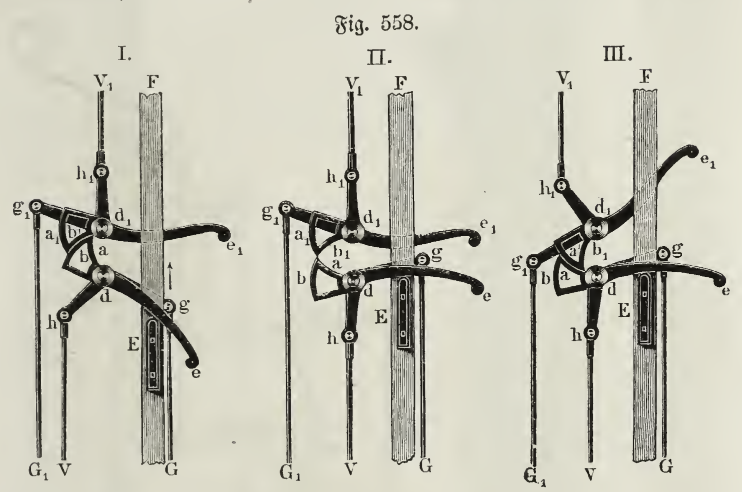


$d_1 e_1$ (III.) von oben nach unten geführt, so steigt $h_1 V_1$, es verschließt sich also auch V_1 wieder, dagegen hakt sich a aus, es fällt G nieder und zieht dabei hV in die Höhe, und öffnet daher das mit V verbundene Ventil. Dieses Heben und Niederdrücken der Arme de und $d_1 e_1$ wird durch eine Stange EF, die sogenannte Steuerstange, hervorgebracht, welche mit dem Treibkolben zugleich auf- und niedergeht. Zu diesem Zwecke sind auf entgegengesetzten Seiten derselben zwei Daumen oder sogenannte Knaggen E und F (franz. taquets; engl. tappets) angeschraubt, von denen der eine (E) nahe am Ende des Kolbenaufganges die Klaue de, der andere (F) aber nahe am Ende des Kolbenniederganges die Klaue $d_1 e_1$ ergreift und mit sich fortnimmt.

Eine etwas vereinfachte Hebelsteuerung ist in Fig. 558, I., II. und III., abgebildet. Es ist hier der Sperrhaken durch zwei Kreissectoren ab und $a_1 b_1$ ersetzt, welche einander abwechselnd erfassen und freilassen. Uebrigens ist diese Steuerung ganz wie die oben in Fig. 557 abgebildete Steuerung eingerichtet, und es stehen auch die übrigen Buchstaben in beiden Figuren bei denselben Theilen. Geht die Steuerstange oder der Steuerbaum EF mit

dem Treibkolben empor, so ergreift die Knagge E (I.) den Hebel de und hebt denselben empor; dabei steigt auch G, dagegen wird das Ventil bei V verschlossen; zugleich zieht sich aber auch b zurück und es wird b_1 frei, wie nun II. vor Augen führt. Jetzt fällt G_1 nieder, es legt sich a_1 in a und es öffnet sich das Ventil bei V_1, wie in III. zu sehen ist. Der nun nieder-

Fig. 558.



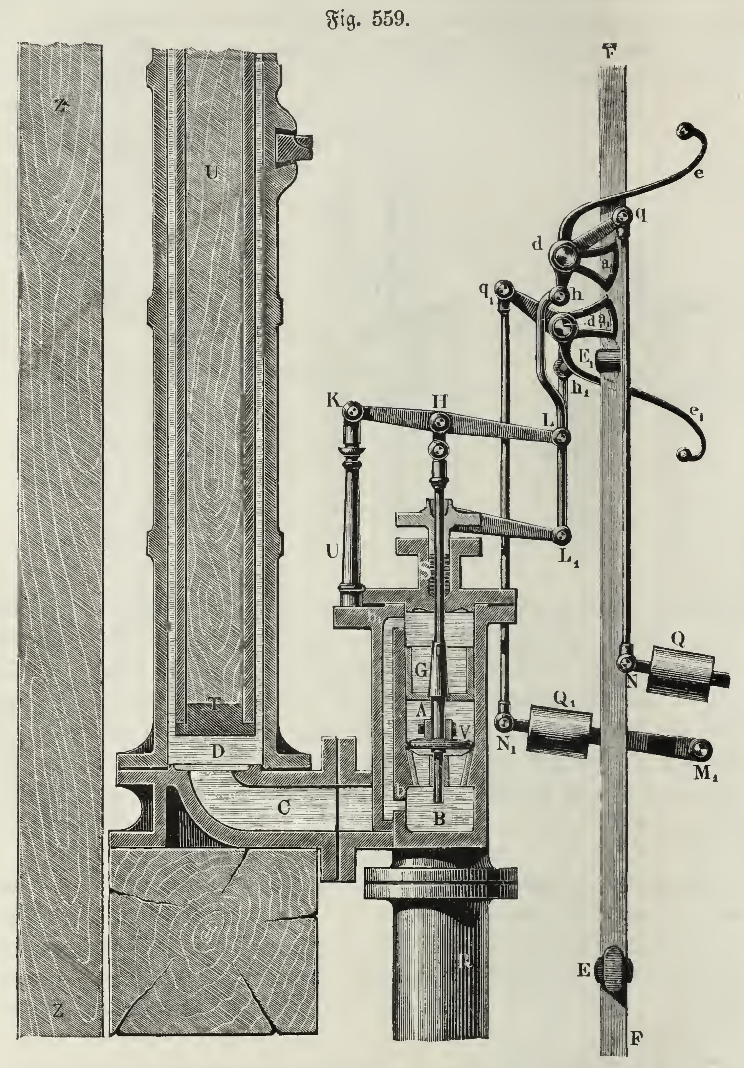
gehende Treibkolben führt auch die Stange FG abwärts und eine andere Knagge an der Hinterseite dieser Stange ergreift nahe am Ende des Niederganges den Hebel $d_1 e_1$ und schiebt diesen nieder, so daß wieder die Stellung II. eintritt, und dabei G_1 angehoben und V_1 geschlossen wird. Auch hakt sich hierbei a_1 aus a und es fällt nun G ungehindert nieder, ferner legt sich b in b_1 und es öffnet sich dabei V, so daß nun das Kraftwasser von unten zutreten, den Kolben emportreiben und das vorige Spiel sich wiederholen kann.

Wassersäulenmaschine mit Gewichtssteuerung. Die Einrichtung und Wirkungsweise einer Wassersäulenmaschine mit Gewichtssteuerung läßt sich aus Fig. 559 (a. f. S.) ersehen. Dieselbe ist im Wesentlichen die Durchschnittszeichnung von einer von Harvey u. Comp. zu Hayle in Cornwall für ein Gefälle von 60 Meter construirten Wassersäulenmaschine. §. 310

Die in der Figur nicht sichtbare Einfallröhre mündet von vorn, bei A, sowie die Austragröhre von hinten bei B, und der Treibcylinder D, mittels des Communicationsrohres C, in den ersten Steuercylinder AB. Nach Eröffnung des Eintrittssteuerventiles (franz. soupape d'admission; engl. admissionvalve) V tritt das Kraftwasser A, durch die Ventilöffnung

hindurch nach *B*, sowie von da nach *C* und *D* und treibt den Treibkolben *T* empor. Letzterer ist ein sogenannter Mönchskolben (s. §. 300) und besteht

Fig. 559.



in einer außen abgedrehten cylindrischen Röhre, welche aber am oberen, nicht sichtbaren Ende des Treibcylinders von einer Stopfbüchse umgeben ist. Mit der aus Holz bestehenden und in dem Mönch festsitzenden Kolbenstange *TU* ist links durch ein gewöhnliches Stangenschloß das die Pumpenlast aufneh-

mende Schachtgestänge ZZ, und dagegen rechts, durch einen Querarm oder sogenannten **Krums**, die Steuerstange oder der Steuerbaum FF angeschlossen; es gehen folglich ZZ und FF gleichzeitig mit dem Treibkolben auf und nieder. Hinter dem ersten Steuercylinder AB steht ein zweiter hier nicht sichtbarer Steuercylinder, in welchem das **Austrittssteuerventil** (franz. soupape d'émission; engl. eduction-valve) enthalten ist. Dieses Ventil communicirt oben mit dem Canale B sowie nach unten mit der Austragröhre R (vergl. §. 305, Fig. 552) und gestattet bei seiner Eröffnung dem von dem niedergehenden Treibkolben verdrängten und durch C nach B zurückfließenden Wasser den Eintritt in das Austragrohr R, von wo es zum Ausgusse gelangt.

Da das Ventil V mit der ganzen Kraft der Wassersäule in der Einfallröhre auf seinen Sitz aufgedrückt wird, so wäre zu dessen Eröffnen ein großer Kraftaufwand nöthig, wenn man nicht einen Gegenkolben G mit der Ventilstange verbunden und den oberen Steuercylinderraum SG durch einen Canal bb_1 mit dem unteren Steuercylinderraum B verbunden hätte. Bei dieser Einrichtung wird der Gegenkolben G mit fast denselben Kräften von unten nach oben und von oben nach unten gedrückt, sowie das Zulaßventil V resp. von oben nach unten und von unten nach oben, und folglich hierbei die erforderliche Kraft zum Aufziehen dieses Ventils auf ein Minimum zurückgeführt. Ganz dieselbe Einrichtung kommt auch bei dem hier nicht sichtbaren Ablaßventile vor. Die Stange des Zutrittsventils V geht bei S durch eine Stopfbüchse im Deckel des ersten Steuercylinders und ist bei H an einen einarmigen Steuerhebel KL angeschossen, welcher am Kopfe einer Säule U seinen Stützpunkt K hat. Dieser Hebel ist mittels einer Stange Lh an den Arm dh der Welle d einer Sperrklinke a (s. Fig. 558) befestigt und läßt sich folglich durch Drehung dieser Welle (d) auf- und niederbewegen. Ebenso ist das Ablaßventil durch einen in der Figur zum größten Theile verdeckten Hebel zu eröffnen und zu verschließen, welcher mittels einer Stange $L_1 h_1$ und eines Armes $d_1 h_1$ mit der Welle d_1 einer zweiten Sperrklinke a_1 in Verbindung steht. An der ersten Welle d ist ferner noch mittels des Armes dq und der Stange qN ein Gegengewicht Q aufgehangen, sowie an der Welle d_1 mittels des Armes $d_1 q_1$ und der Stange $q_1 N_1$ ein um den festen Stützpunkt M_1 drehbares Gegengewicht Q_1. Endlich sitzen noch auf diesen Wellen die Arme oder Steuerhebel de, $d_1 e_1$, welche mittels der auf dem Steuerbaum FF festsitzenden Steuerknaggen E, E_1, auf- oder abwärts bewegt werden, und dadurch die Wellen d und d_1 nach der einen Richtung bewegen, wogegen die Gegengewichte Q und Q_1 dieselben in entgegengesetzter Richtung drehen. In dem abgebildeten Bewegungszustande der Wassersäulenmaschine ist der Treibkolben T unten angekommen; es hat die mit diesem Kolben zugleich niedergehende Steuerstange FF mittels der

Knagge E_1 den Steuerhebel $d_1 e_1$ niedergedrückt und hierbei das Ablaßventil geschlossen. Ferner hat sich die Sperrklinke a_1 aus a ausgehakt; es wird nun die Welle d durch das fallende Gegengewicht Q nach rechts gedreht und hierbei das Zutrittsventil V eröffnet. Das nun auf den Treib-

Fig. 560.

kolben T wirkende Kraftwasser treibt den Treibkolben sammt den Stangen ZZ und FF empor, und wenn nun gegen Ende des Aufganges die Knagge

E den Steuerhebel de ergreift, so wird dadurch das Ventil V geschlossen, worauf der Treibkolben zum Stillstand gelangt, sowie auch die Sperrklinke a aus a_1 ausgehakt, so daß nun die Welle d_1 durch das Gegengewicht Q_1 von rechts nach links gedreht und dadurch das Ablaßventil eröffnet werden kann. Jetzt nimmt der vom Kraftwasser abgesperrte Treibkolben seine rückgängige Bewegung, worauf ein neues Spiel beginnt.

Hülfswassersäulenmaschinen. Die Verhältnisse der Steuerung durch eine Hülfswassersäulenmaschine lassen sich sehr gut aus dem Grundrisse in Fig. 561 und dem zugehörigen Durchschnitte Fig. 562 von der großen Wassersäulenmaschine im Leopoldschachte bei Schemnitz ersehen. §. 311

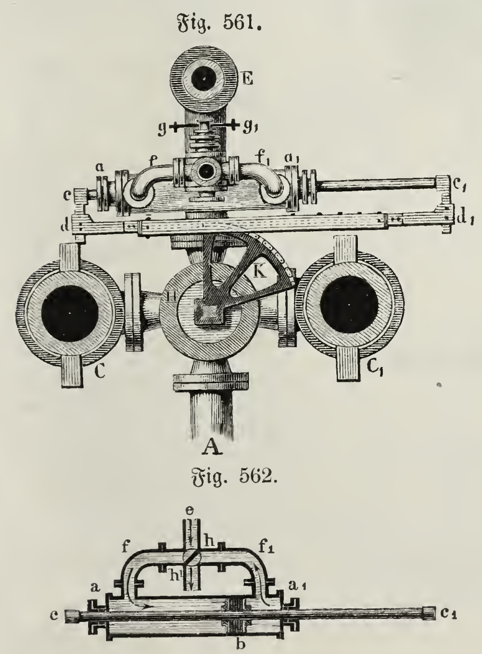


Fig. 561.

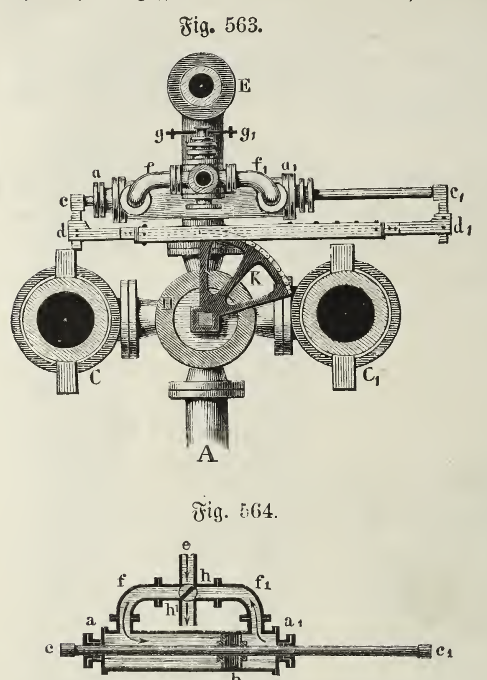
Fig. 562.

Diese Maschine ist ebenfalls zweicylindrig, C ist der eine und C_1 der andere Cylinder, E die Einfallröhre, A das Ausgußrohr, H der Steuerhahn (s. Fig. 548) und K ein auf dem Kopfe desselben fest aufsitzender Quadrant. Die Hülfssteuermaschine besteht aus einem horizontalen Treibcylinder aa_1, dem Treibkolben b und dessen Kolbenstange cc_1. Diese ist durch Querarme mit der eigentlichen Steuerstange dd_1 verbunden, so daß sie mit dieser einen rectangulären Rahmen bildet; endlich ist die letzte Stange mit dem quadrantförmigen Hahnschlüssel K durch zwei entgegengesetzt laufende Laschenketten so verbunden, daß die hin- und hergehende Bewegung des Kolbens b eine Drehung des Hahnes um 90° hin und zurück hervorbringt. Die Steuerung der Hülfsmaschine erfolgt durch den horizontal liegenden Hahn hh_1 mit zwei Bohrungen wie beim Hauptsteuerhahne H. Das Druckwasser wird durch ein enges mit der Einfallröhre E verbundenes Röhrchen e nach dem Hahne hh_1, und von da durch die Communicationsröhrchen f und f_1 bald auf die eine, bald auf die andere Fläche des Kolbens b geleitet, so daß dieser in die Bewegung hin und her versetzt

wird, und zugleich das seiner Bewegung entgegenstehende und von der Einfallröhre abgesperrte Steuerwasser durch die andere Hahnbohrung hindurch und von da durch ein nach unten gerichtetes Ausgußrohr zum Austritte nöthigt. Die Drehung des kleinen Hahnes $h h_1$ hin und zurück erfolgt durch einen doppelarmigen Schlüssel $g g_1$, welcher mit schwachen Ketten an einen ihm parallelen doppelarmigen Hebel angeschlossen ist, der mit dem Balancier auf einer Welle sitzt, womit die beiden Treibkolbenstangen gekuppelt sind. Das ganze Steuerungsspiel ist nun leicht zu übersehen; während des Aufsteigens des einen Treibkolbens und des Niedersteigens des anderen wird der Hahn $h h_1$ durch den Hebel $g g_1$ umgedreht, dadurch die Communication der Druckwasser mit dem Cylinder $a a_1$ auf der einen Seite aufgehoben und auf der anderen Seite hergestellt, und auf diese Weise eine Kraft erzeugt, welche den Kolben b sammt Hahn H in die entgegengesetzte Stellung bringt, so daß nun der erste Treibcylinder von der Einfallröhre abgesperrt, der andere aber damit in Verbindung gesetzt wird, und hierauf das entgegengesetzte Treibkolbenspiel vor sich gehen kann.

Fig. 563.

Fig. 564.

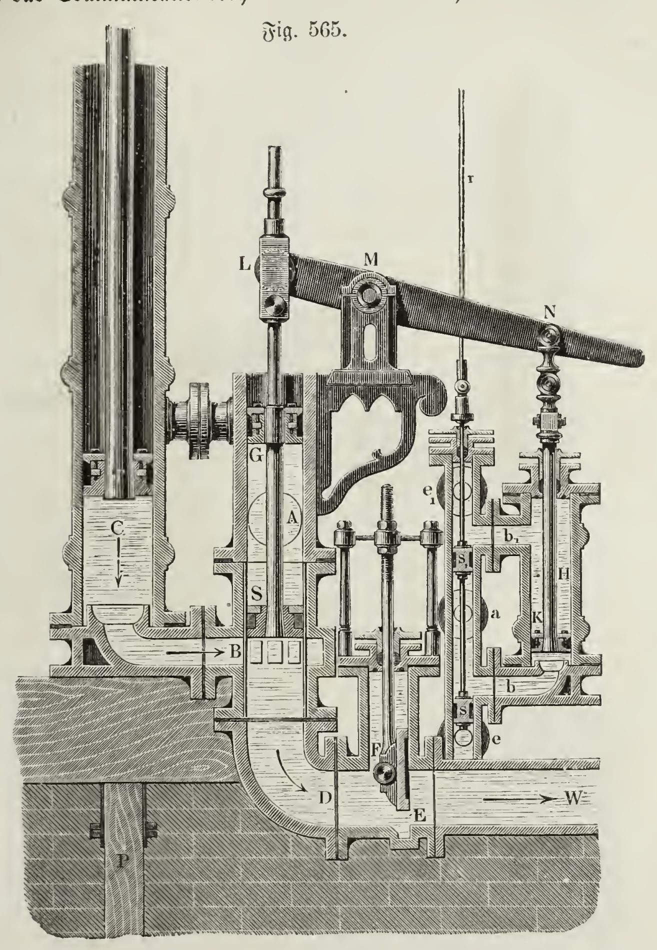


Anmerkung. Die Leopoldschachter Maschine hat das bedeutende Gefälle von 710 Fuß (Oesterr. Maß), den Hub von 8 Fuß und einen Kolbendurchmesser von nur 11 Zoll; jeder Kolben spielt in der Minute dreimal.

§. 312 Die Umsteuerung durch eine Hülfsmaschine läßt sich auch sehr gut aus der Abbildung in Fig. 565 ersehen, welche den Durchschnitt einer von Herrn Darlington für die Alport-mines in Derbyshire construirten Wassersäulenmaschine darstellt. Diese Zeichnung führt den Stand der Maschine in dem Augenblicke vor Augen, wo der Treibkolben T beinahe seinen Niedergang vollendet und die Hülfsmaschine H umgesteuert hat. Bei diesem

Niedergange des Treibkolbens fließt das Wasser aus dem Treibcylinder C durch das Communicationsrohr B in den Steuercylinder $A\,D$ und von da

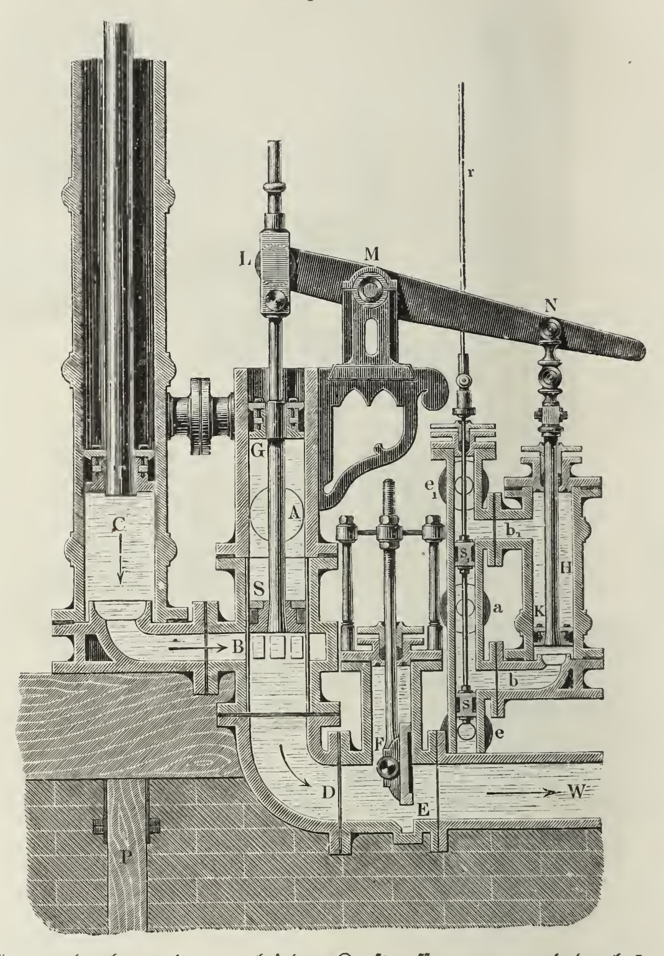
Fig. 565.



durch das Kropfrohr D und durch die Oeffnung E unter dem Schieber F in das Unterwasser W. Die Hülfsmaschine ist eine doppeltwirkende; ihr Treibcylinder H steht durch die Communicationsröhren b und b_1 mit seinem Steuercylinder $e\,a\,e_1$ in Communication, während letzterer durch ein Rohr bei a mit der Kraftwassersäule und durch die Röhren bei e und e_1 mit dem Unterwasser W in Verbindung ist. Die beiden Steuerkolben s und s_1 der Hülfsmaschine sitzen auf einer Stange $r\,s$, welche mit der Treibkolbenstange $R\,T$ verbunden ist und von derselben mit auf- und niedergezogen

wird. Auf diese Weise ist beim Niedergange des Treibkolbens das Kolbenpaar s, s_1 ebenfalls niedergegangen und in die in der Figur angegebene

Fig. 566.



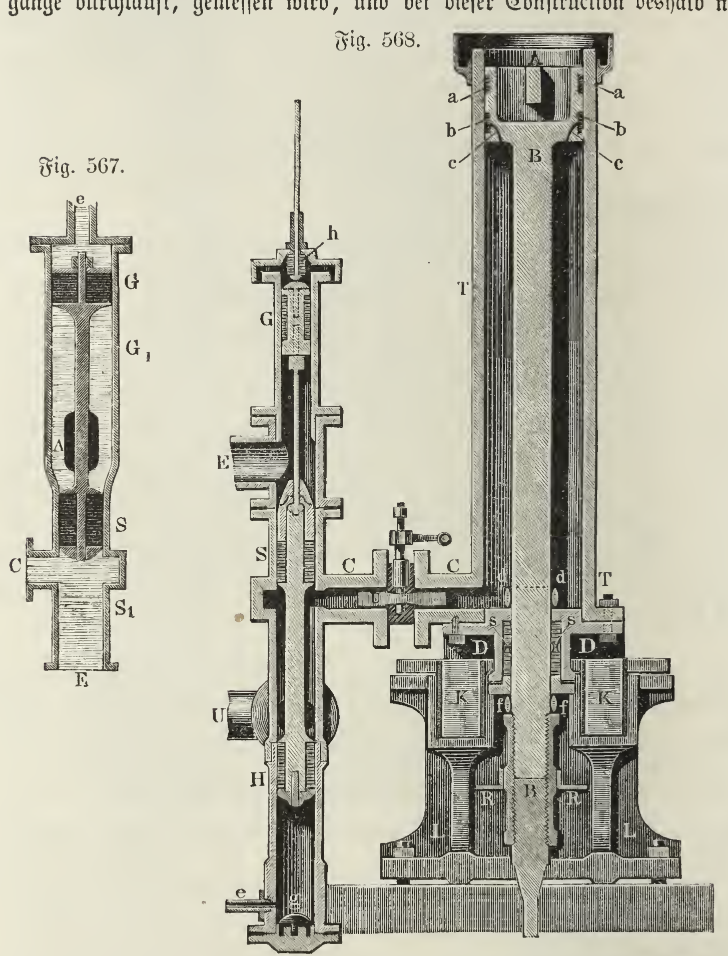
Stellung gebracht worden, wobei das Kraftwasser aus a und durch b unter den Treibkolben K der Hülfsmaschine, dagegen das todte Wasser über K durch b_1 und e_1 zum Abflusse gelangen kann. Der nun aufsteigende Treibkolben der Hülfsmaschine schiebt mittels seiner Stange KN und durch einen um M drehbaren Hebel LMN das Steuerkolbenpaar S, G der Hauptmaschine abwärts, so daß hierbei nicht allein die Communication zwischen B und D aufgehoben und der niedergehende Treibkolben T zum Stillstande gebracht, sondern auch zuletzt noch die Communication des Treibcylin=

ders mit der bei A in den Steuercylinder einmündenden Kraftwassersäule hergestellt wird. Nach Beendigung des Aufganges von K und des Niederganges von GS wirkt das Wasser in der Einfallröhre mit voller Kraft auf den Treibkolben T und treibt nun diesen empor, wobei zugleich das Steuerkolbenpaar s, s_1 steigt; und kommt der Treibkolben nahe an das Ende seines Aufganges, so ist s, s_1 in seinem höchsten Stande angelangt, wobei das Kraftwasser auf dem Wege $a b_1$ über den Treibkolben K der Hülfsmaschine geleitet und dieser Kolben zum Niedergange genöthigt wird. Hierbei wird nun das Steuerkolbenpaar SG der Hauptmaschine wieder aufgezogen, und dabei nicht allein der Zutritt des Kraftwassers zum Treibcylinder C aufgehoben und folglich der aufsteigende Treibkolben zum Stillstande gebracht, sondern auch die Communication mit dem Austragrohre DE hergestellt, so daß nun durch dasselbe das beim Aufgange verbrauchte Aufschlagwasser durch E in das Unterwasser W abfließen kann.

Eine kurze Beschreibung dieser Maschine nebst Abbildungen enthält die englische Uebersetzung von der ersten Auflage dieses Werkes. Hiernach besteht diese Maschine aus zwei neben einander stehenden Treibcylindern von 24 Zoll Weite und 20 Fuß Höhe, welche, bei einem Gefälle von 130 Fuß, von einer 24 Zoll weiten Einfallröhre gleichzeitig gespeist werden. Die Treibkolbenstangen von beiden Cylindern sind oben durch ein starkes, in einer Senkrechtführung laufendes Oberhaupt mit einander verbunden, und das an dem letzteren angehangene Pumpengestänge P (der Lastmaschine) befindet sich zwischen beiden Treibkolbenstangen, geht also auch mit diesen gleichzeitig auf und nieder. Der Steuercylinder ist 18 Zoll und der Treibcylinder der Hülfsmaschine ungefähr 12 Zoll weit. Der Zutritt des Kraftwassers wird durch einen ähnlichen Schieber (engl. sluice-valve) regulirt wie der Austritt desselben.

Steuercylinder. Bei den größeren Maschinen neuerer Construction §. 313
ist nach dem Muster der Reichenbach'schen Maschinen in Baiern der Steuer- und Gegenkolben der Hauptmaschine mit dem Treibkolben der Hülfsmaschine in einer und derselben Röhre, dem sogenannten Steuercylinder, zugleich eingeschlossen, und bei einigen Maschinen verrichtet sogar der Gegenkolben zugleich mit die Dienste des Treibkolbens der Hülfsmaschine, wodurch allerdings eine große Vereinfachung erlangt wird. Am einfachsten ist die in Fig. 567 (a. f. S.) abgebildete und an mehreren Maschinen in Freiberg angewendete Construction. Es ist hier S der Hauptsteuer-, und G der Gegen- und Hülfstreibkolben, ferner bei C die Communication mit dem Haupttreibcylinder, sowie bei E die Communication mit der Einfallröhre und A die Austrittsmündung für das Kraftwasser; endlich ist bei e die Communication mit der Steuerung der Hülfsmaschine, welche hier in einem Hahne besteht

Der Kolben G ist größer als S, und es geht daher die Steuerkolbenverbindung SG nieder, sowie oben bei e das Kraftwasser zugelassen wird, und umgekehrt, es steigt dieselbe in Folge der Kraft auf S empor, sowie das Kraftwasser oben bei e abgesperrt ist. Hierbei wird bei jedem Spiele ein gewisses Steuerwasserquantum verbraucht und der Wirkung auf den Treibkolben entzogen, welches durch den Raum, den G bei seinem Auf- oder Niedergange durchläuft, gemessen wird, und bei dieser Construction deshalb nicht



sehr klein ist, weil der Kolben G mindestens noch einmal so viel Querschnitt haben muß als der Kolben S, dessen Querschnitt man doch nicht kleiner nimmt als den der Einfall- oder Communicationsröhren.

Bei der in Fig. 568 abgebildeten Steuerung der Clausthaler Maschine ist dieser Aufwand an Steuerwasser kleiner, weil hier drei Kolben, nämlich der Hauptsteuerkolben S, der Gegenkolben G und der Hülfstreib- oder Wendekolben H vorkommen, und der letzte etwas schwächer ist als der erste. Das Steuerwasser wird hier von unten durch das Rohr e in den Steuercylinder geführt, und die Umsteuerung des Kolbens erfolgt mittels eines kleinen Hahnes, durch den das Wasser erst hindurchgeht, ehe es nach e gelangt, und durch welchen es auch nach vollbrachter Drehung ausgetragen wird. Die Bewegung dieses Hahnes erfolgt durch eine stehende Welle mit zwei knieförmig gebogenen Armen, welche ein auf der Treibkolbenstange festsitzender Teller bald nach der einen, bald nach der anderen Seite wendet.

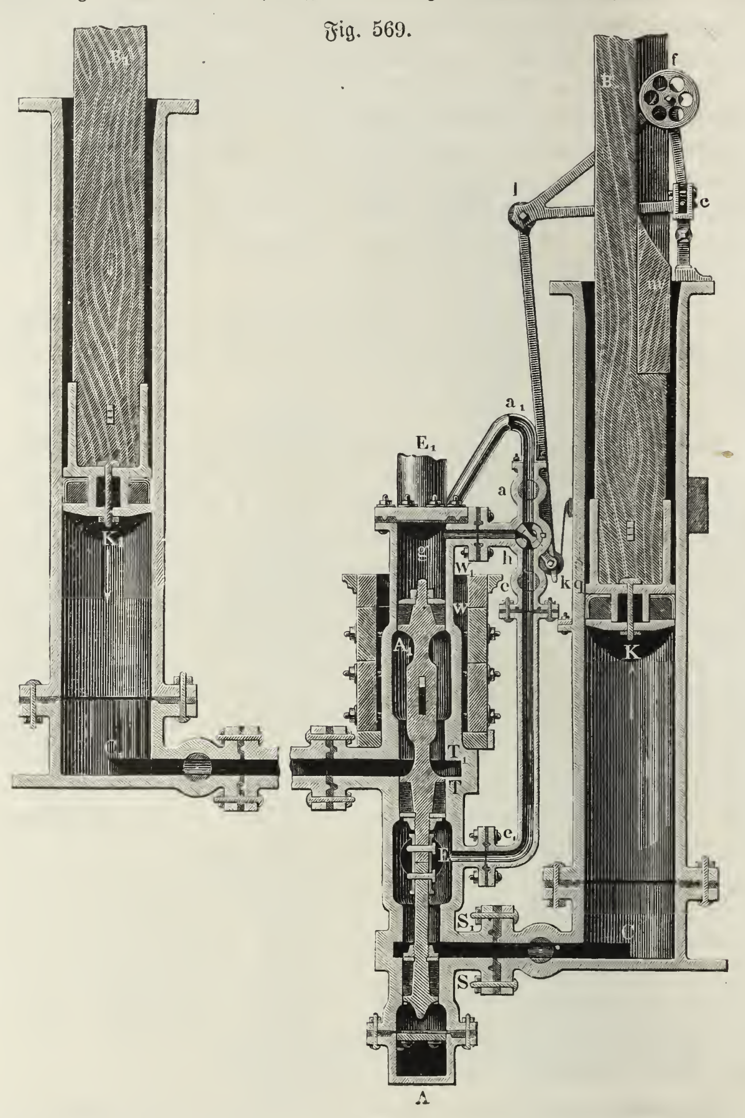
Anmerkung. Die Clausthaler Wassersäulenmaschinen haben ein Gefälle von 612 Fuß, einen Kolbendurchmesser von $16\frac{1}{2}$ Zoll und einen Hub von 6 Fuß, und machen pr. Minute vier Spiele.

Wassersäulenmaschine auf Alte Mordgrube. Die Einrichtung und der Gang einer zweicylindrigen Wassersäulenmaschine lassen sich sehr gut durch nähere Betrachtung des in Fig. 569 (a. f. S.) abgebildeten Verticaldurchschnittes der Maschine auf Alte Mordgrube bei Freiberg vergegenwärtigen. Es sind hier CK und $C_1 K_1$ die beiden Treibcylinder, K der eine und K_1 der andere Treibkolben, ferner S und T die beiden Steuerkolben, sowie W der Wende- oder Hülfskolben, und S_1, T_1 und W_1 bezeichnen diejenigen Stellen im Steuercylinder $A T W_1$, welche diese drei Kolben bei der entgegengesetzten Bewegung der Treibkolben einnehmen. Es ist ferner E die Einmündung der Einfallröhre $E_1 E$ in den Steuercylinder, CS das Communicationsrohr für den ersten und $C_1 T$ das Communicationsrohr für den anderen Treibcylinder, sowie A die Austragmündung des ersten und A_1 (fast ganz von der Steuerkolbenstange gedeckt) die Austragmündung des zweiten Cylinders. Die beiden Treibkolbenstangen BK und $B_1 K_1$ sind durch einen gleicharmigen Hebel oder sogenannten Balancier (in der Figur nicht abgebildet) so mit einander verbunden, daß bei dem Aufgange der einen Kolbenstange der Niedergang der anderen erfolgt. Hiernach ist nun leicht zu übersehen, wie bei dem abgebildeten tieferen Steuerkolbenstande das Kraftwasser den Weg $E S_1 C$ einschlägt und den Kolben K emportreibt, dagegen der Kolben K_1 niedergeht und das todte Wasser auf dem Wege $C_1 T_1 A_1$ zum Austritt gelangt. §. 314

Die Hülfssteuerung erfolgt durch einen schon oben (§. 303) näher beschriebenen, doppelt gebohrten Hahn h, Fig. 570 (a. S. 729), welcher in I äußerlich und in II. im Durchschnitt abgebildet ist. Dieser Hahn steht durch die Röhre $e e_1$ mit der Einfallröhre, und durch die Röhre $g h$ mit dem Steuercylinder

in Verbindung. Man kann nun auch leicht ermessen, wie bei der einen Stellung von h das Kraftwasser den Weg $E e_1 e h g W$ nehmen und den

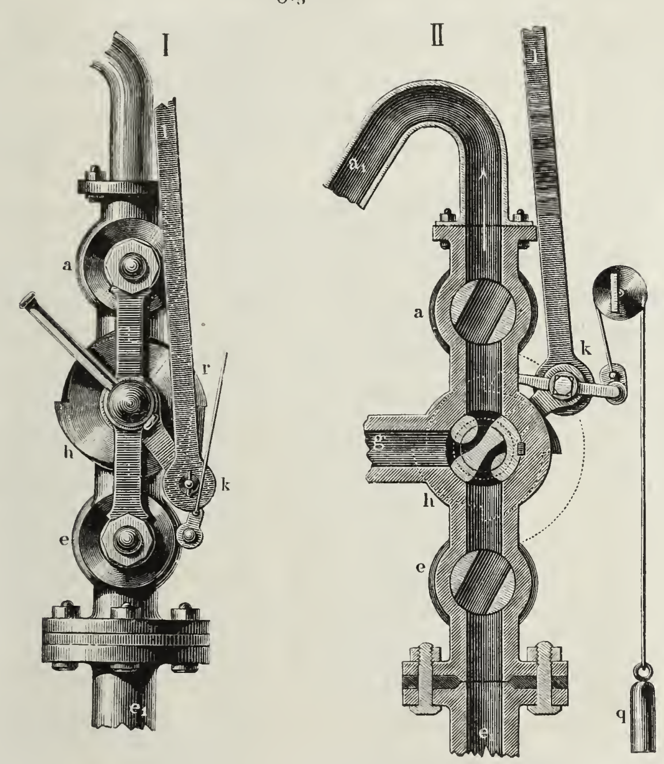
Fig. 569.



Wendekolben W niederdrücken muß, und wie umgekehrt, bei der zweiten Stellung von h, das Kraftwasser von W abgesperrt wird, daher das Aufsteigen der Kolbenverbindung STW, das Zurücklaufen des Steuerwassers

durch gh und der Austritt desselben durch aa_1 erfolgen kann. Damit die Steuerkolbenverbindung beim Absperren des Druckwassers von W empor-

Fig. 570.



steige und beim Zulassen desselben niedergehe, ist allerdings nöthig, daß der durch das Kraftwasser von unten gedrückte Steuerkolben T mehr Querschnitt habe, als der Steuerkolben S, welcher durch das Kraftwasser von oben gedrückt wird, und daß der Wendekolben einen hinreichend großen Querschnitt habe, damit die Wasserdrücke auf W und S zusammen den entgegengesetzten Wasserdruck auf T übertreffen.

Was endlich noch die äußere Steuerung dieser Maschine anlangt, so besteht diese wesentlich aus dem mit vier Zähnen ausgerüsteten Steuerrädchen r, der Klinke rk, der Stange kl, dem Winkelhebel lcf mit seinem Frictionsrade f und den zwei gegen einander gestellten und auf der Treibkolbenstange BK befestigten Keilen m und m_1 (der letztere hier nicht sichtbar). Die Klinke rk ist übrigens noch durch Arme mit der Axe des Hahnes verbunden, und wird in ihrem Eingriffe zwischen die Zähne des Rädchens

r noch durch ein kleines Gegengewicht q unterstützt. Wenn der Treibkolben K nahe am Ende seines Auf- oder Niederganges gekommen ist, so schiebt sich der Keil m (oder m_1) unter das Frictionsrad, dreht dadurch den Hebel lcf um etwas, wodurch nun auch die Stange lk angezogen und das Rad sammt Hahn h mittels der Klinke um einen Quadranten gedreht wird; wenn später wieder der Treibkolben ein kleines Stück seines umgekehrten Weges zurückgelegt hat, so fällt der Hebel wieder nieder und es gleitet nun die Klinke über den folgenden Zahn herab, den sie nahe am Ende dieses Treibkolbenspieles wieder ergreift &c.

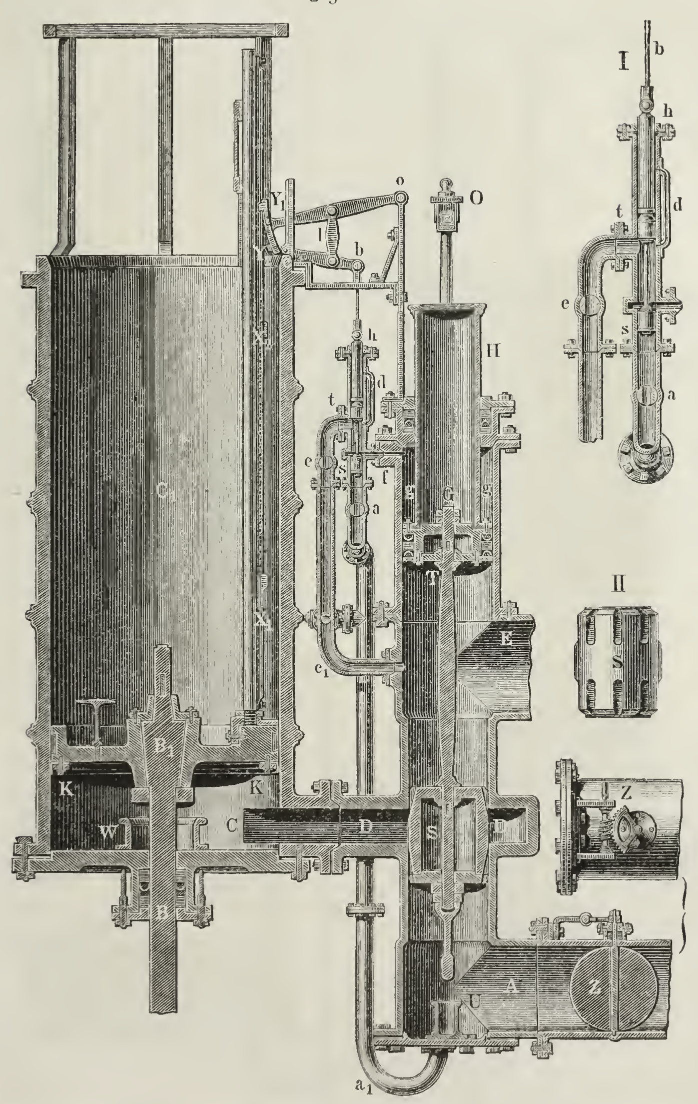
Anmerkung. Die Wassersäulenmaschine auf Alte Mordgrube hat ein Gefälle von 356 Fuß, einen Hub von 8 Fuß, eine Treibcylinderweite von $1\frac{1}{2}$ Fuß und macht vier Doppelspiele pr. Minute.

§. 315 **Wassersäulenmaschine zu Huelgoat.** Eine der schönsten und vollkommensten Wassersäulenmaschinen ist die zu Huelgoat in der Bretagne: sie ist einfachwirkend eincylindrig, jedoch steht neben ihr eine vollkommen gleiche Schwestermaschine. Die wesentliche Einrichtung dieser Maschine führt Fig. 571 vor Augen und ihre Bewegungsverhältnisse wird man aus Folgendem kennen lernen. CC_1 ist der Treibcylinder, KK_1 der Treibkolben und BB_1 die bei B durch eine Stopfbüchse gehende Treibkolbenstange Während bei der Mordgrubener Maschine die Treibkolben durch einen einzigen breiten Stulp abgelidert sind, ist hier, wie sich aus der Figur leicht ersehen läßt, der Treibkolben durch einen eingesetzten Lederkranz und durch einen aufgeschraubten Stulp zugleich gelidert. Der zur Seite stehende Steuercylinder ASG ist mit dem Treibcylinder durch das Communicationsrohr CD verbunden, die Einfallröhre mündet bei E und das Austragrohr bei A in denselben ein. Mit dem im Niedergange begriffenen und auf dem halben Wege befindlichen Steuerkolben S ist durch die Stange ST ein Gegenkolben T von größerem Durchmesser verbunden; es wird daher diese Kolbenverbindung durch das Kraftwasser emporgetrieben, so lange nicht noch eine dritte Kraft hinzutritt. Diese dritte Kraft wird dadurch hervorgebracht, daß man das Kraftwasser durch die Röhre e_1ef über den Kolben T leitet; um aber bei dem dadurch erzeugten Niedergange der Steuerkolbenverbindung nur eine kleine Quantität von Steuerwasser nöthig zu haben, ist auf T der hohle Cylinder GH aufgesetzt, welcher bei H durch eine Stopfbüchse geht und zur Aufnahme des Steuerwassers nur den ringförmigen Raum darbietet.

Das abwechselnde Zulassen und Absperren des Kraftwassers von dem hohlen Raume gg wird durch eine Hülfssteuerung bewirkt, welche der Hauptsteuerung ganz ähnlich ist, und wie diese aus dem eigentlichen Steuerkolben s, dem Gegenkolben t und dem durch die Stopfbüchse h gehenden cylindrischen, gleichsam nur eine dicke Kolbenstange bildenden Aufsatze besteht. Bei dem in der Figur ausgedrückten Stande von sth kann das

Kraftwasser ungehindert den Weg ef nach g einschlagen, wird aber sth gehoben, so daß s über f zu stehen kommt, so wird die Communication

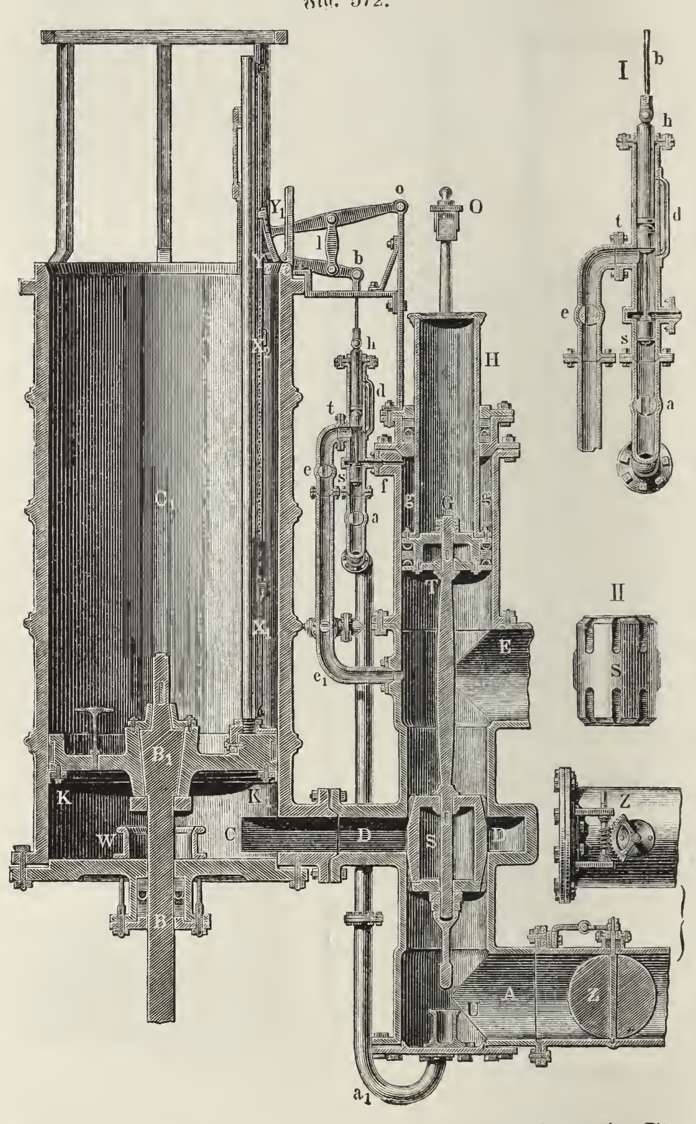
Fig. 571.



unterbrochen und zugleich dem den ringförmigen Raum gg ausfüllenden Steuerwasser ein Weg aa_1 eröffnet, durch welchen es beim nunmehr erfolgen=

den Aufgange von ST abfließen kann. Um endlich die Bewegung der Hülfssteuerkolbenverbindung $s t h$ von der Kraftmaschine selbst abzuleiten, ist auf

Fig. 572.



dem Treibkolben KK_1 eine oben in einer Führung laufende runde Stange aufgesetzt und mit dieser eine zweite rectanguläre Stange verbunden, welche

eine Reihe von Löchern hat, durch welche die Stiele der Däumlinge X_1 und X_2 in entgegengesetzten Richtungen gesteckt werden. Außerdem ist aber die Stange bh an zwei um c und o drehbaren und durch l mit einander verbundenen Hebeln aufgehangen, wovon der eine in ein Cirkelstück ausläuft, das sich in zwei anderen Däumlingen oder Knöpfen Y_1 und Y_2 endigt. Nahe am Ende des Treibkolbenaufganges trifft nun X_1 auf Y_1 und es gelangt so sth in den höchsten Stand, und nahe am Ende des Treibkolbenniederganges nimmt X_2 den Knopf Y_2 mit und es wird mittels der Hebel die Stange sth auf den tiefsten Stand zurückgeführt. Es ist nun leicht einzusehen, wie auf diese Weise die Umsteuerung durch ST und so auch ein regelmäßiges Auf- und Niedergehen von K, K_1 erfolgen muß.

Wassersäulenmaschine auf der Grube Centrum. Die wesentliche Einrichtung einer vom Herrn Oberbergrath Althans construirten Wassersäulenmaschine auf der Grube Centrum bei Eschweiler ist aus der Abbildung Fig. 573 (a. f. S.) zu ersehen. Diese Maschine hat nur 45 Fuß Gefälle, und ein Aufschlagsquantum von 9 Cubikfuß p. s. Die Einfallröhre, welche das Wasser aus einem tiefen Klärsumpf entnimmt, ist 32 Zoll weit und hat sammt einem 145½ Fuß langen horizontalen Mittelstück die Totallänge von 227½ Fuß. Der Treibkolben hat einen Durchmesser von 4 Fuß, und macht pr. Minute 6 Spiele von 7 Fuß Hub. Es ist daher die mittlere Kolbengeschwindigkeit §. 316

$$v = \frac{7 \cdot 6 \cdot 2}{60} = 7/5 \text{ Fuß},$$

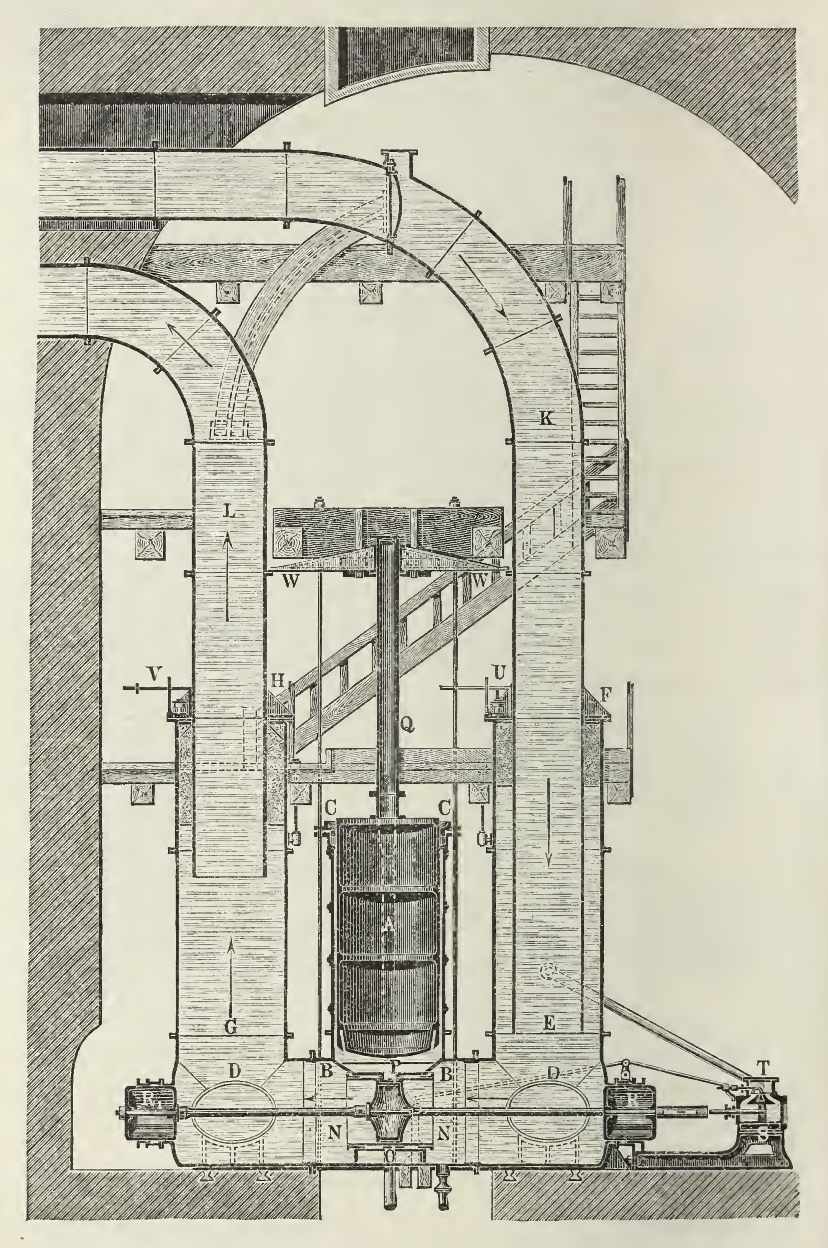
und die des Wassers in der Einfallröhre:

$$v_1 = \left(\frac{48}{32}\right)^2 v = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot 7/5 = \frac{9 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{63}{20} = 3{,}15 \text{ Fuß}.$$

Da hier die Länge der Einfallröhren 5mal so groß ist als das Gefälle so ist diese mäßige Wassergeschwindigkeit ganz am rechten Orte. Der Treibkolben A besteht in einem sogenannten Plunger, welcher durch eine im Treibcylinder BC sitzende Stopfbüchse abgelidert ist. Dieser Cylinder ist oben offen, und steht unten auf einem 16 Fuß langen und 4 Fuß weiten Rohr DD, welches an den Enden fest aufruht, und zwei andere Cylinder EF und GH von 4 Fuß Weite und 12 Fuß Höhe trägt, in welche einerseits die Einfallröhre KF und andererseits die 26¼ Fuß hoch aufsteigende Austrageröhre HL einmündet. Beide Röhren sind mit den nöthigen Klappen versehen.

Der Steuerkolben M liegt senkrecht unter dem Treibkolben, hat bei einer Höhe von 11 Zoll einen Durchmesser von 27 Zoll und einen Schub von 16 Zoll. Der Steuercylinder enthält einen 5 Zoll breiten Gürtel von

Fig. 573.



vielen vierseitigen Mündungen, durch welche er mit dem nach dem Treibcylinder führenden Communicationsrohr OP in Verbindung steht. Die Steuerkolbenstange ist außer dem Steuerkolben noch mit zwei Gegenkolben R und R_1 von ebenfalls 27 Zoll Durchmesser ausgerüstet. Zur Bewegung dieser Steuerkolbenverbindung dient eine Hülfswassersäulenmaschine ST, deren Kolben S bei einem Durchmesser von 9 Zoll das Steuerkolbensystem beim Umsteuern 16 Zoll hin- oder zurückschiebt. Die Steuerung dieser Hülfsmaschine besteht in einem Schieber T, welcher mittels Hebel durch die am Gestänge angeschraubten Knaggen abwechselnd hin und her geschoben wird. Die Höhe der Hinterwassersäule beträgt 26 Fuß, daher ist die Höhe der Drucksäule bei Beginn des Kolbenaufganges $= 45 + 26 = 71$ Fuß, und dieselbe am Ende des Kolbenhubes $= 71 - 7 = 64$ Fuß, so daß das Verhältniß der Verminderung der Kolbenkraft zum mittleren Kraftwerth des ganzen Kolbenaufganges $= \frac{7}{64 + 3,5} = \frac{14}{135} = 0,104$ beträgt. Beim Niedergange des Kolbens ist dagegen das Verhältniß der Zunahme des Widerstandes zum mittleren Widerstande der Hinterwassersäule $= \frac{7}{21 + 3,5} = \frac{14}{35} = 0,40.$

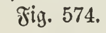
Die Röhren EF und GH dienen zugleich als Windkessel. Die durch das Wasser im oberen Raume derselben abgesperrte Luft nimmt die Stöße der bewegten Wassersäulen auf, wenn dieselben durch die Steuerung abgesperrt werden; es wird daher durch dieselben ein sanfter Gang der Maschine erlangt. Die Luft, welche sich im Laufe der Zeit aus dem Windkessel durch die Wände, oder durch Vermengung mit dem Wasser entweicht, wird durch eine kleine Luftpumpe von Zeit zu Zeit wieder ersetzt. Die Regulirung der Geschwindigkeit des Treibkolbens wird durch Hubstellung des Steuerkolbens bewerkstelligt. Diese Maschine dient zur Wasserhebung mittels Pumpe, deren Kolben an dem Schachtgestänge angeschlossen sind, welches von dem Treibkolben der Wassersäulenmaschine bewegt wird.

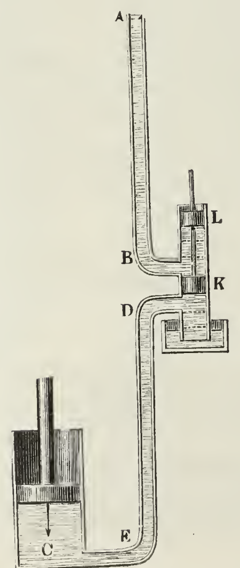
Anmerkung. Näheres über diese Maschine theilt eine Abhandlung des Herrn Bergmeisters Bauer im 4. Bande der Zeitschrift des deutschen Ingenieurvereins mit.

Balancier. Zur Regulirung des Ganzen einer Wassersäulenmaschine sind noch mehrere Hülfsvorrichtungen nöthig, welche wir in Folgendem noch näher kennen lernen müssen. Was zunächst den Auf- und Niedergang des Treibkolbens betrifft, so wird dieser durch einen sogenannten Balancier, d. i. durch eine Vorrichtung regulirt, welche die Bewegung des Treibkolbens nach der einen Richtung hin unterstützt, und die Bewegung desselben nach §. 317

der entgegengesetzten Richtung hindert, so daß das Kolbenspiel seinen regelmäßigen Fortgang hat, ohne eine bedeutende Geschwindigkeitsveränderung zu erleiden. Bei den auf beiden Seiten gleichbelasteten zweicylindrigen Maschinen besteht der Balancier, wie wir aus dem Obigen wissen, in einem gleicharmigen Hebel, welcher beide Treibkolbenstangen mit einander verbindet; hat aber die Maschine nur einen Cylinder, so ist eine fremde Kraft zum Ausgleichen nothwendig, und je nachdem nun diese Kraft in dem Gewichte eines festen Körpers oder in dem Drucke einer Wassersäule besteht, hat man es mit einem mechanischen oder mit einem hydraulischen Balancier zu thun. Da im dritten Theile dieses Werkes von diesen Vorrichtungen speciell gehandelt wird, so genügen hier folgende allgemeine Bemerkungen.

Der mechanische Balancier besteht in einem doppelarmigen Hebel, welcher auf der einen Seite mit Gewichten beschwert und auf der anderen Seite mit der Kolbenstange oder dem Gestänge überhaupt so verbunden ist, daß jene dem Gewichte desselben entgegenwirken und dadurch dem Aufgange desselben zu Hülfe kommen, dagegen aber den Niedergang desselben verzögern, so daß zu ersterem nach Befinden doppelt so viel Zeit verwendet wird, als zu letzterem. Der hydraulische Balancier hingegen besteht in einer zweiten Röhrentour, welche statt des einfachen Ausgußrohres vom Steuercylinder aus aufwärts steigt, und durch welche das todte Wasser abgeführt wird, so daß es eine Wassersäule bildet, welche dem Gewichte des Gestänges beinahe das Gleichgewicht hält, und dasselbe mit einer gemäßigten Geschwindigkeit niedergeht.


Fig. 574.



Bei der in Fig. 572 abgebildeten Maschine zu Huelgoat, sowie auch bei der Clausthaler Maschine, von welcher in Fig. 568 ein Durchschnitt abgebildet ist, sind hydraulische Balanciers angewendet, es besteht hier das Austragerohr in einer Steigröhre, welche das Wasser nach vollbrachter Wirkung auf einen Theil des ganzen Gefälles wieder emporleitet.

Wenn man den hydraulischen Balancier, die sogenannte Gegen- oder Hinterwassersäule DE zwischen dem Treibcylinder C und dem Steuercylinder KL, Fig. 574, anbringt, so wird die doppelte Rohrführung erspart.

In der mechanischen Leistung kann natürlich weder der eine noch der andere Balancier eine Steigerung hervorbringen. Das was bei dem Treibkolbenaufgange durch einen Balancier an Effect gewonnen wird, geht natürlich wieder beim Niedergange desselben verloren. Der hydraulische Ba-

lancier hat den Vortheil der größeren Einfachheit, der mechanische Balancier dagegen den Vortheil, daß seine Wirksamkeit durch Zulegen von Gewichten beliebig gesteigert werden kann.

Stellhähne. Wesentlich wichtig sind noch die verschiedenen Obturatoren, §. 318
nämlich Stellhähne oder, nach Befinden, Stellventile oder Stellschieber einer Wassersäulenmaschine, weil sich dadurch nicht nur der Gang der Kraftmaschine an sich, sondern auch der Gang ihrer Steuerung reguliren läßt. Alle diese Vorrichtungen wirken natürlich nur negativ, d. h. es kann durch diese nur eine Kraftstörung, nicht aber eine Kraftvermehrung hervorgebracht werden, und aus diesem Gesichtspunkte betrachtet, sind diese Apparate keineswegs sehr willkommene Theile einer Wassersäulenmaschine. Die Wirkung dieser Theile besteht nämlich nur darin, der Bewegung des Wassers in einer Röhre ein Hinderniß entgegenzusetzen, so daß dieses langsamer zu gehen genöthigt wird. Um nun sowohl den Auf- als auch den Niedergang des Treibkolbens, und ebenso nicht nur den Auf-, sondern auch den Niedergang des Steuerkolbens zu reguliren oder zu mäßigen, hat man vier Hähne oder Klappen nothwendig, eine in der Einfallröhre und eine im Ausgußrohre, wie z. B. Z, Fig. 572, ferner einen Hahn in der Röhre, welche das Steuerwasser über den Hülfskolben führt, und einen solchen in der Röhre, welche das Steuerwasser von der Maschine abführt, wie z. B. e und a in den Figuren 569, 570 und 571. Wenn nun auch eine bedeutende Ueberwucht bei der Bewegung des Treib- oder Steuerkolbens nach der einen oder anderen Richtung hin vorhanden ist, so läßt sich dieselbe sogleich durch Drehung des einen oder anderen Stellhahnes mäßigen, da in dem Widerstande, welchen man der mit dem Kolben gleichzeitig in Bewegung befindlichen und mit diesem unzertrennlich verbundenen Wassersäule entgegensetzt, diesem Kolben zugleich mit ein Bewegungshinderniß erwächst. Geht umgekehrt, der Auf- oder Niedergang des einen oder des anderen Kolbens zu langsam vor sich, so kann durch Zurückdrehen des entsprechenden Hahnes eine größere Geschwindigkeit desselben erlangt werden; jedoch hat dies, wie wir schon wissen, bei völliger Oeffnung des Hahnes seine Grenze. Uebrigens läßt sich die Regulirung der Geschwindigkeit des Treibkolbens auch durch eine Stellung im Ausschub des Steuerkolbens erlangen, indem durch Verminderung des ersteren die Zugänge zum Treibcylinder beliebig verengt werden können.

Die Krafttödtung durch die Stellhähne oder Stellklappen, namentlich aber durch die Stellvorrichtung in der Einfallröhre oder Kraftwassersäule, welche man gewöhnlich Tagepipe zu nennen pflegt, erfolgt bei einer Wassersäulenmaschine gerade so wie die Krafttödtung durch die Schütze bei einer Reactionsturbine. Beide Maschinen stehen in dieser Hinsicht den ober- oder mittelschlägigen Wasserrädern nach (vergl. §. 257 und 289).

Eine Wassersäulenmaschine sollte zur Erlangung des größten Wirkungsgrades immer so stark belastet sein, daß sie bei vollständigem Ausschub des Steuerkolbens, ohne Stellung der Tagepipe ihren regelmäßigen Gang annimmt. Ist nun aber das Arbeitsvermögen dieser Maschine größer als das geforderte Arbeitsquantum, so muß entweder der Ueberschuß durch die Tagepipe vernichtet werden, oder man muß die Maschine mit einem kleineren Hube arbeiten lassen. Wenn das letztere Mittel ausreicht, so ist es allerdings das vorzüglichere, weil dasselbe durch Verminderung des Aufschlages die geforderte Verminderung in der Leistung giebt, und daher den Wirkungsgrad der Maschine nur wenig vermindert, allein dieses Mittel ist bei gegebener Last nicht anwendbar.

Die Veränderung des Hubes einer Wassersäulenmaschine ist durch Verstellung der Daumen oder Keile auf der Treibkolbenstange sehr leicht zu ermöglichen, und aus diesem Grunde ist auch die Stange $X_1 X_2$, Fig. 572, welche mit dem Treibkolben auf- und niedergeht, mit einer Reihe von Löchern versehen. Je näher man die Daumen X_1 und X_2 einander bringt, je zeitiger erfolgt natürlich auch die Umsteuerung und je kleiner ist also auch der Treibkolbenweg.

§. 319 **Leistung der Wassersäulenmaschinen.** Es folgt nun die Theorie und Berechnung der Leistung einer Wassersäulenmaschine. Bedienen wir uns hierbei folgender Bezeichnungen. Der Inhalt der Treibkolbenfläche sei $= F$, der Inhalt des Querschnittes der Einfallröhren $= F_1$, ferner der Durchmesser des Treibkolbens $= d$, der der Einfallröhren $= d_1$ und der der Austragröhre $= d_2$, ferner sei das Gefälle, vom Wasserspiegel im Einfallkasten bis Wasserspiegel des Ausgußkastens gemessen, $= h$, die mittlere Druckhöhe beim Aufgange des Treibkolbens, also die senkrechte Tiefe der gedrückten Kolbenfläche unter dem Wasserspiegel im Einfallkasten, bei mittlerem Kolbenstande, $= h_1$, und die mittlere Druckhöhe beim Niedergange des Kolbens, d. i. die senkrechte Tiefe der Kolbenfläche unter der Ausgußmündung, bei mittlerem Kolbenstande, $= h_2$, noch sei s der Kolbenhub oder Weg des Treibkolbens pr. Spiel (franz. la course du piston; engl. the stroke of piston), l_1 die Länge der Einfall-, l_2 die der Austragröhrenaxe, v die mittlere Kolbengeschwindigkeit, v_1 die mittlere Wassergeschwindigkeit in der Einfall-, sowie v_2 die in der Austragröhre.

Setzen wir zugleich eine einfachwirkende Wassersäulenmaschine voraus, nehmen wir an, daß sie pr. Minute n vollständige Spiele mache und dabei im Durchschnitte pr. Secunde Q Cubikfuß Aufschlagwasser verbrauche.

Der mittlere Druck des Wassers gegen die Treibkolbenfläche F ist $P_1 = F h_1 \gamma$ (s. Bd. I, §. 355), folglich die geleistete Arbeit desselben pr. Spiel, ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse:

$$P_1 s = F s h_1 \gamma,$$

daher pr. Minute:

$$n P_1 s = n F s h_1 \gamma,$$

und endlich die mittlere Leistung pr. Secunde:

$$L_1 = \frac{n}{60} P_1 s = \frac{n}{60} F s h_1 \gamma,$$

oder, da sich $\frac{nFs}{60} = Q$ setzen läßt,

$$L_1 = Q h_1 \gamma.$$

Beim Rückgange des Kolbens wirkt die mittlere Kraft

$$P_2 = F h_2 \gamma$$

der Bewegung desselben entgegen, wird also auch die Arbeit

$$P_2 s = F h_2 s \gamma$$

consumirt, daher ist denn auch der entsprechende Arbeitsverlust pr. Secunde:

$$L_2 = Q h_2 \gamma,$$

und sonach die übrigbleibende zu Gebote stehende Leistung der Maschine:

$$L = L_1 - L_2 = Q (h_1 - h_2) \gamma = Q h \gamma,$$

wie bei jeder anderen hydraulischen Kraftmaschine.

Diese Formel ändert sich nicht, wenn auch der Treibkolben den Treibcylinder nicht vollkommen ausfüllt, wenn, wie z. B. bei dem Mönchskolben, ein Zwischenraum zwischen dem Kolben- und dem Cylinderumfange übrig bleibt, oder wenn der Kolben in seinem tiefsten Stande den Cylinderboden nicht berührt; ebenso bleibt die Formel dieselbe, wenn der Ausgußpunkt unter dem mittleren Kolbenstande befindlich, also h_2 negativ und $h = h_1 + h_2$ ist. Auch kommt auf die Form der Kolbenfläche nichts an (s. Bd. I, §. 361 Anmerkung); es ist stets unter F der Inhalt des Querschnittes rechtwinkelig gegen die Axe desselben zu verstehen, also

$$F = \frac{\pi d^2}{4}$$

zu setzen.

Hierbei muß allerdings vorausgesetzt werden, daß beim Kolbenniedergange nur ein dem Kolbenhube s entsprechendes Wasserquantum Fs austrete, nicht aber alles im Cylinder und, nach Befinden, in der Communications- und in der Ausgußröhre befindliche Wasser. Bei Anwendung eines hydraulischen Balanciers oder eines aufsteigenden Ausgußrohres kann natürlich der letzte Fall gar nicht eintreten; anders ist es aber, wenn das Ausgußrohr abwärts gerichtet ist und unter dem tiefsten Kolbenstande ausmündet. Damit in diesem Falle das Wasser bis zum tiefsten Kolbenstande in dem Cy-

linder zurückbleibe und nicht durch von unten zutretende Luft verdrängt werde, ist es nöthig, einen Ausfluß unter Wasser herzustellen.

Anmerkung. Wir sehen aus dem Obigen, daß die Leistung einer Wassersäulenmaschine nur vom Totalgefälle $h = h_1 - h_2$, nicht aber von den einzelnen Druckhöhen h_1 oder h_2 des Auf- oder Niederganges abhängt, nur findet insofern eine Einschränkung statt, als bei Anwendung eines niedersteigenden Ausgußrohres die Tiefe des Unterwasserspiegels unter dem Kolbenstande noch nicht eine Atmosphärenhöhe ($b = 32{,}8$ Fuß) betragen darf, weil die Atmosphäre durch ihren Druck auf diesen Spiegel in dem Austragrohre nur einer Wassersäule von dieser Höhe das Gleichgewicht zu halten vermag.

§. 320 **Kolbenreibung.** Unter den Nebenhindernissen einer Wassersäulenmaschine ist die Kolbenreibung eins der beträchtlichsten. Da genaue Versuche hierüber bis jetzt noch nicht angestellt worden sind, so bleibt nichts übrig, als dieselbe aus dem Wasserdrucke mit Hülfe eines der bekannten Reibungscoefficienten zu berechnen. Ist die Liderung eine hydrostatische, so erhalten wir die Kraft, mit welcher das Wasser jedes Element f der Liderungsfläche gegen den abzuschließenden Cylindermantel drückt, für den Kolbenaufgang $= f h_1 \gamma$, und für den Niedergang $= f h_2 \gamma$, und daher die entsprechenden Reibungen $= \varphi f h_1 \gamma$ und $\varphi f h_2 \gamma$, wenn φ den Reibungscoefficienten bezeichnet. Obgleich die Kräfte der einzelnen Flächenelemente sehr verschiedene Richtungen haben, so sind doch sämmtliche Reibungen unter sich, und zwar mit der Kolbenaxe, parallel, und es ist daher ihre Mittelkraft oder die Gesammtreibung des Kolbens gleich der Summe der Reibungen aller Liderungselemente, und demnach so zu bestimmen, daß man in obigen Formeln statt f die Summe aller Elemente, d. i. den Inhalt der ganzen Liderungsfläche einsetzt. Bezeichnen wir die Breite dieser Fläche, oder, wenn es zwei Liderungskränze giebt, die Breite beider zusammen, durch e, so können wir den Inhalt der Liderungsfläche durch $\pi d e$ ausdrücken, und erhalten so die beiden Kolbenreibungen:

$$R_1 = \varphi \pi d e h_1 \gamma \text{ und } R_2 = \varphi \pi d e h_2 \gamma.$$

Der leichteren Uebersicht wegen drückt man gewöhnlich diese Reibung so wie auch die übrigen Nebenhindernisse durch das Gewicht einer Wassersäule aus, welche den Treibkolbenquerschnitt zur Grundfläche hat, und deren Höhe h_3 oder h_4 den Gefällverlust ausdrückt, welcher der Kolbenreibung entspricht. Hiernach setzen wir also:

$$R_1 = F h_3 \gamma \text{ und } R_2 = F H_4 \gamma,$$

also auch

$$F h_3 = \varphi \pi d e h_1 \text{ und } F h_4 = \varphi \pi d e h_2,$$

oder

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ eingeführt,}$$

$$\frac{d h_3}{4} = \varphi e h_1 \text{ und } \frac{d h_4}{4} = \varphi e h_2,$$

hiernach die den Kolbenreibungen entsprechenden Gefällverluste:

$$h_3 = 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\,h_1 \text{ und } h_4 = 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\,h_2.$$

Bringt man diese Höhen in Abzug, so erhält man für die mittlere Kraft beim Aufgange:

$$P_1 = F(h_1 - h_3)\gamma = \left(1 - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\right) F h_1 \gamma,$$

und den mittleren Widerstand beim Niedergange:

$$P_2 = F(h_2 + h_4)\gamma = \left(1 + 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\right) F h_2 \gamma,$$

daher die resultirende mittlere Leistung:

$$L = \frac{n}{60}(P_1 - P_2)\,s = \frac{n}{60}\left((h_1 - h_2) - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}(h_1 + h_2)\right) F s \gamma$$

$$= \left(h - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}(h_1 + h_2)\right) Q\gamma = \left[\left(1 - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\right) h - 8\,\varphi\,\frac{e}{d}\,h_2\right] Q\gamma$$

$$= \left[1 - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\left(1 + \frac{2\,h_2}{h}\right)\right] Q h \gamma.$$

Ist die Steighöhe h_2 Null oder sehr klein, so läßt sich einfacher

$$L = \left(1 - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\right) Q h \gamma$$

setzen.

Man ersieht übrigens hieraus, daß der Arbeitsverlust in Folge der Kolbenreibung um so größer ausfällt, je größer $\frac{h_2}{h}$ ist, je tiefer also die Maschine unter dem Ausgußpunkte steht oder je höher das Wasser beim Austragen zurücksteigt.

Um diesen Arbeitsverlust möglichst herabzuziehen, soll man den Liderungskranz nicht unnöthig breit machen. Bei den bestehenden Maschinen liegt $\frac{e}{d}$ innerhalb der Grenzen 0,1 bis 0,2. Der Reibungscoefficient φ ist aber, so lange besondere Versuche hierüber nicht angestellt worden sind, nach Morin, im Mittel 0,25 zu setzen. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun $4\,\varphi\,\frac{e}{d} = 0{,}1$ bis $0{,}2$; es verzehrt also hiernach die Kolbenreibung 10 bis 20 Procent von der ganzen disponiblen Arbeit.

Hydraulische Nebenhindernisse. Ein anderer Arbeitsverlust der Wassersäulenmaschinen entspringt ferner aus der Reibung des Wassers §. 321

in den Einfall- und Austragröhren. Nach der in Band I, §. 427 vorgetragenen Theorie ist der dieser Reibung entsprechende Druckhöhenverlust, wenn ζ den Reibungscoefficienten bezeichnet,

$$h = \zeta \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g};$$

auf die Einfallröhre angewendet aber

$$y_1 = \zeta \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

und auf die Austrageröhre bezogen:

$$z_1 = \zeta \cdot \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g}.$$

Nun ist aber das Wasserquantum pr. Sec.:

$$\frac{\pi d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4} \cdot v_2 = \frac{\pi d^2}{4} v,$$

also

$$d_1^2 v_1 = d_2^2 v_2 = d^2 v$$

oder:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v \text{ und } v_2 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 v,$$

daher lassen sich die Reibungswiderstandshöhen setzen:

$$y_1 = \zeta \cdot \frac{l_1 d^4}{d_1^5} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ und}$$

$$z_1 = \zeta \cdot \frac{l_2 d^4}{d_2^5} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und es ist bei Geschwindigkeiten (v_1 oder v_2) von 5 bis 10 Fuß, $\zeta = 0{,}022$ bis 0,020 einzuführen.

Um diese Widerstandshöhe herabzuziehen, hat man weite Einfall- und Austragröhren anzuwenden und den Treibkolben langsam auf- und niedergehen zu lassen.

Die Bewegung des Wassers in den Röhren einer Wassersäulenmaschine ist insofern noch verschieden von der Bewegung des Wassers in einfachen Röhrenleitungen, als sich die Geschwindigkeit von jener unaufhörlich verändert, bald vernullt, bald zu-, bald abnimmt u. s. w., während die Geschwindigkeit in dieser immer eine und dieselbe bleibt. Aus diesem Grunde spielt denn auch bei einer Wassersäulenmaschine die Trägheit des Wassers eine größere Rolle, als bei der Bewegung des Wassers in einfachen Leitungen. Um eine Masse M in die Geschwindigkeit v zu versetzen, ist bekanntlich die mechanische Arbeit $\frac{Mv^2}{2}$ zu verrichten, um also auch der

Wassersäule in der Einfallröhre eine Geschwindigkeit v_1 zu ertheilen, ist, da dieselbe das Gewicht $F_1 l_1 \gamma$ hat, die mechanische Arbeit $F_1 l_1 \gamma \cdot \frac{v_1^2}{2g}$ aufzuwenden. Wenn die Wassersäule durch den Steuerkolben erst nach vollbrachtem Spiele des Treibkolbens von diesem abgesperrt würde, so ginge diese Arbeit nicht verloren, denn diese Säule würde dem Treibkolben während seiner Verzögerung und seines allmäligen Uebergehens zur Ruhe diese Arbeit zurückgeben, allein das Absperren des Kraftwassers von dem Treibkolben erfolgt, wenn auch gegen das Ende, jedoch noch während der Bewegung desselben, so daß der Treibkolben und die Wassersäule gleichzeitig zur Ruhe übergehen; es muß daher der Steuerkolben während der ersten Hälfte seines Aufganges der Wassersäule alle lebendige Kraft nach und nach entziehen, indem er derselben durch allmälige Verengung des Querschnittes ein wachsendes Hinderniß in den Weg legt. Deshalb ist denn auch anzunehmen, daß die Arbeit der Trägheit

$$F_1 l_1 \gamma \cdot \frac{v_1^2}{2g}$$

bei jedem Spiele zum großen Theil verloren gehe.

Führen wir noch $v_1 = \frac{d^2}{d_1^2} v$ und $F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ ein, so erhalten wir für diese Arbeit den Ausdruck:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d^2 l_1}{d_1^2} \gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

daher die entsprechende mittlere Kraft während des ganzen Treibkolbenweges s:

$$K = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d^2 l_1}{d_1^2 s} \gamma \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und der entsprechende Gefäll- oder Druckhöhenverlust:

$$y_2 = \frac{K}{F \gamma},$$

d. i.:

$$y_2 = \frac{d^2 l_1}{d_1^2 s} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Ein auf gleiche Weise auszudrückender Verlust findet auch beim Rückgange des Treibkolbens statt, wo das Wasser genöthigt wird, mit der Geschwindigkeit v_2 auszutreten, und die am Anfange des Kolbenweges zu überwindende lebendige Kraft beim Ausgusse verloren geht und daher der Maschine ebenfalls entzogen wird. Der entsprechende Druckhöhenverlust ist daher:

$$z_2 = \frac{d^2 l_2}{d_2^2 s} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Um diese beiden Arbeitsverluste möglichst zu vermindern, ist daher nöthig, die Einfall- und Austragröhre weit und beide möglichst kurz zu machen, ferner eine kleine Kolbengeschwindigkeit und einen großen Kolbenhub in Anwendung zu bringen.

Um die nachtheiligen Wirkungen des Stoßes der, zumal bei der Gewichtssteuerung, zu schnell abgesperrten Wassersäule zu mäßigen oder ganz zu beseitigen, hat man an dem unteren Ende der Einfallröhre, nahe vor der Steuerung, einen Windkessel (franz. réservoir à air; engl. air vessel), d. i. ein mit comprimirter Luft angefülltes cylindrisches Gefäß angebracht, wie man es z. B. an Feuerspritzen, von welchen im dritten Bande die Rede sein wird, vorfindet. Es nimmt hier die abgesperrte Luft die überflüssige lebendige Kraft des Wassers auf, indem sie von dieser zusammengedrückt wird, und es wird die Arbeit dieser Kraft durch das am Anfange des folgenden Spieles eintretende Sichwiederausdehnen der Luft beinahe wieder gewonnen, indem das hierbei wieder aus dem Windkessel herausgedrängte Wasser ziemlich unter dem hydrostatischen Drucke in den Treibcylinder tritt. In der Anwendung bei Maschinen mit hohem Gefälle hat sich gezeigt, daß sich die Luft im Windkessel mit dem Wasser vermengt und sich dadurch allmälig ganz aus demselben entfernt. Um aber dies zu verhindern, ist entweder ein Kolben in diesen Kessel einzusetzen, welcher die Luft vom Wasser absperrt, oder eine kleine Luftpumpe anzuwenden, welche Luft in den Kessel einführt und dadurch den Abgang wieder ersetzt.

§. 322 Richtungs- und Querschnittsveränderungen in den einzelnen Röhren und Canälen einer Wassersäulenmaschine sind die weiteren Ursachen von den Arbeitsverlusten dieser Maschine. Diese Verluste lassen sich theils nach den bekannten und in Bd. I, Abschnitt VI, Cap. 1 und 2 gefundenen Regeln der Hydraulik, theils mit Hülfe der Resultate besonders hierüber angestellter Versuche (s. polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1851, Lieferung 4) bestimmen.

In den Einfall- und Austragröhren befinden sich gekrümmte Kniestücke, worin gewöhnlich die Richtung des bewegten Wassers um einen Rechtwinkel abgelenkt wird. Ist r die halbe Weite der Röhre und a der Krümmungshalbmesser der Axe ihres Kropfes, so entspricht dem letzteren nach Bd. I, §. 442 annähernd der Widerstandscoefficient:

$$\zeta_1 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{7/2},$$

und ist nun bei der Geschwindigkeit v_1 des durchströmenden Wassers der

Druckhöhenverlust $= \zeta_1 \cdot \frac{v_1^2}{2g}$, also für einen Kropf in der Einfallröhre:

$$y_3 = \zeta_1 \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right) \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und für einen solchen in der Austragsröhre:

$$z_3 = \zeta_1 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Beim Ein- und Austritt des Wassers in und aus dem Steuercylinder wird die Richtung des Wassers durch ein Knie plötzlich um einen Rechtwinkel abgelenkt, es findet daher hier nach Bd. I, §. 441 ein Druckhöhenverlust

$$\zeta_2 \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}984 \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

also nahe $= \frac{v_1^2}{2g}$ statt; der Allgemeinheit wegen möge jedoch für den Eintritt aus der Einfallröhre in den Steuercylinder die Widerstandshöhe

$$y_4 = \zeta_2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und für den Austritt aus dem Steuercylinder in das Austragrohr

$$z_4 = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}$$

gesetzt werden.

Für den Uebertritt des Wassers aus dem Steuercylinder in das Communicationsrohr läßt sich, nach den oben angeführten Versuchen, der Widerstandscoefficient $\zeta_3 = 5$ und für den Uebertritt aus dem Communicationsrohre in den Steuercylinder $\zeta_4 = 34{,}5$ setzen. Ist nun d_3 der Durchmesser des Steuercylinders unmittelbar beim Steuerkolben, so hat man für den Uebergang des Wassers aus dem Steuercylinder in das Communicationsrohr die Widerstandshöhe:

$$y_5 = \zeta_3 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} = 5 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und umgekehrt, für den Uebertritt aus diesem Rohre in den Steuercylinder:

$$z_5 = \zeta_4 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} = 34{,}5 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ zu setzen.}$$

Endlich ist für den Eintritt in den Treibcylinder nach den besonders zu diesem Zwecke angestellten Versuchen, $\zeta_5 = 31$, und dagegen für den Austritt aus demselben, $\zeta_6 = 26$; folglich für jenen die verlorene Druckhöhe:

$$y_6 = \zeta_5 \cdot \frac{v^2}{2g} = 31 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und für diesen dieselbe

$$z_6 = \zeta_6 \cdot \frac{v^2}{2g} = 26 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Um überhaupt die Verluste durch plötzliche Geschwindigkeitsveränderungen zu vermindern, hat man den Communicationsröhren und dem Theile des Steuercylinders, durch welchen das Betriebswasser hin- und zurückgeht, mit der Einfall- und Austragröhre einerlei Querschnitt zu geben, oder wenigstens jene Röhren u. s. w. durch ein sich allmälig erweiterndes Rohr mit diesen in Verbindung zu setzen.

Besondere Arbeits- oder Druckhöhenverluste werden noch durch die in Hähnen oder Ventilen bestehenden Regulirungsapparate oder Pipen herbeigeführt. Dieselben sind ebenfalls durch die Formel

$$h = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g}$$

zu bestimmen, deren Coefficienten $\zeta = \zeta_7, \zeta_8$ vom Stellwinkel der Pipe abhängen und aus den Tabellen in Bd. I, §. 443 zu entnehmen sind. Hiernach ist also für den Aufgang des Treibkolbens:

$$y_7 = \zeta_7 \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und für den Rückgang:

$$z_7 = \zeta_8 \cdot \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Durch Stellung der Regulirungspipe kann man dem Widerstandscoefficienten jeden beliebigen, zwischen 0 und ∞ enthaltenden Werth ertheilen, daher auch jeden Ueberschuß an Kraft tödten und die Geschwindigkeit des Auf- und Niederganges nach Willkür oder Bedürfniß mäßigen.

§. 323 **Leistungsformel.** Wenn wir vor der Hand die Steuerung unbeachtet lassen, so können wir nun eine Formel zur Bestimmung der Nutzleistung einer einfach wirkenden Wassersäulenmaschine zusammensetzen. Die mittlere Kraft beim Aufgange des Kolbens ist:

$$P_1 = [h_1 - h_3 - (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)]\, F\gamma$$
$$= [h_1 - h_3 - \Sigma(y)]\, F\gamma,$$

und die Last beim Rückgange:

$$P_2 = (h_2 + h_4 + z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7)\, F\gamma$$
$$= (h_2 + h_4 + \Sigma(y))\, F\gamma,$$

folglich die Leistung für ein vollständiges Kolbenspiel:

$$(P_1 - P_2)\, s = [h_1 - (h_2 + h_3 + h_4) - (\Sigma(y) + \Sigma(z))]\, Fs\gamma,$$

und die Leistung einer einfach-wirkenden Wassersäulenmaschine pr. Secunde:

$$L = [h_1 - (h_2 + h_3 + h_4) - (\Sigma(y) + \Sigma(z))] \cdot \frac{n}{60} \cdot Fs\gamma$$
$$= \left(h - 4\,\varphi\,\frac{c}{d}(h_1 + h_2) - (\Sigma(y) + \Sigma(z))\right)\frac{n}{60}\, Fs\gamma.$$

Setzen wir noch

$$\zeta \frac{l_1 d^4}{d_1^5} + \frac{d^2 l_1}{d_1^2 s} + \zeta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \zeta_3 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 + \zeta_5 + \zeta_7 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4,$$

oder

$$\left[\zeta \frac{l_1}{d_1} + \frac{d_1^2 l_1}{d^2 s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 + \zeta_5 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + \zeta_7\right] \left(\frac{d}{d_1}\right)^4$$

$$= \varkappa_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \text{ und}$$

$$\zeta \frac{l_2 d^4}{d_2^5} + \frac{d^2 l_2}{d_2^2 s} + \zeta_1 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 + \zeta_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 + \zeta_4 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 + \zeta_6 + \zeta_8 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4,$$

oder

$$\left[\zeta \frac{l_2}{d_2} + \frac{d_2^2 l_2}{d^2 s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 + \zeta_6 \left(\frac{d_2}{d}\right)^4 + \zeta_8\right] \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 = \varkappa_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4,$$

so können wir sehr einfach und übersichtlich die Leistung ausdrücken durch:

$$L = \left[h - \left(4\varphi \frac{e}{d}(h_1 + h_2) + \left[\varkappa_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \varkappa_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \cdot \frac{v^2}{2g}\right)\right] \cdot \frac{n}{60} F s \gamma.$$

Wegen der größeren Länge der Einfallröhre fällt $\varkappa_1$ meist größer aus als $\varkappa_2$, und deshalb macht man denn auch gewöhnlich die Aufgangszeit t_1 größer als die Niedergangszeit t_2.

Setzt man die Aufgangszeit $t_1 = \nu_1 t$, sowie die Niedergangszeit $t_2 = \nu_2 t$, wobei $t = t_1 + t_2 = \frac{60''}{n}$ die Zeit eines ganzen Spieles bezeichnet, und behält man für die mittlere Geschwindigkeit eines ganzen Spieles, $v = \frac{2s}{t} = \frac{2ns}{60''}$ bei, so erhält man die mittlere Geschwindigkeit beim Aufgange

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = \frac{s}{\nu_1 t} = \frac{1}{\nu_1} \cdot \frac{v}{2},$$

dagegen die beim Niedergange

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = \frac{s}{\nu_2 t} = \frac{1}{\nu_2} \cdot \frac{v}{2},$$

folglich läßt sich allgemeiner die Leistung ausdrücken:

$$L = \left[h - \left(4\varphi \frac{e}{d}(h_1 + h_2) + \left[\varkappa_1 \left(\frac{1}{2\nu_1}\right)^2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \varkappa_2 \left(\frac{1}{2\nu_2}\right)^2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}\right)\right] \cdot \frac{n}{60} F s \gamma,$$

oder $\frac{n}{60} \cdot Fs = Q$ eingesetzt:

$$L = \left[h - \left(4 \varphi \frac{e}{d} (h_1 + h_2) + {}^1/_4 \left[\varkappa_1 \left(\frac{1}{v_1}\right)^2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 + \varkappa_2 \left(\frac{1}{v_2}\right)^2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \right] \cdot \frac{v^2}{2g} \right) \right] Q\gamma,$$

oder $v = \frac{2Q}{F} = \frac{8Q}{\pi d^2}$ eingeführt.

$$L = \left(h - \left[4 \varphi \frac{e}{d} (h_1 + h_2) + \left(\frac{\varkappa_1}{v_1^2 d_1^4} + \frac{\varkappa_2}{v_2^2 d_2^4} \right) \cdot \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{4Q}{\pi} \right)^2 \right] \right) Q\gamma.$$

Bei einer doppelt wirkenden Wassersäulenmaschine ist natürlich auch diese Arbeit doppelt.

Diese Formel führt sehr gut vor Augen, daß die Nutzleistung einer Wassersäulenmaschine um so größer ausfällt, je größer d, d_1 und d_2, je weiter also sämmtliche Cylinder und Röhren sind. Auch läßt sich durch den höheren Calcül finden, daß die Leistung bei gegebener Anzahl von Spielen am größten ausfällt oder die Nebenhindernisse am kleinsten werden, wenn

$$\frac{\varkappa_1}{v_1^3 d_1^4} = \frac{\varkappa_2}{v_2^3 d_2^4},$$

d. i. wenn $$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1 d_2^4}{\varkappa_2 d_1^4}} \text{ ist.}$$

Da überdies noch $v_1 + v_2 = 1$ ist, so folgt:

$$v_1 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{\varkappa_2 d_1^4}{\varkappa_1 d_2^4}}},$$

sowie:

$$v_2 = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1 d_2^4}{\varkappa_2 d_1^4}}}.$$

Wäre z. B. $d_2 = d_1$ und $\varkappa_1 = 8 \varkappa_2$, so würde $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt[3]{8} = 2$ betragen, also die Aufgangszeit noch einmal so groß sein müssen als die Niedergangszeit. Bei Anwendung eines an die Treibkolbenstange angeschlossenen Balanciers läßt sich dieses Verhältniß $\frac{v_1}{v_2}$ zwischen der Auf- und Niedergangszeit leicht durch Zulegen und Abnehmen von Gewichten u. s. w. herstellen. Das Reguliren der Zeiten durch die Pipen in der Einfallröhre und in der Austragröhre hingegen erfolgt stets nur auf Unkosten der Nutzleistung, da diese Apparate einen durch ζ_7, ζ_8 gemessenen Kraftverlust hervorbringen, der um so größer ausfällt, je mehr diese Pipen zugedreht werden.

Ist die geforderte Arbeit kleiner als die Nutzleistung der Wassersäulenmaschine, so muß natürlich der Ueberschuß an Arbeit ebenfalls durch Stellung der Pipen vernichtet werden.

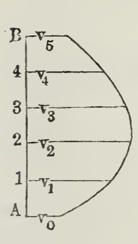
Geschwindigkeitsquadrat. Es ist ferner die Frage, welchen Werth soll man in den letzten Formeln für das mittlere Quadrat der Kolbengeschwindigkeit einer Wassersäulenmaschine einführen. Ginge der Kolben ziemlich gleichförmig auf und nieder, so wäre allerdings §. 324

$$v^2 = \left(\frac{s}{t_1}\right)^2,$$

wo s den Kolbenweg und t_1 die Zeit zum Durchlaufen desselben bezeichnet, zu setzen; da dies aber weder bei einfachen, noch bei doppeltwirkenden Maschinen der Fall ist, so muß allerdings eine besondere Bestimmung von v^2 vorgenommen werden.

Jedenfalls wird das mittlere Quadrat der Kolbengeschwindigkeit gefunden, wenn man die den gleichen Theilen des Kolbenweges $s = AB$, Fig. 575, entsprechenden Kolbengeschwindigkeiten v_0, v_1, v_2 ... quadrirt, addirt und die Summe durch die Anzahl der Theile des Kolbenweges dividirt. Wäre nun die Bewegung des Kolbens gleichförmig beschleunigt, oder gleichförmig verzögert, so würden sich die Quadrate der Geschwindigkeiten wie die Räume verhalten; wäre daher die kleinste Geschwindigkeit $= 0$ und die größte $= c$, so hätte man die den Wegen

Fig. 575.



$$0, \frac{s}{n}, \frac{2s}{n}, \frac{3s}{n} \cdots$$

entsprechenden Geschwindigkeitsquadrate v_0^2, v_1^2, v_2^2, v_3^2 ...:

$$0, \frac{1}{n}c^2, \frac{2}{n}c^2, \frac{3}{n}c^2 \ldots,$$

folglich die Summe derselben

$$= \frac{c^2}{n}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{c^2}{n} \cdot \frac{n^2}{2} = n\frac{c^2}{2},$$

endlich ihren mittleren Werth:

$$v^2 = \frac{c^2}{2};$$

oder da $s = \frac{c t_1}{2}$ ist,

$$v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{t_1}\right)^2 = 2\left(\frac{s}{t_1}\right)^2 = 2v_1^2,$$

wenn statt des Quotienten $\frac{s}{t_1}$ aus Kolbenweg s und Bewegungszeit t_1 die

mittlere Kolbengeschwindigkeit v_1 eingeführt wird. Diese Formel gilt natürlich auch, wenn der erste Theil des Kolbenweges gleichförmig beschleunigt und der zweite gleichförmig verzögert zurückgelegt wird.

Es ist also hier allemal das mittlere Geschwindigkeitsquadrat v^2 doppelt so groß, als das Quadrat v_1^2 der mittleren Kolbengeschwindigkeit.

Bei einer doppeltwirkenden Wassersäulenmaschine mit Kurbelmechanismus ist, wie im Artikel „Dampfmaschine“ bewiesen wird

$$v^2 = \frac{\pi^2}{6} v_1^2 = 1,645\ v_1^2 = 1,645 \left(\frac{s}{t_1}\right)^2.$$

Führen wir hiernach in der Leistungsformel

$$L = \left[h - \left(4 \varphi \frac{b}{d} (h_1 + h_2) + \tfrac{1}{4} \left[\varkappa_1 \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \varkappa_2 \left(\frac{1}{\nu_1}\right)^2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right] \frac{v^2}{2g}\right] Q\gamma$$

des §. 323

$$v^2 = 2 \left(\frac{2\,Q}{F}\right)^2 = 2 \left(\frac{8\,Q}{\pi d^2}\right)^2 \text{ ein, so erhalten wir}$$

$$L = \left(h - \left[4\varphi \frac{b}{d} (h_1 + h_2) + \tfrac{1}{2} \left(\frac{\varkappa_1}{\nu_1^2\, d_1^4} + \frac{\varkappa_2}{\nu_2^2\, d_2^4}\right) \frac{1}{2\,g} \left(\frac{8\,Q}{\pi}\right)^2\right]\right) Q\gamma.$$

Beispiel. Man soll für ein Gefälle h von 350 Fuß und für ein Wasserquantum $Q = 1$ Cubikfuß pr. Secunde die Anordnung und Berechnung einer einfach wirkenden eincylindrigen Wassersäulenmaschine vollziehen. Lassen wir den Treibkolben mit der mittleren Geschwindigkeit $v = 1$ Fuß auf- und niedersteigen, so haben wir für dessen Querschnitt den Inhalt:

$$F = \frac{2\,Q}{v} = \frac{2\,.\,1}{1} = 2 \text{ Quadratfuß},$$

und lassen wir das Wasser in den Einfall- und Ausgußröhren mit $v_1 = v_2 = 5$ Fuß mittlerer Geschwindigkeit sich bewegen, so haben wir für den Querschnitt dieser Röhren:

$$F_1 = \frac{2\,Q}{v_1} = \tfrac{2}{5} = 0,4 \text{ Quadratfuß}.$$

Hiernach folgt der Durchmesser des Treibkolbens:

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = 1,5958 \text{ Fuß},$$

und der der Einfall- und Austragröhren:

$$d_1 = d_2 = \sqrt{\frac{4\,F_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{1,6}{\pi}} = 0,71361 \text{ Fuß}.$$

Der Einfachheit und Sicherheit wegen wollen wir aber $d = 20$ Zoll und $d_1 = 9$ Zoll in Anwendung bringen.

Wenn wir der Ausgleichung des Stangengewichtes wegen u. s. w. das

Ausgußrohr 50 Fuß hoch über dem mittleren Kolbenstande aufsteigen lassen, also $h_2 = 50$ Fuß annehmen, so bekommen wir:

$$h_1 = h + h_2 = 400 \text{ Fuß}.$$

Nehmen wir ferner an, daß die Axenlänge l_1 der Einfallröhre 450, die der Ausgußröhre aber, also l_2, nur 66 Fuß betrage. Bei 20 Zoll Kolbendurchmesser bekommen wir:

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{25}{9} = 2,182 \text{ Quadratfuß},$$

daher:

$$v = \frac{2\,Q}{F} = \frac{2}{2,182} = 0,9166 \text{ Fuß}.$$

Rechnen wir nun noch auf vier Spiele pr. Minute, so erhalten wir den Hub:

$$s = \frac{60\,v}{2\,n} = \frac{60 \,.\, 0,9166}{8} = 6,8745 \text{ Fuß}.$$

Nehmen wir ferner die Breite e des Liderungskranzes am Treibkolben $= \frac{1}{8}\,d = 2\frac{1}{2}$ Zoll an, so erhalten wir zunächst die durch Treibkolbenreibung aufgezehrte Druckhöhe:

$$4\,\varphi\,\frac{e}{d}\,(h_1 + h_2) = 4 \,.\, 0,25 \,.\, \tfrac{1}{8}\,(400 + 50) = \frac{450}{8} = 56,25 \text{ Fuß},$$

und es bleibt nach Abzug der Kolbenreibung nur noch das nutzbare Gefälle oder die Druckhöhe

$$h - 4\,\varphi\,\frac{e}{d}\,(h_1 + h_2) = 350 - 56,25 = 293,75 \text{ Fuß}$$

übrig.

Um nun die hydraulischen Widerstände zu finden, müssen wir zunächst die Coefficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ berechnen. Es ist der eine, für die Einfallröhre,

$$\varkappa_1 = \zeta\,\frac{l_1}{d_1} + \frac{d_1^2\,l_1}{d^2\,s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 + \zeta_5\left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + \zeta_7,$$

und der andere, für die Austragröhre,

$$\varkappa_2 = \zeta\,\frac{l_2}{d_2} + \frac{d_2^2\,l_2}{d^2\,s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4\left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 + \zeta_6\left(\frac{d_2}{d}\right)^4 + \zeta_8,$$

hierein aber zu setzen:

$$\zeta = 0,021,\ \frac{l_1}{d_1} = \frac{450}{\frac{3}{4}} = 600,\ \frac{l_2}{d_2} = \frac{66}{\frac{3}{4}} = 88,$$

daher:

$$\zeta\,\frac{l_1}{d_1} = 0,021 \,.\, 600 = 12,6 \text{ und } \zeta\,\frac{l_2}{d_2} = 0,021 \,.\, 88 = 1,85,$$

ferner:

$$\frac{d_1^2\,l_1}{d^2\,s} = \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \frac{450}{6,87} = 13,26 \quad \text{und} \quad \frac{d_2^2\,l_2}{d^2\,s} = \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \frac{66}{6,87} = 1,94.$$

Nimmt man ferner an, daß sowohl in der Einfall- als auch in der Austragröhre eine Krümmung vorkommt, deren Radius $a = 4\,r$, für welche also $\frac{r}{a} = \frac{1}{4}$ ist, so hat man nach §. 442, Bd. I, den entsprechenden Widerstandscoefficienten:

$$\zeta_1 = 0,131 + 1,847 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{7}{2}} = 0,15.$$

Nehmen wir ferner an, daß die Einfall- und Austragröhre mit dem Steuer-

cylinder durch ein rechtwinkeliges Knie verbunden sind, so haben wir noch für beide Röhren $\zeta_2 = 0{,}984$ zu setzen, und ist der Querschnitt des Steuercylinders doppelt so groß, als der der Einfall- und Austragröhre, so haben wir:

$$d_3^2 = 2\,d_1^2 = 2\,d_2^2,$$

und daher:

$$\zeta_3 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ sowie } \zeta_4 \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 = \frac{34{,}5}{4} = 8{,}62.$$

Endlich ist noch

$$\zeta_5 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 = 31\,.\,(9/20)^4 = 1{,}27 \text{ und}$$

$$\zeta_6 \left(\frac{d_2}{d}\right)^4 = 26\,.\,(9/20)^4 = 1{,}07,$$

und sind daher die Stellhähne in der Einfall- und in der Austragröhre völlig geöffnet, ist also ζ_7 und $\zeta_8 = 0$, so hat man:

$$\varkappa_1 = \left\{\begin{matrix} 12{,}60 \\ 13{,}26 \\ 0{,}15 \\ 0{,}98 \\ 1{,}25 \\ 1{,}27 \end{matrix}\right\} = 29{,}51 \quad \text{und} \quad \varkappa_2 = \left\{\begin{matrix} 1{,}85 \\ 1{,}94 \\ 0{,}15 \\ 0{,}98 \\ 8{,}62 \\ 1{,}07 \end{matrix}\right\} = 14{,}61,$$

und hiernach das dem vortheilhaftesten Gange entsprechende Verhältniß der Aufgangszeit zur Niedergangszeit:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt[3]{\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}} = \sqrt[3]{\frac{29{,}51}{14{,}61}} = 1{,}264;$$

daher das Verhältniß der Niedergangszeit zur Zeit eines Spieles:

$$\nu_2 = \frac{1}{1 + 1{,}264} = \frac{1}{2{,}264} = 0{,}442,$$

sowie das der Aufgangszeit zur Zeit eines Spieles:

$$\nu_1 = 1 - \nu_2 = 0{,}558.$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man die Höhe der arbeitenden Kraftsäule:

$$h - \left[4\varphi\frac{b}{d}(h_1 + h_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\nu_1^2 d_1^4} + \frac{\varkappa_2}{\nu_2^2 d_2^4}\right)\cdot\frac{1}{2g}\left(\frac{8\,Q}{\pi}\right)^2\right]$$

$$= h - \left[4\varphi\frac{b}{d}(h_1 + h_2) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\nu_1^2} + \frac{\varkappa_2}{\nu_2^2}\right)\cdot\frac{1}{2g}\cdot\left(\frac{8\,Q}{\pi\,d_1^2}\right)^2\right]$$

$$= 293{,}75 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{29{,}51}{0{,}3114} + \frac{14{,}61}{0{,}1954}\right)\cdot 0{,}016\cdot\left(\frac{8\,.\,16}{9\,\pi}\right)^2$$

$$= 293{,}75 - (94{,}7 + 74{,}8)\,.\,\tfrac{1}{2}\,.\,0{,}016\cdot\left(\frac{128}{9\,\pi}\right)^2$$

$$= 293{,}75 - 169{,}5\,.\,0{,}008\cdot\left(\frac{128}{9\,\pi}\right)^2 = 293{,}75 - 27{,}86 = 265{,}89 \text{ Fuß}.$$

Hiernach folgt der Wirkungsgrad dieser Maschine, ohne Rücksicht auf die Arbeit, welche die Steuerung beansprucht,

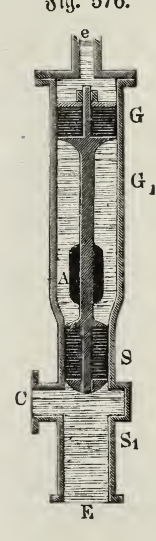
$$\eta = \frac{265{,}89}{350} = 0{,}759$$

und die Nutzleistung derselben:

$$L = Q\left[h - \left(4\varphi\,\frac{e}{d}\,(h_1 + h_1) + \text{u. s. w.}\right)\right]\gamma = 265{,}89\,.\,1\,.\,61{,}75$$
$$= 16419 \text{ Fußpfund} = 34{,}21 \text{ Pferdekräfte.}$$

Berechnung der Steuerung. Ein sehr wichtiger Gegenstand ist §. 325
noch die Anordnung und Berechnung der Steuerung einer Wassersäulenmaschine. Da bei den neueren und besseren Maschinen vorzüglich nur die Kolbensteuerung vorkommt, so wollen wir im Folgenden auch nur auf diese Rücksicht nehmen. Betrachten wir zunächst das Zweikolbensteuersystem, wie es bei einigen hiesigen Maschinen vorkommt, und in Fig. 576 abgebildet ist; nehmen wir hierbei an, daß der Steuerkolben S von unten mit der mittleren Druckhöhe h_1, von oben aber mit der mittleren Druckhöhe h_2 vom Wasser gedrückt werde, und bezeichnen wir die Höhe des Gegenkolbens G über dem Steuerkolben S durch k, daher auch die Höhe des Wasserdruckes unter G, $= h_2 - k$ und die über G, je nachdem das Druckwasser zugelassen oder abgesperrt wird, $= h_1 - k$ oder $h_2 - k$. Nehmen wir noch den Durchmesser des Steuerkolbens S, $= d_1$ und den des Gegenkolbens, $= d_2$ an, und setzen wir voraus, daß die Liderung beider Kolben ziemlich von einer und derselben Höhe sei.

Fig. 576.



Steht nun die Steuerkolbenverbindung oben, wie auch Fig. 576 anzeigt, so soll das Zulassen des Kraftwassers über G ein Niedergehen der Kolbenverbindung bewirken, es muß also die Differenz der Wasserdrücke auf S und G in Vereinigung mit dem Gewichte R der Kolbenverbindung die Reibungen der beiden Kolben S und G übertreffen. Der Druck über G ist $= \frac{\pi d_2^2}{4}(h_1 - k)\gamma$, und der Gegendruck unter G, $= \frac{\pi d_2^2}{4}(h_2 - k)\gamma$, ferner der Druck über S, $= \frac{\pi d_1^2}{4} h_2\gamma$, und der Gegendruck unter S, $= \frac{\pi d_1^2}{4} h_1\gamma$, daher folgt dann zunächst die niedertreibende Kraft:

$$P = \frac{\pi d_2^2}{4}(h_1 - k - h_2 + k)\gamma + \frac{\pi d_1^2}{4}(h_2 - h_1)\gamma + R$$
$$= \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)(h_1 - h_2)\gamma + R,$$

oder, das Gefälle $h_1 - h_2$ durch h bezeichnet,

$$P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\,h\gamma + R.$$

Die Kolbenreibung hat man, wenn sie auch keine hydrostatische ist, der Liderungsbreite, dem Kolbenumfange und der Differenz der Druckhöhen zu beiden Seiten des Kolbens proportional zu setzen, also durch die Formel

$$F = \varphi \pi d e h \gamma$$

auszudrücken, und folglich im vorliegenden Falle

$$P = \varphi \pi e_1 (d_1 (h_1 - h_2) + d_2 [h_1 - k - (h_2 - k)]) \gamma = \varphi \pi (d_1 + d_2) e_1 h \gamma$$

anzunehmen. Deshalb gilt dann folgende Formel:

$$\frac{\pi}{4} (d_2^2 - d_1^2) h \gamma + R = \varphi \pi (d_1 + d_2) e_1 h \gamma,$$

oder vereinfacht:

$$1) \; d_2^2 - d_1^2 + \frac{4 R}{\pi h \gamma} = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2).$$

Soll hingegen die Kolbenverbindung nach Absperren des Druckwassers über G von ihrem tiefsten Stande aus emporsteigen, so muß der Ueberschuß der Differenz der Kolbendrücke auf S allein das Gewicht der Kolbenverbindungen und die Reibungen derselben übertreffen, weil sich hier die Drücke zu beiden Seiten von G aufheben, es muß also sein:

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 (h_1 - h_2) \gamma = R + \varphi \pi (d_1 + d_2) e_1 h \gamma,$$

oder einfacher:

$$2) \; d_1^2 - \frac{4 R}{\pi h \gamma} = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2).$$

Diese Formeln können nun dazu dienen, die beiden Kolbendurchmesser d_1 und d_2 zu berechnen. Ohne Rücksicht auf das Gewicht R, welches bei großen Druckhöhen auch stets nur einen sehr unbedeutenden Einfluß hat, ist

$$d_2^2 - d_1^2 = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2) \text{ und}$$

$$d_1^2 = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2),$$

daher:

$$d_2^2 - d_1^2 = d_1^2 \text{ oder } d_2^2 = 2 d_1^2,$$

und sonach der Durchmesser des Gegenkolbens:

$$d_2 = d_1 \sqrt{2} = 1{,}414 \, d_1,$$

also ungefähr $^7/_5$mal Durchmesser des Steuerkolbens.

Der letztere wird aus der ersten Gleichung

$$d_2^2 - d_1^2 = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2) \text{ oder } d_2 - d_1 = 4 \varphi e_1$$

bestimmt, wenn man hierin

$$d_2 = d_1 \sqrt{2}$$

einsetzt.

Man erhält auf diese Weise:

$$d_1 = \frac{4\,\varphi e_1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1) . 4\,\varphi e_1 = 2{,}414 . 4\,\varphi e_1$$

und

$$d_2 = 3{,}414 . 4\,\varphi e_1.$$

Mit Berücksichtigung der Kolbengewichte ist aber annähernd, jedoch genügend genau,

$$d_2 = \sqrt{2\,d_1^2 - \frac{8\,R}{\pi h \gamma}} = d_1 \sqrt{2} - \frac{4\,R}{\pi h \gamma d_1 \sqrt{2}}$$

$$= d_1 \sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2} - 1)\,R}{\varphi \pi e_1 h \gamma \sqrt{2}},$$

daher folgt aus der ersten Gleichung:

$$d_2 - d_1 = 4\,\varphi e_1 - \frac{4\,R}{\pi h \gamma (d_1 + d_2)},$$

d. i.:

$$(\sqrt{2} - 1)\,d_1 = 4\,\varphi e_1 + \frac{(\sqrt{2} - 1)}{\varphi \pi e_1 h \gamma \sqrt{2}}\,R - \frac{(\sqrt{2} - 1)\,R}{\varphi \pi e_1 h \gamma (\sqrt{2} + 1)},$$

folglich:

$$d_1 = (\sqrt{2} + 1)\,4\,\varphi e_1 + \frac{(2 - \sqrt{2})\,R}{2\,\varphi \pi e_1 h \gamma}$$

und

$$d_2 = (\sqrt{2} + 2)\,4\,\varphi e_1 + \frac{(3\sqrt{2} - 4)\,R}{2\,\varphi \pi e_1 h \gamma}.$$

Der Sicherheit wegen macht man beide Durchmesser noch etwas größer, und tödtet die überflüssige Kraft beim zu schnellen Steuerkolbenspiele durch die schon aus dem Früheren bekannten Regulirungshähne. Den Beobachtungen an bestehenden besseren Maschinen zufolge, kann man übrigens $4\,\varphi e_1$ nur 0,1, also $\varphi e_1 = {}^1/_{40}$ Fuß annehmen. Um beim Durchgange des Kraftwassers durch den Steuercylinder möglichst kleine hydraulische Hindernisse zu erhalten, giebt man diesem Cylinder an dieser Stelle gern denselben Querschnitt wie den Communications- und Einfallröhren, und wenn nun die Formeln auf einen Durchmesser d_1 führen, welcher kleiner ist als der Durchmesser der Einfallröhren, so kann man gleich im Voraus darauf rechnen, daß eine überflüssige Kraft entsteht, welche durch die Stellhähne vermindert werden muß.

Beispiel. Es sei für die Steuerung einer Wassersäulenmaschine von 400 Fuß Gefälle das Zweikolbensystem anzuordnen, dessen Gewicht man im Voraus auf 150 Pfund schätzt. Ohne Rücksicht auf dieses Kolbengewicht hat man die Durchmesser

$$d_1 = 2{,}414 . 4\,\varphi e_1 = 2{,}414 . 0{,}1 = 0{,}2414 \text{ Fuß} = 2{,}897 \text{ Zoll}$$

und

$d_2 = 3{,}414 \,.\, 0{,}1 = 0{,}3414$ Fuß $= 4{,}097$ Zoll;
mit Berücksichtigung dieses Gewichtes aber

$$d_1 = 0{,}2414 + \frac{0{,}586 \,.\, 150}{0{,}05 \,.\, 400 \,.\, 61{,}74\,\pi} = 0{,}2414 + \frac{0{,}586}{8{,}23 \,.\, \pi} = 0{,}414 + 0{,}0227$$
$$= 0{,}2641 \text{ Fuß} = 3{,}169 \text{ Zoll und}$$

$$d_2 = 0{,}3414 + \frac{0{,}243 \,.\, 150}{0{,}05 \,.\, 400 \,.\, 61{,}74\,\pi} = 0{,}3414 + 0{,}0094 = 0{,}3508 \text{ Fuß} = 4{,}209 \text{ Zoll.}$$

Hinreichend sicher geht man, wenn man nun die Durchmesser $d_1 = 3\frac{1}{2}$ Zoll und $d_2 = 5$ Zoll in Anwendung bringt. Bei diesem kleinen Gegenkolben ist allerdings nur ein kleines Steuerwasserquantum nöthig, dafür findet aber auch das Wasser bei seinem Durchgange durch den Steuercylinder ein größeres hydraulisches Hinderniß vor. Nimmt man deshalb $d_1 = 6$ Zoll, so muß man allerdings mindestens $d_2 = d_1\sqrt{2} = 1{,}414 \,.\, 6 = 8{,}484$ Zoll, also etwa $8\frac{3}{4}$ bis 9 Zoll machen, und die überflüssigen Kräfte beim Auf- und Niedergange, durch die Stellhähne vernichten.

§. 326 Bei dem Dreikolbensysteme ist der Gang der Berechnung im Ganzen nicht von dem Vorigen verschieden, nur hat man hier den Vortheil, daß man den einen Kolbendurchmesser beliebig, z. B. den eigentlichen Steuerkolbendurchmesser so groß annehmen kann, als die Einfallröhre weit ist. Die Steuerung bei der in Fig. 569 abgebildeten zweicylinderigen Wassersäulenmaschine wird hiernach auf folgende Weise zu berechnen sein. Bezeichnen wir den Durchmesser des unteren oder ersten Steuerkolbens durch d_1, den des zweiten durch d_2 und den des oben aufsitzenden Gegenkolbens durch d_3, so können wir wegen des nöthigen Niederganges setzen:

$$1)\ d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 + \frac{4\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 4\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3),$$

und wegen des Aufganges:

$$2)\ d_2^2 - d_1^2 - \frac{4\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 4\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3).$$

Aus d_1 lassen sich nun mit Hülfe dieser Formeln d_2 und d_3 berechnen. Der Sicherheit und der hydraulischen Hindernisse wegen nimmt man aber d_2 noch etwas größer an, als sich aus diesen Formeln berechnen läßt. Führt man diesen Werth in die Formel

$$2\,(d_1^2 - d_2^2) + d_3^2 + \frac{8\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 0$$

ein, so erhält man den Werth des Durchmessers vom dritten Kolben:

$$d_3 = \sqrt{2\,(d_2^2 - d_1^2) - \frac{8\,R}{\pi\,h\,\gamma}},$$

den man aus den eben angeführten Gründen ebenfalls sehr reichlich nimmt.

Für die Steuerung der in Fig. 572 abgebildeten Wassersäulenmaschine lassen sich folgende Formeln entwickeln. Es bezeichnet h_1 die mittlere Höhe der Kraft- und h_2 die der Lastwassersäule, ferner d_1 den Durchmesser des Steuerkolbens, d_2 den des Gegenkolbens und d_3 den Durchmesser seines gleichsam einen dritten Kolben bildenden Aufsatzes. Es ist dann die Kraft beim Niedergange:

$$\frac{\pi}{4}\,[d_1^2\,(h_1 - h_2) + (d_2^2 - d_3^2)\,h_1 - d_2^2\,h_1]\,\gamma + R,$$

und die des Aufganges:

$$\frac{\pi}{4}\,[d_2^2\,h_1 - (d_2^2 - d_3^2)\,h_2 - d_1^2\,(h_1 - h_2)]\,\gamma - R;$$

daher:

$$1)\ d_1^2 - \frac{h_1}{h}\,d_3^2 + \frac{4\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 4\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3) \text{ und}$$

$$2)\ d_2^2 - d_1^2 + \frac{h_2}{h}\,d_3^2 - \frac{4\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 4\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3).$$

Hat man d_1 gegeben, so kann man hiernach d_2 und d_3 berechnen, muß aber aus bekannten Gründen für d_2 einen etwas größeren, sowie für d_3 einen etwas kleineren Werth in Anwendung bringen. Uebrigens rechnet man leichter mit den Formeln

$$1)\ d_2^2 - d_3^2 = 8\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3) \text{ und}$$

$$2)\ d_2^2 + \left(\frac{h_1 + h_2}{h}\right) d_3^2 = 2\,d_1^2 + \frac{8\,R}{\pi\,h\,\gamma}.$$

Für die in Fig. 577 (a. f. S) abgebildete und bereits oben im Allgemeinen kennen gelernte Steuerung einer Claustha1er Wassersäulenmaschine hat man endlich, wenn d_1 den Durchmesser des Steuerkolbens, d_2 den Durchmesser des oberen oder Gegenkolbens und d_3 den des unteren oder Wendekolbens bezeichnet, die Kraft beim Niedergange:

$$\frac{\pi}{4}\,[d_1^2\,(h_1 - h_2) - d_2^2\,h_1)]\,\gamma + R,$$

und hingegen beim Aufgange:

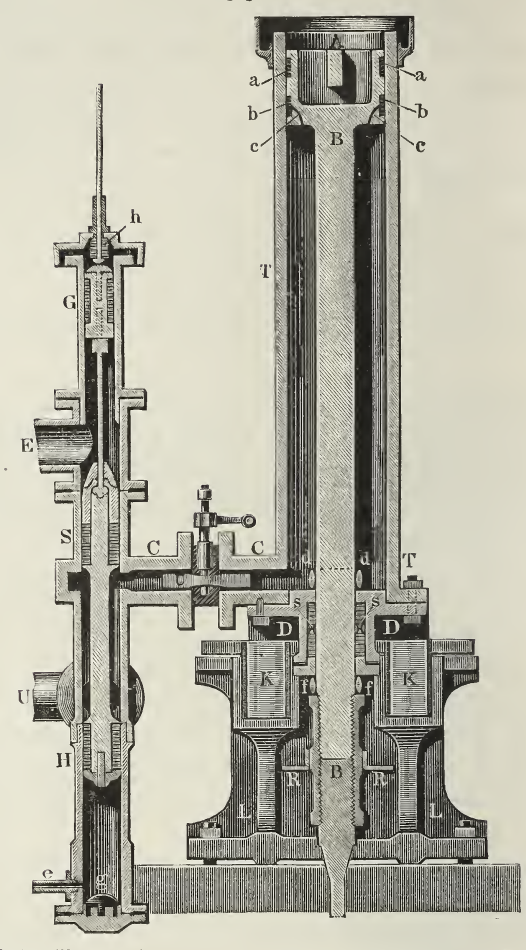
$$\frac{\pi}{4}\,[d_3^2\,(h_1 - h_2) - d_1^2\,(h_1 - h_2) + d_2^2\,h_1]\,\gamma - R;$$

daher:

$$1)\ d_1^2 - \frac{h_1}{h}\,d_2^2 + \frac{4\,R}{\pi\,h\,\gamma} = 4\,\varphi\,e_1\,(d_1 + d_2 + d_3) \text{ und}$$

$$2)\ d_3^2 - d_1^2 + \frac{h_1}{h} d_2^2 - \frac{4R}{\pi h \gamma} = 4 \varphi e_1 (d_1 + d_2 + d_3).$$

Fig. 577.



Beispiel. Wenn bei der letzten Maschine die Druckhöhen $h_1 = 688$ Fuß und $h_2 = 75$ Fuß betragen, ferner das Gewicht R der Kolbenverbindung 170 Pfund und der Steuerkolbendurchmesser $d_1 = \frac{1}{2}$ Fuß angenommen wird, so ergeben sich die Durchmesser der übrigen Kolben auf folgende Weise.

Es ist $d_3^2 = 8 \varphi e_1 (d_1 + d_2 + d_3)$ und auch $= 2 d_1^2 - \frac{2 h_1}{h} d_2^2 + \frac{8R}{\pi h \gamma}$, oder in Zahlen:

$$d_3^2 = 0{,}2\ (0{,}5 + d_2 + d_3) \text{ und } = 0{,}5 - 2{,}248\ d_2^2 + 0{,}0114.$$

Nimmt man nun $d_2 = 0{,}3$ Fuß an, so erhält man ein Mal:

$d_3^2 = 0{,}5114 - 0{,}2023 = 0{,}3091$, also $d_3 = 0{,}556$,

und hiernach das zweite Mal:

$d_3^2 = 0{,}2 \,.\, 1{,}356 = 0{,}2712$, d. i. $d_3 = 0{,}5207$,

nimmt man aber $d_2 = 0{,}33$ an, so erhält man:

$d_3^2 = 0{,}5114 - 0{,}2443 = 0{,}2666$, daher $d_3 = 0{,}516$, und auch

$d_3^2 = 0{,}2 \,.\, 1{,}346 = 0{,}2692$, folglich $d_3 = 0{,}519$.

Hiernach wäre $d_2 = 0{,}33 \,.\, 12 = 3{,}96$, also circa 4 Zoll, und $d_3 = 0{,}52 \,.\, 12 = 6{,}24$, also circa $6^1/_4$ Zoll zu nehmen. In Wirklichkeit ist $d_2 = 4$ Zoll 1,6 Linien und $d_3 = 5$ Zoll $9^2/_3$ Linien, woraus geschlossen werden kann, daß hier $4\,\varphi$ noch etwas kleiner als 0,1 ausfällt.

Anmerkung. Um genauer zu rechnen, müßte man noch den Querschnitt der Steuerkolbenstange in Betracht ziehen.

Steuerwasserquantum. Das Steuerwasserquantum oder das Wasser, welches zur Bewegung der Steuerkolbenverbindung verwendet wird, giebt zu einem besonderen Arbeitsverluste oder zur Herabziehung des Wirkungsgrades Veranlassung, weil es dem eigentlichen Betriebswasser entzogen wird. Man soll es daher auch so viel wie möglich herabziehen und deshalb nicht nur den Gegenkolbendurchmesser d_3, sondern auch den Weg des Steuerkolbens möglichst klein machen. Dieser Weg hängt aber von der Höhe des Steuerkolbens und von der Höhe der Communicationsröhre, und erstere wieder von der letzteren ab; aus diesem Grunde hat man also die Communicationsröhre, welche den Steuercylinder mit dem Treibcylinder verbindet, möglichst niedrig zu machen, und das Fehlende lieber an Breite zuzusetzen. Deshalb ist denn auch diese Röhre gewöhnlich rectangulär im Querschnitte und hat mit dem Treibcylinder einerlei Weite d. Soll der Querschnitt dieser Röhre dem der Einfallröhre gleich sein, so hat man: §. 327

$$a d = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

folglich die Höhe der Communicationsröhre

$$a = \frac{\pi d_1^2}{4 d}$$

zu nehmen. Damit der Steuerkolben beim halben Hube richtig abschließe, macht man ihn dreimal so hoch als die Röhre, nimmt also dessen Höhe $a_1 = 3\,a$, deshalb ist der Steuerkolbenweg selbst:

$$s_1 = a_1 + a = 3\,a + a = 4\,a,$$

und das pr. Spiel verbrauchte Steuerwasserquantum:

$$= \frac{\pi d_3^2}{4} s_1 = \pi a d_3^2.$$

Macht nun die Maschine pr. Minute n Spiele, so ist das pr. Secunde verbrauchte Steuerwasserquantum:

$$Q_1 = \frac{n s_1}{60} \cdot \frac{\pi d_3^2}{4} = \frac{n a}{60} \pi d_3^2,$$

und daher der entsprechende Verlust an Leistung pr. Secunde:

$$L_1 = \frac{n s_1}{60} \cdot \frac{\pi d_3^2}{4} \cdot h \gamma = \frac{s_1}{s} \left(\frac{d_3}{d}\right)^2 L.$$

Es wird also dieser Verlust um so kleiner, je größer der Treibkolbenhub s ist, je weniger Spiele also die Maschine macht.

Was endlich noch die äußere sowie die Hülfssteuerung anlangt, so ist die Kraft, welche die Bewegung derselben beansprucht, so klein, daß wir dieselbe recht gut außer Acht lassen oder uns wenigstens mit deren Abschätzung begnügen können. Ueber die hierbei vorkommende Umsetzung der Bewegung wird aber später an einem anderen Orte, wenn von den Zwischenmaschinen die Rede ist, ausführlich gehandelt.

Beispiel. Wenn bei der im Beispiele zu §. 324 berechneten Wassersäulenmaschine ein Steuerkolben von 9 Zoll Durchmesser und daher ein Gegenkolben von $9\sqrt{2} = 13$ Zoll angewendet wird, wenn ferner die Communicationsröhre die Höhe

$$a = \frac{\pi d_1^2}{4 d} = \frac{9^2 \pi}{4 . 20} = \frac{81 \pi}{80} = 3{,}18 \text{ Zoll},$$

und deshalb der Steuerkolben die Höhe

$$a_1 = 3 a = 9{,}54 \text{ Zoll}$$

erhält, und sein Spiel den Hub

$$s_1 = a_1 + a = 12{,}72 \text{ Zoll} = 1{,}06 \text{ Fuß}$$

beträgt, so hat man das Steuerwasserquantum pr. Spiel:

$$V_1 = \frac{\pi}{4} (^{13}/_{12})^2 . 1{,}06 = 0{,}977 \text{ Cubikfuß},$$

und daher den entsprechenden Arbeitsverlust pr. Secunde:

$$L_1 = \frac{n}{60} \cdot 0{,}977 . h\gamma = {}^4/_{60} \cdot 0{,}977 . 350 . 61{,}75$$

$$= 1408 \text{ Fußpfund oder circa 3 Pferdekräfte.}$$

Sicherlich würde man ökonomischer zu Werke gehen, wenn man einen schwächeren Steuerkolben und eine niedrigere Communicationsröhre anwendete, denn wenn man auch dadurch die hydraulischen Hindernisse etwas vermehrte, so würde man doch dadurch an Leistung nicht so verlieren, als durch Ersparniß an Steuerwasser gewinnen.

§. 328 **Erfahrungsresultate.** Ueber die Leistungen der Wassersäulenmaschinen sind erschöpfende Versuche nicht angestellt worden. In der Regel werden diese Maschinen nur in Bergwerken zum Heben des Wassers durch Pumpen verwendet, und es erstrecken sich die gemachten Versuche höchstens nur auf die Ermittelung der Leistung von der ganzen aus der Wassersäulenmaschine und aus Pumpen bestehenden Maschine. Da nun aber über die Pumpen selbst hinreichend sichere Beobachtungen ebenfalls nicht bekannt sind,

so läßt sich allerdings mit aller Sicherheit der Wirkungsgrad der Wassersäulenmaschine nicht berechnen. Dagegen ist es sehr leicht, eine angenäherte Bestimmung dieses Wirkungsgrades zu finden, wenn man die Voraussetzung macht, daß die Wirkungsgrade der Wassersäulenmaschinen und Pumpen in einem bestimmten Verhältnisse zu einander stehen; diese Voraussetzung läßt sich aber recht gut machen, da beide Maschinen in ihrer Construction und Bewegungsweise einander sehr ähnlich sind. Gewiß rechnet man nicht zum Vortheil für die Wassersäulenmaschine und entfernt sich überhaupt nicht sehr von der Wahrheit, wenn man den Arbeitsverlust der ganzen Maschine zur Hälfte der Wassersäulen- und zur Hälfte der Pumpenmaschine beimißt. Die Rechnung hierbei ist sehr einfach. Die disponible Leistung ist:

$$L = \frac{n}{60}\,(Fs + F_1 s_1)\,h\gamma,$$

wofern F_1 den Querschnitt und s_1 den Hub des Wendekolbens bezeichnet, die gewonnene Leistung aber ist $\frac{ns}{60}\,F_2 h_2 \gamma$, wenn F_2 den Querschnitt der Pumpenkolben und h_2 die Höhe bezeichnet, auf welche das Wasser durch die Pumpen gefördert wird. Der Arbeitsverlust ist daher:

$$L_1 = \frac{n}{60}\,(Fs + F_1 s_1)\,h\gamma - \frac{ns}{60}\,F_2 h_2 \gamma$$

$$= \frac{n}{60}\,[(Fs + F_1 s_1)\,h - F_2 s h_2]\,\gamma,$$

und demnach der Wirkungsgrad der Wassersäulenmaschine:

$$\eta = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{(Fs + F_1 s_1)\,h - F_2 s h_2}{(Fs + F_1 s_1)\,h} = \frac{1}{2} + \frac{F_2 s h_2}{2\,(Fs + F_1 s_1)\,h}$$

$$= \frac{1}{2}\,(1 + \eta_1),$$

wenn η_1 den Wirkungsgrad der ganzen Maschine bezeichnet. Hierbei wird freilich vorausgesetzt, daß Wasserverluste nicht vorkommen; bei gutem Zustande der Maschinen sind diese aber so klein, daß man sie außer Acht lassen kann. Unter Anderem findet Herr Jordan, der Erbauer der Claustthaler Maschine den mittleren Wasserverlust bei der Wassersäulenmaschine = $\frac{1}{4}$ und den der Pumpen = $2\frac{1}{4}$ Procent. Die Ausführung der Versuche ist nun dadurch zu bewirken, daß man die Regulirungsapparate in der Einfall- und Austragröhre vollständig öffnet, und die Steighöhe der Pumpen so weit erhöht, bis die Maschine regelmäßig die verlangte Anzahl von Spielen vollbringt.

Durch Versuche der Art fand Jordan an der einen der zwei Schwestermaschinen in Clausthal: bei 4 Spielen pr. Minute, $\eta_1 = 0{,}6568$ und bei 3 Spielen, $\eta_1 = 0{,}7055$, und es ist daher im ersten Falle

$$\eta = \frac{1,6568}{2} = 0,8284,$$

und im zweiten

$$\eta = \frac{1,7055}{2} = 0,8527,$$

folglich im Mittel

$$\eta = \frac{1,6811}{2} = 0,84$$

anzunehmen.

Wenn es nicht thunlich ist, die höchste Wirkung einer Wassersäulenmaschine durch Vergrößerung der Steighöhe des Pumpenwerks zu erlangen, so kann man auch den zur Ermittelung des Wirkungsgrades nöthigen regelmäßigen Gang durch Verminderung der Kraftwassersäule sich verschaffen; jedoch ist dieses Verfahren nur dann zulässig, wenn die Kraftreserve der Maschine nicht bedeutend, und also auch die abzutragende Wassersäule nicht sehr hoch ist. Hierorts hat man die Verminderung der Wassersäule bloß durch wirkliches Einfallen des Aufschlagwassers in die Einfallröhre bewirkt, und den eigentlichen Wasserstand in dieser durch eine an einen Faden aufgehängte Schwimmkugel gemessen. Auf diese Weise hat sich bei der Wassersäulenmaschine auf Alte Mordgrube, wenn dieselbe pr. Minute drei Spiele machte,

$$\eta_1 = 0,684,$$

folglich der Wirkungsgrad der bloßen Wassersäulenmaschine

$$\eta = \frac{1,684}{2} = 0,84$$

herausgestellt.

Die meisten Angaben über die Wirkung anderer Wassersäulenmaschinen sind zu unsicher, um ihnen einen Werth beilegen zu können, weil sie sich auf Beobachtungen bei nicht völlig geöffneter Tagepipe stützen und die Stellung dieser nicht hinreichend genau beobachtet worden ist. Nimmt man den einer gewissen Stellung dieser Pipe entsprechenden Widerstandscoefficienten ζ aus der Tabelle in Bd. I, §. 443, so läßt sich daraus das hierbei durch diesen Apparat vernichtete Gefälle y berechnen, indem man setzt:

$$y = \zeta \cdot \frac{v_1^2}{2g} = \zeta \cdot \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

und man kann daher auch den Wirkungsgrad durch die Formel

$$\eta = {}^1/_2 \left[1 + \frac{F_2 s h_2}{Fs\left[h - \zeta\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}\right] + F_1 s_1 h}\right]$$

berechnen.

Beispiel. Eine Wassersäulenmaschine consumirt pr. Spiel 10 Cubikfuß Kraft- und 0,4 Cubikfuß Steuerwasser, das Gefälle derselben ist 300 Fuß, ferner die

mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Einfallröhre 6 Fuß und die Stellung der in einem kreisförmigen Drosselventile bestehenden Tagepiepe, 60°. Wenn nun durch dieselbe pr. Spiel ein Wasserquantum von 3,5 Cubikfuß 420 Fuß hoch gehoben wird, wie groß ist der Wirkungsgrad dieser Maschine zu setzen? Nach Bd. I, §. 443 ist für 60° Stellung der Klappe, $\zeta = 118$, daher:

$$\zeta \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 118 . 0{,}016 . 6^2 = 68 \text{ Fuß},$$

folglich läßt sich setzen:

$$\eta = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{3{,}5 . 420}{10\,(300 - 68) + 0{,}4 . 300}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{3{,}5 . 42}{232 + 12}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2} . 1{,}6025 = 0{,}81.$$

Wassersäulenmaschinen mit Rädern verglichen. Vergleichen wir die Wassersäulenmaschinen mit den Wasserrädern, so finden wir allerdings manche Vorzüge dieser Maschinen gegen die Räder, wiewohl auf der anderen Seite auch die Wasserräder ihre besonderen Vorzüge besitzen. Die Wasserräder haben jedenfalls den Vorzug der Einfachheit und Wohlfeilheit vor den Wassersäulenmaschinen, und aus diesem Grunde wird man da, wo sich Wasserräder mit Vortheil anwenden lassen, also bei Gefällen von noch nicht 60 Fuß, die Anwendung eines oberschlägigen Wasserrades, und sogar bei Gefällen von 100 Fuß zuweilen sogar die Anwendung zweier oberschlägigen Wasserräder den Vorzug geben vor einer Wassersäulenmaschine. Beträgt aber das Gefälle mehr als zwei größte Radhöhen, so ist wohl in den meisten Fällen eine Wassersäulenmaschine vortheilhafter als ein ganzes Rädersystem, dessen Anschaffungs- und Unterhaltungskosten vielleicht die einer Wassersäulenmaschine noch übertreffen. Bei hohen Gefällen kann man aber auch horizontale Wasserräder anwenden; es bleibt daher hier nur zu erörtern übrig, wie sich die Wassersäulenmaschinen gegen diese Räder verhalten. In Hinsicht auf Einfachheit und Wohlfeilheit ist allerdings auch diesen Rädern ein, und zwar beachtungswerther Vorzug zu geben, weil dieselben bei hohen Gefällen sehr klein und daher verhältnißmäßig sehr wohlfeil ausfallen. Ganz anders ist es freilich in Hinsicht auf die Leistung oder den Wirkungsgrad. Bei hohen Gefällen läßt sich von den Turbinen oder Reactionsrädern höchstens ein Wirkungsgrad von 0,70 erlangen, bei Wassersäulenmaschinen hingegen ein Wirkungsgrad von 0,80. In Hinsicht auf die Leistung sind also die Wassersäulenmaschinen den horizontalen Wasserrädern vorzuziehen, den oberschlägigen Wasserrädern aber mindestens an die Seite zu stellen. Hiernach wird also bei hohen Gefällen da, wo es nöthig ist, die Kraft sehr zu sparen, den Wassersäulenmaschinen der Vorzug zu geben, und da, wo ein Mangel an Wasserkraft nicht vorhanden ist und wo es auf Kostenersparung ankommt, werden die Turbinen vorzuziehen sein. §. 329

Hierzu kommt aber noch, daß Wassersäulenmaschinen nur eine auf- und niedergehende, Turbinen hingegen eine stetig rotirende Bewegung geben, aus

welcher sich jede andere Bewegung leicht ableiten läßt, was bei der ersten Bewegungsweise nicht so leicht möglich ist. Aus diesem Grunde findet man die Wassersäulenmaschinen nur selten, und zwar vorzüglich nur beim Bergbau zum Wasserheben angewendet.

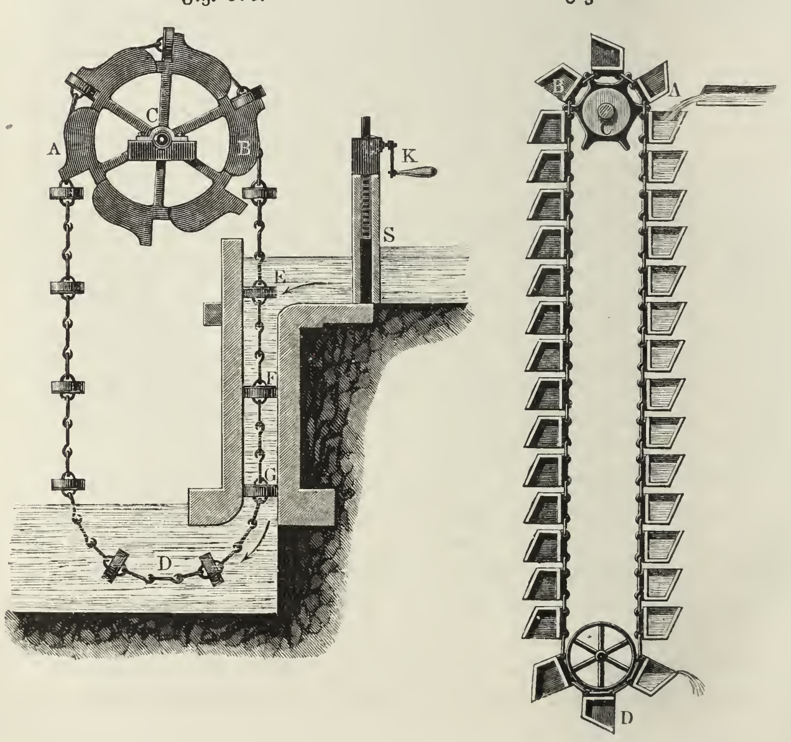
Den Nachtheil, daß man die überflüssige oder Reservekraft durch Stellung der Tagepipe oder eines anderen Regulirungsapparates tödten muß, haben die Wassersäulenmaschinen mit den Turbinen gemeinschaftlich.

Anmerkung. Wie sich Wassersäulenmaschinen durch Kuppelung, Vorgelege u. s. w. zur Erzeugung einer rotirenden Bewegung verwenden lassen, kann erst päter bei den Arbeitsmaschinen auseinandergesetzt werden.

§. 330 **Kettenräder.** Noch hat man andere Maschinen, welche zwar durch die Kraft des Wassers in Bewegung gesetzt werden, aber weder den Rädern, noch den Wassersäulenmaschinen beizuzählen sind, sondern sich mehr zwischen diese stellen lassen. Unter diesen Maschinen wollen wir aber folgenden einige Aufmerksamkeit schenken.

Das Kolbenrad (franz. roue à piston; engl. chain of buckets) ist

Fig. 578. Fig. 579.



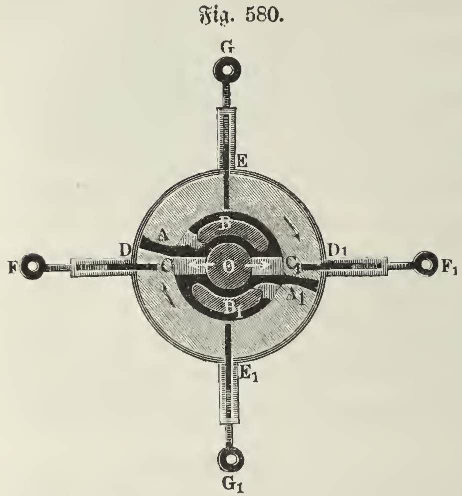
in neuester Zeit wieder von Lamolières als Kraftmaschine angewendet worden (s. Technologiste, Sept. 1845, oder Polytechnisches Centralblatt, Bd. VII, 1846). Die Haupttheile dieser Maschine sind ein Rad ACB, Fig. 578, eine um dasselbe liegende Kette ADB mit Kolben E, F, G u. s. w., und eine Röhre EG, durch welche die Kette so hindurchgeht, daß ihre Kolben den Querschnitt der Röhre ziemlich genau ausfüllen. Das bei E oben zufließende Wasser sinkt in der Röhre EG nieder und drückt hierbei auf die Kolben F, G, so daß diese ebenfalls mit niedergehen und dadurch die ganze Kette mit dem Rade AB, an das nun eine Last angeschlossen werden kann, in Bewegung setzen. Lamolières' Kolbenrad besteht aus zwei Ketten und aus 10 bis 15 mit Leder abgeliderten Schaufeln. Dieselben sind elliptisch geformt und achtmal so lang als breit. Das Rad besteht aus zwei Scheiben mit sechs Einschnitten zur Aufnahme der Schaufeln. Bei einem Gefälle von 2 Meter, einer Schaufelfläche von 0,0246 Quadratmeter, einem Aufschlag Q von 31 Liter und einer Umdrehungszahl u von 36 bis 39 soll sich ein Wirkungsgrad von 0,71 bis 0,72 herausgestellt haben.

Ein ähnlicher Apparat ist die Eimerkette (franz. noria, chapelet, engl. chain of buckets). Hier sind Gefäße oder Eimer mit der Kette ABD, Fig. 579 verbunden, und dafür fehlt die Röhre ganz. Das bei A oben zufließende Wasser füllt die Eimer, nöthigt diese dadurch zum Niedersinken und bringt so die Kette mit dem Rade ACB in Bewegung. Das Wasser fließt natürlich unten aus den Eimern und diese steigen auf der anderen Seite leer empor. Diese Maschinen sollten einen großen Wirkungsgrad geben, weil sie beinahe das ganze Gefälle nutzbar machen, allein sie gehören doch zu den unvollkommensten Maschinen, weil sie zu viel bewegliche Theile haben, die sich bald abführen und zu besonderen Verlusten und immerwährenden Reparaturen Veranlassung geben.

Anmerkung 1. Endlich lassen sich auch die sogenannten Rotationspumpen, Rotationsdampfmaschinen u. s. w. zur Aufnahme der Wasserkraft benutzen. In Fig. 580 (a. f. S.) ist der Durchschnitt von einer der vorzüglichsten Maschinen dieser Art abgebildet. Der Verfasser hat diese Maschine Wassersäulenrad genannt und eine Beschreibung und Theorie desselben im Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1840, Nro. 9 niedergelegt. Es ist BOB_1 eine starke und genau abgedrehte Welle, und es sind A und A_1 zwei mit ihr fest verbundene Flügel, welche hier als Kolben dienen. Diese Kolben sind von einem feststehenden Gehäuse DED_1E_1 genau umschlossen, und es ist dasselbe mit vier Schiebern DF, D_1F_1, EG und E_1G_1, welche durch die Maschine selbst heraus- und hereingezogen werden und dadurch das Steuern der Maschine hervorbringen, versehen. Die Welle ist der Länge nach dreifach durchbohrt, und jede Bohrung hat auch noch eine Seitenbohrung innerhalb des Gehäuses. Das Kraftwasser fließt durch die innere Bohrung O zu, tritt durch die Seitenbohrungen C und C_1 in den, übrigens abgeschlossenen, hohlen Raum zwischen Welle und Gehäuse, drückt dabei gegen den

Kolben A und A_1 und setzt dadurch die Welle in Umdrehung. Damit diese Umdrehung durch die Schieber nicht gestört werde, müssen sich dieselben stets zurückziehen, ehe die Kolben bei denselben ankommen, damit aber auch auf der entgegengesetzten Seite der Kolben kein Kraftwasser drücke, müssen die Schieber nach dem Durchgange der Kolben wieder zurückgehen und dadurch die Räume ABE und $A_1 B_1 E_1$ absperren, welche nur mit den Bohrungen B und B_1 communiciren, durch die das Wasser nach vollbrachter Wirkung abgeführt wird.

Fig. 580.



Anmerkung 2. Zu den Kolbenmaschinen ist auch die Maschine zu rechnen, welche ihr Erfinder L. G. Girard „Moteur pompe" genannt hat. S. Delaunay's Cours de Mécanique, II. Partie.

Schlußanmerkung. Wir theilen nun noch die Literatur und Notizen über die Statistik der Wassersäulenmaschinen mit. Belidor beschreibt in seiner Architecture hydraulique eine Wassersäulenmaschine mit horizontalem Treibcylinder, auch erfährt man von ihm, daß schon 1731 die Herren Denisard und de la Duaille eine Art Wassersäulenmaschine construirt haben. Dieselbe hatte jedoch nur 9 Fuß Gefälle und trieb durch einen Kolben etwa nur den zwanzigsten Theil des Kraftwassers 32 Fuß höher. Wie es scheint, so ist jedoch die Wassersäulenmaschine zum Wasserheben beim Bergbau zuerst von Winterschmidt und bald nachher auch von Höll erfunden oder wenigstens verbessert worden. Das Nähere über diese Erfindung ist nachzulesen in Busse's Betrachtung der Winterschmidt'- und Höll'schen Wassersäulenmaschine u. s. w., Freiberg, 1804. Eine Beschreibung und Zeichnungen der Winterschmidt'schen Maschinen findet man in Calvör's historisch-chronologischer Nachricht u. s. w. des Maschinenwesens u. s. w. auf dem Oberharze, Braunschweig, 1763. Die Höll'sche Maschine lernt man aus der Anleitung zur Bergbaukunst von Delius, Wien 1773, und aus der Beschreibung der bei dem Bergbau zu Schemnitz errichteten Maschinen von Poda, Prag 1771, kennen. Jetzt im Gange befindliche Wassersäulenmaschinen finden sich in Baiern, Sachsen, am Harz, in Ungarn, Kärnthen, in der Bretagne u. s. w. vor. Von den baierischen Maschinen werden wir später, wenn vom Wasserheben die Rede ist, handeln, übrigens aber sind bis jetzt ausführliche Beschreibungen von diesen Maschinen gar nicht vorhanden, doch findet man Manches hierüber in Langsdorf's Maschinenkunde, in Hachette's Traité élémentaire des Machines, und in Flachat's Traité élémentaire de Mécanique. Die Hauptverhältnisse der von Brendel in Sachsen ausgeführten Wassersäulenmaschinen findet man in Gerstner's Mechanik angegeben, wo auch die Kärnthner oder Bleiberger Maschinen ganz ausführlich beschrieben sind. Die Maschinen im Schemnitzer Bergrevier behandelt Schitko in seinen Beiträgen

zur Bergbaukunde, die beiden Clausthaler Maschinen aber beschreibt Jordan in Bd. X von Karsten's Archiv für Mineralogie u. s. w.; jedoch ist diese Beschreibung auch einzeln bei Reimer in Berlin erschienen. Die Wassersäulenmaschine auf der Grube Huelgoat in der Bretagne hat ihr Erbauer Junker ausführlich in Bd. VIII der Annales des mines beschrieben; unter dem Titel: Mémoire sur les machines à colonne d'eau de la mine d'Huelgoat, Paris 1835, ist die Beschreibung dieser Maschine auch separat zu erlangen. Nur wenig bekannt ist die kleine Wassersäulenmaschine von Althans auf der Grube Pfingstwiese bei Ems, ebenso die Henschel'sche Wassersäulenmaschine auf der Kohlengrube zu Oberkirchen in Kurhessen, und die Maschinen zu Sangershausen und zu Gerbstädt im Mansfeldischen. Alle diese letzteren Maschinen sind übrigens eigenthümlich construirt. Die §. 312 abgehandelte englische Wassersäulenmaschine (Darlington's water pressure engine) ist abgebildet und beschrieben in Bd. II der englischen Uebersetzung dieses Werkes. Die Wassersäulenmaschine zu Lautenthal am Harz ist vom Herrn Oberbergrath Jugler im Notizblatte des Hannoverschen Architecten- und Ingenieur-Vereins Bd. III beschrieben, und es ist hiervon auch ein besonderer Abdruck im Buchhandel zu haben. Notizen über einige englische Wassersäulenmaschinen enthält die Schrift: Records of Mining and Metallurgy or facts and Memoranda for the use of the Mine Agent and Smelter by A. Philipps and J. Darlington, London 1857. Eine kurze Abhandlung über englische Wassersäulenmaschinen findet sich in J. Glynn's Rudimentary Treatease on the power of water, London 1853, by J. Weale. Lewis' Wassersäulenmaschine ist mit zwei Windkesseln versehen. S. Polytechn. Centralblatt, 1863, Nr. 17. Ueber die in neueren Zeiten bei dem österreichischen Bergbau zur Ausführung gekommenen Wassersäulenmaschinen findet man vielfache Nachrichten in der Schrift: „Erfahrungen im berg- und hüttenmännischen Maschinenwesen u. s. w. von Peter Rittinger, und zwar in den Jahrgängen 1854, 1856, 1858, 1860 und 1862. Die eigenthümlichste dieser Maschinen ist die im letzten Jahrgang beschriebene Wassersäulenmaschine im Adelbertschacht bei Przibram. Dieselbe hat eine Schiebersteuerung sowie einen Entlastungskolben u. s. w.

Die eigenthümlich construirte Wassersäulenmaschine, welche der Herr Kunstmeister Bornemann in Schneeberg ausgeführt hat, sind in Bd. II des Civilingenieurs beschrieben. Von den Wassersäulenaufzügen und Wassersäulenkrahnen sowie von den Wassersäulenkünsten und Wassersäulengöpeln, wird im dritten Bande gehandelt.

Siebentes Capitel.

Von den Windrädern.

§. 331 **Windräder.** Die atmosphärische Luft kann entweder durch ihre Strömungen oder durch ihre Expansivkraft mechanische Arbeiten verrichten. Am gewöhnlichsten benutzt man aber die natürlichen Luftströmungen oder den Wind zur Verrichtung von mechanischer Arbeit, und zwar durch Anwendung von Rädern, welche einen Theil der lebendigen Kraft des gegen sie sich bewegenden Windes zu Gute machen. Diese Räder heißen Windräder (franz. roues à vent; engl. wind-wheels), die unterstützenden Gebäude sammt Rädern und allen übrigen Theilen werden Windmühlen (franz. moulins à vent; engl. wind-mills) genannt. Ein Windrad ist zwar eine Radwelle zur Aufnahme der Windkraft, wie ein Wasserrad eine Radwelle zur Aufnahme der Wasserkraft, doch weichen beide Räder deshalb wesentlich von einander ab, weil das eine einem nach allen Seiten hin unbegrenzten Luftstrome, das andere aber einem ganz oder wenigstens theilweise begrenzten Wasserstrome entgegengerichtet ist. Ein gewöhnliches Schaufelrad, dem unbegrenzten Windstrome entgegengerichtet, kann gar keine Umdrehung annehmen, weil der Wind die Schaufeln auf der einen Seite des Rades genau ebenso stark stößt, als die auf der anderen Seite, beide Stoßkräfte also einander aufheben. Um es zur Aufnahme der Windkraft geschickt zu machen, müßte der Windstoß nur einseitig auf das Rad wirken, und daher die andere Seite des Rades gegen den Wind geschützt, etwa von einem feststehenden Mantel umgeben werden. Dieser Mantel kann allerdings erspart werden, wenn man die Schaufeln beweglich macht, nämlich dieselben an Angeln so aufhängt, daß sie sich von selbst auf der einen Seite des Rades mit der breiten Fläche dem Windstrome entgegenstellen, auf der anderen Seite aber durch Entgegenstellen mit der schmalen Seite sich dem Windstoße so viel wie möglich entziehen. Um solche Räder nicht nach der Windrichtung stellen zu müssen, giebt man denselben eine verticale Umdrehungsaxe, läßt dieselben also in Horizontalebenen umlaufen, weshalb man sie auch horizontale Windräder (franz. roues horizontales à vent; engl. horizontal wind-wheels) genannt hat.

Vortheilhafter als die Schaufelräder sind aber die sogenannten Flügelräder (franz. volants; engl. sail-wheels), d. i. Räder, deren Axen dem Wind- oder Wasserstrome entgegengerichtet sind und deren nur in sehr kleiner

Anzahl vorhandene Arme breite Flächen oder sogenannte Flügel (franz. ailes; engl. vanes, sails) tragen, welche zur Aufnahme der Windkraft dienen und deshalb dem Windstrome unter einem schiefen Winkel entgegengerichtet sind. Da die Richtung des Windes eine mehr oder weniger horizontale ist, so hat man natürlich auch das Flügelrad mit seiner Axe ungefähr horizontal zu legen, weshalb seine Umdrehungsebene eine mehr verticale ist, und das Rad auch ein verticales Windrad genannt wird.

Anmerkung. Man hat auch horizontale Windräder mit hohlen Schaufeln angewendet und diese Panemoren genannt. Da der Windstoß gegen eine hohle Fläche größer ist als gegen eine erhabene, und diese Schaufeln dem Winde auf der einen Seite des Rades die hohle und auf der anderen die erhabene Seite zuwenden, geht allerdings ein solches Rad ohne alle weiteren Hülfsmittel, wenn auch nur mit geschwächter Kraft, um.

Flügelräder. Der Hauptvorzug der Flügelräder vor den Schau- §. 332 felrädern besteht darin, daß dieselben bei gleicher Größe oder gleichem Gewichte und unter übrigens gleichen Verhältnissen mehr Arbeit verrichten als die letzteren Räder. Während bei einem Schaufelrade nur eine einseitige Wirkung statthat, und diese Wirkung im Ganzen nur der Projection der dem Windstrome ausgesetzten Schaufeln in der Ebene rechtwinkelig zur Windrichtung entspricht, findet bei den Flügelrädern eine ununterbrochene Wirkung auf jeden der Flügel statt. Wenn auch eine Flügelfläche des ersten Rades mit einer Schaufelfläche des anderen einerlei Inhalt hat, und vielleicht auch der Wind bei dem schiefen Stoße gegen die Flügel des ersten Rades weniger vortheilhaft wirkt als bei dem Stoße gegen die Schaufeln des zweiten, so wird doch bei gleicher Windgeschwindigkeit das Flügelrad viel mehr mechanisches Arbeitsvermögen sammeln können als das Schaufelrad, da es dasselbe einem viel größeren Windstrome entnimmt. Vielfache Erfahrungen haben aber auch wirklich darauf geführt, daß die Flügelräder unter übrigens gleichen Umständen mindestens viermal so viel leisten als die Schaufelräder, welche, wenn dies nicht der Fall wäre, wegen ihrer leichteren und sichereren Aufstellung und vorzüglich noch wegen ihrer geringen Axenreibung sich gewiß schon längst einen Platz in der praktischen Mechanik verschafft haben würden. Wir sprechen daher in der Folge auch nur von den Windmühlen mit Flügelrädern. Die nähere Einrichtung der Flügelräder ist folgende. Zunächst besteht ein solches Rad aus einer starken Welle, welche zwar meist aus Holz, viel zweckmäßiger aber aus Gußeisen hergestellt wird. Man giebt der Flügelwelle (franz. l'arbre du volant; engl. the wind shaft) 5 bis 15 Grad Neigung gegen den Horizont, damit die Flügel in der nöthigen Entfernung vom Gebäude umlaufen und das ganze Flügelrad sicherer in seinen Lagern ruhe. An dieser Welle ist zu unterscheiden der Kopf, der Hals, das Transmissionsrad und der Zapfen. Der Kopf ist diejenige Stelle,

wo die Flügel aufsitzen, der Hals (Schlot) aber ist der unmittelbar hinter ihm liegende abgerundete Theil der Welle, in welchem das ganze Rad vorzüglich unterstützt wird, das Transmissionsrad dient zur Fortpflanzung der Bewegung oder zur Verbindung des Flügelrades mit der Arbeitsmaschine, und endlich der Zapfen am hinteren Ende der Welle ist zur vollständigen Unterstützung des Rades nöthig. Der Arbeitsverlust, welchen die Reibung der Flügelwelle in ihrer Unterstützung erleidet, ist wegen des nicht unbedeutenden Gewichtes derselben und vorzüglich wegen ihrer großen Umdrehungsgeschwindigkeit beträchtlich, und deshalb ist es nöthig, alle Mittel zu ergreifen, wodurch dieselbe herabgezogen wird. Aus diesem Grunde ist daher auch eine eiserne Flügelwelle viel zweckmäßiger als eine hölzerne, weil dieselbe einen ansehnlich schwächeren Hals erhalten kann als eine hölzerne. Während die Stärke des Halses einer hölzernen Flügelwelle $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuß beträgt, ist dieselbe bei gußeisernen Flügelwellen nur $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Fuß. Ueberdies ist aber noch die Reibung an und für sich bei den Holzwellen größer als bei den Eisenwellen, weil man in der Regel den Hals derselben nicht mit einem eisernen Mantel, sondern nur mit einer Reihe von Eisenstäben umgiebt, die immer ein Abschaben im Lager hervorbringen.

Anmerkung. Ueber die horizontalen Windmühlen von Beatson u. s. w. sind vorzüglich englische Schriften, z. B. von Nicholson, Gregory u. s. w., nachzulesen. Siehe auch den Abschnitt über Windmühlen in Rühlmann's Allgemeiner Maschinenlehre Bd. I.

§. 333 **Windflügel.** Die Windflügel bestehen aus den Windruthen, aus den Windsprossen oder Scheiden und aus der Bedeckung. Die Windruthen (franz. bras; engl. arms, whips) sind radial von dem Wellenkopfe auslaufende Arme von circa 30 Fuß Länge, wovon jeder einen Flügel trägt. Die Anzahl dieser Arme ist, wie die Anzahl der Flügel, gewöhnlich vier, seltener fünf oder sechs. Nahe an der Welle sind diese Ruthen 1 Fuß dick und 9 Zoll breit, am äußersten Ende aber haben sie nur 6 Zoll Dicke und $4\frac{1}{2}$ Zoll Breite. Ihre Befestigungsweise ist sehr verschieden; ist die Welle von Holz, so steckt man zwei Ruthen rechtwinkelig durch den Wellenkopf und bildet dadurch vier Flügelarme. Auch befestigt man wohl die Arme durch Schrauben auf eine den Wellenkopf bildende Rosette, ähnlich wie die Arme eines Wasserrades, zumal wenn die Welle von Gußeisen ist. Die Sprossen oder Scheiden (franz. les lates; engl. the bars) sind hölzerne Querarme, welche durch die Ruthe hindurchgesteckt werden, die zu diesem Zwecke in Abständen von $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Fuß durchlocht wird. Je nachdem die Flügel eine mehr rectanguläre oder mehr trapezoidale Form erhalten sollen, sind die sämmtlichen Sprossen von gleicher oder, nach der Welle zu, von abnehmender Länge. Die innerste Sprosse steht $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{6}$ der Armlänge vom Wellenmittel ab, und ihre Länge ist ungefähr diesem Abstande gleich, der

äußersten Sprosse giebt man aber $^1/_5$ oder gar $^1/_4$ der Armlänge zur eigenen Länge. Bei den meisten Windmühlen gehen die Windruthen nicht mitten durch die Flügel, sondern sie theilen dieselben so, daß der nach dem Winde zu gerichtete Theil ein bis zwei Fünftel der ganzen Flügelbreite ausmacht. Deshalb ragen auch die Sprossen auf der ersten Seite viel weniger aus der Ruthe hervor als auf der anderen. Den schmaleren Theil des Flügels bedeckt man gewöhnlich durch das sogenannte Windbrett, auf den breiteren Theil hingegen kommen die sogenannten Windthüren oder eine Bedeckung von Segeltuch zu liegen.

Man macht die Windflügel eben, windschief oder hohl, jedenfalls geben die wenig ausgehöhlten windschiefen Flügel die größte Leistung, was noch weiter unten näher auseinandergesetzt werden wird. Bei den ebenen Windflügeln haben sämmtliche Windsprossen einen und denselben Neigungswinkel von 12° bis 18° gegen die Umdrehungsebene, sind aber die Flügel windschief, so weichen die inneren Sprossen ungefähr 24° und die äußeren 6° von dieser Ebene ab, und es bilden die Neigungswinkel der zwischenliegenden Sprossen einen Uebergang zwischen den letzten beiden Winkeln. Um den Windflügeln eine hohle Form zu geben, hat man krumme Windruthen und Scheiden anzuwenden. Obwohl dadurch nach den Regeln des Stoßes an Arbeit gewonnen wird, so wendet man diese Construction wegen der schwierigeren Ausführung fast gar nicht mehr an. Zur vollständigen Unterstützung der Flügeldecke sind die äußeren Enden der Scheiden noch durch die sogenannten Saumlatten mit einander verbunden und, zumal wenn die Decke aus Leinwand besteht, überdies noch Zwischenlatten eingesetzt, so daß das ganze Flügelgerippe aus Feldern von ungefähr 2 Quadratfuß Inhalt besteht. Die Holzbedeckung besteht in vier Thüren, welche aus dünnen Holzbrettchen zusammengesetzt sind und durch Riegel auf dem Flügelgerippe festgehalten werden, die Segeltuchdecke hingegen wird durch Schlingen und Haken mit dem Flügelgerippe verbunden.

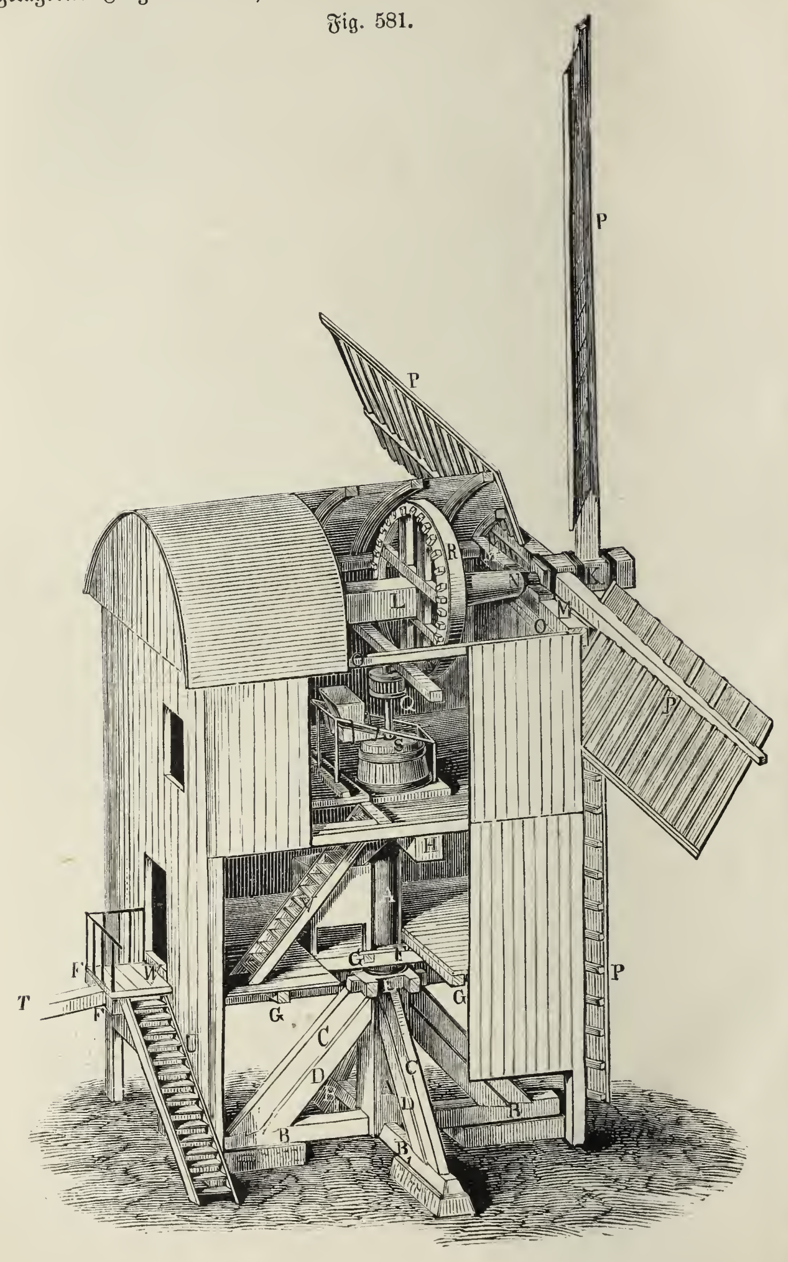
Bockmühlen. Da die Richtung des Windes eine veränderliche und die Axe des Rades in diese zu stellen ist, so muß die Unterstützung des Rades beweglich, und zwar um eine verticale Axe drehbar sein. Nach der Art und Weise, wie diese Drehung verwirklicht wird, hat man folgende zwei Classen von Windmühlen. §. 334

1) Die deutsche oder Bockmühle (franz. moulin ordinaire; engl. post mill), und 2) die holländische oder Thurmmühle (franz. moulin hollandais; engl. tower mill, smockmill).

Bei der Bockmühle ist das ganze Gebäude sammt Rad um eine feststehende Säule, den Ständer oder Hausbaum (franz. poteau; engl. post), drehbar, bei der Thurmmühle hingegen ist nur das Haupt desselben, die sogenannte

Haube (franz. le toit, la calotte; engl. the cap, head) mit der darin gelagerten Flügelwelle drehbar.

Fig. 581.



Eine monodimetrische Ansicht einer Bockmühle bietet Fig. 581 dar. Es ist hier AA der Ständer, und es sind BB und $B_1 B_1$ die Kreuzschwellen, welche mit den Streben oder Bändern C und D vereinigt den Ständer unterstützen und zusammen den sogenannten Bock oder Bockstuhl bilden. Am Kopfe des Bockes sitzt der aus vier Hölzern zusammengesetzte Sattel E fest. Das Mühlengebäude umgiebt nun den Ständer mittels zwei Fußbalken F, F und durch zwei der sechs Unterlags- oder Fußbodenbalken G, G; außerdem stützt es sich mittels des starken Kopfbalkens H auf den Kopf des Ständers, welcher zur Erleichterung der Drehung noch mit einem Stifte ausgerüstet ist, der in eine entsprechende Pfanne an der Unterfläche des Kopfbalkens eingreift. Die Flügelwelle KL ruht mit ihrem Halse N in einem Metall- oder Stein- (Basalt-) Lager, welches auf dem großen Wellbalken MM festsitzt, der von dem Dachrahmen OO getragen wird. KP, KP u. s. w. sind die durch den Wellenkopf gesteckten Windruthen, welche vier ebene Flügel P, P ... tragen. Die Figur stellt eine Mahlmühle vor; daher greift hier das Transmissionsrad R in ein Getriebe Q ein, das auf dem Mühleisen festsitzt, welches den Läufer oder oberen Mühlstein S trägt. Die weitere Beschreibung des Mahlzeuges gehört nicht hierher. Um das ganze Gebäude drehen zu können, wird der Stert oder Sterz T, d. i. ein langer Hebel, angewendet, der zwischen den Fugbalken liegt, mit diesen durch Querhölzer und Schrauben fest verbunden ist, übrigens aber 20 bis 30 Fuß lang aus dem Gebäude vorragt, in der Figur aber nur abgebrochen gezeichnet ist. Noch ersieht man aus der Figur in U die äußere und in V die innere Treppe, sowie in W die Eingangsthür.

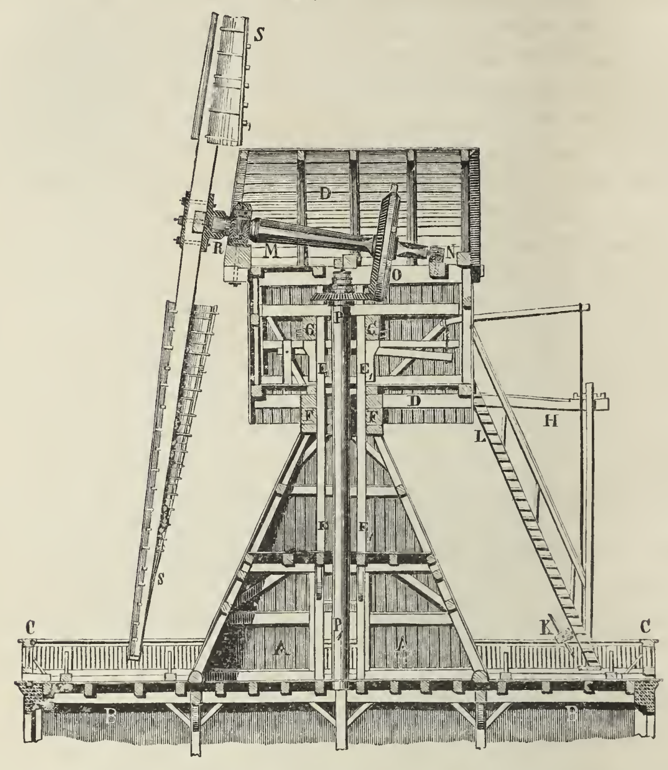
Thurmmühlen. Es giebt zwei Arten von Thurmmühlen; es ist §. 335
nämlich entweder nur der die Flügelwelle einschließende, oder es ist ein größerer, sich unter die Flügelwelle nach abwärts erstreckender Theil des Mühlengebäudes um eine verticale Axe drehbar. Die Bewegung des Flügelrades wird hier durch ein Paar Zahnräder zunächst auf den Königsbaum, d. i. auf eine starke stehende Welle, welche durch das ganze Mühlengebäude geht, übertragen. Damit aber der Eingriff der Zahnräder bei den verschiedenen Stellungen des Flügelrades nicht verändert oder gar aufgehoben werde, ist es nöthig, daß die Axe des Königsbaumes genau mit der Umdrehungsaxe des beweglichen Theiles vom Mühlengebäude zusammenfalle.

In Fig. 582 (a. f. S.) ist ein Durchschnitt von einer Thurmmühle der zweiten Art abgebildet, welche zwischen einer Bockmühle und einer Thurmmühle der ersten Art fast mitten inne steht.

Es ist hier AA der feststehende Thurm, welcher über dem die Arbeitsmaschine enthaltenden Mühlengebäude BB steht und von der Galerie CC umgeben wird, sowie DD das bewegliche Haupt der Mühle, das durch

den Holzring FF unmittelbar und durch den Holzring GG mittels der Säulen EE und $E_1 E_1$ unterstützt wird und nur eine Drehung um diese

Fig. 582.

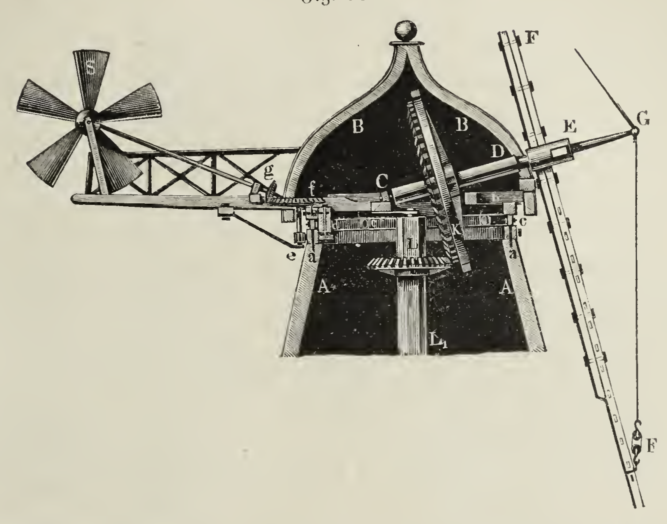


gleichsam den Ständer ersetzenden Säulen zuläßt. Die Drehung selbst läßt sich durch den Kreuzhaspel K bewirken, der an der Treppe KL sitzt, welche mit dem beweglichen Gebäude DD und besonders mit dem Sterze H fest verbunden ist. Die Flügelwelle MN ist von Gußeisen, und ruht bei M und N in mit Kanonenmetall ausgefütterten gußeisernen Lagern, O und P sind eiserne Zahnräder, wodurch die Umdrehung der Flügelwelle auf die Königswelle PP_1 übertragen wird. Die Windflügel $RS, RS\ldots$ sind windschief und durch Schrauben und ein eisernes Kreuz mit dem Muff R verbunden, der einerseits ein zweites Kreuz, andererseits aber eine ausgebohrte Höhlung hat, welche über den abgedrehten Wellenkopf gesteckt und darauf festgekeilt wird.

Der obere Theil einer Thurmmühle der ersten Art ist in Fig. 583 abgebildet; AA ist der Obertheil des feststehenden, aus Holz oder Steinen aufgeführten und pyramidal geformten Thurmes, BB ist ferner die beweg=

liche Haube, CDE ist die Flügelwelle, sowie EF eine aus zwei Theilen zusammengesetzte Windruthe, welche durch Seile wie FG mittels eines auf

Fig. 583.



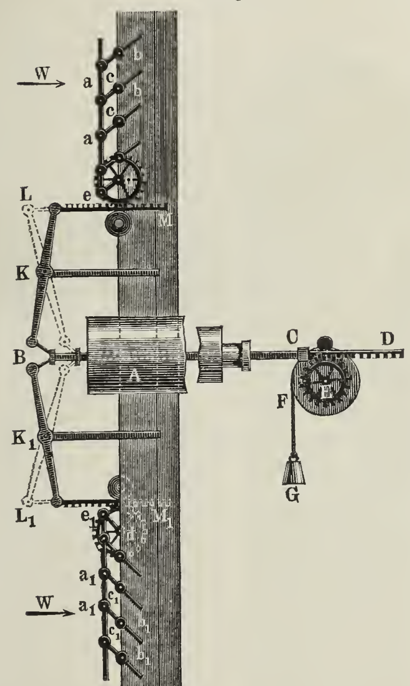
dem Wellenkopfe aufsitzenden Mönchs EG gegen das Biegen oder Abbrechen durch den Windstoß geschützt wird. Noch sind K und L die beiden Zahnräder, wodurch die Kraft der Flügelwelle auf die Königswelle LL_1 übertragen wird. Die Stellung der Flügelwelle nach dem Winde erfolgt hier in der Regel ebenfalls durch den Sterz oder durch eine Kurbel mit Rad und Getriebe, kann aber auch durch eine große Windfahne, deren Ebene in die der Wellenaxe fällt, noch besser endlich durch ein besonderes Steuerrad S, wie in der Figur abgebildet ist, hervorgebracht werden. Damit sich die Haube leicht drehen lasse, wird dieselbe auf Rollen $c, c, c \ldots$ gestellt, welche mit einander durch zwei Reifen verbunden sind und zwischen Kränzen oder Ringen aa und bb laufen, wovon der eine oder Rollring oben auf dem Thurme und der andere oder Laufring unten an der Haube festsitzt. Um endlich das Abheben der Haube zu verhindern, wird innen an b noch ein Kranz d (Ansatzring) angeschraubt, welcher zur Erleichterung der Bewegung vielleicht ebenfalls mit Rollen, die an der Innenfläche von aa herumlaufen, ausgerüstet wird. Bei Anwendung eines Steuerrades ist die Außenfläche des Rollringes aa von einem gezahnten Kranze umgeben, in welches ein Getriebe oder kleines Zahnrad e eingreift, das mittels der Zahnrädchen f und g durch das Steuerrad umgedreht wird und dadurch eine Drehung der Haube bewirkt, sowie die Windrichtung aus der Umdrehungsebene von S gekommen ist.

§. 336 **Kraftregulirung.** Der Wind ist nicht allein in seiner Richtung, sondern auch in seiner Geschwindigkeit oder Intensität veränderlich; wäre nun aber die angehängte Last eines Windrades constant, so würde sich ihre Bewegung mit der Stärke des Windes zugleich verändern und daher zu verschiedenen Zeiten oft sehr verschieden ausfallen, wenn nicht besondere Regulirungsmittel zur Anwendung kämen. Natürlich läßt sich durch diese Mittel nur die Wind- oder Umdrehungskraft mäßigen, nicht aber erhöhen. Eins dieser Mittel besteht in einem Bremse oder einem Preßringe, welcher die obere Hälfte des auf der Flügelwelle sitzenden Zahnrades umgiebt und auf dieselbe aufgedrückt wird, wenn der Gang des Windrades zu ermäßigen oder gar aufzuheben ist. Von ihm wird jedoch erst später an einem anderen Orte ausführlich die Rede sein. Ein anderes Mittel zum Reguliren des Ganges der Windräder läßt sich aber durch Veränderung der Flügelbedeckung hervorbringen; sind die Flügel vollständig bedeckt, so ist das Arbeitsvermögen des Rades am größten, sind sie aber nur theilweise bekleidet, so haben sie ein kleineres Arbeitsvermögen, und zwar um so kleiner, je kleiner der Flächenraum der ganzen Bedeckung ist. Bei der Bedeckung durch Segeltuch läßt sich dieses Reguliren durch Auf- oder Abwickeln desselben bewirken, sind aber die Flügel durch Thüren bekleidet, so läßt sich derselbe Zweck durch Wegnahme oder Auflegen von Thüren erreichen.

Man hat aber auch Windräder, welche sich selbst reguliren, indem sie von selbst bei Abnahme der Windgeschwindigkeit ihre Stoßfläche vergrößern und bei Zunahme von jener diese vermindern. Die vorzüglichsten Flügelräder dieser Art sind die von Cubit, wovon der Durchschnitt eines Theiles in Fig. 584 abgebildet ist. Es ist hier A die hohle Flügelwelle, BC ein durch sie hindurchgehender Metallstab, und CD eine gezahnte Stange, welche in C durch ein Gewinde so mit BC verbunden ist, daß CD nur an der Bewegung in der Axenrichtung, nicht aber an der Drehung um die Axe von BC Theil nimmt. Die gezahnte Stange greift in das Zahnrad E und dieses sitzt mit der Rolle F, um deren Umfang eine Schnur liegt, die durch das Gewicht G gespannt wird, auf einer Axe. Die Flügelbedeckung besteht aus lauter dünnen Holz- oder Blechklappen bc, b_1c_1 u. s. w., welche durch die Arme ac, a_1c_1 u. s. w. um die Axen c, c_1 u. s. w. gedreht werden können. Diese Arme sind durch Stangen ae, a_1e_1 u. s. w. mit einander und zugleich durch Arme de, d_1e_1 mit Zahnrädchen d, d_1 verbunden, so daß durch Drehung der letzteren das Oeffnen und Verschließen oder überhaupt jede Klappenstellung zu ermöglichen ist. Endlich sind noch Hebel BL, BL_1 angebracht, welche sich um die Axen K, K_1 drehen lassen, und auf der einen Seite mit der Stange BC, auf der anderen aber mit Zahnstangen LM, L_1M_1, deren Zähne zwischen die Zähne der Rädchen d, d_1 greifen, in Verbindung stehen. Aus der Zeichnung ist nun leicht zu ersehen,

wie der Wind W die Klappen auf-, das Gewicht G aber dieselben mittels der Stange BC, der Hebel BL, BL_1 u. s. w. zuzustoßen sucht, und wie auf diese Weise dem Windstoße gegen die Klappen von dem Gewichte G das Gleichgewicht gehalten wird. Wenn sich nun auch die Windgeschwindigkeit ändert, so wird deshalb diese Stoßkraft nicht anders, sondern nur die Klappenstellung und dadurch auch nur die Stoßfläche eine andere.

Fig. 584.



Anmerkung. Bei einer Bedeckung mit Segeltuch läßt sich, nach Bywater, derselbe Zweck erreichen, wenn dasselbe durch zwei Rollen ausgespannt wird, die durch Zahnräder in Umdrehung gesetzt werden, wenn die Windgeschwindigkeit sich ändert. Ausführlich beschrieben sind die Apparate in Barlow's Treatise on the Manufactures and Machinery etc. etc. Eine neue Windradconstruction ist auch in der Zeitschrift „Der Ingenieur", Band II. beschrieben.

In mehrfacher Hinsicht eigen- §. 337
thümlich sind die vom Herrn Maschinendirector Kirchwäger construirten Windräder auf mehreren Wasserstationen der hannoverschen Eisenbahnen (s. eine Abhandlung vom Herrn Obermaschinenmeister Prüsmann; im 8ten Bande (1862) der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover). Die eigenthümlichen Einrichtungen eines solchen Windrades sind aus dem verticalen Durchschnitt Fig. 585 (a. f. S.) zu ersehen. Der circa $1^3/_4$ Fuß weite, aus Eisenblech zusammengesetzte Thurm AA ragt aus dem Dache des aus Backsteinen aufgeführten Maschinengebäudes hervor, und endigt sich in einem gußeisernen Kopf BB, auf welchem die Haube C mittels 4 Rollen R, R_1 aufruht. Die Haube trägt die Lager D und E der Windradwelle EF, und greift mit ihrem cylindrischen Fußstück über den oberen Theil des Kopfes BB weg, damit sie nicht durch den Windstoß abgehoben werden könne. Der mit der Haube fest verbundene (nur zum Theil sichtbare) Steuerflügel G dient dazu, um durch Drehung der Haube das Windrad FH dem Winde entgegenzurichten. Das Windrad besteht aus fünf um radiale Arme, wie KL, drehbaren

Blechflügeln *KH*. Diese Arme sind auf einer gußeisernen Rosette *NN* aufgeschraubt, welche auf dem Kopf der Windradwelle festsitzt. Um den Gang

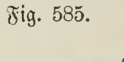


Fig. 585.

des Rades zu reguliren, oder den Flügeln die dem Kraftbedürfniß entsprechende Stellung gegen den Wind zu geben, ist folgender Mechanismus angebracht worden. Durch die hohle Windradwelle geht eine verschiebbare Stahlstange *MO*, welche an einem Ende einen Stern trägt, dessen fünf Arme mit anderen an den Flügeln festsitzenden Armen *S* durch kurze Zugstangen und mittels Gelenken derart verbunden sind, daß mit dem Einwärtsziehen des Sternes ein Flachlegen und dagegen mit dem Auswärtsschieben ein Scharfstellen der Flügel eintritt. Das Einwärtsziehen des Sternes *M* mittels der Stange *MO* erfolgt durch das Gewicht *Q*, welches durch eine über eine Leitrolle *r* weggehende Kette mit einer Hülse *W* verbunden ist, welche auf der Welle *MO* sitzt und durch einen Arm *a*, welcher nur längs einer festen Bahn *b* verschiebbar ist, an dem Umlaufen verhindert wird.

Dem Flachlegen der Flügel wird durch den Winkelhebel *Y*, welcher sich

mit seinem langen Arme an das Ende der verschiebbaren Stange *MO* anlegt, eine Grenze gesetzt. Dieser Hebel steht mittels Gelenken und durch den Hebel *dce* mit der verticalen Zugstange *Z* in Verbindung und wird durch die Zugkraft der Stange *Z* gegen das Ende der Stange *MO* angedrückt. Es kommt folglich nur darauf an, daß die Stange *Z* niedergezogen werde, wenn ein Ueberschuß an Kraft vorhanden ist, daß sie dagegen aufgeschoben werde, wenn die Windkraft von der Last der Maschine übertroffen wird. Bei den gedachten Wasserstationen, wo das Windrad ein Pumpenwerk in Umtrieb setzt, wird das Heben und Senken der Stange *Z* durch Schwimmer bewirkt, welche durch einen Hebelmechanismus u. s. w. mit der Zugstange *Z* verbunden sind. In der Abbildung Fig. 585 sind nur noch die beiden Zahnräder *PT* und *TT* dargestellt, wodurch die Windradwelle den hohlen Königsbaum *UV* umtreibt, welcher ein anderes (nicht abgebildetes) Räderwerk, das am Fuß des Gebäudes befindliche Pumpenwerk, in Bewegung setzt.

Windrichtung. Der Wind, dessen Entstehung jedenfalls einer Ungleichheit in der Expansivkraft oder Dichtigkeit der Luft beigemessen werden muß (s. die Formeln in Band I, §. 458), ist verschieden in Hinsicht auf Richtung und in Hinsicht auf Stärke oder Geschwindigkeit. In Hinsicht auf die Richtung unterscheidet man die acht Winde N, NO, O, SO, S, SW, W, NW, d. i. Nord, Nordost, Ost, Südost, Süd, Südwest, West und Nordwest, indem man sie nach denjenigen Weltgegenden benennt, aus denen sie wehen. Zur genaueren Bezeichnung der Windrichtung bedient man sich auch einer Eintheilung des Horizontes in 16 gleiche Theile, oder, nach dem Bergmann, in 24 Stunden, am genauesten aber der Eintheilung in Grade. Im Laufe eines Jahres kommen alle diese Windrichtungen vor, jedoch manche von ihnen auf längere, manche auf kürzere Zeit. Für das mittlere und südliche Deutschland ist nach Coffin die mittlere Dauer der einzelnen Winde folgende: §. 338

N.	NNO.	NO.	ONO.	O.	OSO.	SO.	SSO.	S.	SSW.
23,5	2,9	35,1	3,1	41,7	3,9	30,1	2,5	23,9	3,0

SW.	WSW.	W.	WNW.	NW.	NNW.	Windstille.
63,3	3,2	77,1	4,2	42,8	0,4	0,9

Tage im Jahre.

Nach den Zusammenstellungen von Kämtz wehen z. B. unter 1000 Tagen die in folgender Tabelle aufgezeichneten Winde:

Länder:	N.	NO.	O.	SO.	S.	SW.	W.	NW.
Deutschland . .	84	98	119	87	97	186	198	131
England . . .	82	111	99	81	111	225	171	120
Frankreich . .	126	140	84	76	117	192	155	110

Man ersieht hieraus, daß in den angeführten drei Ländern die Südwestwinde die vorherrschenden sind. Die Uebergänge dieser Windrichtungen in einander folgen meist nur in der Richtung S, SW, W u. s. w., selten findet die entgegengesetzte Winddrehung S, SO, O u. s. w. statt, wenigstens besteht diese meist nur in einem Zurückspringen um kleinere Winkel.

Die Windrichtung bestimmt man durch die sogenannte Wind- oder Wetterfahne (franz. girouette, flouette; engl. fane, vane). Dieses höchst einfache Instrument besteht in einer um eine verticale Axe drehbaren Blechfahne, welche natürlich durch den Windstoß gedreht wird, wenn die Richtung des Windes von ihrer Ebene abweicht, deshalb also durch ihre Richtung die Richtung des Windes bezeichnet. Um ihre Beweglichkeit zu erhöhen, muß man die Reibung an ihrer Axe möglichst herabzuziehen suchen, weshalb man denn auch durch Hinzufügung eines Gegengewichts auf der entgegengesetzten Seite der Umdrehungsaxe den Schwerpunkt der Fahne in die Umdrehungsaxe bringt, wodurch die sogenannten Wetterhähne (franz. coqs à vent; engl. weather-cocks) entstanden sind.

§. 339 **Windgeschwindigkeit.** Viel wichtiger als die Windrichtung ist natürlich dem Windmüller die Windgeschwindigkeit, weil von dieser das Arbeitsquantum abhängt, welches er dem Winde durch das Windrad abgewinnen kann. Nach der Größe der Geschwindigkeit hat man folgende Winde:

Kaum wahrnehmbarer Wind mit $1\frac{1}{2}$ Fuß Geschwindigkeit.

Sehr schwacher Wind mit 3 Fuß Geschwindigkeit.

Schwacher Wind (franz. vent faible; engl. feeble wind) mit 6 Fuß.

Lebhafter Wind (franz. vent frais, brise; engl. brisk gale) mit 18 Fuß.

Günstiger Wind für die Windmühlen, mit 22 Fuß Geschwindigkeit; ferner:

Sehr lebhafter Wind (franz. grand frais; engl. very brisk) mit 30 Fuß.

Starker Wind (franz. vent très fort; engl. high wind) mit 45 Fuß.

Sehr starker Wind (franz. vent impétieux; engl. very high wind) mit 60 Fuß Geschwindigkeit.

Unter Sturm (franz. tempête; engl. storm) versteht man den heftigen Wind von 70 bis 90 Fuß Geschwindigkeit, und Orkan (franz. ouragan; engl. hurrican) ist ein Wind von 100 und mehr Fuß Geschwindigkeit. Wind von 10 Fuß Geschwindigkeit ist in der Regel nicht hinreichend, um ein belastetes Windrad in Umgang zu erhalten; steigt hingegen die Windgeschwindigkeit über 35 Fuß, so läßt sich die Windkraft nicht mehr mit Vortheil zu Gute machen, weil dann die Flügel eine zu große Geschwindigkeit annehmen würden. Stürme oder gar Orkane sind aber für die Windmühlen im höchsten Grade gefährlich, weil sie sehr oft das Abheben oder Umstürzen derselben herbeiführen.

Um die Windgeschwindigkeit zu ermitteln, wendet man Instrumente an, die man Anemometer oder Windmesser (franz. anémomètres; engl. anemometers, wind-gages) nennt. Obgleich man im Laufe der Zeit schon sehr viele solcher Instrumente vorgeschlagen und versucht hat, so sind doch nur wenige derselben hinreichend bequem und sicher im Gebrauche. Die meisten dieser Instrumente sind den Hydrometern (s. Band I, §. 490) u. s. w. sehr ähnlich, ja es lassen sich sogar manche Hydrometer ohne Abänderungen als Anemometer gebrauchen. Unmittelbar läßt sich die Geschwindigkeit des Windes durch leichte Körper angeben, welche man vom Winde fortführen läßt, z. B. durch Federn, Seifenblasen, Rauch, kleine Luftbälle u. s. w. Da die Windbewegung in der Regel nicht bloß progressiv, sondern auch drehend oder wirbelnd ist, so sind diese Mittel, wenigstens bei großen Geschwindigkeiten, oft nicht hinreichend. Am besten sind allerdings große Luftbälle, deren mittlere Dichtigkeit nicht sehr verschieden ist von der des Windes.

Die eigentlichen Anemometer lassen sich, wie die Hydrometer, in drei Classen bringen: entweder giebt man die Windgeschwindigkeit durch ein vom Winde bewegtes Rad an, oder man mißt dieselbe durch die Höhe einer Flüssigkeitssäule, welche dem Windstoße das Gleichgewicht hält, oder man bestimmt dieselbe durch die Kraft, welche der Windstoß gegen eine ebene Fläche ausübt. Von diesen Apparaten möge nun noch das Nothwendigste abgehandelt werden.

Anmerkung. Ausführlich über Anemometer handelt Hülsse in dem ersten Bande der allgemeinen Maschinenencyclopädie. Ueber den Wind ist aber nachzulesen: Kämtz's Meteorologie und Gehler's physik. Wörterbuch, Band X., sowie im Lehrbuch der Meteorologie von E. E. Schmidt, Leipzig 1860.

Anemometer. Der Woltmann'sche Flügel (s. Band I, §. 490) §. 340
läßt sich ebenso gut zur Ausmittelung der Windgeschwindigkeit als zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers gebrauchen. Wird seine Um=

drehungsaxe in die Windrichtung gebracht, was durch Hinzufügung einer Windfahne von selbst erfolgt, wenn man beide Instrumente an einer verticalen Umdrehungsaxe so befestigt, daß sie in eine Ebene fallen, so kann man die Anzahl der Umdrehungen beobachten, welche dieses Rad in Folge des Windstoßes in einer gewissen Zeit macht und es läßt sich nun, wie früher, die Geschwindigkeit setzen:

$$v = v_0 + \alpha u,$$

wo v_0 die Geschwindigkeit ist, bei welcher das Rad anfängt still zu stehen, α aber das Erfahrungsverhältniß $\frac{v - v_0}{u}$ bezeichnet. Wäre der Windstoß nicht verschieden vom Wasserstoße, und wüchsen beide genau proportional dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit, so würde

$$\alpha = \frac{v - v_0}{u}$$

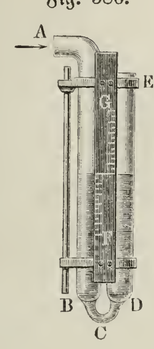
für Wasser und Wind zugleich gelten, da dies aber nur annähernd richtig ist, so können wir auch erwarten, daß die Coefficienten α für die Wind- und Wassergeschwindigkeit nur ungefähr gleich sind. Was dagegen die Anfangsgeschwindigkeit v_0 anlangt, so fällt diese beim Winde ungefähr $\sqrt{800} = 28,3$ mal so groß aus als beim Wasser, weil die Dichtigkeit des Wassers circa 800mal so groß als die des Windes ist und daher nur eine 800mal so hohe Luftsäule die einfach hohe Wassersäule, sowie der Stoß des $\sqrt{800} = 28,3$mal so schnellen Windes den Stoß des einfach schnellen Wassers ersetzen kann. Dieser große Werth der Constanten v_0 macht es zur Pflicht, den als Anemometer zu gebrauchenden Flügel möglichst leicht zu machen, ihn z. B., nach Combes, vielleicht mit Flittergold zu überziehen, vorzüglich aber mit feinen Stahlaxen in Lagern von Edelsteinen umlaufen zu lassen.

Die Constanten v_0 und α bestimmt man zwar gewöhnlich durch Bewegung oder Umdrehung des Instrumentes in der ruhigen Luft, es ist indessen diese Methode nicht sicher, weil der Stoß einer bewegten Flüssigkeit nicht ganz derselbe ist, wie der Widerstand der ruhigen Flüssigkeit (s. Band I, §. 511). Besser ist es jedenfalls, man sucht diese Constanten durch Beobachtungen in der bewegten Luft selbst zu bestimmen, indem man deren Geschwindigkeit durch leichte Körper (Luftbälle) ausmittelt. Auch kann man hierzu ein Cylindergebläse oder eine andere Kolbenmaschine gebrauchen, wenn man das Instrument in eine weite Röhre bringt, durch die der Wind mittels des niedergehenden Kolbens ausgeblasen wird. Die Berechnungen der Constanten aus mehreren zusammengehörigen beobachteten Werthen von v und u sind wie in Band I, §. 491 zu führen.

§. 341 Die Pitot'sche Röhre (s. Band I, §. 492) läßt sich ebenfalls mit großer Bequemlichkeit als Anemometer gebrauchen, sie ist aber dann gewöhnlich

unter dem Namen das „Lind'sche Anemometer" bekannt. Die specielle Einrichtung eines solchen Instrumentes ist aus Fig. 586 zu ersehen. AB und DE sind zwei aufrechtstehende etwa 5 Linien weite mit Wasser anzufüllende Glasröhren, und BCD ist eine enge krumme Verbindungsröhre zwischen beiden von etwa nur 1/2 Linie Weite, endlich ist FG eine Scala zur Abnahme der Wasserstände. Wird nun das Mundstück A dem Winde entgegengestellt, so drückt dessen Kraft die Wassersäule in AB nieder und die in DE eben so viel empor, es läßt sich nun an der zwischenbefindlichen Scala der Niveauabstand h zwischen beiden ablesen und hieraus wieder die Geschwindigkeit v des Windes berechnen, indem man setzt:

Fig. 586.



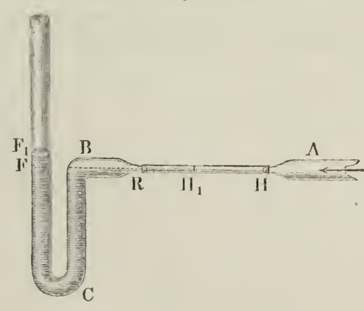
$$v = v_0 + \alpha \sqrt{h},$$

wobei v_0 und α Erfahrungsconstanten ausdrücken.

Dieses Instrument ist jedoch in seinem Gebrauche höchst eingeschränkt, da es mäßige Windgeschwindigkeiten durch sehr kleine Wassersäulen ausdrückt, welche sich nur mit sehr großer Unsicherheit ablesen lassen. Z. B. eine Windgeschwindigkeit von 20 Fuß wird durch einen Anemometerstand h von circa 1,1 Linie angegeben. Um diesem Uebelstande abzuhelfen und das Instrument auch bei mittleren Windgeschwindigkeiten gebrauchen zu können, sind von Robison und Wollaston folgende Verbesserungen angebracht worden.

Bei dem Anemometer von Robison ist eine enge horizontale Röhre HR, Fig. 587, zwischen dem Mundstücke A und dem aufrechtstehenden Röhrenschenkel BC eingesetzt, und man gießt vor dem Gebrauche so viel Wasser zu, daß der Wasserspiegel F mit HR in einerlei Niveau kommt und das Wasser zugleich die enge Röhre bis H anfüllt. Wird nun A dem Winde entgegengerichtet, so treibt derselbe das Wasser in der engen Röhre zurück und es erhebt sich über dem Niveau von HB eine dem Windstoße das Gleichgewicht haltende Wassersäule, deren Höhe FF_1 gemessen wird durch die Länge HH_1 der zurückgedrängten liegenden Wassersäule. Sind d und d_1 die Weiten und h und h_1 die Höhen der Wassersäulen FF_1 und HH_1, so hat man:

Fig. 587.



$$\frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi d_1^2}{4} h_1,$$

und daher:

$$h = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 h_1,$$

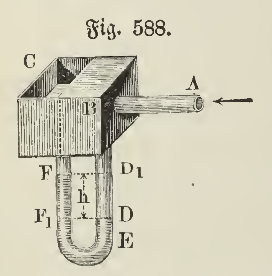
sowie:

$$h_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 h.$$

Es fällt also h_1 stets im Verhältnisse $\left(\frac{d}{d_1}\right)^2$ größer als h aus, und kann daher mit mehr Sicherheit beobachtet werden als h. Ist z. B. $\frac{d}{d_1} = 5$, so giebt die enge Röhre die Höhe FF_1 schon 25fach an.

Endlich läßt sich auch durch das in Fig. 588 abgebildete Differenzial-Anemometer von Wollaston die Geschwindigkeit des Windes mit erhöhter Genauigkeit messen. Dasselbe besteht aus zwei Gefäßen B und C und aus einer gebogenen Röhre DEF, welche beide Gefäße von unten mit einander in Verbindung setzt. Das eine dieser Gefäße ist oben verschlossen und hat ein Seitenmundstück A, welches dem Winde entgegengerichtet wird. Die Füllung des Instrumentes besteht aus Wasser und Oel; das erstere füllt jeden der beiden Schenkel ungefähr bis zur Hälfte, das letztere aber nimmt den übrigen Theil der Röhre ein und füllt auch beide Gefäße zum Theil an. Durch den Windstoß stellt sich das Wasser in dem einen Schenkel höher als in dem anderen, und es wird der Kraft dieses Stoßes durch die Differenz der Drücke von der Wassersäule FF_1 und von der Oelsäule DD_1 das Gleichgewicht halten. Setzen wir die gemeinschaftliche Höhe dieser Flüssigkeitssäulen, $= h$, und das specifische Gewicht des Oeles, $= \varepsilon$, so haben wir in der letzten Formel statt h, $h\,(1 - \varepsilon)$ und daher

Fig. 588.



$$v = v_0 + \alpha \sqrt{(1 - \varepsilon)\, h}$$

zu setzen. Z. B. wenn die obere Füllung aus Leinöl besteht, da für dasselbe $\varepsilon = 0{,}94$ ist:

$$v = v_0 + \alpha \sqrt{(1 - 0{,}94)\, h} = v_0 + \alpha \sqrt{0{,}06 . h} = v_0 + 0{,}245\, \alpha \sqrt{h}.$$

Es ist also dann $h = {}^{100}/_{6} = 16^2/_3$mal so groß als bei einer einfachen Wasserfüllung. Durch Mischung des Wassers mit Alkohol läßt sich die Dichtigkeit des Wassers der des Oeles noch näher bringen, und daher $1 - \varepsilon$ noch mehr herabziehen, oder die abzulesende Niveaudifferenz und daher auch die Genauigkeit des Ablesens noch mehr vergrößern.

Auch hat man mehrere Anemometer vorgeschlagen und zu gebrauchen gesucht, welche dem Stromquadranten (s. Band I, §. 493) ähnlich sind und mit demselben einerlei Princip haben, jedoch hierbei die Kugeln durch dünne Scheiben ersetzt. Jedenfalls ist aber eine hohle Blechkugel noch besser als eine ebene Scheibe, weil der Windstoß gegen die Kugel bei allen Neigungen der Stange, woran dieselbe aufgehangen ist, derselbe bleibt, wogegen er sich bei der Scheibe mit der Neigung derselben ändert; während bei Anwendung einer Kugel die Formel §. 342

$$v = \psi \sqrt{tang.\beta}$$

(wo β die Abweichung der Stange von der Verticalen bezeichnet) genügt, ist bei Anwendung einer Scheibe ein complicirterer Ausdruck zur Berechnung der Geschwindigkeit zu gebrauchen.

Endlich hat man auch die Windgeschwindigkeit durch den Stoß, welchen der Wind unmittelbar gegen eine ebene, ihm normal entgegengerichtete Fläche ausübt, zu messen gesucht, und dazu Anemometer angewendet, welche dem in Band I, §. 494 abgebildeten und beschriebenen Hydrometer mehr oder weniger ähnlich sind. Wäre das Gesetz des Windstoßes vollständig bekannt und sicher begründet, so würde sich mit Hülfe eines solchen Anemometers die Geschwindigkeit des Windes ohne weitere Untersuchung bestimmen lassen; allein dem ist nicht so, es führen vielmehr die in Band I, §. 510 aufgestellten Formeln und der in §. 512 angegebene Coefficient nur auf Näherungswerthe. Behalten wir dieselben indessen hier bei, setzen wir also den Windstoß

$$P = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma, = 1{,}86 \cdot \frac{v^2}{2g} F\gamma,$$

oder, für das preußische Maß, wo $\frac{1}{2g} = 0{,}016$ ist,

$$P = 0{,}02976\, v^2 F\gamma,$$

oder, wenn wir noch die Winddichtigkeit $\gamma = \frac{61{,}74}{800} = 0{,}07717$ Pfund einsetzen,

$$P = 0{,}002297\, v^2 F,$$

also, wenn der Inhalt der gestoßenen Fläche einen Quadratfuß beträgt, den Windstoß

$$P = 0{,}002297\, v^2 \text{ Pfund},$$

sowie umgekehrt, die Windgeschwindigkeit

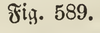
$$v = \sqrt{\frac{P}{0{,}002297}} = 20{,}87 \sqrt{P} \text{ Fuß}.$$

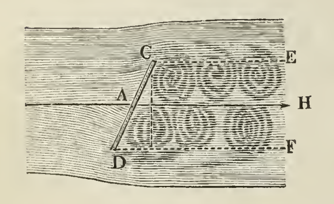
Hiernach ist die auf umstehender Seite enthaltene Tabelle berechnet worden.

Für die Geschwindigkeiten $v =$	10	15	20	25	30	35	40	45	50 Fuß.
sind hiernach die Windstöße auf 1 Quadratfuß =	0,2297	0,5168	0,919	1,436	2,067	2,814	3,675	4,651	5,7425 Pfd.

Durch Multiplication mit dem Inhalte der gestoßenen Fläche läßt sich hiernach der Normalstoß des Windes gegen jede ebene Fläche leicht berechnen.

§. 343 **Grösse des Windstosses.** Wir haben nun die Größe und Leistung des Windstoßes bei den Flügelrädern der Windmühlen näher zu studiren. Denken wir uns in dieser Absicht die ganze Flügelfläche durch Normalebenen auf der Flügel- oder Ruthenaxe in lauter schmale Theile oder Elemente zerschnitten und stelle CD, Fig. 589, ein solches Element vor. Wegen der bedeutenden Größe und zumal wegen der großen Länge einer Flügelfläche können wir annehmen, daß alle in der Richtung AH ankommenden Windelemente der gegen die Fläche CD anrückenden Windsäule durch den Stoß in entgegengesetzten Richtungen parallel zu CD abgelenkt werden, und deshalb auch von den Formeln in Band I, §. 502 Gebrauch machen.


Fig. 589.



Bezeichnet c die Windgeschwindigkeit und v die Flügelgeschwindigkeit, sowie Q das Windquantum, welches pr. Secunde gegen CD anstößt, ferner γ die Dichtigkeit des Windes und α den Winkel CAH, welchen die Windrichtung mit CD einschließt, so haben wir unter der Voraussetzung, daß die Fläche CD in der Richtung des Windes ausweicht, nach dem angeführten Paragraphen, den Normalstoß des Windes gegen CD:

$$N = \frac{c - v}{g} \sin. \alpha . Q \gamma.$$

Das zum Stoße gelangende Windquantum Q ist hier, wo der Querschnitt $\overline{CN} = G$ des Stromes die ganze Stoßfläche einnimmt, nicht $= Gc$, sondern nur $G(c - v)$ zu setzen, da die mit der Geschwindigkeit v ausweichende Fläche pr. Secunde einen Raum $\overline{Gv}$ hinter sich offen läßt, der vom nachfolgenden Windquantum $\overline{Gc}$ den Theil $\overline{Gv}$ aufnimmt, ohne eine

Richtungsveränderung zu erleiden. Es ist daher der Normalstoß auch zu setzen:

$$N = \frac{c - v}{g} \sin.\alpha \,.\, (c - v)\, G\gamma = \frac{(c - v)^2}{g} \sin.\alpha \,.\, G\gamma,$$

oder, wenn F den Inhalt des Elementes CD bezeichnet und $G = F \sin.\alpha$ eingeführt wird,

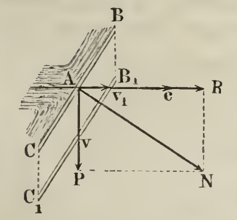
$$N = \frac{(c - v)^2}{g} \sin.\alpha^2 F\gamma.$$

Außer diesem Stoße gegen die Vorderfläche von CD findet noch eine Wirkung an der Hinterfläche von CD statt, da ein Theil des in den Richtungen CE und DF an dem Umfange der Fläche vorbeigehenden Windes zur Ausfüllung des Raumes hinter CD eine wirbelnde Bewegung annimmt, und dabei den der relativen Geschwindigkeit $(c - v) \sin.\alpha$ entsprechenden Druck $\frac{(c - v)^2}{g} \sin.\alpha^2 \,.\, F\gamma$ verliert. Wenn man beide Wirkungen vereinigt, so bekommt man zuletzt die vollständige Normalkraft des Windes gegen das Flügelelement F:

$$N = \frac{(c - v)^2}{g} \sin.\alpha^2 F\gamma + \frac{(c - v)^2}{2\,g} \sin.\alpha^2 F\gamma = 3 \cdot \frac{(c - v)^2}{2\,g} \sin.\alpha^2 F\gamma.$$

Vortheilhafteste Stosswinkel. Bei Anwendung dieser Formel auf die Windräder haben wir zu berücksichtigen, daß der Windflügel BC, Fig. 590, nicht in der Richtung AR des Windes, sondern in einer Richtung AP rechtwinkelig darauf umläuft, es ist daher auch in der Formel §. 344

Fig. 590.



$$N = 3 \cdot \frac{(c - v)^2}{2\,g} \sin.\alpha^2 \,.\, F\gamma$$

für den Normalstoß statt v die Geschwindigkeit $\overline{Av_1} = v_1$ einzusetzen, mit welcher der Flügel in Hinsicht auf die Windrichtung ausweicht. Bezeichnet hier v die wirkliche Umdrehungsgeschwindigkeit $\overline{Av}$, so haben wir für $\overline{Av_1} = v_1 = v \,.\, cotang.\, \overline{Av_1 v} = v\, cotang.\, \alpha$ und daher für den vorliegenden Fall:

$$N = 3 \cdot \frac{(c - v\, cotang.\, \alpha)^2}{2\,g} \cdot \sin.\alpha^2 F\gamma$$

oder

$$N = 3\, \frac{(c \sin.\alpha - v \cos.\alpha)^2}{2\,g} F\gamma.$$

Diesen Normalstoß zerlegt man in zwei Seitenkräfte P und R, eine in

der Umdrehungs- und die andere in der Axenrichtung des Flügelelementes wirkend, und es ist

$$P = N \cos. \alpha = 3 \frac{(c \sin. \alpha - v \cos. \alpha)^2}{2g} \cos. \alpha . F\gamma,$$

dagegen

$$R = N \sin. \alpha = 3 \frac{(c \sin. \alpha - v \cos. \alpha)^2}{2g} \sin. \alpha . F\gamma.$$

Durch Multiplication mit der Umdrehungsgeschwindigkeit v folgt aus der Formel für P die mechanische Leistung des Windrades:

$$L = Pv = 3 \frac{(c \sin. \alpha - v \cos. \alpha)^2}{2g} v \cos. \alpha . F\gamma;$$

was dagegen die Axen- oder sogenannte Parallelkraft R anlangt, so verrichtet dieselbe keine Arbeit, sondern sie sucht das Rad fortzuschieben, drückt deshalb die Grundfläche seines hinteren Zapfens gegen das Widerlager und giebt durch die hieraus entspringende Reibung zu einem besonderen Arbeitsverluste Veranlassung.

Die letzte Formel zeigt uns allerdings an, wie es sich jedoch auch von selbst versteht, daß die Leistung mit der Windgeschwindigkeit c und mit dem Inhalte F des Flächenstücks wächst, dagegen ist aus ihr nicht sogleich zu ersehen, welchen Einfluß der Stoßwinkel α auf den Werth der Leistung hat. Damit L nicht Null ausfalle, muß aber $c \sin. \alpha > v \cos. \alpha$, d. i. $tang. \alpha > \frac{v}{c}$ und $\cos. \alpha > 0$, also $\alpha < 90^0$ sein. Es muß also zwischen den Grenzen $tang. \alpha > \frac{v}{c}$ und $\alpha < 90^0$ ein Werth von α einem Maximo von L entsprechen. Um diesen Werth zu finden, setzen wir statt α, $\alpha \pm x$, wo x eine sehr kleine Größe bedeutet. Hiernach erhalten wir:

$\sin. (\alpha \pm x) = \sin. \alpha \cos. x \pm \cos. \alpha \sin. x$, oder $\cos. x = 1$

und, $\sin. x = x$ eingesetzt,

$\sin. (\alpha \pm x) = \sin. \alpha \pm x \cos. \alpha$,

ferner:

$\cos. (\alpha \pm x) = \cos. \alpha \cos. x \mp \sin. \alpha \sin. x = \cos. \alpha \mp x \sin. \alpha$,

und diese Werthe geben uns für die Leistung

$$L = \frac{3 c^2 v}{2g} F\gamma \left(\sin. \alpha - \frac{v}{c} \cos. \alpha\right)^2 \cos. \alpha$$

den Ausdruck:

$$L_1 = \frac{3c^2v}{2g} F\gamma \left[\left(sin.\alpha \pm x cos.\alpha - \frac{v}{c}(cos.\alpha \mp x sin.\alpha) \right)^2 (cos.\alpha \mp x sin.\alpha) \right]$$

$$= \frac{3c^2v}{2g} F\gamma \left[sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \pm \left(cos.\alpha + \frac{v}{c} sin.\alpha \right) x \right]^2 (cos.\alpha \mp x sin.\alpha)$$

$$= \frac{3c^2v}{2g} F\gamma \left(\left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right)^2 cos.\alpha \right.$$

$$\left. \pm \left[2 \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right) \left(cos.\alpha + \frac{v}{c} sin.\alpha \right) cos.\alpha - \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right)^2 sin.\alpha \right] x + \text{etc.} \right)$$

$$= L \pm \frac{3c^2v}{2g} F\gamma \left(\left[2 \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right) \left(cos.\alpha + \frac{v}{c} sin.\alpha \right) cos.\alpha \right. \right.$$

$$\left. \left. - \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right)^2 sin.\alpha \right] x + \text{etc.} \right),$$

Damit α den Maximalwerth gebe, muß L_1 kleiner als L ausfallen, man mag α um x größer oder kleiner, d. i. x positiv oder negativ nehmen. Nun giebt aber die letzte Formel in einem Falle $L_1 > L$ und im anderen $< L$, so lange das zweite Glied $\pm \frac{3c^2v}{2g} F\gamma [\ldots] x$ reell ist; es ist daher zur Erlangung des Maximalwerthes nöthig, daß dieses zweite Glied Null, also

$$2 \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right) \left(cos.\alpha + \frac{v}{c} sin.\alpha \right) cos.\alpha - \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right)^2 sin.\alpha = 0,$$

oder

$$2 \left(cos.\alpha + \frac{v}{c} sin.\alpha \right) cos.\alpha = \left(sin.\alpha - \frac{v}{c} cos.\alpha \right) sin.\alpha,$$

oder

$$sin.\alpha^2 - \frac{3v}{c} sin.\alpha\, cos.\alpha = 2\, cos.\alpha^2 \text{ sei.}$$

Durch $cos.\alpha^2$ dividirt und $\frac{sin.\alpha}{cos.\alpha} = tang.\alpha$ eingesetzt, ergiebt sich

$$tang.\alpha^2 - \frac{3v}{c} tang.\alpha = 2,$$

woraus nun für den die Maximalleistung versprechenden Winkel folgt:

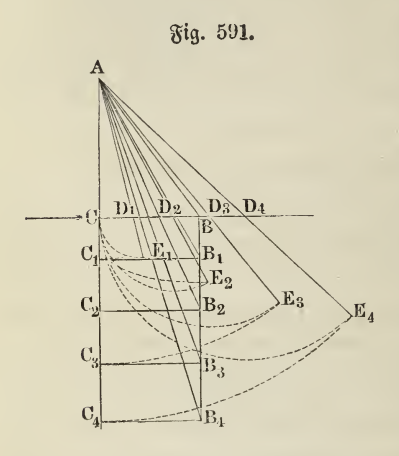
$$tang.\alpha = \frac{3v}{2c} + \sqrt{\left(\frac{3v}{2c}\right)^2 + 2}.$$

Da bei einem und demselben Flügel die entfernteren Elemente eine größere Geschwindigkeit besitzen, als die der Umdrehungsaxe näherstehenden, so folgt hieraus, daß den entfernteren Flügeltheilen ein größerer Stoßwinkel zu ertheilen ist, als den näheren, um eine möglichst große Leistung zu erhalten.

Es sind also die Flügel nicht eben, sondern windschief (franz. gauches; engl. warped) und zwar so herzustellen, daß die äußeren Theile weniger als die inneren von der Umdrehungsebene abweichen.

Anmerkung. Die vortheilhaftesten Stoßwinkel eines Flügels lassen sich auch leicht durch folgende Construction finden. Man nehme CB, Fig. 591, $= 1$, setze rechtwinkelig darauf: $CA = \sqrt{2} =$ der Diagonale eines Quadrates über CB, und ziehe AB. Dann ist

Fig. 591.



$$tang. ABC = \sqrt{2}, \text{ und daher}$$
$$\angle ABC = 54^0\, 44'\, 8'',$$

d. i. der Stoßwinkel der ganz nahe an der Umdrehungsaxe liegenden Flügelelemente. Setzen wir nun in $y = \frac{3\,\omega x}{2\,c}$ für c die Wind-, sowie für ω die Winkelgeschwindigkeit und für x nach und nach die Entfernungen der Flügelsprossen von der Umdrehungsaxe ein, und tragen wir die so erhaltenen Werthe von y als CD_1, CD_2, CD_3 u. s. w. auf die CB von C aus auf; ziehen wir ferner die Hypotenusen AD_1, AD_2, AD_3 u. s. w. und verlängern wir dieselben so, daß $D_1E_1 = CD_1$, $D_2E_2 = CD_2$, $D_3E_3 = CD_3$ u. s. w. wird; legen wir endlich AE_1, AE_2, AE_3 u. s. w. auf die Richtung von AC als AC_1, AC_2, AC_3 u. s. w. auf, errichten in C_1, C_2, C_3 u. s. w. die Perpendikel C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3 u s. w. $= CB = 1$, und ziehen AB_1, AB_2, AB_3 u. s. w., so erhalten wir in AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3 u. s. w. die gesuchten Stoßwinkel, denn es ist:

$$tang. AB_1C_1 = \frac{AC_1}{B_1C_1} = \frac{AE_1}{1} = D_1E_1 + AD_1 = y_1 + \sqrt{y_1^2 + 2},$$

$$tang. AB_2C_2 = \frac{AC_2}{B_2C_2} = \frac{AE_2}{1} = D_2E_2 + AD_2 = y_2 + \sqrt{y_2^2 + 2}, \text{ ꝛc.}$$

§. 345 **Leistung der Windräder.** Die Formel für den zweckmäßigsten Stoßwinkel läßt sich auch umkehren, um die einer gegebenen Flügelstellung (α) entsprechende vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit zu finden. Es ist hiernach:

$$tang. \alpha^2 - \frac{3\,v}{c}\, tang. \alpha = 2,$$

und daher sehr einfach:

$$v = \left(\frac{tang. \alpha^2 - 2}{tang. \alpha}\right) \cdot \frac{c}{3} = (tang. \alpha - 2\, cotang. \alpha) \frac{c}{3} \cdot$$

Setzt man diesen Werth in die Leistungsformel ein, so bekommt man dann:

$$L = \frac{3\,c^2}{2\,g}\,F\gamma\cdot\frac{tang.\alpha^2 - 2}{tang.\alpha}\cdot\frac{c}{3}\cdot\left(sin.\alpha - \frac{tang.\alpha^2 - 2}{3\,tang.\alpha}\,cos.\alpha\right)^2 cos.\alpha$$

$$= {}^4/_9\cdot\frac{c^3}{2\,g}\,F\gamma\cdot\frac{(tang.\alpha^2 - 2)\,cos.\alpha^2}{sin.\alpha^3} = {}^4/_9\,\frac{c^3}{2\,g}\,F\gamma\cdot\frac{(3\,sin.\alpha^2 - 2)}{sin.\alpha^3}.$$

Die theoretische Leistung eines Windrades läßt sich hiernach für jede gegebene Wind- und Umdrehungsgeschwindigkeit berechnen. Aus der gegebenen Umdrehungszahl u pr. Minute folgt zunächst die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\pi u}{30} = 0,10472\,.\,u$. Theilt man nun die ganze Windruthenlänge in sieben gleiche Theile, und läßt man, wie gewöhnlich, den Flügel im ersten Theilpunkte anfangen, so daß seine eigentliche Länge $^6/_7\,l$ ausfüllt, so kann man nun sehr leicht mit Hülfe der Formel

$$tang.\alpha = \frac{3\,v}{2\,c} + \sqrt{\left(\frac{3\,v}{2\,c}\right)^2 + 2}$$

die jedem der sieben Theilpunkte des Flügels entsprechenden vortheilhaftesten Stoßwinkel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ berechnen, indem man nach und nach

$$v_0 = \omega\cdot\frac{l}{7},\; v_1 = \omega\cdot\frac{2\,l}{7},\; v_2 = \omega\cdot\frac{3\,l}{7}\cdots \text{bis } v_6 = \omega\cdot\frac{7\,l}{7}$$

oder $\omega\,l$ einführt.

Sind nun noch $b_0, b_1, b_2 \ldots b_6$ die durch diese Theilpunkte zu legenden Flügelbreiten, so können wir mit Hülfe der Simpson'schen Regel aus

$$\left(\frac{3\,sin.\alpha_0^2 - 2}{sin.\alpha_0^3}\right)b_0, \left(\frac{3\,sin.\alpha_1^2 - 2}{sin.\alpha_1^3}\right)b_1, \left(\frac{3\,sin.\alpha_2^2 - 2}{sin.\alpha_2^3}\right)b_2 \text{ u. s. w.}$$

einen Mittelwerth k berechnen und bekommen daher mit Hülfe desselben die ganze Flügelleistung:

$$L = {}^4/_9\,k\gamma\,.\,{}^6/_7\,l\cdot\frac{c^3}{2\,g},$$

oder allgemeiner, wenn l_1 die eigentliche Flügellänge bezeichnet:

$$L = {}^4/_9\,\gamma k l_1\,\frac{c^3}{2\,g}.$$

Wäre der Flügel eben, hätte er also an allen Stellen einen und denselben Stoßwinkel α, so würde man mittels $v_0 = \frac{\omega l}{7}$, $v_1 = \omega\cdot\frac{2\,l}{7}$ u. s. w. zunächst die entsprechenden Werthe

$$\left(sin.\alpha - \frac{v_0}{c}\,cos.\alpha\right)^2\frac{v_0}{c}\,cos.\alpha\,.\,b_0,$$

$$\left(sin.\alpha - \frac{v_1}{c}\,cos.\alpha\right)^2\frac{v_1}{c}\,cos.\alpha\,.\,b_1 \text{ u. s. w.}$$

zu berechnen, aus diesen wieder durch Anwendung der Simpson'schen Regel den Mittelwerth k_1 zu ermitteln und denselben zuletzt in die Formel

$$L = 3\,\gamma k_1 . l_1 \cdot \frac{c^3}{2\,g}$$

einzusetzen haben.

Ist n die Anzahl der Flügel, so hat man allerdings den letzten Werth noch hiermit zu multipliciren, um die ganze theoretische Radleistung zu erhalten, also

$$L = 3\,n \gamma k_1 l_1 \frac{c^3}{2\,g}$$

zu setzen.

Beispiel 1. Welche Stoßwinkel erfordert ein Flügelrad bei 20 Fuß Windgeschwindigkeit, wenn dasselbe aus vier Flügeln von je 24 Fuß Länge und 6 bis 9 Fuß Breite besteht, und wenn es in der Minute 16 Umdrehungen macht. Wie groß ist ferner die theoretische Leistung dieses Rades?

Zunächst ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 0{,}10472 . 16 = 1{,}6755$ Fuß, und ist die Entfernung der innersten Flügelsprosse von der Wellenaxe = 4 Fuß, also die ganze Ruthenlänge $l = 24 + 4 = 28$ Fuß, so hat man:

Für die Entfernungen:	4	8	12	16	20	24	28 Fuß
die Geschwindigkeiten:	6,702	13,404	20,106	26,808	33,510	40,212	46,914 Fß.
die Tangenten der Stoßwinkel	2,004	2,740	3,575	4,469	5,397	6,347	7,311
die Stoßwinkel	63° 29′	69° 57′	74° 22′	77° 23′	79° 30′	81° 3′	82° 13′
Werthe $\frac{3\,sin.\,\alpha^2 - 2}{sin.\,\alpha^3}$:	0,5612	0,7810	0,8759	0,9220	0,9472	0,9622	0,9716
die Flügelbreiten . . .	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0 Fuß
die Producte aus den letzten beiden Größen	3,367	5,076	6,131	6,915	7,578	8,179	8,744

Aus den letzten Producten folgt nun der Mittelwerth:

$$k = \frac{3{,}367 + 8{,}744 + 4 . (5{,}076 + 6{,}915 + 8{,}179) + 2 . (6{,}131 + 7{,}578)}{18}$$

$$= \frac{12{,}111 + 80{,}680 + 27{,}418}{18} = \frac{120{,}209}{18} = 6{,}678,$$

und führen wir nun noch $\gamma = \frac{61{,}75}{800} = 0{,}0772$ Pfund, $\frac{6}{7}\,l = 24$ sowie $\frac{c^3}{2\,g} = 0{,}016 . 20^3 = 128$ ein, so bekommen wir die Leistung dieses Windrades:

$L = 4 . \frac{4}{9} . 6{,}678 . 0{,}0772 . 24 . 128 = 11{,}872 . 1{,}85 . 128 = 2811$ Fußpfund $= 5{,}9$ Pferdekräfte.

Beispiel 2. Welche Leistung ist von einem Windrade zu erwarten, welches aus vier ebenen Flügeln besteht und bei dem Stoßwinkel von 75° die übrigen Dimensionen und Verhältnisse mit dem Rade im vorigen Beispiele gemeinschaftlich hat?

Man hat hier:

die Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{v}{c}$	0,3351	0,6702	1,0053	1,3404	1,6755	2,0106	2,3457
die Differenzen: $sin.\,\alpha - \frac{v}{c} cos.\,\alpha$ . .	0,8792	0,7925	0,7057	0,6190	0,5323	0,4456	0,3588
die Breiten b	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0 Fuß
die Producte $(sin.\,\alpha - \frac{v}{c} cos.\,\alpha)^2 \cdot \frac{v}{c} cos.\,\alpha\,.\,b$: . . .	0,4023	0,7081	0,9071	0,9969	0,9830	0,8783	0,7034

Aus den letzten Producten ergiebt sich mittels der Simpson'schen Regel der Mittelwerth:

$$k_1 = \frac{1}{18}\,[0,4023 + 0,7034 + 4\,(0,7081 + 0,9969 + 0,8783) + 2\,(0,9071 + 0,9830)]$$
$$= \frac{1}{18}(1,1057 + 10,3332 + 3,7802) = \frac{15,2191}{18} = 0,8455,$$

und hieraus folgt die gesuchte Leistung:

$L = 4\,.\,3\,.\,0,8455\,.\,0,0772\,.\,24\,.\,128 = 2408$ Fußpfund $= 5$ Pferdekräfte, wogegen das Rad mit windschiefen Flügeln $L = 5,9$ Pferdekräfte verspricht.

Reibungsverlust der Windräder. Einen bedeutenden Theil des Arbeitsvermögens, welches ein Flügelrad dem Winde abgewinnt, geht durch die Reibung am Halse des Rades verloren, zumal wenn, wie gewöhnlich, dieser sehr stark ist. Wir können annehmen, daß das ganze Gewicht des Flügelrades im Halse unterstützt sei und den Druck am hinteren Zapfen ganz unberücksichtigt lassen; wenn nun auch dadurch eine etwas zu große Reibung gefunden wird, so wird sie durch Außerachtlassung der Reibung an der Basis des hinteren Zapfens, welche aus dem Windstoße in axialler Richtung entspringt, ungefähr wieder ausgeglichen. Da der hintere Zapfen viel schwächer ist, als der Hals- oder vordere Zapfen, so wird diese Vereinfachung um so eher erlaubt sein. Dies vorausgesetzt, erhalten wir nun aus dem Gewichte G des ganzen Flügelrades die entsprechende Reibung $F = \varphi G$, und ist nun noch r der Halbmesser des Halses, also ωr die Geschwindigkeit der Reibung, so folgt die Arbeit dieser Reibung: §. 346

$$F\omega r = \varphi G \omega r = 0{,}1047 . u \varphi G r = \varphi G \frac{r}{l} v,$$

wenn v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades bezeichnet.

Dies vorausgesetzt, können wir nun die effective Leistung eines Windrades mit ebenen Flügeln setzen:

$$L = 3 n \gamma k_1 l_1 \cdot \frac{c^3}{2g} - \varphi G \frac{r}{l} v,$$

und die eines solchen Rades mit windschiefen Flügeln:

$$L = {}^4/_9\, n \gamma k l_1 \cdot \frac{c^3}{2g} - \varphi G \frac{r}{l} v.$$

Aus der Formel $L = \frac{3 (c \sin. \alpha - v \cos. \alpha)^2}{2g} v \cos. \alpha . F \gamma$ für die theoretische Leistung eines Flügelelementes läßt sich der Einfluß der Flügelgeschwindigkeit auf die theoretische Radleistung erkennen, namentlich auch finden, daß für $v \cos. \alpha = \frac{c \sin \alpha}{3}$ (vergl. Band II, §. 219), d. i. für

$$v = \frac{c \tang. \alpha}{3}$$

dieselbe ein Maximum wird. Führt man nun aber diesen Werth in der angeführten Formel ein, so erhält man

$$L = 3 . {}^4/_{27} . \frac{c^3 \sin. \alpha^3}{2g} F \gamma,$$

und es ist nun hieraus zu entnehmen, daß die Leistung am größten ausfällt, wenn der Stoßwinkel $\alpha = 90^0$, also $v = \infty$ wird. Dieser Forderung kann aber aus dem Grunde nicht Genüge geleistet werden, weil schon bei einer nicht übermäßig großen Umdrehungsgeschwindigkeit die Nebenhindernisse, namentlich aber die Halsreibung, so viel Arbeit consumiren, daß für die effective oder Nutzleistung nichts mehr übrig bleibt. Es ist also bei einer großen Umdrehungszahl eine große Nutzleistung zu erwarten, jedoch in gegebenen Fällen stets besonders zu untersuchen, bei welcher Umdrehungszahl die Nutzleistung, welche die theoretische Leistung nach Abzug der Arbeit der Reibung noch übrig läßt, ein Maximum wird, und dies kann nur dadurch geschehen, daß man für eine Reihe von Umdrehungszahlen diese Leistungen wirklich berechnet, und aus diesen die größte herausnimmt oder durch Interpolation ermittelt.

Beispiel. Wenn die armirte Flügelwelle des in den Beispielen des vorigen Paragraphen betrachteten Rades 7500 Pfund wiegt, ferner der Halbmesser ihres Halses, $r = {}^1/_3$ Fuß mißt, und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}1$ angenommen wird, so hat man die durch die Halsreibung verloren gehende mechanische Leistung:

$L_1 = 0{,}1 \,.\, 7500 \,.\, \omega r = 750 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, 1{,}6755 = 250 \,.\, 1{,}6755 = 419$ Fußpfund;
es bleibt also beim Rade mit windschiefen Flügeln die Nutzleistung
$L = 2811 - 419 = 2392$ Fußpfund,
d. i. circa 85 Procent übrig. Bei den hölzernen Wellen sind aber die Hälse noch einmal so stark, und es ist daher hier der Arbeitsverlust durch die Reibung doppelt, die Nutzleistung also nur 70 Procent der theoretischen.

Erfahrungen über Windräder. Sichere, namentlich zur Prüfung §. 347
der Theorie vollkommen genügende Beobachtungen sind an Windmühlen bis jetzt noch gar nicht gemacht worden; es fehlt zwar nicht an Angaben über die Leistungen verschiedener Windmühlen, allein dieselben sind meist zur Beurtheilung des Wirkungsgrades dieser Maschinen nicht hinreichend, da sie die Windgeschwindigkeit entweder ganz unbestimmt lassen oder dieselbe nicht mit hinreichender Genauigkeit ausdrücken. Am vollständigsten sind noch die Angaben von Coulomb und Smeaton; neuere Beobachtungen ähnlicher Art fehlen aber ganz. Coulomb stellte seine Beobachtungen an einer der vielen Windmühlen in der Umgebung von Lille an; es lassen sich aber aus denselben ziemlich sichere Folgerungen ziehen, weil diese Mühle ein zum Auspressen des Rübsamenöles dienendes Pochwerk in Bewegung setzte, dessen Nutzleistung sich sehr leicht berechnen läßt. Die vier Radflügel dieser Mühle waren nach holländischer Art, windschief, mit den Stoßwinkeln von $63\frac{3}{4}^0$ bis $81\frac{1}{4}^0$, und jeder von ihnen hatte ungefähr $2 \,.\, 10 = 20$ Quadratmeter Inhalt. Die Versuche wurden bei Windgeschwindigkeiten von 2,27 Meter bis 9,1 Meter und bei Umfangsgeschwindigkeiten von 7 bis 22 Meter angestellt, und stimmten nach den Berechnungen von Coriolis (s. dessen Calcul de l'effet des machines) im Mittel ziemlich mit der oben entwickelten Theorie, nach welcher der Windstoß normal gegen ein Flügelelement F:

$$N = 3 \,.\, \frac{(c\, sin.\, \alpha - v\, cos.\, \alpha)^2}{2g} F\gamma$$

ist, überein. Es ist übrigens leicht zu ermessen, daß bei den besseren Constructionen mit schiefen Flügeln der Mittelwerth von $\frac{3\, sin.\, \alpha^2 - 2}{sin.\, \alpha^3}$ nicht bedeutend abweichen kann von demjenigen, welcher sich aus dem ersten Beispiele in §. 345 = 0,880 berechnet; führen wir aber diesen in die allgemeine Formel ein, so erhalten wir folgenden höchst einfachen Ausdruck für die Leistung eines Windrades:

$$L = \frac{4}{9} \,.\, 0{,}88 \,.\, 0{,}0772 \,.\, nF \frac{c^3}{2g} = 0{,}000483\, nFc^3 \text{ Fußpfund.}$$

Das Mittel aus den Coulomb'schen Beobachtungen giebt

$$L = 0{,}026\, nFc^3 \text{ Kilogrammmeter,}$$

oder im preußischen Maße,

$= 0{,}000507\, n F c^3$ Fußpfund,

also in guter Uebereinstimmung mit der theoretischen Bestimmung. Der Sicherheit wegen nimmt man vielleicht am besten

$$L = 0{,}00047\, n F c^3 \text{ Fußpfund an.}$$

Diese Formel giebt jedoch nur dann genügend richtige Resultate, wenn die Umfangsgeschwindigkeit ungefähr die vortheilhafteste, nämlich circa $2^1/_2$mal so groß als die Windgeschwindigkeit ist.

Beispiel. Wenn ein Windrad bei einer Windgeschwindigkeit von 16 Fuß eine Leistung von 4 Pferdekräften geben soll, welche Flügelflächen muß dasselbe erhalten? Nach der letzten Formel ist

$$n F = \frac{4 \,.\, 480}{0{,}00047 \,.\, 16^3} = \frac{1920000}{1925} = 1000 \text{ Quadratfuß};$$

also bei fünf Flügeln, der Inhalt des einen, $F = 200$ Quadratfuß. Macht man die Länge l_1 eines Flügels 5mal so groß, als seine mittlere Breite b, so hat man hiernach $5\, b^2 = 200$, folglich die Breite jenes Flügels:

$$b = \sqrt[2]{40} = 6^1/_3 \text{ Fuß},$$

und die Länge desselben:

$$l_1 = 5 \,.\, 6^1/_3 = 31^2/_3 \text{ Fuß}.$$

§. 348 **Smeaton's Regeln.** Smeaton hat sehr ausführliche Versuche über Windräder im Kleinen angestellt. Sein Versuchsrad hatte Arme von 21 Zoll Länge mit Flügeln von 18 Zoll Länge und 5,6 Zoll Breite (engl. Maß). Er ließ dieses Rad nicht durch den Wind in Umdrehung setzen, sondern er bewegte dasselbe in der ruhigen Luft im Kreise herum, weshalb er denn nicht den Windstoß, sondern den Widerstand der Luft gegen das Rad beobachtet hat, wodurch allerdings die Resultate seiner Beobachtungen bedeutend an Werth verlieren. Die Bewegung des Rades gegen den Wind erfolgte durch eine stehende Welle mit einem $5^1/_2$ Fuß langen Querarme, an dessen Ende die Lager des Rades befestigt waren; diese Welle aber erhielt ihre Bewegung durch den Beobachter selbst, und zwar mit Hülfe einer Schnur, welche, wie bei einem Kreisel, vor jedem Versuche auf den stärkeren Theil dieser Welle aufgewickelt wurde. Um den Windstoß oder vielmehr den Widerstand der Luft zu messen, wurde unmittelbar über der stehenden Welle eine Wagschale mit Gewichten an einer sehr feinen Schnur aufgehangen, und das andere Ende dieser Schnur um die Flügelwelle gelegt, so daß sich bei Umdrehung dieser Welle die Schnur auf sie aufwickelte und das Gewicht am ersten Ende dieser Schnur emporhob. Was nun die Ergebnisse dieser Versuche anlangt, so stimmen sie in qualitativer Hinsicht sehr gut mit der Theorie überein, namentlich weisen sie sehr bestimmt nach, daß die windschiefen Flügel mehr Wirkung haben als die ebenen, und daß die durch die Theorie gefundenen Stoßwinkel wirklich die vortheilhaftesten sind. Während wir im

obigen Beispiel zu §. 345 von innen nach außen gegangen und, gleichen Abständen entsprechend, die sieben Stoßwinkel

$63^0\,29'$; $69^0\,57'$; $74^0\,22'$; $77^0\,23'$; $79^0\,30'$; $81^0\,3'$ und $82^0\,13'$

gefunden haben, ergaben sich bei den Versuchen von Smeaton folgende sechs Stoßwinkel als sehr vortheilhaft:

72^0; 71^0; 72^0; 74^0; $77\frac{1}{2}^0$; 83^0;

im Mittel also wenig verschieden von den ersteren. Uebrigens bemerkt Smeaton selbst, daß eine Abweichung von 2 Grad im Stoßwinkel keinen bedeutenden Einfluß auf die Leistung des Rades habe.

Zuletzt macht Smeaton aus seinen bei $4\frac{1}{3}$ bis $8\frac{3}{4}$ Fuß Wind- oder vielmehr Radaxengeschwindigkeit angestellten Versuchen folgende, mit der Theorie in sehr guter Uebereinstimmung stehende Folgerungen.

Bei einem vortheilhaft besegelten Flügelrade steht die größte Umfangsgeschwindigkeit mit der vortheilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit im Verhältnisse wie 3 : 2, und dagegen die größte Last zur vortheilhaftesten Last im Verhältnisse wie 6 : 5. Uebrigens aber ist die größte Umfangsgeschwindigkeit, d. i. die beim leeren Gange, circa 4mal, und daher die beim vortheilhaftesten Gange, $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$mal so groß, als die Windgeschwindigkeit. Ferner wächst beim vortheilhaftesten, d. h. die größte Nutzleistung gebenden, Gange die Belastung beinahe wie das Quadrat, und die Leistung beinahe wie der Cubus der Windgeschwindigkeit. Wenigstens gab die doppelte Windgeschwindigkeit die 3,75fache Belastung und die 7,02fache Nutzleistung. Manche andere Regeln, welche Smeaton noch aus seinen Versuchen zieht, sind mit der Theorie im Einklange, und lassen sich ebenso gut aus dieser ableiten, weswegen es nicht nöthig ist, hier weiter darauf einzugehen.

Nach diesen Versuchen ist übrigens die Wirkung des Windes bei den Flügelrädern noch größer, als sie die Theorie giebt und als die Coulomb'schen Versuche geben.

Von anderen Angaben über die Leistungen der Windräder kann erst im Abschnitte von den Arbeitsmaschinen die Rede sein.

Schlußanmerkung. Die vollständigste Theorie der Windräder findet man in des Verfassers Handbuch der Bergmaschinenmechanik, und in Coriolis' Traité du calcul de l'effet des machines. In den meisten Lehrbüchern über Mechanik werden die Windräder ganz kurz abgehandelt oder wohl gar unbeachtet gelassen. Die Versuche Smeaton's sind in den Philosophical Transactions, Jahrgänge 1759 bis 1776 beschrieben, gesammelt und ins Französische übersetzt aber von Girard, und zwar unter dem Titel „Recherches expérimentales sur l'eau et le vent. Paris 1827." Auszüge davon findet man fast in allen englischen Werken, namentlich auch in Barlow's Treatise on the Manufactures and Machinery of Great-Britain. Coulomb's Versuche sind in dem bekannnten Werke: Théorie des machines simples, par Coulomb, beschrieben. Eine Bockwindmühle genau gezeichnet und ausführlich beschrieben findet man in Hoff-

mann's Sammlung der gebräuchlichsten Maschinen, Heft I, Berlin 1833. Siehe auch Schwahns Lehrbuch der prakt. Mühlenbaukunde. Ebenso ist in Band 8 der Publication industrielle etc. par Armengaud, Paris 1853 beschrieben.

Eine ziemlich vollständige Abhandlung über Windmühlen, von A. Burg enthält Bd. 8 (1826) der Jahrbücher des polytechn. Instituts in Wien. Ebenso Rühlmann's allgemeine Maschinenlehre Bd. I.

Ueber den Windstoß handelt schon Mariotte in seinen Grundlehren der Hydrostatik und Hydraulik; nach ihm ist der Windstoß

$$P = 1{,}73 \frac{c^2}{2g} F\gamma.$$

Nächstdem auch Borda, in den Mémoires de l'Académie de Paris, 1763; ferner Rouse (s. das oben citirte Werk von Smeaton), dann noch Hutton und Woltmann. Die letzteren Autoren finden P viel kleiner, als Mariotte u. s. w., weil sie nicht den Windstoß, sondern den Widerstand der Luft gemessen haben. Sicherlich ist daher auch der von Woltmann gefundene Coefficient $\zeta = \frac{4}{3}$, also die Kraft

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma$$

zu klein, weil er die Constante seines Flügels nicht direct bestimmt hat (s. dessen Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg 1790).

Hutton findet aus seinen Versuchen, daß man mit mehr Genauigkeit den Stoß und Widerstand der Luft $F^{1,1}$ proportional wachsend annehmen müsse (s. dessen Philosophical and mathematical Dictionary, T. II). Nehmen wir nun an, daß der Coefficient $\zeta = 1{,}86$ für eine kleine Fläche von 1 Quadratfuß Inhalt richtig sei, so müssen wir hiernach für einen Windflügel von 200 Quadratfuß Flächeninhalt $\zeta = 200^{0,1} \,.\, 1{,}86 = 1{,}7 \,.\, 1{,}86 = 3{,}162$ setzen, was mit der theoretischen Bestimmung und mit dem obigen Vortrage, wo

$$\zeta = 3 \quad \text{und} \quad P = 3 \cdot \frac{c^2}{2g} F\gamma$$

angenommen wurde, gut übereinstimmt.

Eine sehr gute Zusammenstellung und Vergleichung der Versuche über den Stoß und Widerstand der Luft theilt Poncelet in seiner Introduction à la mécanique industrielle mit. Eigenthümliche Ansichten über den Windstoß verfolgt Euler in einer Abhandlung der Berliner Memoiren, 1756; ebenso Crelle in der Abhandlung „Theorie des Windstoßes", Berlin 1802.

Untersuchungen über die empirische Formel

$$L = 0{,}026\, n F c^3$$

von Coulomb u. s. w. enthält die kleine Schrift: Notice sur les moulins à vent à ailes réductibles, par M. Ord. de Lacolange, Besançon 1856.

Zweiter Abschnitt.

Von der Wärme, von den Dämpfen und von den Dampfmaschinen.

Erstes Capitel.

Von den Eigenschaften der Wärme.

Wie der Schall durch meßbare Schwingungen eines Körpers hervorgebracht und durch andere Körper, wie Luft, Wasser u. s. w., fortgepflanzt wird, ebenso ist man genöthigt anzunehmen, daß die Wärme in unmeßbar kleinen Schwingungen der Moleküle (franz. molécules, engl. molecules) eines Körpers bestehe, und durch ein außerordentlich feines gewichtloses Fluidum, den sogenannten Aether (franz. éther, engl. ether), welcher alle Körper, sowie auch den ganzen Weltraum durchdringt, fortgepflanzt werde. Während bei einem gewöhnlichen Pendel die Schwingungen in einem stetigen Wechselspiel zwischen der Schwer- und Trägheitskraft bestehen, sind die Schwingungen elastischer Körper, und so auch die der Aether- und Körpermoleküle ein solches Wechselspiel zwischen der Elasticität und Trägheit dieser Körper oder Körpermoleküle. §. 349

Die Abhängigkeit zwischen der Fallhöhe h und der Geschwindigkeit c eines solchen Pendels am tiefsten Punkte seiner Bewegung ist bekanntlich (s. Bd. I, §. 320)

$$c = \sqrt{2gh}, \text{ oder } h = \frac{c^2}{2g},$$

und hat dasselbe das Gewicht G, so ist die mechanische Arbeit, welche die

Schwerkraft beim Niederfallen, sowie die Arbeit, welche die Trägheit beim Aufsteigen desselben verrichtet:

$$A = Gh = G\frac{c^2}{2g}.$$

Hat das Pendel nur einen Theil z der ganzen Fallhöhe zurückgelegt und die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gz}$ erlangt, so besitzt es in Folge seiner Schwere noch das Arbeitsvermögen $G(h - z)$, und in Folge seiner Trägheit das Arbeitsvermögen $G\frac{v^2}{2g} = Gz$; es ist daher das ganze Arbeitsvermögen eines schwingenden Pendels:

$$G(h - z) + Gz = Gh = G\frac{c^2}{2g},$$ d. i. eine constante Größe.

Wenn ferner das Massenelement $M = \frac{G}{g}$ eines elastischen Körpers im Abstande x von seiner Gleichgewichtslage die Geschwindigkeit v hat, und von der Kraft $P = px$ nach dem Ruhepunkt zurückgetrieben wird, so ist das Arbeitsvermögen desselben überhaupt,

$$A = \frac{Px}{2} + G\frac{v^2}{2g} = \frac{px^2}{2} + G\frac{v^2}{2g};$$

hat die Geschwindigkeit des Pendels im Augenblick des Durchganges durch den Ruhepunkt den Werth c, so ist daher das Arbeitsvermögen $= G\frac{c^2}{2g}$.

Nun läßt sich aber die Arbeit der Repulsivkraft $P = px$, während die Geschwindigkeit c in v verwandelt wird (nach Bd. I, §. 84)

$$\frac{Px}{2} = \frac{px^2}{2} = G\left(\frac{c^2 - v^2}{2g}\right)$$ setzen;

daher folgt auch

$$A = \frac{G(c^2 - v^2)}{2g} + \frac{Gv^2}{2g} = \frac{Gc^2}{2g},$$ sowie

$A = \frac{pa^2}{2}$, wenn $\pm a$ den Ausschlag des elastischen Pendels bezeichnet.

Es ist also auch bei den durch die Elasticität hervorgerufenen Schwingungen eines Körpers das Arbeitsvermögen eine constante Größe.

Dasselbe Schwingungsgesetz kann natürlich auch bei flüssigen Körpern, sogar auch bei dem feinsten Fluidum, dem Aether, stattfinden. Wenn nun die Wärme eine Wirkung dieses Schwingungszustandes ist, so läßt sich daher auch annehmen, daß jeder Körper in Folge seiner Wärme eine gewisse Arbeitsfähigkeit in sich enthalte, welche mit der Wärme ab- und zunimmt. Die sogenannte Wärmemenge eines Körpers wird hiernach auch durch die Schwingungsarbeit A desselben gemessen.

Es ist die sogenannte Undulationstheorie, welche die Erscheinungen der Wärme durch die Schwingungen des Aethers u. s. w. erklärt; die nun unhaltbar gewordene Emanationstheorie gründet sich dagegen auf die Annahme eines besonderen Wärmestoffes, dessen größere oder geringere Anhäufung in einem Körper die verschiedenen Wärmezustände desselben zur Folge hat.

Instrumente, welche die Wärme oder das Wärmequantum eines Körpers anzeigen, heißen Thermometer (franz. thermomètres; engl. thermometers) und Pyrometer (franz. pyromètres; engl. pyrometers). Erstere werden zum Messen kleiner oder mäßiger, letztere aber zur Ausmittelung hoher Wärmegrade verwendet; bei jenen ist es in der Regel ein flüssiger, bei diesen aber gewöhnlich ein fester Körper, welcher durch seine Ausdehnung die Stärke der Wärme anzeigt. Den durch eines dieser Instrumente angezeigten Wärmezustand eines Körpers nennt man die Temperatur (franz. température; engl. temperature) desselben. §. 350

Bei Aufnahme einer großen Wärmemenge gehen endlich feste Körper in tropfbarflüssige und letztere wieder in elastischflüssige Körper über; umgekehrt, durch Entziehung von Wärme kehren flüssige Körper in den festen Zustand zurück. Es ist also die Wärme Ursache der drei Aggregatzustände der Körper (s. Bd. I, §. 62).

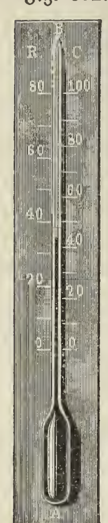
Kommen Körper von verschiedener Temperatur mit einander in Berührung, so wird das Gleichgewicht der Wärme in beiden gestört; es strömt die Wärme aus dem wärmeren Körper in den weniger warmen oder kälteren Körper, und es tritt nach einer gewissen Zeit wieder Gleichgewicht ein und zwar dann, wenn beide Körper einerlei Temperatur angenommen haben.

Man nennt diesen Uebergang der Wärme aus einem Körper in einen anderen die Wärmeleitung. Wenn hingegen die Wärme eines Körpers bloß durch den Aether auf einen anderen Körper übergeht, so findet eine sogenannte Wärmestrahlung Statt.

Quecksilber-Thermometer. Das wichtigste und gewöhnlich gebrauchte Thermometer ist das Quecksilberthermometer (franz. thermomètre à mercure; engl. mercurial-thermometer). Dasselbe besteht in einer engen, sich in einer größeren Hohlkugel oder einem weiteren Gefäße A endigenden, zum Theil mit Quecksilber angefüllten Glasröhre AB, Fig. 592 (a. f. S.), und ist verbunden mit einer längs der Röhrenaxe hinlaufenden Scala. Bringt man das Gefäß dieses Instrumentes mit dem Körper, dessen Temperatur man ermitteln will, in Berührung, so nimmt das Quecksilber in demselben nach einiger Zeit die Temperatur dieses Körpers an und es wird die dadurch hervorgebrachte Volumenveränderung des Quecksilbers durch den Stand des Quecksilbers in der Röhre §. 351

angezeigt. Damit nun aber alle Thermometer unter sich übereinstimmen, d. i. bei einem und demselben Wärmezustande auch einerlei Temperatur anzeigen, ist es nöthig, ihren Scalen eine solche Ausdehnung und Eintheilung zu geben, daß je zwei gleichbenannte Punkte derselben zwei bestimmten Temperaturen entsprechen. Gewöhnlich bedient man sich bei Graduirung der Scala der Temperaturen des gefrierenden und siedenden Wassers, und bezeichnet die entsprechenden festen Punkte, bis zu welchen die Quecksilbersäule in der Glasröhre bei dem einen oder anderen Wärmezustande reicht, durch Frostpunkt (franz. point de froid; engl. freezing point) und Siedepunkt (franz. point d'ébullition; engl. boiling point). Bei Ausmittelung dieser Punkte bringt man das Thermometer erst in schmelzendes Eis und dann in sich ununterbrochen aus kochendem Wasser bildenden und nach oben abströmenden Wasserdampf, weil man dadurch mehr Sicherheit erhält. Der Siedepunkt hängt übrigens auch noch von der Stärke des Luftdruckes oder vom Barometerstande ab, weshalb denn auch bei seiner Bestimmung noch auf diesen mit Rücksicht zu nehmen ist. Man ist übereingekommen, den Siedepunkt bei dem Barometerstande von 28 pariser Zoll = 336 Linien, oder, nach den Franzosen, bei dem von 0,76 Meter = 336,9 Linien zu bestimmen oder, nach einer weiter unten zu gebenden Regel, dahin zu reduciren.

Fig. 592.



Den Abstand (Fundamentalabstand) zwischen dem Frost- und Siedepunkte theilt man in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, und durch Antragen dieser Theile unterhalb des Frost- und oberhalb des Siedepunktes verlängert man noch die Scala so viel wie möglich.

Die Centesimaleintheilung (franz. division centigrade; engl. centigrade scale), wo der Fundamentalabstand in hundert Theile oder Grade (franz. degrés; engl. degrees) getheilt wird, ist jedenfalls die einfachste, doch bedient man sich sehr oft noch der Réaumur'schen Eintheilung in 80 Grade, und in England der Fahrenheit'schen Eintheilung in 180 Grade oder vielmehr in 212 Grade, weil hierbei der Nullpunkt noch 32 Grade unterhalb des Gefrierpunktes angenommen wird.

Anmerkung 1. Specielle Anleitung zur Anfertigung von Thermometern geben die größeren Werke über Physik, z. B. Müller's Lehrbuch der Physik und Meteorologie Band II, sowie Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik.

Anmerkung 2. Tabellen zur Verwandlung der Centesimal-, Réaumur'schen und Fahrenheit'schen Grade unter einander enthält der „Ingenieur". Hier folgen nur die dazu nöthigen Formeln. t Centesimalgrade entsprechen $\frac{4}{5}t$ Réaumur'schen oder $\frac{9}{5}t + 32^0$ Fahrenheit'schen Graden. Dagegen t_1 Réaumur'sche Grade geben $\frac{5}{4}t$ Centesimal- oder $\frac{9}{4}t_1 + 32^0$ Fahren-

heit'sche Grade. Endlich t_2 Fahrenheit'sche Grade sind gleich $^5/_9\,(t_2 - 32^0)$ Centesimal- $= {}^4/_9\,(t_2 - 32^0)$ Réaumur'schen Graden.

Pyrometer. Das Quecksilber gefriert oder geht in den festen Zustand über, wenn es einer Temperatur von — 40° ausgesetzt ist, und siedet, d. i. nimmt die Dampfform oder einen elastischflüssigen Zustand an, wenn seine Temperatur bis + 400° gestiegen ist. Aus diesem Grunde, und da überdies die Wärmeausdehnungen nahe bei den Wechseln der Aggregatzustände sehr unregelmäßig sind, kann man denn auch durch Quecksilberthermometer nur Temperaturen von — 36° bis 360° mit hinreichender Sicherheit beobachten. Um aber Temperaturen über diese Grenzen hinaus angeben zu können, wendet man in dem einen Falle Weingeistthermometer, in dem anderen aber sogenannte Pyrometer an. Letzterer bedient man sich zumal zur Ausmittelung der Temperatur in Feuerherden, Schmelzöfen u. s. w. Von ihnen ist noch in Folgendem die Rede. §. 352

Das einfachste Mittel, hohe Temperaturen zu messen, besteht in der Vergleichung der Längen, welche ein und derselbe Metallstab bei verschiedenen Temperaturen annimmt. Da die Wärmeausdehnungen fester Körper nicht sehr groß sind, so wendet man hierbei besondere Mittel, namentlich aber ungleicharmige Hebel an, welche die Ausdehnung vergrößert angeben, um den erwünschten Grad von Genauigkeit zu erhalten. Uebrigens bietet die Construction eines brauchbaren Metallpyrometers noch besondere Schwierigkeiten dar, weil es in den meisten Fällen nicht möglich ist, durch diese Instrumente die Wirkungen der Wärme unmittelbar, nämlich im Feuerraume selbst, zu beobachten, und weil sich diese Wirkungen auf alle Theile des Instrumentes, also nicht allein auf den Metallstab, sondern auch auf dessen Lager und auf den Maßstab erstrecken. Alle bis jetzt in Vorschlag und zur Anwendung gekommenen Metallpyrometer sind daher auch mit größeren oder kleineren Unvollkommenheiten behaftet. Eins der vorzüglichsten, wiewohl auch eins der kostbarsten Instrumente dieser Art ist aber das Pyrometer von Daniell (s. Gehler's physik. Wörterbuch, Artikel „Pyrometer"). Die Idee, welche einem solchen Instrumente zu Grunde liegt, ist folgende. AB, Fig. 593, ist eine hohle Graphitröhre, CD ein darin eingesetzter Platin- oder anderer Metallstab, und E ein diesen bedeckender kurzer Porzellancylinder, welcher ziemlich scharf an die Röhrenwand anschließt. Wenn man nun diesen Apparat in den Feuerraum bringt, so wird das Porzellanstück E in Folge der Ausdehnung der Platinstange ein Stück auswärts geschoben, und wenn man später den Apparat wieder aus dem Feuer genommen und ihn hat abkühlen lassen, so wird die Verschiebung des von der Graphitröhre zurückgehaltenen

Fig. 593.

B E D C A.

Porzellancylinders, die Ausdehnung der Platinstange und dadurch mittelbar den Hitzegrad anzeigen. Zur genauen Ausmessung dieser Verschiebung dient noch ein Fühlhebelapparat, den man vor und nach dem Einlegen in das Feuer an *AD* anlegt.

Anmerkung 1. Die Pyrometer von Guyton de Morveau, von Brogniart, Petersen, Neumann u. s. w. haben mehr oder weniger Aehnlichkeit mit dem Daniell'schen Pyrometer. (S. Gehler's physik. Wörterbuch, Band VII.)

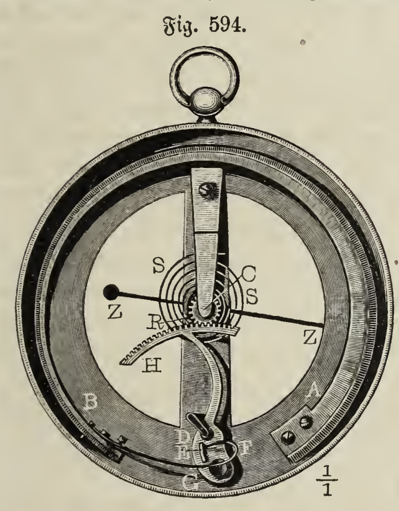
Anmerkung 2. Ein bekanntes Hülfsmittel zur Bestimmung hoher Hitzgrade ist auch das Pyrometer von Wedgwood. Man wendet dasselbe wegen seiner Einfachheit noch oft an, wiewohl es ein sehr unvollkommenes Instrument ist. Es werden hierzu kleine Kegel oder Cylinder aus Porzellan- oder Töpferthon verwendet, und diese vor dem Gebrauche bis zur angehenden Rothglühhitze getrocknet und dann ausgemessen. Um nun den Hitzegrad in einem Feuerherde zu messen, bringt man einen oder mehrere solcher Thonkörper in denselben und läßt sie darin einige Zeit liegen, damit sie die Temperatur des Raumes, in welchem sie sich befinden, vollkommen annehmen können. Hierbei schwindet dieser Körper bedeutend zusammen und bleibt auch dann noch zusammengezogen, wenn er sich wieder abgekühlt hat, und zwar um so mehr, je größer die Hitze ist, welcher er ausgesetzt war. Wenn man den Durchmesser dieses Körpers vor und nach der Erhitzung mißt, so kann man dessen Zusammenziehung berechnen und diese als das Maß der Hitze ansehen. Um aber diese Messung bequem und genau auszuführen, wird ein das eigentliche Pyrometer ausmachender Maßstab angewendet, der im Wesentlichen aus zwei convergent laufenden und auf eine Platte aufgelötheten, mit einer Eintheilung versehenen Metallstäben besteht. Wird nun der Thonkegel zwischen diese Stäbe geschoben, so läßt sich seine Dicke an den Eintheilungen derselben ablesen. Man findet diese Thermometer in der Regel in 240 Theile oder Grade getheilt, setzt Null Grad Wedgwood $= 1077\frac{1}{2}^0$ F.; und jeden Grad W. $= 130^0$ F., also z. B. 240^0 W. $= 1077\frac{1}{2}^0 + 240 . 130^0 = 32277\frac{1}{2}^0$ F. Die Mängel dieses Instrumentes rügt besonders Guyton de Morveau; auch ist nach diesem Null des Wedgwood'schen Instrumentes nicht $1077\frac{1}{2}^0$ F., sondern 510^0 F., und jeder Grad desselben nicht 130^0 F., sondern $61{,}2^0$ F.

§. 353 **Metall-Thermometer.** Die gewöhnlichsten Metall-Thermometer oder Pyrometer für mittelhohe Temperaturen bestehen in einer Verbindung von zwei Metallstäben von sehr verschiedenen Wärmeausdehnungen, z. B. von einem Messing- und einem Eisenstabe, oder einem Platin- und einem Gold- oder Silberstreifen u. s. w. Liegen nun diese Stäbchen auf einander und sind sie an einem Ende fest mit einander verbunden, so kann man an den anderen Enden die Differenz der Ausdehnungen beider beobachten und hieraus wieder die entsprechende Temperatur berechnen. Zu diesem Zwecke erhält aber das Ende der einen Stange eine einfache Eintheilung und das andere einen dieser entsprechenden Vernier. Solche zuerst von Borda in Anwendung gebrachte Thermometer fallen jedoch, wenn sie hinreichend genau sein sollen, zu groß aus, um dadurch die Temperatur in kleinen Räumen

bestimmen zu können. In neuerer Zeit löthet oder nietet man aber diese Streifen zusammen, so daß sie sich nicht an einander verschieben können, sondern eine Krümmung annehmen oder ihre Krümmung vergrößern, wenn sie in eine höhere Temperatur übergehen.

Das Breguet'sche Thermometer besteht aus drei spiralförmig gewundenen Metallstreifen von Platin, Silber und Gold, wovon das letztere als Bindemittel der beiden ersteren dient. Das sogenannte Quadrantenthermometer, welches in Fig. 594 abgebildet ist, besteht in einer, aus einem Stahl- und einem Kupferstreifen zusammengesetzten krummen Feder, welche bei A auf dem taschenförmigen Gehäuse fest sitzt, und mit seinem Ende B mittels einer Feder BF gegen eine Nase E drückt. Uebrigens enthält das Instrument einen ungleicharmigen, um D drehbaren Hebel GDH, und einen um C drehbaren Zeiger ZZ, dessen Spitze über einem Zifferblatte hinläuft, und der durch ein kleines Zahnrad R mit dem gezahnten Bogen H am Ende des Hebelarmes DH in Verbindung gesetzt wird. Wenn sich nun bei Zunahme der Wärme der Metallstreifen mehr zusammenzieht, so drückt das Ende B desselben den Arm DE in der Richtung DB fort, und es rückt der Zeiger CZ um einen gewissen Bogen weiter, den man auf dem Zifferblatte ablesen kann. Eine Spiralfeder SS bewegt den Zeiger in umgekehrter Richtung, wenn sich die Feder in Folge einer Temperaturerniedrigung streckt.

Fig. 594.

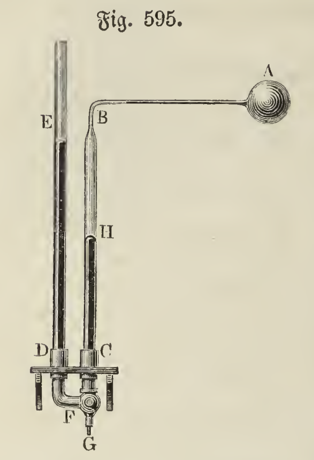


Anmerkung. Holzmann's Metallthermometer weicht im Wesentlichen nicht ab von dem oben beschriebenen Quadrantenthermometer (s. Anfangsgründe der Physik von Scholz, §. 294). Oechsle's Metallthermometer besteht aus einer spiralförmig gewundenen Thermometerfeder, welche aus Stahl- und Messingstreifen zusammengesetzt ist. Es sitzt hier das äußere Ende der Feder am Gehäuse fest, und das innere Ende derselben setzt den Zeiger mittels einer stehenden Welle in Bewegung (s. Dingler's Journal, Band LX).

Luftpyrometer. Endlich hat man aber auch Luftpyrometer zur §. 354
Messung hoher Temperaturen in Anwendung gebracht. Dieselben bestehen der Hauptsache nach aus einer hohlen Platinkugel A und einer engeren Röhre

AB, Fig. 595, aus zwei mit einander communicirenden weiteren Röhren BC und DE, und aus einer messingenen Fassung CFD mit einem Hahn, wodurch nicht allein die Communication dieser Röhren mit einander, sondern auch die mit einem Ausflußröhrchen G nach Belieben hergestellt und aufgehoben werden kann. Beim Gebrauche ist A und AB mit Luft, und BFE mit Quecksilber angefüllt, und es wird A in den Feuerraum gebracht, dessen Temperatur ermittelt werden soll. Zufolge der Erwärmung der in AB eingeschlossenen Luft dehnt sich dieselbe aus, nimmt nun in der Röhre BC einen Raum BH ein, und drückt das verdrängte Quecksilber in die Röhre DE. Kennt man nun das anfängliche Volumen V der in AB eingeschlossenen Luft bei 0° Wärme und bei dem Barometerstande b und hat man die durch die Erwärmung bewirkte Vergrößerung $\overline{BH} = V_1$ dieser Luftmenge sowie ihren Manometerstand $\overline{EH} = h$ beobachtet, so läßt sich mit Hülfe des bekannten Ausdehnungscoefficienten der Luft die Temperatur t der eingeschlossenen Luft berechnen. Ist die anfängliche Dichtigkeit derselben $= \gamma$, so beträgt das Gewicht dieser Luftmenge:

Fig. 595.



$$V\gamma = \left(\frac{V}{1 + \delta t} + V_1\right) \frac{b + h}{b} \gamma \text{ (s. Band I, §. 392);}$$

es ist sonach

$$\frac{bV}{b + h} = \frac{V}{1 + \delta t} + V_1,$$

und es folgt daher die gesuchte Temperatur des Heizraumes:

$$t = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{Vh + V_1\,(b + h)}{Vb - V_1\,(b + h)}.$$

Wenn man durch das Mundstück G so viel Quecksilber abläßt, bis die Quecksilbersäulen in BC und DE gleichhoch ausfallen, so kann man $h =$ Null und folglich

$$t = \frac{1}{\delta} \frac{V_1}{V - V_1}$$

setzen.

Wenn man hingegen in G soviel Quecksilber zuleitet, daß das Quecksilber BC bei der Erhitzung von A auf derselben Höhe stehen bleibt, und folglich hierbei die Luft gar keine Ausdehnung erleidet, so ist $V_1 = 0$, und daher:

$$t = \frac{1}{\delta} \frac{h}{b}$$

zu setzen.

Bei dem Pyrometer von Pouillet wird das erstere und bei dem von Regnault das zweite Verfahren angewendet. S. Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France, Tome XXI, 1847. Im Auszug: Formules, Tables etc. par Claudel, Paris 1854. Ueber Regnault's Gasthermometer, s. Annales de chimie et physique. Sept. 1861, auch Dingler's Journal Band 162.

Anmerkung. Um das Instrument gegen die Wärme zu schützen, stellt man es vor einem hölzernen Schirme auf, und um die ausgetretene Luft abzukühlen und auf einer constanten Temperatur zu erhalten, kann man noch die Röhre BC von kochendem Schwefeläther oder Spiritus u. s. w. umspielen lassen.

Um ferner bei hohen Temperaturen keine zu großen Spannungen zu erhalten, kann man das Reservoir mit verdünnter Luft anfüllen und zu diesem Zwecke AB mit einer Luftpumpe in Communication setzen. Uebrigens ist die Luft in A vor dem Gebrauche durch Chlorcalcium gehörig zu trocknen.

Die Anwendung der gefundenen Formel erfordert endlich noch einige Ergänzungen und Correctionen wegen der Ausdehnung der Gefäßwand, wegen der Veränderlichkeit des Barometerstandes, sowie der Temperatur in BC u. s. w.

Längenausdehnung. Mit Ausnahme von wenigen Körpern dehnen §. 355
sich alle Körper aus, wenn sie in eine höhere Temperatur übergehen, und nehmen auch wieder an Volumen ab, wenn sie an Wärme verlieren. Jedoch ist diese Volumenveränderung bei verschiedenen Körpern sehr verschieden und meist auch nur bei mäßigen Temperaturen von 0 bis 100° der Wärmezu- oder Abnahme proportional. Bei höheren Temperaturen fallen die Ausdehnungen verhältnißmäßig größer aus, als bei niedrigen Temperaturen, zumal wenn sich die Körper im festen Zustande befinden. Wir können bei den Wärmeausdehnungen Längen-, Flächen- und Raum- oder Volumenausdehnungen unterscheiden, je nachdem wir nur auf die Veränderung der Längendimension, oder auf die Veränderung der Längen- und Breitendimension, oder auf die Veränderung des ganzen Volumens oder aller drei Raumdimensionen Rücksicht nehmen.

Die lineäre oder Längenausdehnung (franz. dilatation linéaire; engl. linear expansion) kommt vorzüglich nur bei festen Körpern, zumal bei Stäben, Stangen, Balken u. s. w., in Betracht. Lavoisier und Laplace haben die Längenausdehnungen verschiedener Körper unmittelbar beobachtet, Dulong und Petit aber haben erst die Volumenausdehnungen gemessen und hieraus die Längenausdehnungen berechnet. Die Abweichungen in den Resultaten beider Untersuchungen sind unbedeutend. In folgender Tabelle sind die Längenausdehnungen der in der Technik am häufigsten vorkommenden Körper angegeben.

Es ist die Längenzunahme für

die Gegenstände	Wärmezunahme.	in gewöhnl. Brüchen.	in Decimalbrüchen.	Beobachter.
Platin	0 bis 100⁰	$^1/_{1167}$	0,00085655	Borda.
„	0 „ 100⁰	$^1/_{1131}$	0,00088420	Dulong und Petit.
„	0 „ 300⁰	$^1/_{368}$	0,00275482	„ „ „
Glas	0 „ 100⁰	$^1/_{1161}$	0,00086133	„ „ „
„	0 „ 200⁰	$^1/_{454}$	0,00184502	„ „ „
„	0 „ 300⁰	$^1/_{329}$	0,00303252	„ „ „
Stahl, ungehärtet .	0 „ 100⁰	$^1/_{927}$	0,00107880	Lavoisier u. Laplace.
„ gehärtet . .	0 „ 100⁰	$^1/_{807}$	0,00123956	„ „ „
Gußeisen	0 „ 100⁰	$^1/_{901}$	0,00111000	Roy.
Stabeisen	0 „ 100⁰	$^1/_{846}$	0,00118210	Dulong und Petit.
„	0 „ 300⁰	$^1/_{227}$	0,00440528	„ „ „
Gold	0 „ 100⁰	$^1/_{682}$	0,00146606	Lavoisier u. Laplace.
Kupfer	0 „ 100⁰	$^1/_{582}$	0,00171820	Dulong und Petit.
„	0 „ 300⁰	$^1/_{177}$	0,00564972	„ „ „
Messing	0 „ 100⁰	$^1/_{535}$	0,00186760	Lavoisier u. Laplace.
Silber	0 „ 100⁰	$^1/_{524}$	0,00190974	„ „ „
Blei	0 „ 100⁰	$^1/_{351}$	0,00284836	„ „ „
Zink	0 „ 100⁰	$^1/_{340}$	0,00294167	Smeaton.

Von den hier angeführten Körpern hat, wie man sieht, Platin und nächstdem das Glas die kleinste, Blei und Zink aber die größte Längenausdehnung; es ist die letztere über dreimal so groß als die erstere. Auch ersieht man, nach den Angaben von Dulong und Petit, daß die Ausdehnung der Metalle sowie des Glases bei hohen Wärmegraden verhältnißmäßig stärker zunimmt, als die Wärme.

Ein Glasstab wird hiernach bei 0 bis 100⁰ Wärmezunahme um 0,00086133, bei 100 bis 200⁰ aber um 0,00098369 und bei 200 bis 300⁰ um 0,00118750 länger.

§. 356 **Ausdehnungscoefficienten.** Die Ausdehnungsverhältnisse gestatten einige wichtige Anwendungen auf die Technik. Nehmen wir an, daß die Ausdehnung mit der Wärme gleichmäßig wachse, so können wir sehr leicht aus den oben mitgetheilten Resultaten die Ausdehnungscoefficienten,

d. h. die verhältnißmäßigen Längenzunahmen bei jedem Grad Temperaturerhöhung, berechnen. So ist z. B. für Gußeisen der Ausdehnungscoefficient:

$$\delta = 0{,}00111 : 100 = 0{,}0000111,$$

für Messing hingegen:

$$\delta = 0{,}0018676 : 100 = 0{,}000018676 \text{ u. s. w.}$$

Bessel und Baeyer fanden für Temperaturen von 3 bis 17° Reaumur bei der Prüfung von Meßstäben

für den Eisenstab $\delta = 0{,}0000148505$,
und für den Zinkstab $\delta = 0{,}0000416372$,

dagegen fand später Baeyer bei Temperaturen von 7 bis 23 Grad R.

für den ersten Stab $\delta = 0{,}000014165$,
und für den zweiten Stab $\delta = 0{,}0000402342$.

An dem spanischen Basismeßapparat, welchen der Mechanikus Brunner in Paris construirt hat, ist gefunden worden bei Temperaturen von 7 bis $40^3/_4{}^0$

für den Platinstab $\delta = 0{,}0000090167$,
und für den Messingstab $\delta = 0{,}0000189841$.

S. Experiencias hechas con El Aparato de Medir Bases. Madrid 1859.

Ist die Länge eines Stabes bei 0° Temperatur l_0, so ergiebt sich dieselbe bei $t_1{}^0$ Temperatur:

$$l_1 = l_0 + \delta t_1 . l_0 = (1 + \delta t_1)\, l_0,$$

und bei $t_2{}^0$ Temperatur:

$$l_2 = (1 + \delta t_2)\, l_0,$$

daher ist auch das Längenverhältniß eines und desselben Stabes bei den Temperaturen t_1 und t_2:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1} \text{ und } l_2 = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}\right) l_1,$$

wofür, wegen der Kleinheit von δt_1 und δt_2, annähernd

$$l_2 = [1 + \delta\,(t_2 - t_1)]\, l_1$$

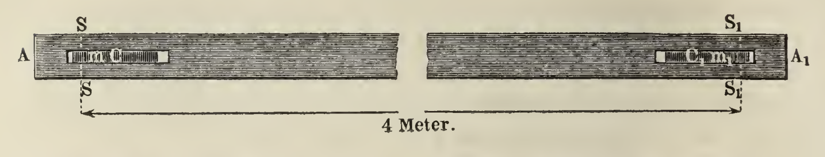
gesetzt werden kann.

Diese Formel setzt uns in den Stand, die Länge eines Stabes von einer Temperatur t_1 auf eine andere t_2 zu reduciren, oder die Längen l_1 und l_2 eines und desselben Körpers bei verschiedenen Temperaturen mit einander zu vergleichen.

Der Meßstab der spanischen Gradmessung besteht aus einem Platinstab AA, Fig. 596 (a. f. S.), und einem Messingstab BB; beide reichlich 4 Meter lang, 21 Millimeter breit und 5 Millimeter dick. Die mit dem Messingstab fest verbundenen Platinansätze C, C_1 greifen zwar in entsprechende Ausschnitte des Platinstabes ein, sind aber darin noch auf eine kleine Länge ver-

schiebbar. Sowohl die Enden des letzteren als auch die gedachten Ansätze sind mit Eintheilungen versehen, auf welchen mittels Mikrometer die Ab-

Fig. 596.





stände zwischen den Nullstrichen S, S_1 des Platinmeßstabes und den Nullstrichen m, m_1 auf den Ansätzen des Messingstabes abgelesen werden können.

Fallen die Striche S und m, sowie S_1 und m_1 bei einer gewissen Temperatur t zusammen, so möge die gemeinschaftliche Länge beider Stäbe $\overline{SS_1} = \overline{mm_1} = l$ sein.

Wird die Temperatur eine andere, t_1, so geht die Länge SS_1 des Platinstabes AA_1 in $l_1 = 1 - \delta\,(t - t_1)\,l$, sowie die Länge mm_1 des Messingstabes BB_1 in $l_2 = 1 - \delta_1\,(t - t_1)\,l$ über, vorausgesetzt, daß δ der Ausdehnungscoefficient des Platins, und δ_1 der des Messings ist. Durch Subtraction erhält man nun die Verkürzung des Messingstabes im Vergleich zum Platinstab:

$$a = l_1 - l_2 = (\delta_1 - \delta)\,(t - t_1)\,l.$$

Wenn man die Abstände zwischen m und S, sowie zwischen m_1 und s_1 beobachtet und deren Summe a bestimmt hat, so kann man nun nach der Formel den Temperaturunterschied $t_1 - t = \frac{a}{(\delta_1 - \delta)\,l}$ berechnen, und es ist schließlich das Längenmaß $\overline{SS_1}$ des Platinstabes auf t Grad Wärme reducirt:

$$l_1 = [1 - \delta\,(t - t_1)]\,l = \left(1 - \frac{\delta}{\delta_1 - \delta}\cdot\frac{a}{l}\right) l,$$

sowie die Reduction selbst

$$l_1 - l = - \frac{\delta}{\delta_1 - \delta}\,a \text{ zu setzen.}$$

Für $\delta = 0{,}0000090167$ und $\delta_1 = 0{,}0000189841$ hat man daher $l_1 - l = 0{,}90463\,a$.

§. 357 **Compensationspendel.** Eine vorzügliche Anwendung dieser Lehren gewährt die Construction der sogenannten Compensationspendel (franz. pendules compensateurs; engl. compensation pendulums), welche aus

Körpern von verschiedenen Ausdehnungsverhältnissen so zusammengesetzt sind, daß sie ihre Länge nicht ändern, wenn ihre Temperatur eine andere wird. Da die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge desselben abhängt (s. Band I, §. 323 u. s. w.), so ist die Anwendung der Compensationspendel bei Uhren von großer Wichtigkeit. Die einfachsten Pendel dieser Art sind mit einer aus zwei Metallstreifen zusammengelötheten Thermometerfeder *ABA*, Fig. 597, welche an ihren Enden kleine Kugeln trägt, ausgerüstet. Ist der ausdehnsamere Metallstreifen unten, so krümmt sich die Feder nach oben, wenn die Temperatur zunimmt, und da gleichzeitig die Stange *CL* länger, also die Entfernung der Linse *L* vom Aufhängepunkte größer wird, so ist es

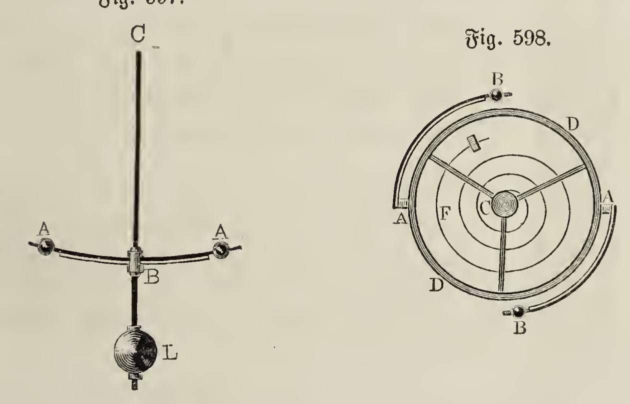


Fig. 597. Fig. 598.

möglich, daß dabei der Schwingungspunkt des Pendels (s. Bd. I, §. 327) unverändert bleibt. Auch bei den Chronometern oder Taschenuhren wendet man solche Compensationsstreifen an. Da hier die Schwingungszeit von der durch eine Spiralfeder *CF*, Fig. 598, gebildeten und von einem Schwungrade *AA* umgebenen Unruhe abhängt, so sind die Compensationsstreifen *AB*, *AB* auf dem Schwungrad *DD* befestigt.

Am häufigsten findet man die sogenannten Rostpendel angewendet. Dieselben bestehen aus einer Reihe parallel gestellter Stäbe von verschiedenen Metallen, z. B. von Eisen und Zink, oder Eisen und Messing, so durch Querarme verbunden, daß die Ausdehnung des einen Stabes durch die Ausdehnung des anderen aufgehoben wird.

Fig. 599 (a. f. S.) stellt ein solches Rostpendel vor, welches aus fünf Eisenstäben *AB*, *AB*, *EF*, *EF*, *KL*, und aus vier Messingstäben *CD*, *CD*, *GH*, *GH* besteht. Damit das Pendel seinen Zweck erfülle, muß die sich nach unten erstreckende Ausdehnung der Eisenstäbe so groß sein wie die nach oben gehende Ausdehnung der Messingstäbe. Setzen wir die Summe der Längen der Eisenstäbe:

$$OM + AB + EF + KL = l_1,$$

Fig. 599.

sowie die Summe der Längen der Messingstäbe:

$$CD + GH = l_2,$$

so haben wir für die ganze Pendellänge:

$$LO = l_0 = l_1 - l_2,$$

und ist nun der Ausdehnungscoefficient des Eisens, $= \delta_1$, und der des Messings, $= \delta_2$, sowie t die Temperaturveränderung, so läßt sich die entsprechende Pendellänge:

$$l = l_1(1 + \delta_1 t) - l_2(1 + \delta_2 t);$$

also die Längenzunahme desselben:

$$l - l_0 = (\delta_1 l_1 - \delta_2 l_2)t \text{ setzen.}$$

Damit diese Null ausfalle, muß sein:

$$\delta_2 l_2 = \delta_1 l_1 \text{ oder } \frac{l_2}{l_1} = \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

d. i. es muß sich die Messinglänge zur Eisenlänge wie der Ausdehnungscoefficient des Eisens zum Ausdehnungscoefficienten des Messings verhalten. Ist die ganze Länge $l = l_1 - l_2$ gegeben, so hat man hiernach die Eisenlänge:

$$l_1 = \frac{\delta_2}{\delta_2 - \delta_1} l$$

und die Messinglänge:

$$l_2 = \frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1} l.$$

Anmerkung. Ueber die Compensationspendel, namentlich auch über Graham's Pendel mit Quecksilbergefäßen, wird gehandelt: in Barlow's Treatise on Manufactures and Machinery; ferner in Lamé's Cours de physique u. s. w.

Beispiel 1. Wie lang muß ein eisernes Muttermaß (franz. étalon; engl. standard) bei 16° Wärme sein, damit es bei Null Grad genau 5 Fuß lang ist? Es ist hier in $l_2 = [1 + \delta\,(t_2 - t_1)]\,l_1$, $l_1 = 5$, $t_2 - t_1 = 16$ und $\delta = 0{,}000011821$ zu setzen, weshalb folgt:

$$l_2 = (1 + 0{,}000011821 \,.\, 16) \,.\, 5 = 5{,}0009457 \text{ Fuß}$$
$$= 5 \text{ Fuß } 0{,}136 \text{ Linie.}$$

Beispiel 2. Wie lang müssen die Eisen- und Messingstäbe eines 40 Zoll langen Rostpendels sein? Führen wir $\delta_1 = 0{,}000011821$ und $\delta_2 = 0{,}000018676$ ein, so erhalten wir für die Eisenstablänge:

$$l_1 = \frac{18676 \,.\, 40}{18676 - 11821} = \frac{747040}{6855} = 109 \text{ Zoll,}$$

und für die Messingstablänge:

$$l_2 = \frac{11821 . 40}{6855} = \frac{472840}{6855} = 69 \text{ Zoll.}$$

Hiernach kann man jeden der kleineren Messingstäbe $33\frac{1}{2}$ Zoll, jeden der folgenden Eisenstäbe $34\frac{1}{2}$ Zoll, jeden der längeren Messingstäbe $35\frac{1}{2}$ Zoll, die äußeren Eisenstäbe aber $36\frac{1}{2}$ Zoll lang machen, und es bleiben noch 109 — 71 = 38 Zoll für die mittlere Aufhängestange u. s. w. übrig.

Ausdehnungskraft. Mit Hülfe der Elasticitätsmodul E und der Ausdehnungscoefficienten δ läßt sich auch die Kraft bestimmen, mit welcher sich Körper in der Hitze ausdehnen und in der Kälte zusammenziehen. Die Kraft, welche eine prismatische Stange von der Länge l und dem Querschnitte F um λ ausdehnt, ist nach Band I, §. 204 bestimmt durch die Formel §. 358

$$P = \frac{\lambda}{l} FE.$$

Nun ist aber $\frac{\lambda}{l} = \delta t$ zu setzen, daher haben wir dann die Ausdehnungs- oder Zusammenziehungskraft

$$P = \delta t . FE.$$

Da die Elasticitätsmodul der Metalle sehr groß sind, so kann man hiernach durch Erhitzung derselben sehr große Kräfte hervorbringen, und von dieser Eigenschaft in der Architektur und Technik wichtige Anwendungen machen. So hat z. B. Molard durch eiserne Anker im Conservatoire des arts et métiers zu Paris zwei sich neigende und den Einsturz drohende Mauern senkrecht aufgerichtet, indem er dieselben vor dem Einziehen der Riegel durch Weingeistflammen erhitzen ließ. Beim Beschlagen von hölzernen Geräthschaften und Werkzeugen mit Eisen, zumal beim Auflegen von eisernen Ringen u. s. w., thut die Wärmekraft ihre nützlichen Dienste, da das im erhitzten Zustande aufgelegte Eisen beim Erkalten eine feste Verbindung hervorbringt.

Die Ausdehnung eines Körpers durch die Wärme wird verändert, wenn auch noch äußere Kräfte auf denselben wirken. Wird z. B. ein prismatischer Körper, dessen Querschnitt F und Länge l ist, von einer Zugkraft P in der Axenrichtung ergriffen, und zugleich seine Temperatur um t Grad erhöht, so nimmt die Länge desselben um

$$\lambda = \frac{P}{FE} l + \delta t l = \left(\frac{P}{FE} + \delta t\right) l$$

zu (s. Band I, §. 204).

Ist die Verlängerung λ bekannt, so bestimmt sich hieraus die Zugkraft P durch die Formel

$$P = \left(\frac{\lambda}{l} - \delta t\right) FE.$$

Ist $\delta t > \frac{\lambda}{l}$, so fällt natürlich P negativ aus und es geht P in eine Druckkraft über.

Diese Formeln setzen voraus, daß der Elasticitätsmodul E des Körpers durch die Erwärmung nicht verändert wird. Bei großer Temperaturveränderung ist jedoch diese Annahme nicht zulässig, dann wird sowohl der Elasticitätsmodul E, als auch der Tragmodul T und Festigkeitsmodul K ein anderer. Wenn wir daher hier die Tragkraft

$$P = FT,$$

und die Kraft zum Zerreißen

$$P_1 = FK$$

setzen, so haben wir jedenfalls für T und K andere Werthe einzuführen, als die bei einer mittleren Temperatur bestimmten.

Unter der Voraussetzung, daß die Kraft der Wärme genau so auf den Körper wirkt, wie eine äußere Zug- oder Druckkraft P, ist

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{T}{E},$$

und daher die Tragkraft: $P = (T - \delta t E) F$

zu setzen.

Hiernach wäre nun die Tragkraft und folglich auch die Elasticität des Körpers = Null, bei der Temperatur

$$t = \frac{T}{\delta E} = \frac{\sigma}{\delta},$$

welches jedoch durch die Erfahrung nicht bestätigt wird. Z. B. ein schmiedeeiserner Eisenstab, für welchen $\sigma = \frac{T}{E} = {}^1/_{1500}$ (s. Band I, Tabelle §. 212) und $\delta = 0{,}000011821$ (s. Band II, §. 355) ist, würde bei der Temperatur

$$t = \frac{1}{1500 \,.\, 0{,}000011821} = \frac{1}{0{,}01773} = 56{,}4 \text{ Grad}$$

an die Elasticitätsgrenze angelangt sein.

Ebenso wenig läßt sich auch die Kraft zum Zerreißen

$$P_1 = (K - \delta t E)\, F \text{ setzen.}$$

Hiernach würde die Cohäsionskraft des Körpers bei der Temperatur

$$t = \frac{K}{\delta E}$$

Null ausfallen, z. B. ein Stab aus Schmiedeeisen, für welchen

$$\frac{K}{E} = \frac{56000}{27'000000} = 0{,}00207$$

ist, würde bei der Temperatur

$$t = \frac{0{,}00207}{0{,}000011821} = \frac{207}{1{,}1821} = 175 \text{ Grad zerfallen.}$$

Beispiel. Mit welcher Kraft zieht sich eine bis auf 80° erhitzte Eisenstange von 6 Quadratzoll Querschnitt zusammen, wenn sie bis 20° erkaltet? Es ist:

$$\delta = 0{,}000011821,\ t = 80 - 20 = 60,\ F = 6,$$

und nach Band I, §. 212:

$$E = 27000000,$$

daher die Zusammenziehungskraft:

$$P = \delta t . FE = 0{,}00070926 . 162000000 = 114900 \text{ Pfund.}$$

Ueber die Veränderung der Elasticität und Festigkeit der Metalle §. 359
bei der Erhöhung ihrer Temperatur sind in der neueren Zeit mehrfache Versuche angestellt worden. Aus den Ausdehnungsversuchen von Wertheim (s. Poggendorff's Annalen der Physik, Ergänzungsband II, 1845) geht hervor, daß die Elasticitätsmodul der Metalle, mit Ausnahme des Eisens, stetig abnehmen, wenn die Temperatur von 15° C. bis + 200° C. wächst; daß dagegen der Elasticitätsmodul bei dem Schmiedeeisen und Stahl mit der Temperatur von — 15° bis 100° zugleich wächst und erst bei höheren Temperaturen abnimmt, so daß er bei 200° kleiner als bei 100° oder 0° Temperatur ausfällt. Nach den Versuchen von Baudrimont (s. Annales de chimie et de physique. Tom. XXX) verhält es sich ebenso mit dem Festigkeitsmodul der Metalle und insbesondere des Eisens. Auch haben die Versuche Wertheim's gezeigt, daß durch das Anlassen die Festigkeitsmodul der Metalle bedeutend vermindert werden, während sich die Elasticitätsmodul nicht sehr verändern, und daß dagegen die Cohäsion vorher angelassener Metalle bei der Temperaturerhöhung bis 200 Grad nicht bedeutend abnimmt.

Nach Wertheim's Versuchen sind die Elasticitätsmodul (E) von einigen Metallen nachfolgende.

Metalle	Temperatur		
	10 bis 15°	100° C.	200° C.
Schmiedeeisen	30'410000	32'070000	25'890000 Pfund
Gußstahl	28'620000	27'810000	26'220000 „
Kupfer	15'380000	14'370000	11'500000 „
Silber	10'440000	10'646000	9'320000 „
Blei	2'526000	2'384000	

Versuche über die Veränderung der Festigkeit des Eisens (Schmiedeeisens) und Kupfers sind schon früher in Nordamerika angestellt worden. Die Ergebnisse derselben werden mitgetheilt im XIX. und XX. Bande des vom Franklin-Institut herausgegebenen Journales, und sind auch zu finden im I. Bande von Combes' Traité de l'exploitation des mines.

Nach diesen Versuchen ist, wenn man den Festigkeitsmodul des Kupfers bei 0° zur Einheit annimmt, der Festigkeitsmodul desselben bei

0°	16¾°	15°	100°	150°	200°	250°	294°	451°	555½° C.
1,0000	0,9927	0,9825	0,9460	0,9055	0,8487	0,7954	0,7442	0,5056	0,3259

Es hat also das Kupfer bei 280° von seiner Festigkeit ¼ und bei 555° von derselben ⅔ verloren.

Ebenso ist hiernach, wenn man den Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens bei 15 bis 20° = Eins setzt, derselbe bei den Temperaturen:

20°	100°	200°	300°	350°	390°	500°	550°	624°	714° C.
1,000	1,197	1,081	1,040	0,981	0,974	0,760	0,431	0,411	0,346

Es findet also auch diesen Versuchen zufolge, bei dem Schmiedeeisen anfangs bei Erhöhung der Temperatur, eine Zunahme der Festigkeit Statt. Mehreres hierüber in Bourne's Treatise on the Steam Engine, Art. strenght of boilers.

§. 360 **Flächen- und Raumausdehnung.** Mit Ausnahme der Krystalle und einiger wenigen Körper dehnen sich alle Körper nach allen Seiten gleichmäßig aus, so daß alle ihre Formen bei verschiedenen Wärmezuständen unter sich ähnlich sind. Nun verhalten sich aber die Inhalte ähnlicher Figuren wie die Quadrate, und die ähnlicher Körper wie die Cuben gleichliegender Seiten; daher ist es auch möglich, die Inhalte eines und desselben Körpers bei verschiedenen Wärmezuständen mit Hülfe ihrer Seitenlängen mit einander zu vergleichen. Geht bei einer Temperaturveränderung die Seite AB eines polygonalen Bleches ACE, Fig. 600, in A_1B_1 über, so wird der Inhalt desselben $\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2$ mal so groß als erst, und ändert sich die Seite AB eines Polyeders ACD, Fig. 601, in A_1B_1 um, so ist sein neues

Volumen $\left(\frac{A_1 B_1}{AB}\right)^3$ mal das anfängliche. Dies vorausgesetzt, lassen sich nun auch leicht aus den Coefficienten der Längenausdehnung die der Flächen-

Fig. 600.

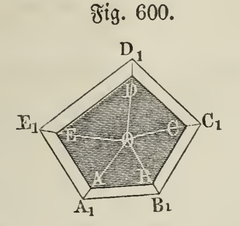
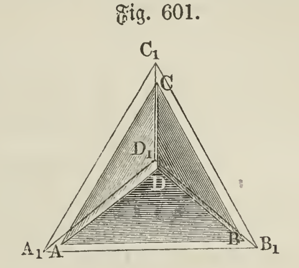


Fig. 601.



und Volumenausdehnung berechnen. Sind l_1 und l_2 die den Temperaturen t_1 und t_2 entsprechenden Seitenlängen, so hat man für die Flächenräume F_1 und F_2 das Verhältniß:

$$\left(\frac{F_1}{F_2}\right) = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}\right)^2,$$

sowie für die Körperräume V_1 und V_2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t_2}\right)^3.$$

Wegen der Kleinheit von δt_1 und δt_2 läßt sich einfacher setzen:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1 + 2\delta t_1}{1 + 2\delta t_2} = (1 + 2\delta t_1)(1 - 2\delta t_2) = 1 + 2\delta(t_1 - t_2),$$

und

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + 3\delta t_1}{1 + 3\delta t_2} = (1 + 3\delta t_1)(1 - 3\delta t_2) = 1 + 3\delta(t_1 - t_2);$$

oder:

$$F_2 = [1 + 2\delta(t_2 - t_1)]\, F_1$$

sowie

$$V_2 = [1 + 3\delta(t_2 - t_1)]\, V_1.$$

Man ersieht hieraus, daß der Coefficient 2δ der Flächenausdehnung zweimal, und der Coefficient 3δ der Volumenausdehnung dreimal so groß ist, als der Coefficient δ der Längenausdehnung.

Die letztere Formel findet vorzüglich noch ihre Anwendung bei der Bestimmung der Dichtigkeit eines Körpers. Ist γ_1 die Dichtigkeit bei der Temperatur t_1, und γ_2 die bei der Temperatur t_2, so hat man das Gewicht des Körpers $G = V_1 \gamma_1 = V_2 \gamma_2$, daher:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{V_1}{V_2} = 1 + 3\delta(t_1 - t_2) = 1 - 3\delta(t_2 - t_1).$$

Anmerkung. Wird das Gußeisen bis zum Glühen (1000^0 bis 1200^0) erhitzt, so erleidet es eine permanente Ausdehnung, welche bei Wiederholung oder langer Dauer des Glühens bedeutend ausfällt. Nach Ermann und Herter (s. Poggendorff's Annalen der Physik, Band 97) ist die permanente Linienausdehnung bei grauem Roheisen 0,0081 bis 0,0097, dagegen bei Spiegeleisen nur 0,001114.

Beispiel. In welchem Verhältnisse verändert sich das Volumen und die Dichtigkeit einer hohlen und massiven Eisenkugel bei Veränderung ihrer Temperatur von 10^0 bis 70^0? Für Gußeisen ist $3\delta = 3 . 0,00001109 = 0,00003327$, daher:

$$3\delta(t_2 - t_1) = 0,00003327\ (70 - 10) = 0,0019962;$$

es nimmt also das Volumen um 0,2 Procent zu, und die Dichtigkeit eben soviel ab; war letztere anfangs $7,1 . 61,74 = 438$ Pfund, so fällt sie bei dieser Temperaturerhöhung nur $438\ (1 - 0,0019964) = 437,13$ Pfund aus.

§. 361 **Ausdehnung der Flüssigkeiten.** Die tropfbarflüssigen Körper werden in der Regel durch die Wärme noch stärker ausgedehnt, als die festen Körper. Da diese Körper von Gefäßen umschlossen und diese durch Zunahme an Wärme ausgedehnt und weiter werden, so müssen wir bei den Flüssigkeiten die scheinbare Ausdehnung von der wahren oder absoluten Ausdehnung durch Wärme unterscheiden, und es ist jedenfalls die erstere gleich der Differenz zwischen der wahren Ausdehnung der Flüssigkeit und der Ausdehnung des Gefäßes. Ist der Inhalt eines ganz oder bis zu einer Marke zu füllenden Gefäßes bei der Temperatur t_1, $= V_1$, und die Volumenausdehnung des Gefäßes $= \delta_1$, die der flüssigen Füllung aber $= \delta$, so hat man für eine Temperatur t_2 das Volumen des Gefäßes:

$$V_2 = \left(\frac{1 + \delta_1 t_2}{1 + \delta_1 t_1}\right) V_1;$$

dagegen das Volumen der Flüssigkeit:

$$V = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1}\right) V_1,$$

daher die wahre oder absolute Ausdehnung derselben:

$$V - V_1 = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1} - 1\right) V_1 = \frac{\delta (t_2 - t_1)}{1 + \delta t_1} V_1,$$

und dagegen die scheinbare Ausdehnung:

$$V - V_2 = \left(\frac{1 + \delta t_2}{1 + \delta t_1} - \frac{1 + \delta_1 t_2}{1 + \delta_1 t_1}\right) V_1 = \frac{(\delta - \delta_1)(t_2 - t_1)}{(1 + \delta t_1)(1 + \delta_1 t_1)} V_1$$

$$= \frac{(\delta - \delta_1)\ (t_2 - t_1)}{(1 + \delta t_1)\ (1 + \delta_1 t_2)} V_2.$$

Sind die Ausdehnungen klein, so kann man annähernd

$$V - V_1 = \delta\ (t_2 - t_1)\ V_1$$

und

$$V - V_2 = (\delta - \delta_1)(t_2 - t_1)\, V_1$$

setzen, also die scheinbare Ausdehnung finden, wenn man die Differenz $(\delta - \delta_1)$ der Ausdehnungscoefficienten der Flüssigkeit und des Gefäßes als Ausdehnungscoefficient in die Formeln einsetzt. Die absolute Ausdehnung des Quecksilbers ist von Dulong und Petit durch Vergleichung der Höhen zweier communicirenden Quecksilbersäulen von verschiedenen Temperaturen ermittelt worden, die scheinbare Ausdehnung in Glasröhren dagegen durch sogenannte Gewichtsthermometer, wo die Temperatur nach der durch Erwärmung ausgetriebenen Quantität Quecksilber bestimmt wird. Hiernach hat man die absolute Ausdehnung des Quecksilbers

bei Erwärmung von 0 bis 100^0, $= \frac{100}{5550} = 0{,}018018$, dagegen

" " " 100 " 200^0, $= \frac{100}{5425} = 0{,}018433$, und

" " " 200 " 300^0, $= \frac{100}{5300} = 0{,}018868$.

Die scheinbare Ausdehnung des Quecksilbers aber wurde bei Zunahme der Wärme von 0 bis 100^0, $= \frac{100}{6480} = 0{,}015432$ gefunden, weshalb hiernach die entsprechende Volumenausdehnung der Glasröhre

$$= 0{,}018018 - 0{,}015432 = 0{,}002586$$

wäre, was mit der Angabe in §. 355 gut übereinstimmt, da sich hiernach die Längenausdehnung des Glases $= \frac{1}{3} \cdot 0{,}002586 = 0{,}000862$ berechnet, während dort dieselbe 0,00086133 angegeben wird. Uebrigens ist aber nach Regnault und nach Isidor Pierre (s. Recherches sur la dilatation des liquides, Annales de chimie et de physique, Tome XV, 1825) die Ausdehnung verschiedener Gasarten sehr verschieden. Namentlich findet der Letztere für Glas

$$\delta = 0{,}000019026 \text{ bis } 0{,}000026025.$$

Mit Hülfe des oben angegebenen Ausdehnungscoefficienten $\delta = 0{,}00018018$ für Quecksilber läßt sich nun das specifische Gewicht des Quecksilbers für jede Temperatur berechnen, es ist nämlich dasselbe:

$$\varepsilon = \frac{13{,}598}{1 + 0{,}00018018 \,.\, t}.$$

Mit Hülfe des absoluten Ausdehnungscoefficienten $\delta = 0{,}00018018$ des Quecksilbers läßt sich auch ein beobachteter Barometer- oder Manometerstand h von einer Temperatur t auf eine andere Temperatur t_1 reduciren. Es ist der reducirte Barometerstand:

$$h_1 = \frac{\gamma}{\gamma_1} h = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} h = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right) h = \left(\frac{1 + 0{,}00018018\, t_1}{1 + 0{,}00018018\, t}\right) h$$
$$= \left(\frac{5550 + t_1}{5550 + t}\right) h,$$

da sich bei gleichen Drücken die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen umgekehrt wie die Dichtigkeiten γ und γ_1 oder specifischen Gewichte ε und ε_1 dieser Flüssigkeitssäulen zu einander verhalten.

Anmerkung. Nach Regnault ist das Volumen des Quecksilbers bei t^0 Wärme:
$$V = (1 + 0{,}000179007\, t + 0{,}0000000252316\, t^2) . V_0,$$
wenn V_0 dasselbe bei 0^0 Wärme bezeichnet.

Beispiel. Wenn sich die in einer Glasröhre eingeschlossene Quecksilbersäule aus der Temperatur t in t_1 umändert, so geht ihre Höhe h in
$$h_1 = [1 + (\delta - 2\,\delta_1)\,(t_1 - t)]\,h$$
über, denn das neue Volumen ist
$$V_1 = [1 + \delta\,(t_1 - t)]\,V = [1 + \delta\,(t_1 - t)]\,\pi r^2 h$$
und auch
$$= (1 + 2\,\delta_1)\,(t_1 - t)\,\pi r^2 . h_1,$$
da der Querschnitt πr^2 in Folge der Flächenausdehnung die Größe
$$(1 + 2\,\delta_1)\,(t_1 - t)\,\pi r^2$$
annimmt. Nun ist aber
$$\delta = 0{,}00018018 \quad \text{und} \quad 2\,\delta_1 = 2 . 0{,}0000086133 = 0{,}0000172266,$$
daher folgt:
$$h_1 = [1 + (\delta - 2\,\delta_1)\,(t_1 - t)]\,h = [1 + 0{,}00016295\,(t_1 - t)]\,h.$$
Wäre $t = 10^0$, $t_1 = 50^0$ und $h = 30$ Zoll, so hätte man hiernach:
$$h_1 = (1 + 0{,}00016295 . 40) . 30 = 30{,}1955 \text{ Zoll}.$$

§. 362 **Ausdehnung des Wassers.** Die übrigen Flüssigkeiten, zumal aber das Wasser, dehnen sich nicht proportional der Wärmezunahme aus, auch sind die Ausdehnungen bei den übrigen Flüssigkeiten größer als beim Quecksilber, insbesondere größer als bei den festen Körpern. Folgende Zusammenstellung führt die Ausdehnungsverhältnisse der in der Technik am häufigsten vorkommenden Flüssigkeiten vor Augen.

Die Ausdehnung ist bei 0 bis 100° Wärmezunahme:
für Alkohol von 0,817 specif. Gewicht, $= \frac{1}{9} = 0{,}1112$, nach Dalton,
„ Olivenöl und Leinöl, $= \frac{10}{125} = 0{,}80$, desgl.,
„ Schwefelsäure von 1,85 specif. Gewicht, $= \frac{100}{1667} = 0{,}060$, desgl.,
„ Schwefeläther, $= \frac{1}{14} = 0{,}0700$, desgl.
„ gesättigte Kochsalzauflösung, $= \frac{1}{20} = 0{,}050$, nach Hallström,
„ Wasser, $= \frac{100}{2092} = 0{,}04775$, desgl.,
„ Quecksilber, $= \frac{10}{555} = 0{,}018018$, nach Dulong und Petit.

Am ungleichförmigsten dehnt sich aber das Wasser aus, dessen Dichtigkeit sogar von 0 bis beinahe 4° Wärme nicht ab-, sondern zunimmt, so daß diese bei der letzten Temperatur ihren Maximalwerth erreicht. Man hat auf verschiedene Weisen das Ausdehnungsgesetz des Wassers zu ermitteln gesucht, vorzüglich hat man dazu große Wasserthermometer angewendet. Auch hat man den Versuchsresultaten empirische Formeln anzupassen gesucht, und mit Hülfe derselben die hierzu nöthigen Constanten bestimmt. Es ist zu erwarten, daß sich von allen diesen Formeln folgende zwei von Hallström am meisten an die Versuche anschließen.

Ist V_0 das Volumen des Wassers bei 0° und V das bei t Grad, so hat man für Temperaturen von 0° und 30°:

$$V = (1 - 0{,}000057577\,t + 0{,}0000075601\,.\,t^2 - 0{,}00000003509\,t^3)\,V_0,$$

und für eine solche zwischen 30° und 100°:

$$V = (1 - 0{,}0000094178t + 0{,}00000533661t^2 - 0{,}0000000104086t^3)\,V_0;$$

und es ist hiernach für $t = 3{,}92°$ das Volumen am kleinsten, und zwar $= 9{,}9998887$. Den Beobachtungen zufolge, kommt aber das Minimalvolumen oder die Maximaldichtigkeit des Wassers bei 3,9° Wärme vor. Nach den neuesten Untersuchungen von Kopp ist für Temperaturen zwischen 0° und 25° C.:

$$V = (1 - 0{,}000061045\,t + 0{,}0000077183\,t^2 - 0{,}00000003734\,t^3)\,V_0,$$

und hiernach die größte Dichtigkeit des Wassers bei 4,08° (s. Poggendorff's Annalen, Bd. LXXII).

Gewöhnlich nimmt man an, daß dieser größte Dichtigkeitszustand des Wassers bei 4° eintrete. Wenn man das Volumen des Wassers

bei 4° = 1,00000 setzt, so hat man nach Despretz:

„ 5° = 1,00001,	
„ 6° = 1,00003,	bei 40° = 1,00773,
„ 8° = 1,00012,	„ 50° = 1,01205,
„ 10° = 1,00027,	„ 60° = 1,01698,
„ 12° = 1,00047,	„ 70° = 1,02255,
„ 15° = 1,00087,	„ 80° = 1,02885,
„ 20° = 1,00179,	„ 90° = 1,03566,
„ 25° = 1,00293,	„ 100° = 1,04315.
„ 30° = 1,00433,	

Anmerkung 1. Nach dem neuen französischen Maß- und Gewichtssysteme ist das Gewicht eines Cubikcentimeters Wasser bei 4° Temperatur und 0,76 Meter Barometerstand, = 1 Gramme, und nach dem alten preußischen Maß- und Gewichtssysteme ist das Gewicht eines Cubikfußes Wasser bei 15° R. Wärme und 28 paris. Zoll Barometerstand, = 66 Pfund. Dieses vorausgesetzt, läßt sich das Gewicht des letzteren bei 4° C., da 15° R. = $^5/_4$. 15 = 18$^3/_4$° C. ist, = 1,00153 . 66 = 66,101 Pfund setzen. Nun ist aber ein preußischer Fuß = 31,38535 Centimeter, und

hiernach ein Cubikfuß = 3091,584 Cubikcentimeter, daher folgt der Werth eines alten preußischen Pfundes:

$$= \frac{30915,84}{66,101} = 467,71 \text{ Gramme,}$$

sowie umgekehrt, der eines Grammes, = 1 : 467,71 = 0,0021381 Pfund, also ein Kilogramm = 2,1381 Pfund.

Anmerkung 2. Versuche über die Ausdehnung des Wassers und zum Theil auch anderer Flüssigkeiten sind angestellt worden von Munke, Stampfer, Hallström, Despretz, und in der neuesten Zeit von Kopp, J. Pierre, und es ist hierüber nachzusehen in Gehler's physikalischem Wörterbuche, Bd. I und IV, im Jahrb. des k. k. polytechn. Instituts, Bd. XVI, ferner in Poggendorff's Annalen, Bd. I, IX, XXXIV und LXXII, und in den Annales de chimie et de physique, T. LXX und XV.

§. 363 **Ausdehnung der Luft.** Die Ausdehnung der Luft und anderer Gase durch die Wärme ist viel bedeutender und erfolgt in Hinsicht auf die Angaben der Quecksilberthermometer viel regelmäßiger, als die der tropfbaren Flüssigkeiten. Gay-Lussac fand dieselbe mit Hülfe eines durch eine kurze Quecksilbersäule abgesperrten Luftthermometers bei Zunahme der Temperatur von 0 bis 100°, für die atmosphärische Luft, sowie für verschiedene andere Gase, = $^3/_8$ = 0,375. Rudberg fand aber dieses Ausdehnungsverhältniß kleiner, als er bei seiner Untersuchung durch Chlorcalcium vollkommen getrocknete Luft in einer Thermometerröhre durch Wasserdämpfe bis 100° erhitzte und die Ausdehnung durch die bei erfolgter Abkühlung eingedrungene Quecksilbermenge maß; es ergab sich dasselbe nur 0,365. In der neuesten Zeit haben ferner Magnus und Regnault die Ausdehnungscoefficienten der Luft u. s. w. durch besondere Methoden mit noch größerer Genauigkeit bestimmt. Beide fanden, unabhängig von einander, dieses Ausdehnungsverhältniß bei völlig trockener atmosphärischer Luft, = $^{11}/_{30}$ = 0,3665.

Was die übrigen Gase anlangt, so geben nur diejenigen, welche sich durch hohen Druck in tropfbare Flüssigkeiten verwandeln lassen, etwas größere Ausdehnungsverhältnisse, namentlich zeichnet sich das schwefligsaure Gas durch das große Verhältniß 0,390 aus. Auch hat sich aus den Versuchen von Regnault ergeben, daß das Ausdehnungsverhältniß der Luft bei hohem Drucke etwas größer ist, als bei tiefem und mittlerem; während sich aus den Beobachtungen beim Drucke von 109,72 Millimeter das Ausdehnungsverhältniß 0,365 berechnet, stellt sich dasselbe bei 3655,6 Millimeter, 0,371 heraus.

Die Anwendung dieser Verhältnisse auf die Reductionen der Gasmengen von einer Temperatur zur anderen u. s. w. ist bereits in Bd. I, §. 392 und 393, gezeigt worden.

Durch Vergleichung der Angaben der Luft- und Quecksilberthermometer

unter einander hat sich ergeben, daß beide einander nicht ganz correspondiren; so fand z. B. Magnus, daß 100°, 200°, 300° nach dem Quecksilberthermometer entsprachen: 100°, 197,5°, 294,5° des Luftthermometers.

Anmerkung. Die neueren Untersuchungen über die Ausdehnung der Gase sind abgehandelt in Poggendorff's Annalen, Bd. L und LII, sowie auch in Regnault's Memoiren *rc.* (S. §. 328).

Die in §. 392, Bd. I, aus dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'- §. 364
schen Gesetze entwickelte Formel

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} \cdot \frac{p_1}{p}$$

geht, wenn $t_1 = 0$ ist, und V_0 und p_0 das Luftvolumen und die Pressung desselben bei Null Grad Wärme bezeichnen, in

$$\frac{V}{V_0} = (1 + \delta t)\frac{p_0}{p}, \text{ oder}$$

$$\frac{Vp}{V_0 p_0} = 1 + \delta t \text{ über.}$$

Da $\delta = 0{,}00366$ ist, so hat man auch

$$\frac{V_n p_n}{V_0 p_0} = 1{,}336,$$

wenn V_n und p_n das Volumen und die Pressung desselben Luftquantums bei $t_1 = 100$ Grad Wärme bezeichnen.

Auch hat man für die Temperatur t des Luftvolumens V von der Pressung p die Formel

$$t = \frac{Vp - V_0 p_0}{\delta V_0 p_0} = 273^0 \cdot \left(\frac{Vp - V_0 p_0}{V_0 p_0}\right).$$

Die Temperatur, bei welcher die Pressung Null (p) ausfällt, oder die Elasticität der Luft verschwindet, ist hiernach

$$t = -\,273 \text{ Grad.}$$

Diese Temperatur giebt den sogenannten absoluten Nullpunkt an und eine andere von diesem Anfangspunkt aus gemessene Temperatur τ heißt die absolute Temperatur (franz. température absolue; engl. absolute temperature).

Dieselbe ist also

$$\tau = 273^0 + t,$$

sowie die gewöhnliche relative Temperatur

$$t = \tau - 273^0.$$

Für $t = 100^0$ hat man z. B. $\tau = 373^0$, dagegen für

$$\tau = 250^0,\ t = -\,23^0.$$

Bei Einführung der absoluten Temperatur erhält man einfach

$$1 + \delta t = 1 + \delta \left(\tau - \frac{1}{\delta}\right) = \delta \tau, \text{ daher}$$

$$\frac{Vp}{V_0 p_0} = \delta \tau,$$

und ebenso für ein Luftvolumen V_1 von der Pressung p_1 und absoluten Temperatur τ_1

$$\frac{V_1 p_1}{V_0 p_0} = \delta \tau_1;$$

daher nimmt dann obige Hauptformel folgende einfachere Gestalt an

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\tau}{\tau_1} \frac{p_1}{p}, \text{ oder } \frac{Vp}{V_1 p_1} = \frac{\tau}{\tau_1}.$$

Die Formel $\frac{Vp}{V_0 p_0} = \delta \tau$ ist für vollkommene Gase, wohin vor Allem das Wasserstoffgas gehört, gültig; für unvollkommene Gase, z. B. für kohlensaures Gas, hat man dagegen

$$\frac{Vp}{V_0 p_0} = \delta t - A_0 - \frac{A_1}{\tau} - \frac{A_2}{\tau_2} \text{ u. s. w. zu setzen.}$$

Bezeichnen v, v_1 u. s. w. die Volumina einer Gasmenge vom Gewichte = Eins, so hat man in $\frac{vp}{\tau} = \frac{v_1 p_1}{\tau_1} = \frac{v_0 p_0}{\tau_1}$ eine constante Größe R, und es ist $vp = R\tau$, oder wenn noch γ, γ_1 u. s. w. γ_0 die Gewichte der Raumeinheit Gas bezeichnen, und hiernach $v\gamma = v_1 \gamma_1 = 1$ gesetzt wird,

$$\frac{p}{\gamma \tau} = \frac{p_1}{\gamma_1 \tau_1} = \frac{p_0}{\gamma_0 \tau_0} = R.$$

Sind R und R_1 die Constanten für zwei verschiedene Gase, so hat man

$$\frac{R_1}{R} = \frac{p_1}{\gamma_1 \tau_1} \cdot \frac{\gamma \tau}{p}, \text{ also für } \tau = \tau_1 \text{ und } p = p_1,$$

$\frac{R_1}{R} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1}{\varepsilon}$, wenn ε das specifische Gewicht der zweiten Gasart in Hinsicht auf die erstere bezeichnet.

Für atmosphärische Luft hat man bei $t_0 = 0$ Grad Wärme und 0,76 Meter Barometerstand den Druck pr. Quadratmeter $p = 10334$ Kilogramm und das Gewicht eines Cubikmeters

$\gamma = 1{,}29318$ Kilogramm, folglich läßt sich hier setzen:

$$R = \frac{p}{\gamma \tau} = \frac{10334}{1{,}29318 \,.\, 273} = 29{,}272.$$

Für Sauerstoffgas ist:

$$\varepsilon = \frac{1,42980}{1,29318} = 1,10563, \text{ daher } R_1 = \frac{R}{\varepsilon} = 26,475,$$

ferner für Stickstoffgas

$$\varepsilon = 0,97137, \text{ daher } R_1 = 30,134,$$

und für Wasserstoffgas

$$\varepsilon = 0,06926, \text{ folglich } R_1 = 422,61.$$

Strahlende Wärme. Die Wärme eines Körpers theilt sich anderen Körpern entweder durch Ausstrahlung (franz. und engl. radiation) oder durch Berührung (franz. und engl. contact) mit, und man nennt die auf die erste Art mitgetheilte Wärme die strahlende Wärme (franz. chaleur rayonnante; engl. rediating heat). Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Arten der Wärmeausbreitung besteht aber darin, daß die strahlende Wärme durch den leeren Raum, durch Luft, Wasser und andere Körper hindurch und in einen dritten Körper übergeht, ohne eine Spur in jenen zurückzulassen, während bei der Mittheilung durch Berührung erst der Zwischenkörper erwärmt und von diesem die Wärme auf einen dritten Körper übergetragen wird. §. 365

Die Ausstrahlung der Wärme erfolgt nach demselben Gesetze, wie die Ausstrahlung des Lichtes. Namentlich pflanzt sich die Wärme, wie das Licht, in geraden Linien, welche man Wärmestrahlen (franz. rayons de chaleur; engl. rays of heat) nennt, fort. Auch steht die strahlende Wärme im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung, dergestalt, daß von einer und derselben Wärmequelle der doppelte, dreifach entfernte Körper u. s. w. nur ein Viertel, ein Neuntel der Wärme u. s. w. erhält, als der Körper in der einfachen Entfernung. Ferner wächst auch die Intensität der strahlenden Wärme wie der Sinus des Winkels, welchen der Wärmestrahl mit der Wärme ausstrahlenden Fläche einschließt.

Der Körper A, Fig. 602, wird z. B. durch den Wärme ausstrahlenden Ofen DEF viermal so stark erwärmt, als der Körper B, welcher noch ein-

Fig. 602.

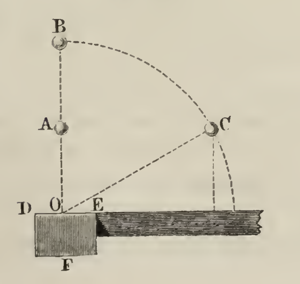
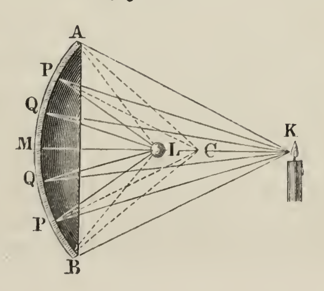


Fig. 603.



mal so weit entfernt ist vom Ofen als dieser, und der Körper B nimmt wieder noch einmal so viel strahlende Wärme auf, als der in gleicher Entfernung befindliche Körper C, weil die mittlere Richtung der zu C gelangenden Wärmestrahlen mit der strahlenden Fläche DE einen Winkel COE von 30^0 einschließt, dessen Sinus $= 1/_2$ ist.

Ebenso werden die Wärmestrahlen genau nach demselben Gesetze reflectirt wie die Lichtstrahlen; es ist auch hier der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich. Die auf einen Kugelspiegel AMB, Fig. 603 (a. v. S.), fallenden Wärmestrahlen KP, KQ u. s. w. werden deshalb von demselben in solchen Richtungen PL, QL u. s. w. zurückgeworfen, daß der Reflexionswinkel CPL gleich dem Einfallswinkel CPK, ebenso der Reflexionswinkel CQL gleich dem Einfallswinkel CQK u. s. w. ist, und es concentriren sich deshalb auch sämmtliche der Mitte M des Spiegels nahe einfallenden Wärmestrahlen beinahe in demselben Punkte L.

Endlich finden auch in Ansehung der Brechung oder Ablenkung bei den Wärmestrahlen, wenn dieselben aus einem Körper in einen anderen übergehen, nahe dieselben Verhältnisse statt, wie bei den Lichtstrahlen.

§. 366 Das Vermögen der Körper, die Wärme auszustrahlen, hängt von der Temperatur des Körpers und von der Größe und Beschaffenheit seiner Oberfläche ab. Im Allgemeinen strahlen die Oberflächen sehr dichter Körper weniger Wärme aus, als die Oberflächen weniger dichter Körper, vorzüglich haben aber rauhe Oberflächen ein größeres Ausstrahlungsvermögen, als glatt polirte Oberflächen. Nach den Versuchen von Melloni ist, wenn man das Wärmeausstrahlungsvermögen einer mit Kienruß überzogenen Fläche durch 100 ausdrückt, das einer Bleiweißoberfläche ebenfalls 100, das einer mit schwarzer Tusche überstrichenen Oberfläche aber = 85, das einer Gummilackoberfläche = 72, und das einer Metallfläche gar nur 12; übrigens hängt aber auch dieses Vermögen noch etwas von der Dicke der Schicht ab, welche die Oberfläche des Körpers bildet.

Das Wärmeabsorptionsvermögen der Körper oder das Vermögen der Körper, strahlende Wärme in sich aufzunehmen, ist bei verschiedenen Körpern verschieden und verhält sich genau so wie das Ausstrahlungsvermögen; geschwärzte und rauhe Körper nehmen daher auch die Wärme leichter in sich auf, als Körper mit glatten oder polirten Oberflächen.

Das Vermögen der Körper, die Wärmestrahlen zurückzuwerfen, oder das sogenannte Reflexionsvermögen, ist das Complement des Ausstrahlungs- oder Absorptionsvermögens; je mehr ein Körper Wärmestrahlen in sich aufnimmt, desto weniger wird er natürlich zurückwerfen; aus diesem Grunde werfen die mit Ruß überzogenen Flächen fast gar keine Wärme zurück; während polirte Metallflächen die meiste Wärme reflectiren. Uebrigens werden

nicht alle Wärmestrahlen regelmäßig nach dem oben angeführten Gesetze, sondern es wird auch ein Theil unregelmäßig nach allen Seiten hin zurückgeworfen, oder, wie man sagt, es findet in der Nähe der Oberfläche der meisten Körper auch eine Diffusion der Wärmestrahlen Statt. Setzt man, nach Leslie, das Reflexionsvermögen des polirten Messings = 100, so ist dasselbe für Silber = 90, für Stahl = 70, für Glas = 10, für eine mit Ruß überzogene Fläche aber = 0.

Sehr verschieden ist endlich noch das Dimissions- oder Durchstrahlungsvermögen verschiedener Körper. Manche Körper halten die Wärmestrahlen auf und lassen gar keine durch, andere hingegen lassen die Wärmestrahlen durch wie die durchsichtigen Körper die Lichtstrahlen; jene nennt man athermane, diese diathermane Körper. Die Luft ist ein diathermaner Körper, nächstdem ist das Steinsalz ein sehr diathermaner Körper; übrigens sind nicht nur die durchsichtigen, sondern auch manche undurchsichtige Körper, wie z. B. schwarzes Glas, Glimmer u. s. w., diatherman. Auch hängt die Stärke der Durchstrahlung noch von der Art der Wärmequelle ab, und es scheint nur das Steinsalz eine Ausnahme hiervon zu machen. Endlich lassen natürlich dünnere Mittel (Platten) mehr Wärmestrahlen durch, als dicke, welche um so mehr Wärme verschlucken, je dicker sie sind.

Anmerkung. Um sich genauer über die letzteren Wärmeverhältnisse, namentlich aber über die Untersuchungen Melloni's zu unterrichten, muß man in den Werken über Physik, z. B. in den Lehrbüchern von Müller, Mousson, Wüllner u. s. w., nachlesen. S. auch „die Wärmemeßkunst" von C. Schinz. Ueber die neueren Forschungen von Provostaye und Desains wird in den Annal. de chim. et de phys. T. XXX, 1850, gehandelt.

Wärmeleitung. Die Ausbreitung der Wärme in einem und demselben Körper, sowie die Mittheilung der Wärme durch Berührung, bezeichnet man mit dem Namen der Wärmeleitung (franz. conductibilité de la chaleur; engl. conduction of the head). Die Leichtigkeit oder Schnelligkeit dieser Mittheilungsart der Wärme ist bei verschiedenen Körpern sehr verschieden; manche Körper haben ein großes Wärmeleitungsvermögen (franz. pouvoir conducteur; engl. conducting power) und andere ein kleines; in jenen verbreitet sich die Wärme sehr schnell, in diesen aber sehr langsam; man nennt daher auch jene gute Wärmeleiter (franz. bons conducteurs de la chaleur; engl. good conductors of the heat), diese aber schlechte Wärmeleiter (franz. mauvais conducteurs de la chaleur; engl. worse conductors of the heat). Gute Wärmeleiter sind die Metalle, jedoch manche mehr, manche weniger; schlechte Wärmeleiter hingegen sind das Holz, Stroh, Bettfedern, Seide, Wolle, Haare, Kohle, Asche u. s. w., überhaupt aber die lockeren Körper. Durch Zertheilung, Pulverisiren u. s. w. werden gute Wärmeleiter in schlechte, und letztere in noch schlechtere umgeändert. §. 367

Nach Despretz's Beobachtungen an Stäben, welche an einem Ende erhitzt wurden, ist, wenn die durch die Differenz der Temperaturen an den beiden Enden der Stäbe gemessene Leitungsfähigkeit des Goldes = 1000 angenommen wird, die von Platin = 981, von Silber = 973, von Kupfer = 898, von Eisen = 374, von Zink = 363, von Zinn = 303 und von Blei = 180. Die Leitungsfähigkeit von Marmor setzt man gewöhnlich = 23 und die von gebrannten Steinen gar nur 12, wiewohl mit weniger Sicherheit.

Hiervon weichen die von Wiedemann und Franz gefundenen Resultate bedeutend ab (s. Poggendorff's Annalen der Physik, Bd. 89).

Ist hiernach die Leitungsfähigkeit des Silbers = 100, so hat man

für Kupfer	73,6	für Blei	8,5
„ Gold	53,2	„ Platin	8,4
„ Zinn	14,5	„ Metall von Rose	2,8
„ Eisen	11,9	„ Wismuth	1,8
„ Stahl	11,6		

Die Flüssigkeiten sind zwar schlechte Wärmeleiter, sie nehmen aber die Wärme schnell auf, weil sie durch die hierbei eintretende ungleichmäßige Ausdehnung in Bewegung gerathen und dabei die weniger warmen Theile der Erwärmungsquelle näher geführt werden. Um sich von dem schlechten Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeiten zu überzeugen, entzündet man eine auf die Flüssigkeit gegossene dünne Schicht Schwefeläther und beobachtet den Stand eines wenig unter dieser Schicht in die Flüssigkeit eingehaltenen Thermometers. Nach Despretz, der eine Wassersäule durch wiederholtes Zutreten von heißem Wasser gleichmäßig zu erwärmen suchte, ist das Leitungsvermögen des Wassers nur 9 bis 10.

Die Luft und die Gase überhaupt sind jedenfalls schlechte Wärmeleiter, doch läßt sich das Leitungsvermögen derselben durch Thermometer wegen ihrer Strömungen und wegen ihrer größeren Wärmestrahlung nicht mit Sicherheit beobachten. Das schlechte Wärmeleitungsvermögen derselben macht sich aber dadurch bemerkbar, daß Körper, welche von allen Seiten mit Luftschichten umgeben sind, sehr langsam erwärmt oder erkältet werden.

§. 368 **Abkühlungsvermögen.** Sehr verschieden ist endlich die Geschwindigkeit, mit welcher heiße Körper ihre Wärme absetzen oder abkühlen. Ist ein heißer Körper von einem festen Körper umgeben, so erfolgt die Abkühlung (franz. refroidissement; engl. cooling) desselben vorzüglich nur durch das Leitungsvermögen des letzteren, ist aber die Umgebung des heißen Körpers eine tropfbare Flüssigkeit, so erfolgt das Abkühlen theils durch Wärmeleitung, theils und vorzüglich, durch die innere Bewegung der Flüssigkeit; ist

ferner der heiße Körper von einer elastischen Flüssigkeit umgeben, so hängt die Schnelligkeit zugleich auch noch von der Wärmestrahlung ab, und befindet er sich endlich im luftleeren Raume, so ist es nur die Ausstrahlung, welche demselben die Wärme entzieht. Im Allgemeinen läßt sich behaupten, daß die Abkühlung von der Temperaturdifferenz und von der Art und Größe der Oberfläche des wärmegebenden Körpers abhängt; es läßt sich annehmen, daß der Wärmeverlust der Oberfläche und, bei mäßigem Temperaturüberschusse, auch diesem proportional sei. Durch die späteren Untersuchungen von Dulong und Petit ist jedoch gezeigt worden, daß das erstere, zuerst von Newton aufgestellte Gesetz allgemein und zumal bei größeren Temperaturdifferenzen, nicht gültig ist. Die Gesetze der Abkühlung sind sehr verwickelt; Dulong und Petit haben dieselben für heiße Körper im luftleeren und lufterfüllten Raume zu ermitteln gesucht, indem sie vorher erhitzte große Quecksilberthermometer in einen Kupferballon einhingen, der von außen mit Wasser von einer bestimmten Temperatur umgeben war, und nun das Sinken dieser Thermometer beobachteten. Folgende Tabelle enthält die Hauptergebnisse dieser Beobachtungen.

Temperaturüberschuß.	Bloße Thermometerkugel.			Ueberfilberte Thermometerkugel.		Mit Ruß überzogene Thermometerkugel.	
	Vollständige Abkühlung.	Abkühlung durch Strahlung.	Abkühlung durch Berührung.	Vollständige Abkühlung.	Abkühlung durch Strahlung.	Vollständige Abkühlung.	Abkühlung durch Strahlung.
260°	24,42°	16,32°	8,10°	10,96°	2,86°	32,02°	23,92°
240	21,12	13,71	7,41	9,82	2,41	27,48	20,07
220	17,92	11,31	6,61	8,59	1,98	23,10	16,49
200	15,30	9,38	5,92	7,57	1,65	19,66	13,74
180	13,04	7,85	5,19	6,57	1,38	16,28	11,09
160	10,70	6,20	4,50	5,59	1,09	13,57	9,07
140	8,75	5,02	3,73	4,61	0,88	11,06	7,33
120	6,82	3,71	3,11	3,80	0,69	8,85	5,74
100	5,56	3,03	2,53	3,06	0,53	6,94	4,41
80	4,15	2,22	1,93	2,32	0,39	5,17	3,24
60	2,86	1,53	1,33	1,60	0,27	3,67	2,24
40	1,74	0,95	0,79	0,96	0,17	2,20	1,41
20	0,77	0,43	0,34	0,42	0,08	1,00	0,66
10	0,37	0,22	0,15	0,19	0,04	0,48	0,33

Man ersieht aus dieser Tabelle, welche die in Thermometergraden ausgedrückten Abkühlungen pr. Minute angiebt, daß die Beobachtungen dem oben ausgesprochenen Gesetze von Newton nicht entsprechen, denn die zweite Columne der Tabelle giebt uns für die Differenzen:

$$40^0,\ 80^0,\ 120^0,\ 160^0,\ 200^0,\ 240^0$$

zwischen der Temperatur des der Abkühlung ausgesetzten Thermometers, und der der äußeren Wasserhülle, die Abkühlung pr. Minute:

$$1{,}74^0,\ 4{,}15^0,\ 6{,}82^0,\ 10{,}70^0,\ 15{,}30^0,\ 21{,}12^0,$$

müßte aber nach Newton geben:

$$1{,}74^0,\ 2\,.\,1{,}74^0 = 3{,}48,\ 3\,.\,1{,}74^0 = 5{,}22^0,\ 4\,.\,1{,}74^0 = 6{,}96^0,$$
$$5\,.\,1{,}74^0 = 8{,}70^0,\ 6\,.\,1{,}74^0 = 10{,}44^0.$$

Nur bei kleinen Temperaturüberschüssen von höchstens 40° läßt sich annähernd setzen, daß die Abkühlungsgeschwindigkeit dem Temperaturüberschusse proportional sei.

Die Vergleichung der Zahlenwerthe in den verschiedenen Verticalcolumnen unter einander führt deutlich vor Augen, daß bei einer glänzenden Metallfläche die Abkühlung durch Strahlung klein ist gegen die Abkühlung durch Berührung, daß dagegen bei der mit Ruß überzogenen Fläche die Abkühlung durch Strahlung den größten Theil von der ganzen Abkühlung ausmacht. Die in der vierten Columne der Tabelle aufgeführten Werthe der Abkühlung durch Berührung sind durch Subtraction der in der zweiten und dritten Columne, entweder bei lufterfülltem oder bei luftleerem Ballon beobachteten Werthe gefunden worden, und gelten natürlich für alle Arten von Oberflächen. Uebrigens hängt natürlich die Abkühlungsgeschwindigkeit noch von der Größe der Oberfläche des der Abkühlung ausgesetzten Körpers ab. Die Abkühlung eines Körpers ist sehr gut mit dem Ausflusse des Wassers aus einem Gefäße zu vergleichen; was hier die Druckhöhe ist, ist dort die Temperaturdifferenz, und die Stelle der Ausflußöffnung vertritt dort die Abkühlungsfläche. Sowie man Ausfluß unter constantem und Ausfluß unter abnehmendem Drucke unterscheidet, ebenso hat man Abkühlung bei constanter und Abkühlung bei abnehmender Temperatur zu unterscheiden. Sowie beim Leeren eines prismatischen Ausflußgefäßes die Ausflußzeit dem Volumen direct und der Ausmündung umgekehrt proportional wächst, ebenso verhält sich die Abkühlungszeit direct wie die sich abkühlende Masse und umgekehrt wie ihre Oberfläche. Hiermit stimmen auch die Beobachtungen von Dulong und Petit überein, welchen zufolge die Abkühlungszeiten den Durchmessern der Thermometerkugeln proportional sind.

Nach den Untersuchungen von Dulong und Petit ist die Geschwindigkeit der Abkühlung durch Ausstrahlung oder im luftleeren Raume, d. i. der Wärmeverlust während einer Zeiteinheit, bestimmbar durch die Formel

$$v_1 = \mu_1 a^{t_1} (a^t - 1),$$

in welcher μ_1 und a constante Erfahrungszahlen, t_1 die Temperatur der Umgebung und t den Temperaturüberschuß ausdrücken. Die Constante a hängt nur von der Eintheilung des Thermometers ab; sie ist für die Centesimaleintheilung $= 1{,}0077$, und für die Réaumur'sche Eintheilung $(1{,}0077)^{5/4} = 10096$, μ_1 aber hängt von dem Ausstrahlungsvermögen und von der Größe der Abkühlungsfläche ab. Das von $\mu a^{t_1} . a^t = \mu a^{t_1 + t}$ abzuziehende Glied μa^{t_1} mißt die rückstrahlende Wärme, herrührend von der Oberfläche des allerdings geschwärzten Kupferballons, und würde natürlich ganz wegfallen, wenn die Abkühlung in einem unbegrenzten Raume stattfände. Für die der Berührung mit Luft entsprechende Abkühlungsgeschwindigkeit ist hingegen

$$v_2 = np^c\, t^{1{,}233} = \mu_2 t^{1{,}233}$$

zu setzen, und es bezeichnet in $\mu_2 = np^c$, n eine von der Größe der Abkühlungsfläche und von der Natur des Abkühlungsmittels, c eine nur von letzterem abhängige Constante, p aber die Elasticität dieses Mittels und t, wie vorher, den Temperaturüberschuß. Hiernach ist also für die vollständige Abkühlungsgeschwindigkeit zu setzen:

$$v = v_1 + v_2 = \mu_1 a^{t_1} (a^t - 1) + \mu_2 t^{1{,}233}.$$

Die Potenzen $a^t = (1{,}0077)^t$ und $t^{0{,}233}$ lassen sich für die gewöhnlichen Fälle mittels der folgenden Tabelle bestimmen.

Temperatur t Grad	Potenz $1{,}0077^t$	Potenz $t^{0{,}233}$	Temperatur t Grad	Potenz $1{,}0077^t$	Potenz $t^{0{,}233}$
10	1,080	1,710	110	2,325	2,990
20	1,165	2,010	120	2,510	3,051
30	1,259	2,209	130	2,711	3,108
40	1,359	2,362	140	2,927	3,163
50	1,467	2,488	150	3,160	3,214
60	1,584	2,596	160	3,412	3,263
70	1,711	2,691	170	3,684	3,309
80	1,847	2,776	180	3,978	3,353
90	1,994	2,853	190	4,295	3,396
100	2,153	2,924	200	4,637	3,437

Für die Wärmestrahlung hat der auf die Fläche von 1 Quadratmeter und auf den Zeitraum einer Stunde bezogene Coefficient μ_1 folgende Werthe:

Polirtes Silber	16	Verrostetes Eisenblech	419
Silberpapier	52	Neues Gußeisen	395
Polirtes Messing	32	Verrostetes Gußeisen	419
Goldpapier	28	Glas	373
Rothes Kupfer	20	Kohlenstaub	427
Zink	30	Papier	470
Zinn	27	Ruß	500
Polirtes Eisenblech	56	Bausteine	449
Verbleites Eisenblech	81	Holz	449
Schwarzblech	345	Wasser	662

Der Coefficient μ_2 für die Leitung der Wärme durch die Luft ist von der Form und von den Dimensionen der Körper abhängig. Für einen liegenden Cylinder vom Halbmesser r Meter ist z. B.

$$\mu_2 = 1{,}136 + \frac{0{,}0211}{r}.$$

Anmerkung. Um sich vollständiger über diesen Gegenstand zu unterrichten, kann man nachlesen: von Dulong und Petit: Recherches sur la mesure de températures etc. im Journal de l'école polytechnique, J. XI.; ferner von Péclet: Traité de la chaleur; sowie auch Gehler's physikalisches Wörterbuch, Bd. X ꝛc.

§. 369 Zum praktischen Gebrauche bequemere Näherungsformeln für die Abkühlungsgeschwindigkeit giebt Péclet im zweiten Bande seines eben citirten Werkes. Er setzt die Abkühlungsgeschwindigkeit

$$v = At\,(1 + \alpha t),$$

und nimmt bei Temperaturen von 10^0 bis 260^0, für die Glasfläche:

$$\alpha = 0{,}0065,$$

für die Silberfläche:

$$\alpha = 0{,}0051,$$

und für die Rußfläche:

$$\alpha = 0{,}0066,$$

bei Temperaturen von 0 bis 20^0 aber im ersten Falle:

$$\alpha = 0{,}0039,$$

im zweiten: $= 0{,}011,$

und im dritten: $= 0{,}0043$ an.

Was ferner den Coefficienten A anlangt, so bezieht er denselben gleich auf

den Wärmeverlust pr. Stunde und pr. Quadratmeter, und setzt denselben für Wasser, umschlossen

von einer polirten Metallfläche: $A = 4{,}38$,
„ „ Glas- oder Firnißwand: $A = 6{,}40$,
„ „ Blech- oder Gußeisenwand: $A = 7{,}70$,
„ „ mit Ruß überzogenen Wand: $A = 8{,}48$.

Gewöhnlich nimmt man für Wände von Kalk- oder Ziegelstein $A = 9$, sowie für eine Holzwand, $A = 8$ an.

Péclet zieht den Fall in Betracht, daß ein mit warmem Wasser angefülltes Gefäß in einem gewissen Abstande von der Gefäßwand mit einem Mantel umgeben und der Zwischenraum mit abgesperrter Luft ausgefüllt sei. Sind dann F und F_1 die Oberflächeninhalte des Gefäßes und der Hülle, sowie t und t_1 die Temperaturüberschüsse in Hinsicht auf die äußere Luft, so können wir setzen:

$$F(t - t_1)(1 + \alpha(t - t_1)) = F_1 t_1 (1 + \alpha t_1),$$

oder annähernd $$F(t - t_1) = F_1 t_1.$$

Hiernach ist

$$t_1 = \frac{Ft}{F + F_1};$$

es folgt daher die Geschwindigkeit der Abkühlung für 1 Quadratmeter:

$$v = A t_1 (1 + \alpha t_1) = \frac{F}{F + F_1} A t \left(1 + \frac{\alpha F}{F + F_1} t\right),$$

und die Abkühlung der Fläche F_1, sowie des ganzen Gefäßes

$$F_1 v = \frac{F F_1}{F + F_1} A t \left(1 + \frac{\alpha F t}{F + F_1}\right).$$

Ohne den Mantel wäre die Abkühlung des Gefäßes:

$FAt(1 + \alpha t)$, und zwar größer, weil $\frac{F_1}{F + F_1}$ ein echter Bruch ist.

Wäre der Zwischenraum zwischen dem Kessel und dem Mantel klein, oder wäre derselbe luftleer, so würde die Wärme nur durch Ausstrahlung von dem Kessel auf den Mantel übertragen werden, und man hätte dann für diese Abkühlung einen anderen Coefficienten als für die Abkühlung an der Mantelfläche F_1 einzuführen. Bezeichnen wir jenen mit A und diesen mit A_1, so erhalten wir:

$$AF(t - t_1) = A_1 F_1 t_1,$$

daher:

$$t_1 = \frac{AF}{AF + A_1 F_1} t,$$

und sonach die Abkühlungsgeschwindigkeit für 1 Quadratmeter:

$$v = A_1 t_1 (1 + \alpha t_1) = \frac{A A_1 F t}{A F + A_1 F_1} \left(1 + \alpha \cdot \frac{A F}{A F + A_1 F_1} t\right);$$

und für die ganze Fläche F_1:

$$F_1 v = \frac{A A_1 F F_1}{A F + A_1 F_1} t \left(1 + \alpha \cdot \frac{A F}{A F + A_1 F_1} t\right).$$

Beispiel. Ein schmiedeeiserner Kessel enthält Wasser von 100° Wärme, und ist an seiner Oberfläche von 15 Quadratmeter Inhalt von außen mit Luft von 20° Wärme umgeben; welche Abkühlung erleidet das Wasser? Es ist hier

$$\alpha = 0{,}0066,\ A = 7{,}70 \text{ und } t = 100^0 - 20^0 = 80^0,$$

daher die Abkühlungsgeschwindigkeit:

$$v = At\,(1 + \alpha t) = 7{,}7 . 80\,(1 + 0{,}0066 . 80) = 616 . 1{,}528 = 941^0,$$

und folglich die Abkühlung für die ganze Oberfläche von 15 Quadratmetern Inhalt:

$$Fv = 15 . 941 = 14115^0;$$

d. h. dem Kessel werden stündlich 14115° Wärme durch Abkühlung entzogen, und müssen durch Erwärmung von einer anderen Seite her wieder ersetzt werden, wenn die Temperatur von 100° unverändert bleiben soll. Wäre der Kessel mit einem Mantel von 25 Quadratmeter Inhalt umgeben, welcher eine gewisse Luftmasse dazwischen abschließt, so hätte man diesen Wärmeverlust nur

$$F_1 v = \frac{F F_1}{F + F_1} A t \left(1 + \frac{\alpha F t}{F + F_1}\right) = \frac{15 . 25}{40} 616 \left(1 + 0{,}0066 \cdot \frac{15 . 80}{40}\right)$$
$$= 5775 . 1{,}198 = 6918^0.$$

Wäre endlich der Zwischenraum zwischen Kessel und Mantel luftleer, könnte also die Wärme desselben nur durch Ausstrahlung fortgehen, so würde

$$A = 0{,}2 . A_1 = 0{,}2 . 7{,}7 = 1{,}54,$$

und daher

$$F_1 v = \frac{1{,}54 . 7{,}7 . 15 . 25 . 80}{1{,}54 . 15 + 77 . 25} \left(1 + 0{,}0066 \cdot \frac{1{,}54 . 15 . 80}{1{,}54 . 15 + 7{,}7 . 25}\right)$$
$$= \frac{355740}{215{,}6} \cdot 1{,}0563 = 1743^0$$

sein.

Es fände also in diesem Falle ungefähr nur $\frac{1}{8}$ so viel Wärmeverlust statt, als beim uneingehüllten Kessel.

§. 370 Péclet giebt auch noch eine Formel und die nöthigen Constanten für die Bestimmung der Abkühlung durch schlechte Wärmeleiter. Bezeichnet man durch C die Wärmemenge, welche stündlich durch einen plattenförmigen Körper von 1 Quadratmeter Seitenfläche und 1 Meter Dicke geht, wenn die Temperaturdifferenz auf beiden Oberflächen 1° beträgt, und ist v die Wärme, welche stündlich durch eine Platte von der Dicke e geht, deren Seitenflächen den Inhalt F und die Temperaturen t und t_1 haben, so läßt sich setzen:

$$v = \left(\frac{t - t_1}{e}\right) F C,$$

und ist dabei anzunehmen:

für Kupfer	$C = 64{,}00$	für Tannenholz parallel zu den Fasern	$C = 0{,}17$
„ Eisen	„ $= 29{,}00$	„ „ normal	„ $= 0{,}09$
„ Zink	„ $= 28{,}00$	„ Eichenholz, desgl.	„ $= 0{,}25$
„ Blei	„ $= 14{,}00$	„ Kork	„ $= 0{,}14$
„ Koks	„ $= 4{,}96$	„ Kautschuk	„ $= 0{,}17$
„ Marmor	„ $= 3{,}13$	„ gestoßene Ziegel	„ $= 0{,}15$
„ Kalkstein (gemeiner)	„ $= 1{,}82$	„ Holzasche	„ $= 0{,}06$
„ Glas	„ $= 0{,}82$	„ Leinenzeug	„ $= 0{,}05$
„ Gebrannte Erde	„ $= 0{,}60$	„ Baumwollenzeug	„ $= 0{,}04$
„ Gyps	„ $= 0{,}48$	„ Papier, graues ungeleimtes	„ $= 0{,}03$

Wenn eine Platte von der Fläche F auf der einen Seite mit einem Körper von der Temperatur t, und auf der anderen mit einem anderen Körper von der Temperatur t_1 in Berührung ist, und hierbei die Temperatur derselben längs ihrer Dicke e allmälig aus τ in τ_1 übergeht, so kann man den hierbei stattfindenden Wärmeverlust

$$Q = FA\,(t - \tau) = FC\left(\frac{\tau - \tau_1}{e}\right) = FA_1\,(\tau_1 - t_1),$$

also auch

$$A\,(t - \tau) = C\left(\frac{\tau - \tau_1}{e}\right) = A_1\,(\tau_1 - t_1) \text{ setzen.}$$

Eliminirt man hieraus

$$\tau_1 = \tau - \frac{Ae}{C}\,(t - \tau),$$

setzt folglich

$$A\,(t - \tau) = A_1\left(\tau - t_1 - \frac{Ae}{C}\,(t - \tau)\right),$$

so folgt die Temperatur der Platte an der einen Seite

$$\tau = \frac{At + A_1 t_1 + \frac{A A_1 e t}{C}}{A + A_1 + \frac{A A_1 e}{C}}, \text{ d. i.}$$

$$\tau = \frac{A A_1 t + (At + A_1 t_1)\,\frac{C}{e}}{A A_1 + (A + A_1)\,\frac{C}{e}},$$

sowie die Temperatur derselben an der anderen:

$$\tau_1 = \frac{A A_1 t_1 + (At + A_1 t_1)\frac{C}{e}}{A A_1 + (A + A_1)\frac{C}{e}},$$

und das durchgegangene Wärmequantum

$$Q = \frac{FC}{e}(\tau - \tau_1) = \frac{F A A_1 \frac{C}{e}(t - t_1)}{A A_1 + (A + A_1)\frac{C}{e}} = F . A_2 (t - t_1),$$

wenn man

$$\frac{A A_1 C}{A A_1 e + (A + A_1) C} = \frac{C}{e + \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1}\right) C}$$

durch A_2 bezeichnet.

Sind die Constanten A und A_1 des Ein- und Austritts einander gleich, so hat man einfacher

$$A_2 = \frac{C}{e + \frac{2C}{A}},$$

und ist außerdem auch die Plattendicke e klein, so fällt $A_2 = \frac{A}{2}$ und daher $Q = \frac{1}{2} FA(t - t_1)$ aus.

Wäre $\tau = t$, d. i. die Temperatur der Platte auf der einen Seite gleich der des mit derselben in Berührung kommenden Körpers, z. B. Wassers, so hätte man $A = \infty$, daher

$$A_2 = \frac{C}{e + \frac{C}{A_1}} = \frac{A_1 C}{A_1 e + C} \text{ und}$$

$$Q = \frac{F A_1 C (t - t_1)}{A_1 e + C}.$$

Beispiel. Wenn der im Beispiele des vorigen Paragraphen behandelte mit 100° warmem Wasser angefüllte Kessel mit einer Ziegelmauer von $\frac{1}{4}$ Meter Dicke umgeben wird, so ist seine Abkühlung stündlich:

$$Fv = \frac{F A_1 C (t - t_1)}{A_1 e + C} = \frac{15 . 9 . 0{,}68 . 80}{9 . \frac{1}{4} + 0{,}68} = \frac{7344}{2{,}93} = 2506^0.$$

§. 371 **Schmelzen.** Die Ausdehnung, welche Körper durch die Wärme erleiden, hat eine gewisse Grenze, denn bei einem gewissen Grade der letzteren ändern die ersteren ihren Aggregatzustand, feste Körper gehen in einen tropfbarflüssigen Zustand über, und tropfbare Flüssigkeiten nehmen die Gasform an. So geht durch Aufnahme von Wärme, Eis in

Wasser, und dieses bei höherer Temperatur (100°) in Dampf über. Der Uebergang eines Körpers aus seiner festen Form in eine tropfbarflüssige heißt Schmelzung (franz. fusion; engl. fusion, melting), und der Uebergang aus dem ersteren oder letzteren Zustande in den luftförmigen heißt Verdampfung, Verdunstung (franz. vaporation; engl. evaporation). Die Temperatur, bei welcher ein fester Körper schmilzt oder flüssig wird, heißt sein Schmelzpunkt (franz. point de fusion; engl. melting point). Die Verdampfung oder Verdunstung hat fast bei allen Temperaturen statt, ist jedoch bei niedrigen Temperaturen sehr schwach; deshalb giebt es denn auch keinen Verdampfungspunkt. Umgekehrt lassen sich auch durch Entziehung von Wärme luftförmige Körper, zumal, wenn man sie zugleich einem Drucke aussetzt, in wasserförmige, und letztere in feste Körper verwandeln.

Im Folgenden sind die Schmelzpunkte (oder Gefrierpunkte) der vorzüglichsten Körper angegeben.

Platin	bei + 2500° C.		Blei	bei + 330° C.
Schmiedeeisen	„ + 1500 bis 1600° C.		Wismuth . . .	„ + 260
Stahl	„ + 1300 „ 1400		Zinn	„ + 230
Gußeisen . . .	„ + 1050 „ 1200		Schwefel . . .	„ + 109
Gold	„ + 1100 „ 1200		Gelbes Wachs	„ + 61
Kupfer	„ + 1100 „ 1200		Phosphor . . .	„ + 43
Silber	„ + 1000		Seife	„ + 33
Bronze	„ + 900		Eis	„ + 0
Antimon	„ + 500		Terpentinöl . .	„ — 10
Zink	„ + 400		Quecksilber . .	„ — 39

Anmerkung 1. Beim Glühen des Eisens ergeben sich, nach Pouillet, folgende Temperaturen:

Anfangendes Rothglühen	525° C.
Dunkles Rothglühen	700
Anfangendes Kirschrothglühen	800
Kirschrothglühen	900
Helles Kirschrothglühen	1000
Dunkles Orangeglühen	1100
Helles Orangeglühen	1200
Weißglühen	1300
Helles Weißglühen	1400
Blendendes Weißglühen	1500

Anmerkung 2. Durch Legirungen (franz. alliages; engl. allays) von Metallen kann man sich eine Stufenleiter der Schmelzbarkeit verfertigen und diese zu pyrometrischen Untersuchungen gebrauchen. Niedrige Temperaturen lassen sich durch die Schmelzpunkte der Compositionen von Blei, Zinn und Wismuth bestimmen, zur Ausmittelung hoher Temperaturen bedient man sich aber, nach Prinsep, Saussure und Plattner, der Legirungen von Platin und Gold.

Die Legirung von	1 Th. Blei,	1 Th. Zinn u.	4 Th. Wismuth	schmilzt bei 94°
Rose's Metall oder „	„ 5 „	„ 3 „	„ „ 8 „	„ „ „ 100
ebenso auch	„ 2 „	„ 3 „	„ „ 5 „	„ „ „ 100
ferner	„ 1 „	„ 4 „	„ „ 5 „	„ „ „ 118,9
	„ 1 „	„ — „	„ „ 1 „	„ „ „ 141,2
	„ 1 „	„ 1 „	„ „ — „	„ „ „ 241
	„ — „	„ 2 „	„ „ 1 „	„ „ „ 167,7
	„ 1 „	„ 3 „	„ „ — „	„ „ „ 167,7
	„ — „	„ 3 „	„ „ 1 „	„ „ „ 200.

Man sieht, daß diese Compositionen leichter schmelzbar sind, als die einfachen Metalle. Bei den Legirungen aus Platin und Gold ist jedoch das Verhältniß anders; eine solche Legirung ist um so strengflüssiger als Gold, je mehr sie Platin in sich enthält, weshalb man aus dem Mischungsverhältnisse der die Composition bildenden Metalle im Voraus die Schmelzpunkte derselben bestimmen kann (siehe „Merbach, die Anwendung der erwärmten Gebläseluft im Gebiete der Metallurgie, Leipzig 1840“).

Das Meerwasser gefriert wegen seines Salzgehaltes erst bei — 2,5°.

Ueber Schmelzpunkte und über die zur Bildung feuerflüssiger Verbindungen nöthigen Temperaturen handelt Schinz in Dingler's Journal Bd. 182, Heft 3.

Anmerkung 3. Beim Schmelzen fester Körper, sowie beim Gefrieren oder Festwerden flüssiger Körper treten auch in der Regel Dichtigkeitsveränderungen ein. Z. B. das Wasser dehnt sich beim Gefrieren um $1/_{13}$ seines Volumens aus, und bildet nun Eis vom specifischen Gewichte 0,93. Die Kraft, mit welcher diese Ausdehnung erfolgt, ist so groß, daß sich durch dieselbe Geschützkugeln zersprengen lassen. Die meisten Metalle, wie Quecksilber, Blei, Zink, Silber u. s. w., ziehen sich beim Festwerden zusammen, manche, wie z. B. Wismuth und Gußeisen, dehnen sich hierbei aus.

Für die Technik ist auch das Schwinden der Metalle, oder Zusammenziehung derselben nach dem Gusse von Wichtigkeit (siehe Karmarsch's Abhandlung hierüber im XIX. Bande [1837] der Jahrbücher des polytechn. Instituts in Wien). Diese Volumenveränderung hängt jedenfalls von dem Zusammenziehen oder Ausdehnen beim Erstarren und vom Zusammenziehen beim Erkalten zugleich ab; je nachdem Veränderungen gleichseitig oder entgegengesetzt wirken, fällt das Schwinden kleiner oder größer aus.

Für die Längeneinheit ist das Schwinden

beim Gußeisen = $1/_{95}$ bis $1/_{98}$,
„ Messing = $1/_{60}$ bis $1/_{65}$,
„ Glockenmetall (100 Kupfer + 18 Zinn) = $1/_{63}$,
„ Kanonenmetall (100 Kupfer + $12 1/_2$ Zinn) = $1/_{130}$ bis $1/_{139}$,
„ Zink = $1/_{80}$,
„ Blei = $1/_{92}$,
„ Zinn = $1/_{147}$ und
„ Wismuth = $1/_{265}$.

§. 372 **Verdampfen.** Flüssige Körper und sogar auch manche feste Körper gehen durch Einwirkung von Wärme in luftförmige über. Diese Verwandlung geht zwar bei allen Temperaturen und Pressungen vor sich, jedoch erfolgt dieselbe in der Hitze und bei schwachem Drucke lebhafter, als in der

Kälte und bei hohem Drucke. Man unterscheidet hiernach die Verdunstung von dem Kochen oder Sieden. Während unter jener die Dampfbildung an der Oberfläche verstanden wird, verstehen wir unter dem Kochen oder Sieden (franz. ébullition; engl. ebullition, boiling) die in der ganzen Flüssigkeitsmasse vor sich gehende Dampfbildung. Der Siedepunkt (franz. le point d'ébullition; engl. the boiling point) oder die Temperatur, bei welcher das Sieden eintritt, ist nicht allein bei verschiedenen Körpern verschieden, sondern hängt auch noch von dem Drucke der die Flüssigkeit umgebenden Luft ab. Im Augenblicke des Siedens ist die Expansivkraft des Dampfes gleich dem Drucke der Luft. Nach den gemachten Beobachtungen sind bei dem Drucke von 0,76 Meter die Siedepunkte von einigen Körpern folgende:

bei Quecksilber = 350° C.,
„ Leinöl = 316°,
„ Schwefelsäure = 310°,
„ Schwefel = 299°,
„ Phosphor = 290°,
„ Terpentinöl = 273°,
„ Wasser = 100°,
„ Alkohol (vom specif. Gewicht = 0,813) = 78,6°,
„ Schwefeläther = 37,8°,
„ salpetriger Säure = 28°,
„ schwefliger Säure = — 10°.

Im Wasser aufgelöste Substanzen erhöhen die Temperatur des Siedepunktes ansehnlich. Z. B. Wasser mit Kochsalz gesättigt (100 Theile Wasser + 41,2 Kochsalz) siedet nach Legrand bei 108,4°; ferner Wasser mit kohlensaurem Kali gesättigt (100 Theile Wasser + 205 Theile kohlensaures Kali) bei 133°, und Wasser mit Chlorcalcium (100 Theile Wasser + 325 Theile Chlorcalcium) bei 179,5°.

Auch die Gefäßwände haben einen Einfluß auf den Siedepunkt. So siedet z. B. das Wasser in metallenen Gefäßen eher als in gläsernen.

Die Ausdehnungen der Körper bei dem Uebergange in die Dampfform sind sehr beträchtlich. Ein Cubikfuß Wasser giebt z. B. bei 100° Wärme und 0,76 Meter Barometerstand, 1700 Cubikfuß Dampf, und dessen Dichtigkeit ist nur $^5/_8$ von derjenigen der Luft.

Dämpfe können durch Entziehung von Wärme oder durch Vergrößerung des Druckes wieder in die Wasserform zurückgeführt werden, und darin besteht auch ihr einziger Unterschied von den Gasen oder beständigen Luftarten, welche man bis jetzt weder bei der strengsten Kälte, noch bei dem größten Drucke in den tropfbarflüssigen Zustand hat zurückführen können. Kohlensaures Gas (Dampf der flüssigen Kohlensäure) läßt sich z. B. erst bei 0°

Wärme und 36 Atmosphären Druck in den liquiden Zustand zurückführen. Bei 30° Wärme hat dieser Dampf eine Expansivkraft von 73 Atmosphären.

§. 373 **Wärmecapacität.** Die Wärmemenge in einem Körper ist jedenfalls der Temperatur und der Masse des Körpers proportional und läßt sich daher durch das Product aus beiden messen. Sie ist aber auch noch bei Körpern von verschiedenen Materien sehr verschieden. Manche Körper erfordern zur Annahme einer gewissen Temperatur mehr Wärme, als andere, es besitzen daher auch jene eine größere Capacität für die Wärme (franz. capacité pour la chaleur; engl. capacity for heat), als diese. Dieses Vermögen der Körper wird nun durch die specifische Wärme (franz. calorique spécifique; engl. specific heat) gemessen, wenn man hierunter diejenige Wärmemenge versteht, welche nöthig ist, um die Temperatur eines Körpers von 1 Pfund Gewicht um einen Grad zu erhöhen. Es ist übrigens nicht möglich, die Wärmemenge selbst anzugeben, sondern es kann nur eine Vergleichung der specifischen Wärmen verschiedener Körper unter einander angestellt werden. Zu diesem Zwecke nimmt man diejenige Wärmemenge, welche **1** Pfund Wasser erfordert, um seine Temperatur um einen Grad zu steigern, als die Wärmeeinheit an, und nennt dieselbe eine Calorie (franz. und engl. calorie). Die Wärmemenge, welche hiernach nöthig ist, um ein Wasserquantum von Q Pfund um t Grad wärmer zu machen, ist

$$W = Qt,$$

und dagegen für einen anderen Körper, dessen specifische Wärme $= \omega$ ist,

$$W_1 = \omega Q t.$$

In der unten mitgetheilten Tabelle wird die specifische Wärme des Quecksilbers $= 0{,}033$ angegeben, und es läßt sich daher hieraus schließen, daß bei gleichem Gewichte und gleicher Temperaturerhöhung, das Wasser $1/_{0,033} = {}^{1000}/_{33} = 30$mal so viel Wärmestoff oder Brennmaterial erfordert, als Quecksilber.

Um die specifischen Wärmen verschiedener Stoffe auszumitteln, hat man mehrerlei Methoden angewendet, namentlich hat man die Mischungs-, die Schmelzungs- und die Abkühlungsmethode in Anwendung gebracht. Bei der Mischungsmethode bringt man den vorher erwärmten Körper, dessen specifische Wärme man ermitteln will, in ein Wasserbad, und sieht zu, wie viel dadurch die Wärme des Wassers zugenommen hat. Ist Q das Gewicht des abgekühlten Körpers, sowie Q_1 das des Kühlwassers, ferner t die Temperaturabnahme von jenem und t_1 die Temperaturzunahme von diesem, so hat man den Wärmeverlust von jenem $= \omega Q t =$ dem Wärmegewinn $Q_1 t_1$ von diesem, und daher die gesuchte specifische Wärme:

$$\omega = \frac{Q_1 t_1}{Q t}.$$

Die Schmelzmethode besteht darin, daß man den zu untersuchenden Körper in Eis einhüllt, und nun die Menge von Wasser, welche durch Abkühlung dieses Körpers sich gebildet hat, ermittelt. Hat man dafür gesorgt, daß das Eis und das Wasser die Temperatur Null Grad behalten, so kann man $\omega Q t = 79\, Q_1$, und daher

$$\omega = \frac{79\, Q_1}{Q t}$$

setzen, weil man aus Erfahrung weiß, daß bei Verwandlung des Eises in Wasser von 0^0 Wärme 79 Wärmeeinheiten gebunden werden (s. §. 380).

Was endlich die Abkühlungsmethode anlangt, so umgiebt man hier den erwärmten Körper mit einer Metallhülle, hängt ihn so in ein luftleeres Gefäß, welches mit Wasser von constanter Temperatur umgeben ist, und beobachtet die Zeit, innerhalb welcher der Körper um eine gewisse, durch ein eingesetztes Thermometer angezeigte Temperatur sinkt. Sind für zwei Körper von den Gewichten Q und Q_1 bei gleichen Abkühlungsflächen die Abkühlungszeiten z und z_1, und die specifischen Wärmen $= \omega$ und ω_1, so hat man:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\omega\, Q}{\omega_1\, Q_1},$$

und daher das Verhältniß:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{Q z_1}{Q_1 z}.$$

Beispiel. Welche Wärmemenge ist nöthig, um einen eisernen Kessel von 2500 Pfund Gewicht, welcher mit 15000 Pfund Wasser angefüllt ist, von 10^0 bis 100^0 zu erwärmen? Das Wasserquantum erfordert die Wärmemenge

$$W = Q t = 15000\,.\,(100 - 10) = 15000\,.\,90 = 1350000 \text{ Cal.};$$

die Eisenmasse aber nimmt, da die specifische Wärme des Eisens nur 0,11 ist, die Wärmemenge $W_1 = \omega Q_1 t = 0{,}11\,.\,2500 \cdot 90 = 24750$ Cal. in Anspruch, beide erfordern also zusammen: $1350000 + 24750 = 1374750$ Cal.

Anmerkung. Mit Hülfe der specifischen Wärme läßt sich auch umgekehrt durch Abkühlung im Wasser die Temperatur eines heißen Körpers ermitteln, indem man die obige Formel in Anwendung bringt, und

$$t = \frac{Q_1 t_1}{Q \omega}$$

setzt. Wenn z. B. ein heißer Messingkörper von 15 Pfund Gewicht in 80 Pfund Wasser von 10^0 Wärme gebracht und dadurch die Temperatur des letzteren von 6^0 auf 16^0 gesteigert wird, so hat man die anfängliche Temperatur des Messings, da dessen specifische Wärme $= 0{,}0939$ ist,

$$= 16^0 + \frac{Q_1 t_1}{Q \omega} = 16^0 + \frac{80\,.\,6^0}{0{,}0939\,.\,15} = 16^0 + \frac{480^0}{1{,}4085} = 357^0 \text{ zu setzen.}$$

Pouillet fand auf diese Weise die Temperatur des schmelzenden Eisens $= 1500^0$ bis 1600^0.

§. 374 **Specifische Wärme.** Laplace und Lavoisier haben sich bei der Ausmittelung der specifischen Wärme verschiedener Körper der Schmelzmethode, Dulong und Petit aber der Abkühlungsmethode, Pouillet, und in der neuesten Zeit auch Regnault, haben sich der, wie es scheint, sicheren Mischungsmethode bedient. In Folgendem sind die auf diese Weise erhaltenen specifischen Wärmen von einigen der für die Technik am wichtigsten Körper aufgeführt.

Eisen	0,11379	nach Regnault,	0,1100	nach Dulong u. Petit
Zink	0,09555	" "	0,0927	" " " "
Kupfer	0,09515	" "	0,0949	" " " "
Messing	0,09391	" "		" " " "
Silber	0,05701	" "	0,0557	" " " "
Blei	0,03140	" "	0,0293	" " " "
Wismuth	0,03084	" "	0,0288	" " " "
Antimon	0,05077	" "	0,0507	" " " "
Zinn	0,05623	" "	0,0514	" " " "
Platin	0,03243	" "	0,0314	" " " "
Gold	0,03244	" "	0,0298	" " " "
Schwefel	0,20259	" "	0,1880	" " " "
Kohle	0,24111	" "		
Koaks	0,20307	" "		
Graphit	0,20187	" "		
Marmor	0,20989	" "		
Ungelöschter Kalk .	0,2169	nach Lavoisier und Laplace,		
Alkohol	0,700	(von 0,81 specif. Gewicht) nach Dalton,		
Eichenholz	0,570	nach Mayer,		
Glas	0,19768	" Regnault,		
Quecksilber	0,03332	" "		
Terpentinöl	0,42593	" "		

Uebrigens ist die specifische Wärme einer und derselben Materie nicht ganz constant, sondern sie wächst, wenn die Dichtigkeit des Körpers abnimmt, und nimmt auch etwas zu, wenn die Temperatur der Körper sehr groß wird, und sich dem Siedepunkte sehr nähert. So ist die mittlere specifische Wärme nach Dulong und Petit für

Eisen,	zwischen 0 u. 100°,	= 0,1098,	zwischen 0 u. 300° aber,	= 0,1218,
Quecksilber	" "	= 0,0330,	" " "	= 0,0350,
Zink	" "	= 0,0927,	" " "	= 0,1015,
Kupfer	" "	= 0,0947,	" " "	= 0,1013,
Platin	" "	= 0,0335,	" " "	= 0,0355,
Glas	" "	= 0,1770,	" " "	= 0,190.

Anmerkung. Sehr merkwürdig ist die zuerst von Dulong und Petit aufgefundene und neuerlich durch Regnault mehr begründete Beziehung zwischen der specifischen Wärme und dem Atomgewichte eines und desselben Stoffes. Es ist nämlich das Product aus den Zahlen, womit man

die specifische Wärme und das Atomgewicht ausdrückt, bei allen Körpern fast ein und dasselbe, und zwar 38 bis 42.

So ist z. B.	die specif. Wärme:	und das Atomgew.:	daher das Product beider:
beim Eisen . .	= 0,11379	= 339,21	= 38,597
„ Silber .	= 0,05701	= 675,80	= 38,527
„ Platin .	= 0,03243	= 1233,5	= 39,993
„ Schwefel	= 0,20259	= 201,17	= 40,754

Die specifische Wärme der Gase wird mit einem Wassercalorimeter bestimmt, durch welches man die in Hinsicht auf Temperatur und Expansivkraft genau untersuchten Gasarten hindurchströmen läßt. Hierbei beobachtet man entweder die in Folge der Abkühlung der Gasart entstandene Temperaturzunahme des übrigens genau gewogenen Kühlwassers, oder man setzt den Versuch so lange fort, bis das Kühlwasser eine constante Temperatur angenommen hat, so daß ebenso viel Wärme nach außen fortgeht, als dem Wasser durch die Gasart zugeführt wird, und beobachtet den Temperaturüberschuß des Wassers über die äußere Umgebung. Strömen nun in gleichen Zeiten gleiche Gasvolumina durch das Calorimeter, so lassen sich die specifischen Wärmen der verschiedenen Gasarten den beobachteten Temperaturdifferenzen proportional setzen. §. 375

Nach Regnault's Bestimmungen sind die Werthe für die specifische Wärme der Gase folgende:

Namen der Gase und Dämpfe.	Specifische Wärme		Dichtigkeit.
	nach Gewicht.	nach Volumen.	
Atmosphärische Luft . .	0,2375	0,2375	1,0000
Sauerstoff	0,2175	0,2405	1,1056
Stickstoff	0,2440	0,2370	0,9713
Wasserstoff	3,4090	0,2359	0,0692
Kohlensäure (v. 10° b. 100°)	0,2025	0,3096	1,5290
Kohlenoxyd	0,2470	0,2389	0,9673
Wasserdampf	0,4776	0,2966	0,6210

Man hat übrigens bei den Gasen und Dämpfen die specifische Wärme bei constantem Drucke und die bei constantem Volumen von einander zu unterscheiden. Der Grund hiervon liegt in der Erwärmung und Abkühlung der Körper, welche dieselben beim Zusammendrücken und Ausdehnen erleiden. Diese Temperaturveränderung tritt bei den Gasen besonders her-

vor, weil dieselben in sehr verschiedenen Zuständen der Dichtigkeit vorkommen. Hat ein Luftquantum bei unveränderlichem Drucke durch eine kleine Temperaturerhöhung von τ^0 ein größeres Volumen angenommen und wird nun dasselbe durch Zusammendrücken auf das erste Volumen zurückgeführt, so erleidet es einen zweiten kleinen Temperaturzuwachs von τ_1^0, ohne daß mehr Wärme hinzugetreten ist, es hat also nun bei demselben Volumen die Luftmasse die Temperatur $\tau + \tau_1$, während sie bei constantem Drucke nur die Temperatur τ zeigt. Hiernach ist nun auch die specifische Wärme ω bei constantem Drucke größer, als die specifische Wärme ω_1 bei constantem Volumen, und zwar ist $\omega \tau = \omega_1 (\tau + \tau_1)$, daher

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\tau + \tau_1}{\tau}$$

das Verhältniß der specifischen Wärme bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen.

(§. 376) Wenn die Temperatur einer Luftmasse von der Dichtigkeit γ bei unveränderter Pressung p um t wächst, so nimmt die Dichtigkeit derselben einen Werth γ_1 an, welcher durch die Gleichung

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \delta t}$$

bestimmt ist.

Wird nun diese Luftmasse durch Vergrößerung des Druckes auf ihr anfängliches Volumen zurückgeführt, so entwickelt dieselbe eine Wärme, deren Größe

$$t_1 = \psi \left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right) = \frac{\psi \delta t}{1 + \delta t}$$

gesetzt werden kann, wenn man annimmt, daß bei einer plötzlichen Umänderung der Dichtigkeit γ_1 in γ, die Temperatur proportional der Dichtigkeitsveränderung wachse.

Dies vorausgesetzt, ist daher zuletzt die vollständige Zunahme der Temperatur:

$$t + t_1 = t + \frac{\psi \delta t}{1 + \delta t} = t \left(1 + \frac{\psi \delta}{1 + \delta t}\right),$$

und daher das Verhältniß der Wärme bei constantem Drucke zu der bei constantem Volumen:

$$\varkappa = 1 + \frac{\delta \psi}{1 + \delta t}.$$

Die Pressung der Luft von der Dichtigkeit γ und Temperatur t läßt sich (s. Bd. I, §. 393)

$$p = \mu \gamma (1 + \delta t)$$

setzen, wenn μ eine bestimmte Erfahrungszahl bezeichnet.

Differenziirt man diesen Ausdruck in Hinsicht auf p, γ und t, so erhält man:

$$\partial p = \mu\,(\partial\gamma + \delta t.\partial\gamma + \gamma\delta.\partial t),$$

oder da sich $t = \psi\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma}\right)$ und $\partial t = \psi\,\frac{\partial\gamma}{\gamma}$ setzen läßt,

$$\partial p = \mu\,(1 + \delta t + \delta\psi)\,\partial\gamma.$$

Dividirt man nun durch $p = \mu\gamma\,(1 + \delta t)$, so folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial p}{p} = \left(1 + \frac{\delta\psi}{1 + \delta t}\right)\frac{\partial\gamma}{\gamma} = \varkappa\,\frac{\partial\gamma}{\gamma}.$$

Da nun $\int\frac{\partial p}{p} = Ln.p$ und

$\int\frac{\partial\gamma}{\gamma} = Ln.\gamma$ ist (s. Bd. I, analytische Hülfslehren, Art. 22),

so folgt auch die Gleichung:

$$Ln.p = \varkappa Ln.\gamma + Const.,$$ sowie:

$$Ln.p_1 = \varkappa Ln.\gamma_1 + Const.,$$ und daher:

$$Ln.p_1 - Ln.p = \varkappa\,(Ln.\gamma_1 - Ln.\gamma),$$

oder:

$$Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right) = \varkappa Ln.\left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right),$$

und folglich auch:

$$\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa},$$

sowie:

$$\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \frac{p_1}{p}.\frac{\gamma}{\gamma_1} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

wie wir bei den folgenden Untersuchungen voraussetzen wollen.

Die Formel $\frac{p_1}{p} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa}$ drückt das sogenannte Poisson'sche Gesetz aus.

Die Größe des Verhältnisses $\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1}$ läßt sich durch folgende Versuche ermitteln.

Man fülle zuerst ein Gefäß mit verdünnter Luft und eröffne dann mittels §. 377
eines Hahnes die Mündung desselben auf kurze Zeit, wobei natürlich die äußere Luft in das Gefäß dringt und eine Verdichtung der bereits eingeschlossenen Luft erfolgt. Hierbei beobachtet man an einem mit dem Luftreservoir in Verbindung stehenden Manometer nicht allein den Manometerstand $(-h)$ der eingeschlossenen Luft vor der Eröffnung, sondern auch den Manometerstand $(-h_1)$ unmittelbar nach dem Verschluß, und auch den Manometerstand $(-h_2)$ nach erfolgter Abkühlung der verdichteten Luft. Ist nun noch b der äußere Barometerstand, t die Temperatur der Luft vor und nach dem

Versuche und t_1 die Temperatur derselben unmittelbar nach erfolgtem Einströmen, so hat man nach dem Vorstehenden

$$\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \left(\frac{\gamma_1}{\gamma}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \left(\frac{b - h_1}{b - h}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

und da sich während der Abkühlung der verdichteten Luft das Volumen und folglich auch die Dichtigkeit derselben nicht ändert:

$$\frac{b - h_1}{1 + \delta t_1} = \frac{b - h_2}{1 + \delta t} \quad \text{oder} \quad \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \frac{b - h_1}{b - h_2},$$

so daß nun durch Elimination von $\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$ folgt:

$$\left(\frac{b - h_1}{b - h}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \frac{b - h_1}{b - h_2},$$

oder

$$\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot Log. \left(\frac{b - h_1}{b - h}\right) = Log. \left(\frac{b - h_1}{b - h_2}\right),$$

und daher das Verhältniß der specifischen Wärme der Luft bei gleichem Drucke zu der bei gleichem Volumen:

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{Log. (b - h_1) - Log. (b - h)}{Log. (b - h_2) - Log. (b - h)}.$$

Sind die Differenzen $h - h_1$ und $h - h_2$ der Manometerstände klein, so kann man

$$Log. \left(\frac{b - h_1}{b - h}\right) = Log. \left(1 + \frac{h - h_1}{b - h}\right) = \frac{h - h_1}{b - h}$$

und

$$Log. \left(\frac{b - h_2}{b - h}\right) = Log. \left(1 + \frac{h - h_2}{b - h}\right) = \frac{h - h_2}{b - h}$$

setzen, so daß nun einfach das gesuchte Verhältniß

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{h - h_1}{h - h_2}$$

folgt.

Clement und Désormes haben auf diese Weise

$$\varkappa = \frac{\omega}{\omega_1} = 1{,}348,$$

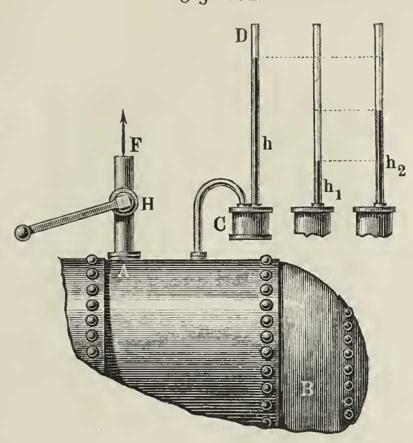
dagegen Gay-Lussac $= 1{,}375$

ermittelt.

Der Verfasser hat zur Bestimmung von $\varkappa$ ein entgegengesetztes Verfahren eingeschlagen; er hat erst einen Dampfkessel AB, Fig. 604, mit comprimirter Luft angefüllt und dann auf einige Augenblicke mittels eines Hahnes H eine Mündung F eröffnet, wobei ein Ausströmen der Luft sowie eine Verdünnung und Abkühlung der im Kessel zurückgebliebenen Luft entstand.

War nun h der anfängliche Stand des Manometers CD, h_1 der kurz nach dem Verschlusse der Mündung und h_2 der nach erfolgter Erwärmung bis

Fig. 604.



zur anfänglichen Temperatur, etwa zehn Minuten später beobachtete Manometerstand, so ließ sich das gesuchte Verhältniß durch die Formel

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{Log.\,(b + h) - Log.\,(b + h_1)}{Log.\,(b + h) - Log.\,(b + h_2)}$$

berechnen.

Bei einem solchen Versuche war der Barometerstand $b = 0{,}7342$ Meter und wurden die Quecksilbermanometerstände

$$h = 0{,}7180,$$
$$h_1 = 0{,}5890$$

und $$h_2 = 0{,}6250 \text{ Meter}$$

beobachtet, wonach sich nun

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{Log.\,1{,}4522 - Log.\,1{,}3232}{Log.\,1{,}4522 - Log.\,1{,}3592} = \frac{0{,}16203 - 0{,}12162}{0{,}16203 - 0{,}13328}$$

$$= \frac{4041}{2875} = 1{,}405$$

bestimmt. (S. den Civilingenieur, Band 5 vom Jahre 1859.)

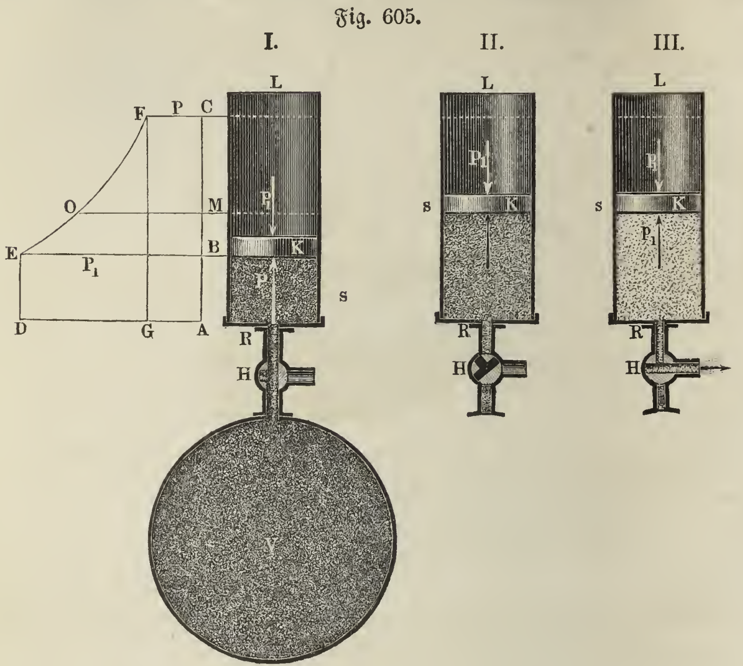
Nach Masson ist $\frac{\omega}{\omega_1} = 1{,}419$.

Nach den Versuchen über die Schallgeschwindigkeit von Moll und van Beck ist hingegen $\varkappa = 1{,}41$.

Da während der allerdings sehr kurzen Ausflußzeit bei meinen Versuchen noch immer eine kleine Menge Wärme verloren geht, so setze ich in der Folge ebenfalls $\varkappa = 1{,}41$.

§. 378 **Arbeit der Wärme.** Wenn der in einem Cylinder LR, Fig. 605, I, II u. III bewegliche Kolben K, dessen Fläche der Einfachheit wegen die Einheit sein möge, von der aus einem großen Reservoir V zuströmenden Luft mit der

Fig. 605.



durch die Gerade $AD = BE$ dargestellten Kraft p gedrückt wird und einen gewissen Weg $\overline{AB} = s$ zurücklegt, so verrichtet derselbe in Folge dieser Expansivkraft die durch das Rechteck $ABED$ graphisch darzustellende mechanische Arbeit: ps.

Hebt man hierauf, etwa durch Drehung des Hahnes H in der Verbindungsröhre, die Communication zwischen dem Cylinder LR und dem Luftreservoir V auf, wie II darstellt, so bleibt die Kraft p nicht mehr constant, sondern es wird dieselbe um so kleiner, je mehr sich die abgeschlossene Luft ausdehnt, je weiter also der Kolben K fortrückt. Bliebe nun während dieser Kolbenbewegung die Temperatur der abgesperrten Luft constant, so würde die Kolbenkraft p nach dem Mariotte'schen Gesetze abnehmen und folglich am Ende eines gewissen Weges $\overline{AM} = x$, die durch $\overline{MO}$ repräsentirte Größe

$$y = \frac{sp}{x}$$

sein.

Da die Luft, wie alle anderen Körper, bei ihrer Ausdehnung Wärme bindet, und folglich an sensibler Wärme verliert, so könnte dieser Fall nur dann eintreten, wenn der eingeschlossenen Luft von außen durch die Cylinderwand so viel Wärme zugeführt würde, als dieselbe bei ihrer Ausdehnung bindet. Setzen wir aber voraus, daß eine solche Wärmemittheilung von außen nicht statthat, so können wir auch nicht

$$y = \frac{sp}{x},$$

sondern müssen die Dampfpressung

$$y = \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} \cdot \frac{sp}{x}$$

setzen (s. Bd. I, §. 392), wobei t_1 die anfängliche, dem Drucke p_1 entsprechende Temperatur, sowie t die veränderliche, dem Drucke y zukommende Temperatur bezeichnet.

Wegen der Abkühlung bei der Ausdehnung ist noch

$$\frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1} = \left(\frac{s}{x}\right)^{\varkappa - 1},$$

wo $\varkappa$ das bekannte Wärmeverhältniß $\frac{\omega}{\omega_1}$ bezeichnet, daher folgt:

$$y = \left(\frac{s}{x}\right)^{\varkappa} \cdot p = \left(\frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \cdot p.$$

Durchläuft nun der Kolben $\varkappa$ das Wegelement ∂x, so verrichtet er in Folge dieser Pressung die Arbeit

$$y \partial x = \left(\frac{s}{x}\right)^{\varkappa} \cdot p \, \partial x,$$

und es ist folglich die während der Durchlaufung des Weges $\overline{BC} = s_1 - s$ durch die abgesperrte Luft auf den Kolben übergetragene durch eine Fläche $BEFC$ graphisch dargestellte Arbeit:

$$\int_s^{s_1} y \, \partial x = s^{\varkappa} p \int_s^{s_1} x^{-\varkappa} \partial x = s^{\varkappa} p \left(\frac{s_1^{-\varkappa + 1}}{-\varkappa + 1} - \frac{s^{-\varkappa + 1}}{-\varkappa + 1}\right)$$

$$= \frac{s^{\varkappa} p}{\varkappa - 1} \left(\frac{1}{s^{\varkappa - 1}} - \frac{1}{s_1^{\varkappa - 1}}\right) = \frac{ps}{\varkappa - 1} \left[1 - \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa - 1}\right].$$

Wenn während der ganzen Kolbenbewegung um den Weg $\overline{AC} = s_1$ die äußere Luft mit der Kraft p_1 entgegenwirkt, so geht hierbei die durch das Rechteck $ACFG$ repräsentirte Arbeit

$$p_1 s_1$$

verloren, und es ist endlich die resultirende und durch den Flächenraum

$$GDEF = ABED + BCFE - ACFG$$

graphisch darzustellende, auf den Kolben übergetragene mechanische Arbeit der abgeschlossenen Luft:

$$L = ps + \frac{ps}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa-1}\right] - p_1 s_1.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Spannung der eingeschlossenen Luft am Ende des Kolbenweges $\overline{AC} = s_1$ der Spannung p der äußeren Luft gleich geworden und folglich das ganze Arbeitsvermögen der abgeschlossenen Luft auf den Kolben übergegangen sei, hat man:

$$p_1 = \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa} p,$$

und daher:

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa-1}\right] ps.$$

Bringt man nun den Hahn H in eine Stellung, wie Fig. 605, III, wobei die Communication des Cylinders mit der äußeren Luft hergestellt wird, und schiebt hierauf den Kolben wieder langsam zurück bis an den Boden des Cylinders, so wird hierbei weder Arbeit verloren noch gewonnen, da die nun durch H austretende Luft denselben Druck p auf der einen Seite des Kolbens ausübt, wie die äußere Luft auf die andere Seite desselben.

Setzt man noch den anfänglichen Kolbenweg $AB = s, =$ Eins, so erhält man hiernach die von einer Raumeinheit, z. B. von einem Cubikmeter comprimirter Luft, bei der Ausdehnung von s auf s_1 verrichtete mechanische Arbeit:

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa-1}\right] p$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] p,$$

und daher die durch das Luftvolumen V von der Pressung p bei der Ausdehnung verrichtete Arbeit:

$$\text{I. } L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] Vp \text{ auch}$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[1 - \left(\frac{s}{s_1}\right)^{\varkappa-1}\right] Vp.$$

Wird umgekehrt, das Luftquantum V_1 von der Pressung p_1 auf p zusammengedrückt, so ist die aufgewendete Arbeit:

$$\text{II. } L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right] V_1 p_1$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{s_1}{s}\right)^{\varkappa-1} - 1\right] V_1 p_1.$$

Mechanisches Wärmeäquivalent. Die im vorigen Paragraphen §. 379
gefundenen Ausdrücke I. und II. geben das Arbeitsquantum an, welches eine gewisse Luftmenge verrichtet, wenn dieselbe aus einer größeren Pressung in eine kleinere übergeht, und welches dieselbe in Anspruch nimmt, wenn sie aus einer kleineren Spannung in eine größere überzugehen genöthigt wird. Da nun aber jede Dichtigkeits- und Spannungsveränderung mit einer gewissen Temperaturveränderung verbunden ist, so kann man auch das Arbeitsquantum durch die Temperaturen der Luft vor und nach der Arbeitsverrichtung ausdrücken, und man stößt dadurch noch auf eine viel einfachere Formel. Wir haben dann nur in den gedachten Formeln statt

$$\frac{p_1}{p}, = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

zu setzen, bekommen folglich:

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t},$$

und daher für die mechanische Arbeit, welche bei Abkühlung der Luftmenge V um die Temperatur $t_1 - t$ verrichtet wird:

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}\right) V p$$

$$= \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \frac{\delta (t_1 - t)\, V p}{1 + \delta t_1}.$$

Nun ist aber die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikmeters der atmosphärischen Luft:

$$\gamma_1 = \frac{1{,}2514\, p_1}{1 + \delta t_1},$$

wenn p den Druck auf das Quadratcentimeter bezeichnet (s. Bd. I, §. 393), daher hat man hier, wo man für p_1 den Druck auf das Quadratmeter einsetzen muß,

$$L = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, \delta\, (t_1 - t) \cdot \frac{10000}{1{,}2514} \cdot V \gamma.$$

Führt man nun $\delta = 0{,}003665$ und $\varkappa = 1{,}410$ ein, so erhält man:

$$L = 100{,}72\, (t_1 - t)\, V_1 \gamma_1.$$

Endlich ist noch der der Temperaturveränderung $t_1 - t$ entsprechende Wärmeaufwand des Luftquantums V:

$$W = \omega\, (t_1 - t)\, V \gamma = 0{,}2375\, (t_1 - t)\, V \gamma;$$

daher läßt sich das entsprechende Arbeitsquantum

$$L = \frac{100{,}72}{\omega}\, W = \frac{100{,}72}{0{,}2375}\, W = 424{,}1\,.\, W \text{ Kilogrammmeter}$$

setzen. Es steht also die Arbeit L, welche die Luft bei ihrem Kälterwerden verrichtet, in einem bestimmten Verhältnisse

$$A = \frac{L}{W} = 424,1$$

zum verlorenen Wärmequantum W.

Man nennt dieses Verhältniß A das mechanische Aequivalent der Wärme (franz. équivalent mécanique de la chaleur; engl. mechanical equivalent of heat), und es bezieht sich dasselbe nicht allein auf das durch Abkühlung der Luft gewonnene Arbeitsquantum, sondern auch auf die durch Arbeitsverrichtung erzeugte Wärmemenge.

Versteht man unter der Wärmeeinheit die Wärmemenge, welche nöthig ist, um 1 Pfund Wasser um einen Grad wärmer zu machen, so hat man, da 1 Meter = 3,1862 preuß. Fuß mißt,

$$A = 424,1 . 3,1862\ W = 1351\ W \text{ Fußpfund},$$

und es ist also dann das mechanische Aequivalent der Wärme = 1351 Fußpfund. Während also durch die Wärmemenge, welche 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad wärmer macht, eine Arbeit von 424,1 Kilogrammmeter verrichtet werden kann, läßt sich durch die Wärmemenge, welche die Temperatur eines Pfundes Wasser um 1 Grad erhöht, ein Arbeitsgewinn von 1351 Fußpfund erzielen.

Mehrere Physiker haben sich bemüht, nachzuweisen, daß der oben gefundene Werth $A = 424,1$ Kilometer des mechanischen Wärmeäquivalentes nicht allein für die Wärmebindung und Wärmeentwickelung bei der Ausdehnung und Compression der atmosphärischen Luft, sondern auch für jede Art von Wärmeerzeugung u. s. w., z. B. durch Reibung, Stoß, Elektromagnetismus u. s. w., und für jeden anderen flüssigen oder festen Körper gilt. Insbesondere hat Joule durch verschiedene Versuche nachgewiesen, daß dieses Verhältniß der mechanischen Arbeit zur Wärmemenge für verschiedene Körper und verschiedene Mittel der Wärmeerzeugung u. s. w. nahe eins und dasselbe ist. So stellte er zu diesem Zwecke ein horizontales Schaufelrad in ein mit Wasser angefülltes Gefäß, ließ dieses Rad mittels eines Mechanismus ähnlich wie Fig. 264, Bd. II, durch sinkende Gewichte in Umdrehung setzen, und beobachtete die Zunahme der Temperatur des Wassers, nachdem das Rad eine gewisse Anzahl Umdrehungen unter demselben gemacht und eine entsprechende mechanische Arbeit verrichtet hatte. Das Verhältniß dieser Arbeit zum Producte aus dem Gewichte des Wassers und aus der Temperaturzunahme desselben gab nun das gesuchte Arbeitsäquivalent A der Wärme. Auf diese Weise fand Joule im Mittel, wenn die Temperatur in Fahrenheit'schen Graden ausgedrückt wird,

$$A = 773{,}64 \text{ Fußpfund engl.},$$

wonach sich für Centesimalgrade

$$A = 425 \text{ Kilometer}$$
$$= 1354 \text{ Fußpfund preuß.}$$

ergiebt.

Bei der Reibung eines eisernen Schaufelrades im Quecksilber wurde auf gleiche Weise

$$A = 776{,}3 \text{ Fußpfund engl.} = 426 \text{ Kilometer}$$

gefunden.

Ebenso fand Joule durch die Reibung von zwei gußeisernen Platten an einander, daß eine Arbeit von 774,88 Fußpfund = 425 Kilogrammmeter nöthig ist, um denselben eine Wärmemenge von 1 Wärmeeinheit mitzutheilen. Einen etwas größeren Werth für A, nämlich 460 Kilogrammmeter, fand Joule, als er den Arbeitsaufwand zum Umdrehen eines elektromagnetischen Rotationsapparates mit der in den Windungen desselben freiwerdenden Wärmemenge verglich. Herr Hirn fand bei seinen in Bd. I, §. 173 angeführten Reibungsversuchen das mechanische Wärmeäquivalent A zwischen 315 und 425 Kilogrammmeter; im Mittel, bei der mittelbaren Reibung, unter Anwendung von Oelen:

$$A = 365 \text{ Kilogrammmeter.}$$

Dagegen fand Person für Luft:

$$A = 424 \text{ Kilogrammmeter}$$

(s. Comptes rendus de l'Academie des sciences T. 39. Paris 1854.)

Anmerkung. Die erste Annahme und Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalentes haben wir dem deutschen Physiker Mayer zu verdanken (s. Annalen der Chemie und Pharmacie, Bd. 42, 1842). Derselbe fand durch Schütteln oder Rühren des Wassers, $A = 365$ Kilogrammmeter. Mit der auf die Annahme dieses Wärmeverhältnisses sich gründenden Theorie der Arbeit haben sich beschäftigt: Clappeyron, Clausius, Helmholz, Hoppe, Kirchhoff, Rankine, Thomsom, Zeuner u. s. w., worüber in den neueren Bänden der Physik und Chemie von Poggendorff, sowie in denen des Philosophical Magazines nachgelesen werden kann. Siehe auch Zeuner's Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, Leipzig 1866, wie die Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie von Clausius, Braunschweig 1864.

Latente Wärme. Bei dem Uebergange eines festen Körpers in den tropfbar-flüssigen Zustand, sowie beim Uebergange einer tropfbaren Flüssigkeit in Dampf wird eine gewisse Menge Wärme gebunden, und ebenso umgekehrt, beim Festwerden eines flüssigen Körpers, sowie beim Flüssigwerden oder Niederschlagen des Dampfes, wird eine gewisse Menge Wärme frei. Es ist also in Flüssigkeiten mehr Wärme enthalten, als das Gefühl oder die Thermometer anzeigen, und diese Wärme, welche man deshalb auch die ge- §. 380

bundene oder latente Wärme (franz. chaleur latente; engl. latent heat) nennt, als die Ursache des flüssigen Zustandes eines Körpers anzusehen.

Verschiedene Körper binden auf diese Weise verschiedene Wärmemengen, und ein und derselbe Körper enthält in der Dampf- oder Luftform mehr latente Wärme, als im tropfbar-flüssigen Zustande, und im letzten mehr, als wenn er fest ist. Wenn man 1 Pfund Wasser von 79° Wärme mit 1 Pfund Eis von 0° zusammenbringt, so entstehen 2 Pfund Wasser von 0° Wärme; es ist also anzunehmen, daß das Pfund Eis von 0° Wärme bei seiner Verwandlung in Wasser von 0° Wärme 79 Wärmeeinheiten verbraucht oder gebunden habe. Wenn man ferner 1 Pfund Wasserdampf von 100° Wärme durch $5\frac{1}{2}$ Pfund Wasser von 0° condensirt, so bilden sich $6\frac{1}{2}$ Pfund Wasser von 100° Wärme oder $6,5 . 100 = 650$ Wärmeeinheiten; da nun hiervon nur 100° sensibel sind, so ist folglich die latente Wärme des Wasserdampfes von 100° Temperatur, = 550 Cal. zu setzen.

Die neuesten Versuche von Provostaye und Desains, sowie auch die von Regnault (s. Annal. de chimie et de physique, Sect. III, T. VIII) geben die latente Wärme des Wassers = 79,0; die Angaben über die latente Wärme der Metalle sind sehr unsicher. Hassenfratz giebt sie für Quecksilber = $86\frac{2}{3}$, Irvine für Blei = 90, Rudberg dagegen 5,858 u. s. w. Das Binden von Wärme beim Uebergange eines festen Körpers in einen flüssigen kommt besonders bei Darstellung von sogenannten Kältemischungen zur Anwendung. So giebt z. B. 1 Theil Kochsalz mit 5 Theilen Schnee von Null Grad Wärme vermischt eine flüssige Salzlösung von 17,7 Grad Kälte oder den Nullpunkt der Fahrenheit'schen Scala (s. §. 351). Eine Mischung von 3 Theilen salzsaurem Kalk und 2 Theilen Schnee geht ferner aus Null Grad Wärme in 28 Grad Kälte über, u. s. w.

Neuere genauere Versuche über die latente Wärme von Dämpfen hat Brix (s. Poggendorff's Annalen, Bd. LV, 1842) angestellt. Nach diesen ist die latente Wärme

für Wasserdampf 540,
für Alkoholdampf 219,
für Terpentinöldampf . . . 74;

Despretz fand früher hiervon nur wenig abweichende Werthe.

Vergleicht man die latenten Wärmen verschiedener Dämpfe mit ihren Dichtigkeiten, so findet man, daß sie fast den letzteren umgekehrt proportional sind. Während z. B. die Dichtigkeit des Alkoholdampfes 2,58mal so groß als die des Wasserdampfes ist, hat man die latente Wärme des ersteren auch nur $\frac{219}{540} = \frac{1}{2,47}$ der des Wasserdampfes. Hiernach läßt sich annehmen, daß gleiche Volumina von allen Dämpfen bei der Temperatur des Siedens nahe dieselbe Menge latente Wärme enthalten.

Nach den neuesten Versuchen von Regnault ist die Gesammtwärme des Wasserdampfes bei t Grad Temperatur:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Auch ist hiernach die specifische Wärme des Wassers nicht ganz constant, sondern durch die Formel

$$\omega = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2$$

auszudrücken. Man hat dann die sogenannte Flüssigkeitswärme des Wasserdampfes bei der Temperatur t:

$$n = \text{Mittelwerth von } \omega \text{ mal } t$$
$$= \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{n}\right) t$$
$$= (1 + 0{,}00004 \text{ Mittelwerth von } t + 0{,}0000009 \text{ Mittelwerth von } t^2)\,t$$
$$= \left(1 + 0{,}00004\,\frac{t}{2} + 0{,}0000009\,\frac{t^2}{3}\right) t$$
$$= t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3,$$

und endlich die latente oder sogenannte Verdampfungswärme desselben

$$w = W - n = 606{,}5 + 0{,}305\,t - (1 + 0{,}00002\,t + 0{,}0000003\,t^2)\,t$$
$$= 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3,$$

wonach folgt:

bei der Temperatur t	die Gesammtwärme	Flüssigkeitswärme	die latente oder Dampfwärme
0°	606,5°	0°	606,5°
25	614,1	25,0	589,0
50	621,7	50,1	571,7
75	629,4	57,2	554,7
100	637,0	100,5	536,5
125	644,6	125,8	518,6
150	652,2	151,5	500,8
175	659,9	177,2	482,7
200	667,5	203,2	464,3
225	675,1	229,4	445,5

Anderen Dämpfen entsprechen auch andere Werthe von W, ω und W_1, z. B. für Aether ist

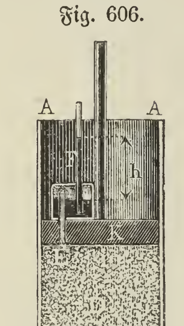
$$W = 94{,}00 + 0{,}45000\,t - 0{,}0005555\,t^2$$
$$\omega t = 0{,}52901\,t + 0{,}0002959\,t^2 \quad \text{und}$$
$$W_1 = W - \omega t$$
$$= 94{,}00 - 0{,}07901\,t - 0{,}0007514\,t^3.$$

Zweites Capitel.

Von den Wasserdämpfen.

§. 381 **Dampf.** Stellt man über einer Flüssigkeit, z. B. über einer Wassermasse *W*, Fig. 606, einen luftleeren Raum her, indem man z. B. einen die Oberfläche von *W* anfangs genau berührenden und an das Gefäß *AB* genau anschließenden Kolben *K* emporzieht, so verwandelt sich ein Theil der Flüssigkeit in Dampf *D*, und zwar um so mehr, je mehr leerer Raum der Ausfüllung dargeboten oder je weiter der Kolben *K* zurückgezogen wird. Ist diese Wassermenge nicht sehr groß, so kann man durch Vergrößerung des Raumes *K W* oder durch weiteres Zurückziehen des Kolbens *K* dieselbe ganz in Dampf verwandeln. Aendert sich während dieses Geschäftes die Temperatur nicht, so ändert sich die etwa durch den Stand *h* eines Manometers *EF* angegebene Expansivkraft dieses Dampfes auch nicht, man mag dem Dampfe zu seiner Entwickelung einen größeren oder kleineren Raum darbieten. Zieht man aber nach vollständiger Verwandlung des Wassers in Dampf den Kolben *K* noch weiter auf, so sinkt der Manometerstand, es wird also die Expansivkraft eine kleinere. Diese Abnahme der Expansivkraft folgt nun ganz dem Mariotte'schen Gesetze (s. Bd. I, §. 387), d. h. es ist von dem Zustande an, bei welchem sich alles Wasser in Dampf verwandelt hat, die Expansivkraft der Dichtigkeit des Dampfes direct, und folglich dem Volumen umgekehrt proportional. Wenn man z. B. von da an das Dampfvolumen durch weitere Zurückziehung des Kolbens verdoppelt, so fällt nun die vom Dampf getragene Quecksilbersäule *h* nur halb so groß aus als anfangs. Verkleinert man durch Niederschieben des Kolbens den Dampfraum allmälig, so tritt wieder ein Steigen des Manometers ein bis zu dem Stande, wo beim Aufziehen alles Wasser in Dampf verwandelt war. Von da an bleibt beim weiteren Niederschieben des Kolbens das Manometer auf einerlei Höhe, und es verwandelt sich wieder ein Theil des Dampfes in Wasser, und zwar um so mehr, je weniger Raum zur Aufnahme desselben übrig bleibt, bis zuletzt, wenn der Kolben seinen ersten Stand wieder eingenommen hat, aller Dampf wieder in Wasser übergegangen ist.

Fig. 606.



Maximalspannung des Dampfes. Nimmt man die im letzten §. 382
Paragraphen beschriebenen Operationen bei einer höheren oder tieferen Temperatur der Flüssigkeit (des Wassers) und ihrer Umgebung vor, so bleiben zwar die Erscheinungen dieselben, nur fällt dann der Manometerstand, und also auch die Expansivkraft des Dampfes, größer oder kleiner, und dagegen der Kolbenweg, nach dessen Zurücklegung das Wasser vollkommen in Dampf übergegangen ist, kleiner oder größer aus als im ersten Falle. Wenn man ferner bei einem unveränderlichen Kolbenstande, wobei noch Wasser zur Verdampfung übrig ist, das Wasser und seine Umgebung erhitzt, so verwandelt sich noch mehr Wasser in Dampf, es bildet sich also dichterer Dampf, und es erhält derselbe auch eine größere Expansivkraft, wie durch das Manometer angezeigt wird. Durch weitere Temperaturerhöhung läßt sich so das ganze Wasserquantum in Dampf verwandeln, und fährt man, nachdem dies geschehen ist, mit dem Zusetzen von Wärme weiter fort, so nimmt zwar die Expansivkraft des Dampfes noch ferner zu, es ist jedoch damit keine Dichtigkeitszunahme verbunden, und auch das Gesetz der Zunahme ein anderes, nämlich das Gay-Lussac'sche (s. Bd. I, §. 392). Wenn man nun die Temperatur wieder allmälig vermindert, so treten auch die umgekehrten Verhältnisse ein; es nimmt zuerst die Expansivkraft des Dampfes nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze ab, es tritt ferner bei Erreichung einer gewissen Temperatur ein Niederschlagen des Dampfes als Wasser ein, es verwandelt sich so immer mehr und mehr Dampf in Wasser, je mehr man die Temperatur herabdrückt, und es fallen auch Dichtigkeit und Expansivkraft des Dampfes kleiner aus. Diese Verminderung der Temperatur kann selbst bis unter Null herabgehen, ohne daß der Dampf ganz verschwindet, denn selbst bei — 20° zeigt das Manometer noch eine meßbare Expansivkraft an.

Wir sehen hieraus, daß der Zustand des Dampfes, so lange dieser noch mit Wasser in Berührung sich befindet, ein anderer ist, als wenn er einen begrenzten Raum allein ausfüllt. Im ersten Falle ist nämlich seine Dichtigkeit und Expansivkraft nur von der Temperatur abhängig, im letzten Falle hingegen stehen Dichtigkeit, Expansivkraft und Temperatur des Dampfes in einer durch das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz ausgedrückten Abhängigkeit zu einander. Wenn es zur Bildung des Dampfes nicht an Wasser fehlt, so erzeugt sich bei jeder Temperatur Dampf von einer bestimmten Dichtigkeit oder Expansivkraft, und da es nicht möglich ist, diesen durch Volumenverminderung mehr zu verdichten oder mehr zu spannen, so können wir sagen, daß er in diesem Falle das Maximum seiner Dichtigkeit und Spannung (Expansivkraft) besitze. Gewöhnlich nennt man solchen Dampf auch gesättigten Dampf (franz. vapeur saturée; engl. saturated vapor, saturated steam). Der ungesättigte Dampf wird auch über-

hitzter Dampf (franz. vapeur surchauffée; engl. superheated steam) genannt.

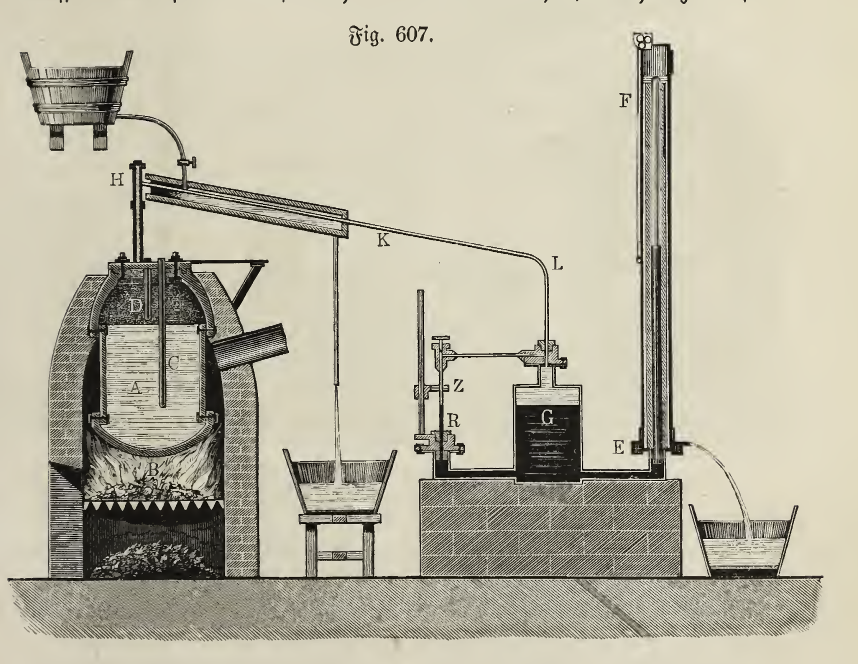
§. 383 **Versuche über die Expansivkraft der Dämpfe.** Es ist nun die wichtige Frage zu beantworten: in welcher Beziehung stehen Expansivkraft und Temperatur des in der Maximalspannung befindlichen Wasserdampfes zu einander? Versuche, welche den Zweck hatten, diese Abhängigkeit zu finden, sind bereits in großer Anzahl, namentlich von den Deutschen: Schmidt, Arzberger, Kämtz u. s. w., von den Engländern: Watt, Robison, Dalton, Ure u. s. w., von den Franzosen: Arago und Dulong, Regnault u. s. w., angestellt worden, jedoch sind Ausdehnung und Genauigkeit aller dieser Versuche sehr verschieden, und es findet auch unter den Resultaten derselben die gewünschte Uebereinstimmung nicht überall Statt. Es ist hier nicht der Ort, die verschiedenen Apparate zu beschreiben, welche man bei Versuchen über die Expansivkraft des Wasserdampfes angewendet hat, und uns vielmehr nur möglich, folgende allgemeine Bemerkungen hierüber zu machen. Im Wesentlichsten kommt es natürlich hier nur darauf an, den Dampf allmälig mehr und mehr zu erwärmen und dessen Temperatur und Expansivkraft bei den verschiedenen Wärmezuständen zu messen. Zur Ausmittelung der Temperatur dienen Thermometer, die man aber nicht unmittelbar mit dem Dampfe in Berührung bringen darf, sondern in eiserne Röhren einhüllt, damit die Thermometerröhre nicht durch den Dampf zusammengedrückt werden könne. Um aber die Expansivkraft zu finden, hat man in der Regel eine, gleichsam ein sehr langes Barometer bildende Quecksilbersäule, oder auch ein Luftmanometer, oder auch Ventile (s. Bd. I, §. 386) in Anwendung gebracht. Der letzteren hat sich Arzberger sowie auch Southern bedient; diese Versuche geben jedoch, wie die Vergleichung mit den Ergebnissen anderer Versuche vor Augen führt, und wie auch leicht zu erklären ist, etwas zu kleine Expansivkräfte. Sehr ausführliche Versuche sind vom Franklin-Institut zu Philadelphia und von der Akademie der Wissenschaften zu Paris angestellt worden. Die letzteren sind die ausgedehntesten und werden in der Genauigkeit vielleicht nur durch die neuesten Versuche von Magnus und von Regnault übertroffen. Die Versuche, welche das erstgenannte Institut angestellt hat, gehen, wie die von Arzberger, bis auf 10 Atmosphären, die der letztgenannten Akademie aber bis auf 24 Atmosphären, übrigens geben bei Spannungen von 2 bis 10 Atmosphären die ersten Versuche größere Expansivkraft, als die letzteren, und es beträgt bei 10 Atmosphären die Abweichung schon $^7/_9$ Atmosphäre.

Anmerkung. Eine gedrängte Zusammenstellung der Versuche über die Expansivkraft des Wasserdampfes findet man in the Mechanics Pocket Dictionary by W. Grier, Art. Steam; auch ist hierüber nachzulesen im zweiten Bande von

Robison's System of Mechanical Philosophy, ferner P. Barlow's Treatise on the Manufactures and Machinery of Great-Britain und Tredgold's Dampfmaschinenlehre.

Versuche der Pariser Akademie. Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen theilen wir in Folgendem eine Abbildung (Fig. 607) und eine kurze Beschreibung des Apparates mit, welchen die französischen Akademiker Arago, Dulong u. s. w. zur Ausmittelung der Expansivkraft der Wasserdämpfe angewendet haben. Die Dampferzeugung erfolgte in einem Kessel *A* aus starkem Eisenblech von 80 Liter Inhalt, welcher zu diesem §. 384

Fig. 607.



Zwecke in den Ofen *B* eingesetzt war. In diesen Kessel gingen zwei Flintenläufe *C* und *D* hinein, wovon der eine bis unter das Wasser, der andere aber nur bis in den Dampfraum reichte. In beide kamen Quecksilberthermometer zu stehen, die oben gekrümmt und horizontal fortgeführt, und an dieser Stelle durch einen Wasserstrom auf einer constanten Temperatur erhalten wurden. Zum Messen der Expansivkraft des Dampfes diente das Luftthermometer *EF*, welches von einer Wassersäule mit ununterbrochenem Zu- und Abfluß umgeben wurde, um eine constante Temperatur zu erzeugen. Das eiserne Gefäß *G* dieses Manometers war zum großen Theil mit Quecksilber angefüllt, der obere Raum desselben, sowie die Communicationsröhre *KL*, wurde mit Wasser angefüllt, und letztere ließ man zur Erzielung

einer unveränderlichen Temperatur mit fließendem Wasser äußerlich bespülen. Um den Stand des Quecksilbers im Gefäße *G* zu finden, diente die Glas-

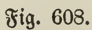


Fig. 608.

röhre *R* mit dem Zeiger *Z*. Die Versuche wurden auf folgende Weise geleitet. Zuerst ließ man bei geöffneter Röhre *H* und geöffnetem Sicherheitsventile das Wasser 15 bis 20 Minuten lang kochen, um alle Luft aus *A* zu treiben, dann schloß man beide und erzeugte durch Zulegen von Brennmaterial eine höhere Temperatur. Nun gab man acht, wenn die Thermometer- und Manometerstände ihr Maximum erreichten, und es las nun der eine Beobachter die ersteren, und der andere Beobachter die letzteren ab. Auf diese Weise wurden 30 Beobachtungen bei 123^0 bis $224{,}15^0$ Temperatur, oder 2,14 bis 23,994 Atmosphären Spannung angestellt.

Da sich die Anwendung des Luftmanometers *EF* auf das Mariotte'sche Gesetz gründet, so hielten es die französischen Akademiker für nöthig, den eben beschriebenen Versuchen noch besondere, die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes bei sehr hohen Spannungen prüfende Untersuchungen vorauszuschicken. Hierzu bedienten sie sich desselben Apparates, nur brachten sie auf der Seite bei *R* eine verticale und oben offene, aus 13 Stücken zusammengesetzte Glas- oder Barometerröhre von 26 Meter Länge und 5 Millimeter Weite an und setzten bei *L* eine Druckpumpe auf. Durch diese wurde ein

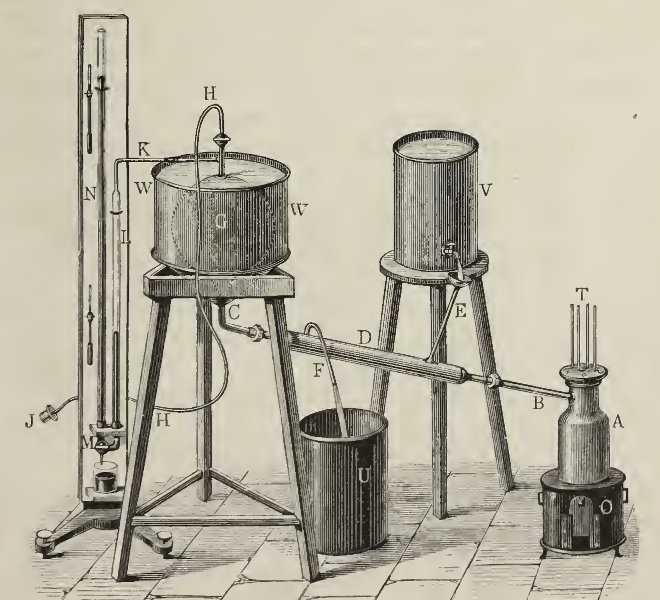
Druck erzeugt, der durch das Wasser auf das Quecksilber in *G* überging und dieses in das Manometer *EF*, sowie in das Barometer bei *R* trieb. Durch Vergleichung der Höhe der übrigbleibenden Luftsäule mit der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre konnte nun die Richtigkeit des Mariotte'schen Gesetzes geprüft werden.

Anmerkung. Ausführlich über diese Versuche wird gehandelt in dem Exposé des recherches faites par ordre de l'Académie royal des sciences pour déterminer les forces élastiques de la vapeur d'eau à hautes températures. Paris chez Firmin Didot, 1830. S. auch Poggendorff's Annalen, Bd. XVIII.

Regnault's Versuche. Da zur Zeit, wo Dulong und Arago die im vorigen Paragraphen beschriebenen Versuche angestellt haben, die Verschiedenheit der Ausdehnung verschiedener Glassorten und folglich auch der Einfluß derselben auf den Gang der Quecksilberthermometer nicht bekannt war, so hielt es Regnault für nöthig, neue Untersuchungen über die Expansivkraft der Wasserdämpfe anzustellen. §. 385

Das im Folgenden beschriebene Verfahren läßt sich sowohl zur Bestimmung des Dampfes über 100 Grad als auch unter 100 Grad Wärme anwenden. Der hierzu angewendete Apparat hat folgende aus Fig. 609

Fig. 609.



zu ersehende Einrichtung. Das hermetisch verschlossene Kupfergefäß A ist zum dritten Theil mit Wasser angefüllt und enthält noch vier Thermometer T, wovon zwei bis nahe unter und zwei nahe über der Oberfläche des eingeschlossenen Wassers in das Gefäß eingesenkt sind. Von diesem Gefäße führt eine Röhre $B\,C$ nach einem Glasballon G von 24 Liter Fassungsraum. Dieser Glasballon steht durch ein Bleirohr HHI mit einer Luftpumpe in Verbindung, wodurch die in demselben eingeschlossene Luft nach Belieben verdünnt oder verdichtet werden kann, und ein anderes Rohr K führt aus demselben nach einem offenen Manometer LMN (s. Bd. I, §. 386), welches durch den Stand seiner Quecksilberfüllung die Expansivkraft der Luft in G anzeigt. Uebrigens ist zur Erhaltung einer constanten Temperatur nicht allein der Ballon G in ein Wasserbad $W\,W$ gesetzt, sondern auch die Röhre $B\,C$ von einem Mantel D umgeben, in welchem Wasser von einer constanten Temperatur circulirt. Das letztere wird diesem Mantel aus einem Gefäße V durch die Röhre E zugeführt und aus demselben mittels der Röhre F abgeleitet und von dem Gefäße U aufgenommen. Wenn man nun das Gefäß A durch den Ofen O erhitzt, so verwandelt sich ein Theil von dem in ihm eingeschlossenen Wasser in Dampf und es setzt sich nun die Expansivkraft des letzteren mit der Pressung der Luft in G und $B\,C$ ins Gleichgewicht. Zuletzt beobachtet man sowohl den constant gewordenen Stand des Manometers LMN als auch die Stände der Thermometer T. Nun giebt man der Luft G durch die Luftpumpe eine höhere Pressung und bringt ebenso das Gefäß in eine stärkere Erhitzung, und beobachtet den Stand des Manometers sowie die entsprechende Temperatur des Dampfes von Neuem; und fährt man auf diese Weise fort, so erhält man zuletzt eine ganze Reihe von Manometerständen und entsprechenden Temperaturen des Dampfes (s. Mémoires de l'Institut de France, T. 21. 1847 et T. 26, 1862).

Etwas einfacher ist der Versuchsapparat, wodurch Regnault die Expansivkraft des Dampfes unterhalb des Siedepunktes ermittelt hat. Hier wird ein mit ausgekochtem Wasser ausgefülltes Glaskügelchen in einen luftleeren und ganz ausgetrockneten Glasballon gebracht, welcher oben durch eine Knieröhre einerseits mit einer Luftpumpe, sowie andererseits mit dem oberen Ende einer Barometerröhre communicirt und von einem mit Wasser angefüllten und einer durchsichtigen Glaswand versehenen Blechgefäße umhüllt ist. Ein in das Wasser eingetauchtes Thermometer giebt die Temperatur desselben an. Der zu den Versuchen dienende Dampf wird aus dem Wasser des Glaskügelchens erhalten, indem man dasselbe durch Erhitzung des Apparates zersprengt.

Zum Theil eigenthümlich ist der Apparat, welchen Magnus zu demselben Zwecke angewendet hat.

§. 386 Die Ergebnisse der Versuche von Arago, Dulong u. s. w. über die Expansivkraft der Wasserdämpfe enthält folgende Tabelle:

Nummer der Beobachtungen.	Temperatur nach dem längeren Thermometer.	Temperatur nach dem kürzeren Thermometer.	Elasticität des Dampfes gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule.	Elasticität des Dampfes ausgedrückt in Atmosphären.
	Grad	Grad	Meter	Atmosphären
1	122,97	123,70	1,6292	2,14
2	132,58	132,82	2,1767	2,87
3	132,64	133,30	2,1816	2,88
4	137,70	138,30	2,5386	3,35
5	149,54	149,70	3,4759	4,58
6	151,87	151,90	3,6868	4,86
7	153,64	153,75	3,8810	5,12
8	163,00	163,40	4,9384	6,51
9	168,40	168,50	5,6054	7,39
10	169,57	169,40	5,7737	7,61
11	171,88	172,34	6,1510	8,11
12	180,71	180,70	7,5001	9,89
13	183,70	183,70	8,0352	10,60
14	186,80	187,10	8,6995	11,48
15	188,30	188,50	8,8400	11,66
16	193,70	193,70	9,9989	13,19
17	198,55	198,50	11,0190	14,53
18	202,00	201,75	11,8620	15,67
19	203,40	204,17	12,2903	16,21
20	206,17	206,10	12,9872	17,13
21	206,40	206,80	13,0610	17,23
22	207,00	207,40	13,1276	17,30
23	208,45	208,90	13,6843	18,05
24	209,10	209,13	13,7690	18,16
25	210,47	210,50	14,0634	18,55
26	215,07	215,30	15,4995	20,44
27	217,23	217,50	16,1528	21,31
28	218,30	218,40	16,3816	21,60
29	220,40	220,80	17,1826	21,66
30	223,88	224,15	18,1894	23,99

Von den Ergebnissen der Versuche Regnault's giebt folgende Tabelle die Spannungen des Dampfes von 1 bis 4 Atmosphären.

Nummer der Beobachtungen.	Temperatur		Expansivkraft	
	des Wassers in Cent.-Graden.	des Dampfes in Cent.-Graden.	in Metern.	in Atmosphären.
1	99,83	99,82	0,75161	0,99
2	100,00	100,00	0,76000	1,00
3	100,71	100,71	0,77603	1,02
4	105,10	105,06	0,90460	1,19
5	111,78	111,70	1,13147	1,49
6	116,04	116,04	1,30237	1,71
7	121,16	121,13	1,53027	2,01
8	122,70	122,53	1,60125	2,11
9	123,94	123,91	1,67041	2,20
10	128,40	128,47	1,91512	2,52
11	128,54	128,47	1,92520	2,53
12	128,66	128,57	1,93114	2,54
13	130,12	130,18	2,01251	2,65
14	131,38	131,30	2,09469	2,75
15	131,51	131,63	2,09828	2,76
16	133,20	133,28	2,20908	2,91
17	135,70	135,65	2,37303	3,04
18	135,83	136,00	2,38681	3,14
19	137,75	137,52	2,51479	3,31
20	138,86	138,24	2,56173	3,37
21	140,90	141,01	2,75617	3,63
22	141,57	141,54	2,79968	3,68
23	143,85	143,83	2,99279	3,94
24	144,12	144,17	3,01008	3,96
25	145,70	145,64	3,14941	4,14
26	147,50	147,50	3,30695	4,35
27	148,20	148,30	3,36135	4,42

Vergleicht man die einander ziemlich entsprechenden Werthe aus beiden Tabellen mit einander, so wird man allerdings eine sehr zufriedenstellende

Uebereinstimmung finden. Z. B. giebt die erste Tabelle für die mittlere Temperatur von 138° die Dampfspannung 3,35 Atmosphären, die zweite aber für die mittlere Temperatur von 138,3° dieselbe = 3,37 Atmosphären. Man ersieht auch aus diesen Tabellen, daß die Angaben der beiden Thermometer, wovon das eine in dem Wasser und das andere in dem Dampfe stand, nur wenig von einander abweichen.

Anmerkung. Regnault hat auch noch eine Reihe von Versuchen über die Elasticität des Dampfes von — 32 bis 100° Temperatur ausgeführt. Auch ist von Magnus eine Versuchsreihe über die Spannkraft des Wasserdampfes von Temperaturen — 20° bis + 10° angestellt worden (s. Poggendorff's Annalen, Bd. 61). In Band 26 der §. 385 citirten Memoiren handelt Regnault von seinen Versuchen über die Expansivkraft verschiedener Dämpfe.

Elasticitätsformeln. Es ist bis jetzt noch nicht gelungen, die Relation zwischen Temperatur und Expansivkraft des Wasserdampfes aus einem allgemeinen Gesetze zu entwickeln, und deshalb hat man sich denn auch seither nur mit empirischen Formeln begnügen müssen, welche sich an die Erfahrungsresultate mehr oder weniger anschließen. Die Methode, welche bei Auffindung solcher Formeln angewendet wird, besteht darin, daß man die beobachteten Temperaturen und die entsprechenden Spannkräfte als Coordinaten zu Papier bringt, die entsprechenden Punkte bestimmt und nun zusieht, welche von den bekannten krummen Linien oder von den, bekannten Functionen entsprechenden, Curven sich möglichst genau an dieses Punktsystem anschließt. Hat man sich nun einmal für eine bestimmte Linie entschieden, so kommt es noch darauf an, die in ihr vorkommenden Constanten aus den Versuchsresultaten abzuleiten, und hier läßt sich denn vorzüglich die im „Ingenieur" (S. 76 ꝛc.) abgehandelte Methode der kleinsten Quadrate anwenden. Bis jetzt hat man schon über 45 solcher Formeln aufgestellt (s. die Fortschritte der Physik im Jahre 1845, Jahrgang I, Berlin 1847). §. 387

Für den praktischen Gebrauch am bequemsten ist die zuerst von Young eingeführte Formel

$$p = (a + bt)^n,$$

in welcher t die Temperatur und p die entsprechende Expansivkraft, sowie a, b und n Erfahrungszahlen ausdrücken. Sie giebt jedoch nicht für alle Temperaturen die erwünschte Uebereinstimmung mit den Erfahrungsresultaten, weshalb man sich bei ihrer Anwendung genöthigt gesehen hat, die Werthe der Constanten a, b und n für niedere, mittlere und hohe Temperaturen besonders zu bestimmen.

Für hohe Temperaturen, namentlich aber für Spannkräfte über 4 Atmosphären, hat man nach Dulong und Arago:

$$p = (0{,}2847 + 0{,}007153\, t)^5 \text{ Atmosphären},$$

und umgekehrt:

$$t = 139{,}8\ \sqrt[5]{p} - 39{,}80^0.$$

Drückt man die Expansivkraft durch den Druck auf den Quadratzoll aus, und legt man das preußische Pfund- und Fußmaß zu Grunde, so hat man, da nach Bd. I, §. 385, der Druck einer Atmosphäre = 14,10 Pfund zu setzen ist,

$$p = (0{,}2847 + 0{,}007153\,t)^5 \,.\, 14{,}10 = (0{,}4833 + 0{,}012143\,t)^5 \text{ Pfund},$$

und umgekehrt:

$$t = 82{,}35\ \sqrt[5]{p} - 39{,}80.$$

Für Dampfspannungen von 1 bis 4 Atmosphären giebt Mellet, der Uebersetzer der Tredgold'schen Dampfmaschinenlehre in das Französische,

$$p = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6 \text{Kilogramm}$$

auf das Quadratcentimeter, und hiernach folgt, da der Druck einer Atmosphäre auf ein Quadratcentimeter = 1,0336 Kilogramm ist,

$$p = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6 \cdot \frac{1}{1{,}0336} = \left(\frac{75 + t}{175}\right)^6 \text{Atmosphären}$$

$$= \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6 \cdot \frac{14{,}10}{1{,}0336} = \left(\frac{75 + t}{174}\right)^6 \cdot 13{,}64 = \left(\frac{75 + t}{113{,}21}\right)^6 \text{Pfund}$$

auf den Quadratzoll. Umgekehrt folgt, wenn p in Atmosphären gegeben ist,

$$t = 175\ \sqrt[6]{p} - 75^0,$$

und wenn p in Pfunden gegeben ist,

$$t = 113{,}21\ \sqrt[6]{p} - 75^0.$$

Pambour (siehe dessen Théorie des machines à vapeur) nimmt für Spannungen von 1 bis 4 Atmosphären:

$$p = \left(\frac{72{,}67 + t}{171{,}72}\right)^6 \text{Kilogramm},$$

folglich umgekehrt:

$$t = 171{,}72\ \sqrt[6]{t} - 72{,}67^0 \text{ an.}$$

Hiernach folgt, wenn p in Atmosphären ausgedrückt wird,

$$p = \left(\frac{72{,}67 + t}{172{,}67}\right)^6 \text{Atmosphären}$$

und

$$t = 172{,}67\ \sqrt[6]{p} - 72{,}67^0;$$

ferner für das preußische Maß und Gewicht:

$$p = \left(\frac{72{,}67 + t}{111{,}71}\right)^6 \text{Pfund}$$

und

$$t = 111{,}71\ \sqrt[6]{p} - 72{,}67^0.$$

Der Artisan-Club in England theilt in der von ihm besorgten Dampfmaschinenlehre folgende Formeln mit.

Für Temperaturen über 100 Grad:

$$p = \left(\frac{85 + t}{185}\right)^{6,42} \text{ Atmosphären,}$$

also

$$t = 185 \sqrt[6,42]{p} - 85^0 = 185\, p^{0,15576} - 85^0;$$

für Temperaturen unter 100 Grad:

$$p = \left(\frac{115 + t}{215}\right)^{7,71507} \text{ Atmosphären,}$$

und

$$t = 215 \sqrt[7,71507]{p} - 115^0 = 215\, p^{0,12962} - 115^0.$$

Es ist hiernach für das preußische Maß und Gewicht bei hohen Temperaturen:

$$p = \left(\frac{85 + t}{122,51}\right)^{6,42} \text{ Pfund,}$$

und

$$t = 122,51\, p^{0,15576} - 85^0,$$

und für niedrige Temperaturen:

$$p = \left(\frac{115 + t}{152,52}\right)^{7,71507} \text{ Pfund}$$

und

$$t = 152,52\, p^{0,12962} - 115^0.$$

Beispiele. 1) Welche Spannung hat gesättigter Wasserdampf bei 145⁰ Wärme? Es giebt die Mellet'sche Formel:

$$p = \left(\frac{75 + 145}{175}\right)^6 = \left(\frac{44}{35}\right)^6 = 3,947 \text{ Atmosphären,}$$

ferner die Pambour'sche Formel:

$$p = \left(\frac{72,67 + 145}{172,67}\right)^6 = \left(\frac{217,67}{172,67}\right)^6 = 4,013 \text{ Atmosphären,}$$

die Formel der Akademiker:

$$p = (0,2847 + 145 \,.\, 0,007153)^5 = 1,3219^5 = 4,036 \text{ Atmosphären,}$$

und endlich die des Artisan-Clubs:

$$p = \left(\frac{85 + 145}{185}\right)^{6,42} = \left(\frac{46}{37}\right)^{6,42} = 4,046 \text{ Atmosphären.}$$

Das Mittel aus allen diesen vier Werthen ist 4,01 Atmosphären.

2) Wie stark ist der Dampfdruck bei 145^0 Temperatur gegen einen Kolben von 3 Fuß Durchmesser? Es ist der Inhalt der Kolbenfläche:

$$F = \frac{9\pi}{4} \text{ Quadratfuß} = 9 \,.\, 36\,\pi = 1017,9 \text{ Quadratzoll,}$$

ferner der Druck auf jeden Quadratzoll, bei 4 Atmosphären:

$p = 4 . 15{,}10 = 56{,}4$ Pfund,

daher der Druck auf die ganze Fläche:

$P = Fp = 1017{,}9 . 56{,}4 = 57409$ Pfund.

3) Welche Temperatur entspricht einer Spannung von ¼ Atmosphäre? Es ist nach der zweiten Formel des Artisan-Clubs:

$t = 215 . (1/4)^{0{,}12962} - 115 = 179{,}64 - 115 = 64{,}64^0.$

§. 388 **Genauere Elasticitätsformeln.** Exponential- oder logarithmische Formeln können sich noch genauer an die Erfahrungen anschließen, als die algebraischen Ausdrücke. Eine ziemlich einfache Exponentialformel für die Expansivkraft der Wasserdämpfe gab zuerst Roche (s. Poggendorff's Annalen Bd. 18 und 27), und sie hat die Form

$$p = a b^{\frac{t}{m + nt}}.$$

Wenn auch, wie Regnault nachweist, diese Formel nicht das allgemeine Gesetz von der Expansivkraft der Dämpfe ausdrücken kann, so gewährt sie doch, den Rechnungen von August, Magnus u. s. w. zufolge, innerhalb der Beobachtungsgrenzen und bei den gewöhnlich vorkommenden Temperaturen eine recht gute Uebereinstimmung.

Nach den neueren Berechnungen von Magnus ist

$$p = 4{,}525 . 10^{\frac{7{,}4475\, t}{234{,}69 + t}},$$

und nach denen von Holtzmann

$$p = 4{,}529 . 10^{\frac{7{,}2804\, t}{236{,}22 + t}} \text{ Millimeter}$$

zu setzen; halten wir aber nur die erste Formel fest, so bekommen wir, da einer Atmosphäre 760 Millimeter Quecksilbersäulenhöhe entspricht,

$$p = \frac{4{,}525}{760} \cdot 10^{\frac{7{,}4475\, t}{234{,}69 + t}} = 0{,}005954 . 10^{\frac{7{,}4475\, t}{234{,}69 + t}} \text{ Atmosphären},$$

oder

$$Log.p = 0{,}77481 - 3 + \frac{7{,}4475\, t}{234{,}69 + t} = \frac{5{,}2223\,(t - 100)}{234{,}69 + t}.$$

Umgekehrt ist

$$t = \frac{234{,}69\, Log.p + 522{,}23}{5{,}2223 - Log.p}.$$

Folgende Formel von August gewährt ebenfalls eine große Schärfe:

$$p = \left(\frac{6415\,(1028{,}4 + t)}{1000000000}\right)^{\frac{100 - t}{100 + 3/5 t}} \text{ Atmosphären.}$$

Endlich hat Regnault für seine Versuche über die Expansivkraft des Wasserdampfes folgende Formeln in Anwendung gebracht:

1) Für Dämpfe von — 32 Grad bis 0 Grad Wärme:

$$log. p = a + b\alpha^t \text{ Millimeter,}$$

wo $a = -0{,}08038$,

$log. b = 0{,}6024724 - 1$,

$log. \alpha = 0{,}0333980$ und

$t = 32^0 + t_1$

bezeichnet, wenn t_1 die (negative) Temperatur des Wassers nach dem Luftthermometer ausdrückt.

2) Für Dämpfe von 0 Grad bis 100 Grad Wärme:

$$log. p = a + b\alpha^t - c\beta^t \text{ Millimeter,}$$

wobei $a = 4{,}7393707$,

$log. b = 0{,}1340339 - 2$,

$log. c = 0{,}6116485$,

$log. \alpha = 0{,}006865036$,

$log. \beta = 0{,}9967249 - 1$,

und t die Temperatur über Null

ausdrückt.

3) Für Dämpfe von — 20 Grad bis 220 Grad Wärme:

$$log. p = a - b\alpha^t - c\beta^t,$$

wobei $a = 6{,}2640348$,

$log. b = 0{,}1397743$,

$log. c = 0{,}6924351$,

$log. \alpha = 0{,}9940493 - 1$,

$log. \beta = 0{,}9983438 - 1$,

sowie $t = 20^0 + t_1$

bezeichnet, und t_1 die Temperatur über Null (den Gefrierpunkt) angiebt.

4) Schon ziemlich genau ist auch die Formel

$$log. p = a - b\alpha^t,$$

wenn man $a = 5{,}4233177$,

$b = -5{,}4642763$,

und $log. \alpha = 0{,}9972311 - 1$

setzt.

Führt man $t = 20^0 + t_1$ ein, so läßt sich in der Formel (3)

$$log. p = a - b\alpha^t - c\beta^t$$

$log. (b\alpha^t) = log. b + 20\, log. \alpha + t_1\, log. \alpha = 0{,}0207601 - 0{,}00595071\, t_1$

und

$log. (c\beta^t) = log. c + 20\, log. \beta + t_1\, log. \beta = 0{,}659312 - 0{,}00165614\, t_1$

setzen.

Aehnliche Formeln sind übrigens auch schon von Prony und von Biot aufgestellt worden.

Hiernach sind folgende zwei Tabellen berechnet.

Die erste dieser beiden Tabellen giebt die Dampfspannung an, welche einer in ganzen Graden ausgedrückten Temperatur zukommt, wogegen die zweite Tabelle die einer in ganzen Atmosphären ausgedrückten Spannung entsprechende Temperatur anzeigt. Hierbei ist der Druck einer Atmosphäre gleich dem einer 76 Centimeter hohen Quecksilbersäule gesetzt. Nach der ersteren Tabelle ist z. B. für die Temperatur $t = 116^0$, die Expansivkraft $= 131{,}147$ Centimeter $= 1{,}726$ Atmosphäre, und nach der zweiten Tabelle entspricht der Dampfspannung von 5 Atmosphären eine Temperatur von $152{,}2^0$.

Anmerkung 1. Die Annahme von Dalton, daß die Expansivkraft des gesättigten Wasserdampfes nach einer geometrischen Progression wächst, während die Temperatur desselben nach einer arithmetischen Reihe zunimmt, führt nur auf eine angenäherte Elasticitätsformel. Hiernach ist die Expansivkraft des Dampfes $p = a^{t-100^0}$ Atmosphären zu setzen, wobei a eine durch Versuche zu bestimmende Constante bezeichnet. Den Versuchen zu Folge ist aber für $t = 144$ Grad C., die Expansivkraft $p = 4$ Atmosphären, daher folgt auch $4 = a^{44}$, und umgekehrt,

$$a = \sqrt[44]{4} = 1{,}0320, \text{ und}$$

$$p = (1{,}032)^{t-100} \text{ Atmosphären, sowie}$$

$$t = 100 = Log\left(\frac{p}{1{,}032}\right), \text{ d. i. } t = 100 + 73{,}10\, Log\, p \text{ Grad C.}$$

Nach dieser letzten Formel hat man z. B.

für $p = 2$ Atmosphären, $t = 122{,}0$ Grad,
sowie für $p = 3$ „ $t = 134{,}9$ „
für $p = 4$ „ $t = 144{,}0$ „
ferner für $p = 5$ „ $t = 151{,}1$ „
und für $p = 6$ „ $t = 156{,}7$ „

während nach den Versuchen für $p = 2$, $t = 120^0{,}6$; für $p = 3$, $t = 133^0{,}9$; für $p = 4$, $t = 144^0{,}0$; für $p = 5$, $t = 152^0{,}2$ und für $p = 6$, $t = 159^0{,}2$ ist.

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, daß für die mäßigen Dampfspannungen von 1 bis 5 Atmosphären die einfache Formel $p = (1{,}032)^{t-100}$ Atmosphären noch eine leidliche Uebereinstimmung mit der Erfahrung gewährt.

Anmerkung 2. Auch die Dichtigkeit des Wasserdampfes (s. §. 389) läßt sich ziemlich genau à priori bestimmen. Wenn bei gleicher Pressung aus 1 Volumen Sauerstoff und 2 Volumen Wasserstoff auf eudiometrischem Wege 2 Volumen Wasserdampf hervorgehen, und bei Null Grad Wärme und 1 Atmosphäre Druck, die Dichtigkeit des Sauerstoffes 1,4298 Kilogramm, dagegen die des Wasserstoffes 0,0896 Kilogramm ist, so läßt sich die Dichtigkeit oder das Gewicht eines Cubikmeters Wasserdampf $\frac{1{,}6099}{2} = 0{,}8045$ Kilogramm setzen.

Das Gewicht eines Cubikmeters atmosphärische Luft beträgt bei gleicher Temperatur und Druck, $= 1{,}2935$ Kilogramm, folglich ist das specifische Gewicht des Wasserdampfes im Vergleich zur atmosphärischen Luft:

$\varepsilon = \frac{0{,}8045}{1{,}2935} = 0{,}622$ oder nahe $\frac{5}{8}$ zu setzen, welches mit den Versuchen von Gay-Lussac u. s. w. gut übereinstimmt.

Tabelle I.

Die Expansivkräfte des Wasserdampfes für Temperaturen von — 32 Grad bis + 230 Grad, nach Regnault.

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.
— 32°	0,0320	0,0004	— 4°	0,3368	0,0044
31	0,0352	0,0005	3	0,3644	0,0048
30	0,0386	0,0005	2	0,3941	0,0052
29	0,0424	0,0006	1	0,4263	0,0056
28	0,0464	0,0006	0	0,4600	0,0061
27	0,0508	0,0007	+ 1	0,4940	0,0065
26	0,0555	0,0007	2	0,5302	0,0070
25	0,0605	0,0008	3	0,5687	0,0075
24	0,0660	0,0009	4	0,6097	0,0080
23	0,0719	0,0009	5	0,6534	0,0086
22	0,0783	0,0010	6	0,6998	0,0092
21	0,0853	0,0011	7	0,7492	0,0199
20	0,0927	0,0012	8	0,8017	0,0107
19	0,1008	0,0013	9	0,8574	0,011
18	0,1095	0,0014	10	0,9165	0,012
17	0,1189	0,0015	11	0,9792	0,013
16	0,1290	0,0017	12	1,0457	0,014
15	0,1400	0,0018	13	1,1162	0,015
14	0,1518	0,0020	14	1,1908	0,016
13	0,1646	0,0022	15	1,2699	0,017
12	0,1783	0,0024	16	1,3536	0,018
11	0,1933	0,0025	17	1,4421	0,019
10	0,2093	0,0027	18	1,5357	0,020
9	0,2267	0,0030	19	1,6346	0,022
8	0,2455	0,0032	20	1,7391	0,023
7	0,2658	0,0035	21	1,8495	0,024
6	0,2876	0,0038	22	1,9659	0,026
5	0,3113	0,0041	23	2,0888	0,028

Temperatur.	Dampfspannung		Temperatur.	Dampfspannung	
	in Centimeter.	in Atmosphären.		in Centimeter.	in Atmosphären.
+ 24°	2,2184	0,029	+ 57°	12,9251	0,170
25	2,3550	0,031	58	13,5505	0,178
26	2,4988	0,033	59	14,2015	0,187
27	2,5505	0,034	60	14,8791	0,196
28	2,8101	0,037	61	15,5839	0,205
29	2,9782	0,039	62	16,3170	0,215
30	3,1548	0,042	63	17,0791	0,225
31	3,3406	0,044	64	17,8714	0,235
32	3,5359	0,047	65	18,6945	0,246
33	3,7411	0,049	66	19,5496	0,257
34	3,9565	0,052	67	20,4376	0,267
35	4,1827	0,055	68	21,3596	0,281
36	4,4201	0,058	69	22,3165	0,294
37	4,6691	0,061	70	23,3093	0,306
38	4,9302	0,065	71	24,3393	0,320
39	5,2039	0,068	72	25,4073	0,334
40	5,4906	0,072	73	26,5147	0,349
41	5,7910	0,076	74	27,6624	0,364
42	6,1055	0,080	75	28,8517	0,380
43	6,4346	0,085	76	30,0838	0,396
44	6,7790	0,089	77	31,3600	0,414
45	7,1391	0,094	78	32,6811	0,430
46	7,5158	0,099	79	34,0488	0,448
47	7,9093	0,104	80	35,4643	0,466
48	8,3204	0,109	81	36,9287	0,486
49	8,7499	0,115	82	38,4435	0,506
50	9,1982	0,121	83	40,0101	0,526
51	9,6661	0,127	84	41,6298	0,548
52	10,1543	0,134	85	43,3041	0,570
53	10,6636	0,140	86	45,0344	0,593
54	11,1945	0,147	87	46,8221	0,616
55	11,7478	0,155	88	48,6687	0,640
56	12,3244	0,163	89	50,5759	0,665

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.
+ 90°	52,5450	0,691	+ 123°	163,896	2,157
91	54,5778	0,719	124	169,076	2,225
92	56,6757	0,746	125	174,388	2,295
93	58,8406	0,774	126	179,835	2,366
94	61,0740	0,804	127	185,420	2,430
95	63,3778	0,834	128	191,147	2,515
96	65,7535	0,865	129	197,015	2,592
97	68,2029	0,897	130	203,028	2,671
98	70,7280	0,931	131	209,194	2,753
99	73,3305	0,965	132	215,503	2,836
100	76,000	1,000	133	221,969	2,921
101	78,7590	1,036	134	228,592	3,008
102	81,6010	1,074	135	235,373	3,097
103	84,5280	1,112	136	242,316	3,188
104	87,5410	1,152	137	249,423	3,282
105	90,6410	1,193	138	256,700	3,378
106	93,8310	1,235	139	264,144	3,476
107	97,1140	1,278	140	271,763	3,576
108	100,4910	1,322	141	279,557	3,678
109	103,965	1,368	142	287,530	3,783
110	107,537	1,415	143	295,686	3,890
111	111,209	1,463	144	304,026	4,000
112	114,983	1,513	145	312,555	4,113
113	118,861	1,564	146	321,274	4,227
114	122,847	1,616	147	330,187	4,344
115	126,941	1,670	148	339,298	4,464
116	131,147	1,726	149	348,609	4,587
117	135,466	1,782	150	358,123	4,712
118	139,902	1,841	151	367,843	4,840
119	144,455	1,901	152	377,774	4,971
120	149,128	1,962	153	387,918	5,104
121	153,925	2,025	154	398,277	5,240
122	158,847	2,091	155	408,856	5,380

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.
+ 156°	419,659	5,522	+ 189°	923,795	12,155
157	430,688	5,667	190	944,270	12,425
158	441,945	5,815	191	965,093	12,699
159	453,436	5,966	192	986,271	12,977
160	465,162	6,120	193	1007,804	13,261
161	477,128	6,278	194	1029,701	13,549
162	489,336	6,439	195	1051,963	13,842
163	501,791	6,603	196	1074,595	14,139
164	514,497	6,770	197	1097,500	14,441
165	527,454	6,940	198	1120,982	14,749
166	540,669	7,114	199	1144,746	15,062
167	554,143	7,291	200	1168,896	15,380
168	567,882	7,472	201	1193,437	15,703
169	581,890	7,656	202	1218,369	16,031
170	596,166	7,844	203	1243,700	16,364
171	610,719	8,036	204	1269,430	16,703
172	625,548	8,231	205	1295,566	17,047
173	640,660	8,430	206	1322,112	17,396
174	656,055	8,632	207	1349,075	17,751
175	671,743	8,839	208	1376,453	18,111
176	687,722	9,049	209	1404,252	18,477
177	703,997	9,263	210	1432,480	18,848
178	720,572	9,481	211	1461,132	19,226
179	737,452	9,703	212	1490,222	19,608
180	754,639	9,929	213	1519,748	19,997
181	772,137	10,150	214	1549,717	20,391
182	789,952	10,394	215	1580,133	20,791
183	808,084	10,633	216	1610,994	21,197
184	826,540	10,876	217	1642,315	21,690
185	845,323	11,123	218	1674,090	22,027
186	864,435	11,374	219	1706,329	22,452
187	883,882	11,630	220	1739,036	22,882
188	903,668	11,885	221	1772,213	23,319

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter.	Dampfspannung in Atmosphären.
+ 222°	1805,864	23,761	+ 227°	1981,376	26,071
223	1839,994	24,210	228	2017,961	26,552
224	1874,607	24,666	229	2055,048	27,040
225	1909,704	25,128	230	2092,640	27,535
226	1945,292	25,596			

Tabelle II.

Die Temperaturen des Wasserdampfes für die Expansivkräfte von 1 Atmosphäre bis 28 Atmosphären, nach Regnault.

Expansivkraft in Atmosphären.	Expansivkraft in Metern.	Temperatur in Graden.	Expansivkraft in Atmosphären.	Expansivkraft in Metern.	Temperatur in Graden.
1	0,76	100,0	15	11,40	198,8
2	1,52	120,6	16	12,16	201,9
3	2,28	133,9	17	12,92	204,9
4	3,04	144,0	18	13,68	207,7
5	3,80	152,2	19	14,44	210,4
6	4,56	159,2	20	15,20	213,0
7	5,32	165,3	21	15,96	215,5
8	6,08	170,8	22	16,72	217,9
9	6,84	175,8	23	17,38	220,3
10	7,60	180,3	24	18,14	222,5
11	8,36	184,5	25	19,00	224,7
12	9,12	188,4	26	19,76	226,8
13	9,88	192,1	27	20,52	228,9
14	10,64	195,5	28	21,28	230,9

§. 389 **Dichtigkeit des Dampfes.** Die Dichtigkeit des Dampfes hängt, wie die einer jeden Gasart, von der Temperatur und Expansivkraft zugleich ab (s. Bd. I, §. 392 und §. 393). Da aber beim gesättigten Dampfe die Expansivkraft durch die Temperatur bestimmt ist, so folgt, daß bei diesem, im Maximum der Spannung befindlichen Dampfe die Dichtigkeit von der Temperatur oder von der Expansivkraft allein abhängt. Um nun die Dichtigkeit des Dampfes bei jeder Temperatur und Expansivkraft angeben zu können, war es nöthig, dieselbe wenigstens bei einer bestimmten Temperatur und Expansivkraft durch Versuche auszumitteln, und Gay-Lussac wendete in dieser Absicht folgendes Verfahren an. Er füllte ein dünnes Glaskügelchen mit Wasser und schmolz dessen Hals an einer Weingeistlampe zu. Durch genaues Abwägen des leeren und des gefüllten Kügelchens ergab sich das Gewicht des Wassers in demselben. Diese Glaskugel wurde nun in eine, dem Raume nach in gleiche Theile getheilte Glasröhre AB, Fig. 610, gebracht, welche mit Quecksilber angefüllt war und in einem ebenfalls mit Quecksilber angefüllten Gefäße C stand, das durch einen Feuerheerd F erhitzt werden konnte. Die Röhre AB wurde noch von einem Glascylinder DE umgeben, und der Zwischenraum zwischen beiden mit Wasser angefüllt. Durch hinreichende Erwärmung von unten zersprengte das Wasser in dem Kügelchen K die Hülle und verwandelte sich in Dampf, und nachdem nun durch Erhaltung einer constanten Temperatur alles Wasser in Dampf übergegangen war, wurde die Temperatur an einem Thermometer T, sowie das Volumen und die Expansivkraft des Dampfes an einem eingetheilten Stabe S abgelesen.

Fig. 610.

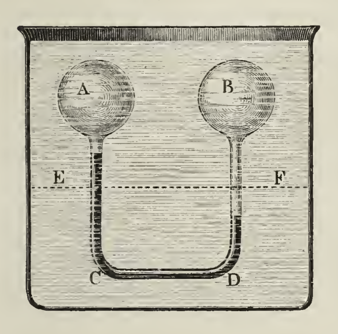
Auf diesem Wege fand Gay-Lussac, daß ein Liter Wasserdampf bei 100° Temperatur 0,76 Meter Barometerstand, $^1/_{1,6964} = 0,5895$ Gramme wog. Nun ist aber nach Ebendemselben das Gewicht von einem Liter atmosphärischer Luft unter denselben Verhältnissen, 0,9454 Gramme, daher folgt denn das Verhältniß der Dichtigkeit des Wasserdampfes zu derjenigen der atmosphärischen Luft, bei gleicher Spannung und gleicher Temperatur:

$$= \frac{5895}{9454} = \frac{1000}{1603} \text{ oder ziemlich genau } ^5/_8.$$

Eine andere Methode bei Bestimmung des specifischen Gewichtes von Dämpfen ist von Dumas angewendet worden. Auch haben Fairbairn

und Tate über die Dichtigkeit des gesättigten und überhitzten Dampfes besondere Versuche angestellt (s. Useful Information for Engineers, by William Fairbairn, Sec. Series, London 1860; auch polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1860). Der hierbei in Anwendung gebrachte Apparat bestand im Wesentlichen aus zwei zur Hälfte mit Quecksilber gefüllten communicirenden Röhren *AC*, *BD*, Fig. 611, welche sich oben in die vor dem Versuche luftleer gemachten kugelförmigen Glasgefäße *A* und *B* endigten. Wurden nun ungleiche Wassermengen in diese Gefäße eingebracht, so füllten sich, wie bekannt, dieselben mit gesättigtem Wasserdampf, dessen Dichtigkeit durch Erhöhung der in einem Oelbade *EF* bestehenden Umhüllung so gesteigert werden konnte, daß sich endlich in dem einen Gefäße das sämmtliche Wasser in Dampf verwandelte und, bei weiterer Erwärmung der letztere in den überhitzten Zustand gelangte. Der Augenblick, in welchem dies geschieht, wird durch ein Steigen des Quecksilbers in dem einen und Sinken desselben in dem anderen Schenkel der communicirenden Röhren angezeigt; auch giebt der Niveauabstand zwischen den Oberflächen der beiden Quecksilbersäulen die Pressungsdifferenz zwischen dem gesättigten Dampf in der einen und dem ungesättigten Dampf in der anderen Kugel an. Durch ein in das eine Gefäß hineinreichendes Thermometer wurde die Temperatur und durch ein mit dem anderen Gefäße communicirendes Manometer die Expansivkraft des gesättigten Dampfes bestimmt.

Fig. 611.



Specifische Dampfvolumina. Mit Hülfe des im letzten Paragraphen angegebenen Dichtigkeitsverhältnisses läßt sich nun die Dichtigkeit des Dampfes für jede Temperatur und Spannung berechnen, wenn man die Gesetze von Mariotte und von Gay-Lussac zu Hülfe nimmt, und es ist auch die betreffende Formel in Bd. I, §. 393 entwickelt worden. Man hat hiernach die der Temperatur t und Spannkraft p Atmosphären entsprechende Dichtigkeit des Wasserdampfes für französisches Maß: §. 390

$$\gamma = \frac{5/8 \,.\, 1,2935\, p}{1 + 0,00367\, t} = \frac{0,8084\, p}{1 + 0,00367\, t} \text{ Kilogramm.}$$

Beim Dampf im Maximo der Spannung läßt sich noch mittels einer der Formeln der Paragraphen 387 und 388 die Spannkraft p durch die Temperatur t oder umgekehrt, die Temperatur t durch die Spannkraft p aus-

drücken, und daher γ aus t oder p unmittelbar bestimmen. Bedienen wir uns z. B. der Mellet-Tredgold'schen Formel, so können wir

$$\gamma = \frac{0,8084}{1 + 0,00367\,t}\left(\frac{75 + t}{175}\right)^6$$

oder auch

$$= \frac{0,8084\,p}{1 + 0,00367\,(175\,\sqrt[6]{p} - 75)} \text{ Kilogramm}$$

setzen.

Die Dichtigkeit γ_0 des Wassers ist 1000 Kilogramm, daher das Verhältniß der Dichtigkeiten des Wasserdampfes und des Wassers zu einander:

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\gamma}{1000} = \frac{0,0008084\,p}{1 + 0,00367\,(175\,\sqrt[6]{p} - 75)}$$

und umgekehrt, das Verhältniß zwischen dem Volumen des Dampfes und dem des Wassers bei gleichem Gewichte, oder das sogenannte specifische Volumen des Wasserdampfes im Maximo der Spannung:

$$\mu = \frac{V}{V_0} = \frac{\gamma_0}{\gamma} = \frac{1 + 0,00367\,(175\,\sqrt[6]{p} - 75)}{0,0008084\,p}.$$

Diese Verhältnißzahl läßt sich, nach Navier, annähernd sehr einfach auch so ausdrücken:

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p},$$

und in Zahlen, wenn p den Dampfdruck in Atmosphären ausdrückt,

$$\mu = \frac{1000}{0,09 + 0,50026\,p} = \frac{2000}{0,1800 + p}.$$

Nach Pambour ist aber diese Formel nur bei hohen Temperaturen hinreichend genau und giebt bei Spannungen unter einer Atmosphäre zu große Abweichungen, weshalb er für Dampf mit niedrigem Drucke:

$$\mu = \frac{1935}{0,1161 + p},$$

und für Dampf von hoher Spannung

$$\mu = \frac{2054}{0,2922 + p}$$

annimmt und bei seiner Theorie der Dampfmaschinen zum Grunde legt.

Nach den Versuchen von Fairbairn und Tate ist das specifische Dampfvolumen

$$\mu = 25,62 + \frac{1659,2}{0,02413 + p}$$

zu setzen.

Anmerkung. Sehr einfache Ausdrücke für die Expansivkraft und Dichtigkeit der Dämpfe giebt Watterson (s. Philosoph. Transactions, 1852, auch Poggendorff's Annalen. Ergänzungsband 4. 1853).

Mit Hülfe der mechanischen Wärmetheorie läßt sich nach Zeuner das specifische Dampfvolumen durch die Formel §. 391

$$\mu = 1 + \frac{13186400 + 40704\,t - 8,48\,t^2 - 0,1272\,t^3}{p}$$

berechnen, worin p den Dampfdruck pr. Quadratmeter bezeichnet, oder durch die Formel

$$\mu = 1 + \frac{1275,9 + 3,9385\,t - 0,00082051\,t^2 - 0,000012308\,t^3}{p},$$

wenn p den Dampfdruck in Atmosphären, zu 10335 Kilogramm pr. Quadratmeter ausdrückt.

Nach dieser Formel sind die Werthe in der folgenden Tabelle berechnet worden.

Tabelle der specifischen Dampfvolumina von 0,1 bis 10,9 Atmosphären Spannung.

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	unbest.	14556	7542	5141	3917	3172	2671	2309	2037	1822
1	1650	1509	1390	1289	1202	1127	1060	1002	949	902
2	859,8	821,2	786,1	753,9	724,4	697,1	671,9	648,5	626,7	606,4
3	587,4	569,6	552,9	537,1	522,3	508,2	499,4	482,4	470,5	459,1
4	448,4	438,1	428,3	418,9	410,0	401,4	393,2	385,4	377,8	370,6
5	363,6	356,9	350,5	344,3	338,3	332,5	326,9	321,6	316,4	311,3
6	306,4	301,7	297,2	292,7	288,4	284,3	280,2	276,3	272,5	268,7
7	265,2	261,7	258,3	254,9	251,7	248,5	245,3	242,5	239,6	236,7
8	233,9	231,2	228,6	226,0	223,3	220,8	218,5	216,2	213,9	211,7
9	209,5	207,3	205,2	203,1	201,0	199,1	197,2	195,3	193,4	191,5
10	189,7	188,0	186,3	184,6	182,9	181,2	179,7	178,1	176,6	175,1

In dieser Tabelle giebt die erste Verticalcolumne die Ganzen, sowie die erste Horizontalreihe die Zehntel der Dampfspannung in Atmosphären an,

und die Zahl, welche mit den Ganzen in einerlei Horizontalreihe und mit den Zehnteln in einerlei Verticalcolumne steht, zeigt das dieser Spannung des Dampfes entsprechende specifische Dampfvolumen an. Es ist hiernach z. B. das specifische Dampfvolumen bei 1,3 Atmosphären = 1289, weil die letztere Zahl in der mit 1 anfangenden Horizontalzeile und in der unter 0,3 stehenden Verticalcolumne zugleich steht. Ferner giebt hiernach ein Cubikfuß Wasser bei 4,2 Atmosphärendruck 428,3 Cubikfuß Dampf, denn die letzte Zahl steht an der Stelle, wo die mit 4 anfangende Horizontalzeile und die mit 0,2 beginnende Verticalcolumne sich schneiden.

Man ersieht aus dem Vorstehenden, daß die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes mit der Temperatur oder Expansivkraft wächst und der des Wassers selbst immer näher und näher kommt. Nach der genauen Formel würde bei der Schmelzhitze des Zinkes die Dichtigkeit des Dampfes $1/4$ von der des Wassers und bei der Rothglühhitze des Eisens dieselbe gleich der des Wassers sein.

Einer neueren Ermittelung des Herrn Professor Zeuner zufolge (siehe Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Bd. XI.) ist, wenn p die Spannung in Atmosphären und τ die mit — 273 Grad anfangende absolute Temperatur bezeichnen, mit großer Genauigkeit sowohl für gesättigte als auch für ungesättigte Wasserdämpfe zu setzen:

$$pv = 0{,}0049287\,\tau - 0{,}18781\,\sqrt[4]{p},$$

wonach das specifische Dampfvolumen

$$\mu = 1000\,v = \frac{4{,}9287\,\tau - 187{,}81\,\sqrt[4]{p}}{p}$$

folgt.

Hiernach ist z. B. für $p = 1$ Atm. und $\tau = 373$ Grad

$$\mu = 4{,}9287 \,.\, 373 - 187{,}81 = 1838{,}4 - 187{,}8 = 1650{,}6,$$

während die Tabelle $\mu = 1650$ angiebt. Wäre bei derselben Pressung die Temperatur $\tau = 500^0$, also der Dampf überhitzt, so würde

$$\mu = 2464{,}35 - 187{,}81 = 2276{,}54 \text{ ausfallen.}$$

Ferner ist für gesättigten Wasserdampf bei $p = 4$ Atmosphären Druck und $\tau = 273 + t = 273 + 144 = 417$ Grad absoluter Wärme,

$$\mu = \frac{4{,}9287 \,.\, 417 - 187{,}81\,\sqrt[4]{4}}{4} = 447{,}4,$$

wogegen die Tabelle $\mu = 448{,}4$ und die Fairbairn'sche Formel

$$\mu = 25{,}62 + \frac{1659{,}2}{4{,}02413} = 437{,}9 \text{ giebt.}$$

Wäre die Temperatur des Dampfes von 4 Atmosphären Druck auf 200^0 erhitzt, also $\tau = 473^0$, so würde

$$\mu = \frac{4,9287 \,.\, 473 - 265,6}{4} = 516,4$$

ausfallen, während nach den Hirn'schen Versuchen $\mu = 522$ sein müßte.

Beispiele. 1) Welches Wasserquantum ist zur Erzeugung einer Dampfmenge Q von 500 Cubikfuß bei 3 Atmosphären Druck nöthig? Nach der Fairbairn'schen Formel ist

$$\mu = 25,62 + \frac{1659,2}{3,024127} = 574,3,$$

daher das gesuchte Wasserquantum:

$$Q_1 = \frac{Q}{\mu} = \frac{500}{574,3} = 0,871 \text{ Cubikfuß} = 0,871 \,.\, 61,75 = 53,78 \text{ Pfund}.$$

Der Tabelle zufolge wäre

$$Q_1 = \frac{500}{587,4} = 0,851 \text{ Cubikfuß} = 52,56 \text{ Pfund}.$$

2) Welches Wasserquantum entspricht einer Dampfmenge von 500 Cubikfuß bei 3 Atmosphären Druck und bei 150 Grad Wärme? Da der letzten Temperatur eine Spannung von 4,712 Atmosphären entspricht, so ist dieser Dampf ungesättigt und daher das specifische Volumen desselben nach der Formel

$$\mu = \frac{4,9287\ \tau - 187,81\ \sqrt[4]{p}}{p}$$

zu berechnen. Es ist hiernächst hier $p = 3$ und $\tau = 273 + 150 = 423$, daher

$$\mu = \frac{2085,0 - 247,2}{3} = 612,6$$

und das entsprechende Wasserquantum

$$Q = \frac{500}{612,6} = 0,816 \text{ Cubikfuß} = 50,4 \text{ Cubikfuß}.$$

Dämpfe überhaupt. Nach Dalton sind die Expansivkräfte aller Dämpfe bei einer gleichen Anzahl von Graden über oder unter dem Siedepunkte gleich groß. Hiernach lassen sich nun auch mittels der Siedepunkte die Expansivkräfte verschiedener Dämpfe aus denjenigen des Wasserdampfes berechnen. Da z. B. der Alkohol bei 78 Grad siedet (s. §. 372), so ist für Alkoholdampf von 113 Grad, also von $113^0 - 78^0 = 35^0$ über dem Siedepunkte dieselbe wie beim Wasserdampf bei 35^0 über dem Siedepunkte des Wassers, d. i. wie bei der Temperatur des Wasserdampfes von 135 Grad, nämlich 3 Atmosphären. §. 392

Aus den neueren Versuchen von Regnault (s. Poggendorff's Annalen Bd. 93, 1854) geht jedoch hervor, daß dieses Gesetz nur ungefähr richtig ist. Hiernach sind z. B. für Temperaturen von 0 bis 130 Grad die Expansivkräfte von Alkohol, Schwefeläther und Terpentinöldampf folgende:

Temperatur	0	10	20	40	60	80	100	110	120	130 Grad	
Alkohol . . .	1,273	2,408	4,40	13,41	35,00	81,28	168,5	235,2	320,8	433,1	Centimeter
Schwefeläther	18,23	28,65	43,48	91,36	173,03	294,72	492,04	624,9	—	—	„
Terpentinöl. .	0,210	0,230	0,430	1,120	2,69	6,12	13,49	18,73	25,70	34,70	„
Wasserdampf.	0,460	0,9165	1,7391	5,491	14,879	35,164	76,00	107,54	149,13	203,03	„

Nach Versuchen von Rudberg sind bei den aus siedenden Salzauflösungen (s. §. 374) sich entwickelnden Dämpfen die Expansivkräfte bei gleichen Temperaturen dieselben, welches auch die Temperaturen ihrer Siedepunkte sein mögen. Ueber die Spannkraft der Dämpfe aus Lösungen von Salzgemischen sind neuerlich von Wüllner Versuche angestellt worden (s. Poggendorff's Annalen Bd. 156).

Um die Dichtigkeiten verschiedener Dämpfe zu finden, kann man theils das oben angegebene Verfahren von Gay-Lussac, theils auch das Verfahren von Dumas in Anwendung bringen. Das letztere besteht darin, daß man eine hinreichende Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit in einen Glasballon, welcher in eine feine Spitze ausgezogen ist, bringt, diesen so lange in einem Bade von Wasser, Oel, Chlorzink u. s. w. erhitzt, bis das Ausströmen des sich aus der Flüssigkeit bildenden Dampfes durch die Spitze des Ballons aufhört, und folglich die Flüssigkeit vollkommen verdampft ist, und daß man zuletzt die Spitze an der Löthrohrflamme zuschmilzt. Aus dem Gewichte G_1 dieses mit dem zu untersuchenden Dampfe angefüllten Ballons läßt sich die Dichtigkeit des Dampfes leicht berechnen, sowie man den Fassungsraum V des Ballons und das Gewicht G desselben, wenn er mit trockener atmosphärischer Luft angefüllt ist, bestimmt hat. Es ist die gesuchte Dichtigkeit des Dampfes, bei der Pressung und Temperatur im Augenblicke, wo die Spitze zugeschmolzen wird:

$$\gamma_1 = \frac{G_1 - G + V\gamma}{V},$$

wobei γ die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur und dem Barometerstande bezeichnet, wo die Abwägung erfolgte.

Die Dichtigkeit einiger Dämpfe im Vergleich zu der der Luft nahe über den Siedepunkten derselben sind folgende:

Atmosphärische Luft . . . = 1,000,
Wasserdampf . . . . = 0,6235,
Alkoholdampf . . . . . = 1,6138,
Schwefelätherdampf . . . = 2,5860,

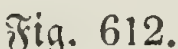
Terpentinöldampf . . . . = 3,0130,
Quecksilberdampf . . . . = 6,976.

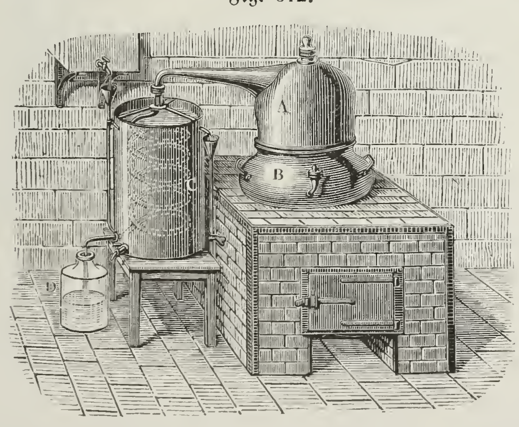
Uebrigens verhalten sich die **Dichtigkeiten** der Dämpfe nahe umgekehrt wie ihre **latenten Wärmen**.

So ist z. B. nach **Brix** (s. **Poggendorff's** Annalen Bd. 55) die latente Wärme vom Wasserdampf = 540 und vom Alkoholdampf = 214, also das Verhältniß dieser latenten Wärmen zu einander $= \frac{540}{214} = 2{,}52$; und nach **Gay-Lussac** die Dichtigkeit des Alkoholdampfes = 1,6138 und die des Wasserdampfes = 0,6235, und daher das umgekehrte Verhältniß der Dichtigkeiten:

$$\frac{1{,}6138}{0{,}6235} = 2{,}58.$$

Destillation. Wenn zwei communicirende Gefäße A und B, Fig. 612, §. 393
welche eine und dieselbe Flüssigkeit enthalten, ungleich erhitzt werden, so nimmt der sich aus beiden Flüssigkeiten bildende Dampf nicht eine mittlere, sondern nur diejenige Spannung an, welche der niedrigeren Temperatur entspricht, weil der Dampf von der niedrigen Temperatur nicht in eine höhere Spannung


Fig. 612.



übergehen kann, ohne theilweise als Fluidum condensirt zu werden. Enthält z. B. ein Gefäß A Wasserdampf von Null Grad Wärme und ein mit A communicirendes Gefäß B Wasserdampf von 100 Grad Wärme, so ist die Spannung des Dampfes in A und B, = 0,46 Centimeter = der des Dampfes von Null Grad Wärme.

Hierauf gründet sich die Anwendung des **Condensators** bei Dampfmaschinen sowie auch die Wirksamkeit der **Destillation** (franz. und engl.

distillation). Beim Destilliren kommt es darauf an, die in einer Blase oder Retorte B, Fig. 612, befindliche Flüssigkeit durch Erhitzung von außen in Dampf zu verwandeln und sie dadurch von den in ihr aufgelösten und weniger flüchtigen Substanzen zu befreien. Die sich bildenden Dämpfe werden von dem hutförmigen Ende (Helme) eines nach unten gerichteten Rohres AC aufgefangen, und daselbst durch Abkühlung von außen wieder als Flüssigkeit niedergeschlagen, so daß nun letztere aus dieser Röhre in ein untergesetztes Gefäß D fließen kann, wogegen die vorher in der Flüssigkeit aufgelösten Substanzen in der Retorte zurückbleiben. Um das Niederschlagen der Dämpfe zu beschleunigen, giebt man dem mittleren Theil des die Dämpfe abführenden Rohres C eine schlangenförmige Gestalt und führt dasselbe durch ein mit kaltem Wasser angefülltes Gefäß. Damit dieses Kühlwasser durch die condensirten Dämpfe nicht zu sehr erwärmt werde, muß dasselbe ununterbrochen frischen Zufluß erhalten, und deshalb setzt man mit dem Kühlgefäß zwei Röhren in Verbindung, wovon die eine unaufhörlich kaltes Wasser von unten zuführt, und die andere eine gleiche Menge warmes Wasser oben ableitet.

Auf diese Weise destillirt man auch das Fluß- oder Brunnenwasser, um es von den in ihm aufgelösten Salzen, wie z. B. kohlensauren Kalk, schwefelsauren Kalk u. s. w. zu befreien.

Da dem oben angegebenen Gesetze zufolge die Spannung der Dämpfe in der Retorte nur diejenige ist, welche der Temperatur in dem Kühlrohre entspricht, so muß natürlich die Verdampfung der Flüssigkeit in der Retorte lebhafter vor sich gehen, als wenn die Spannung der Dämpfe eine höhere wäre.

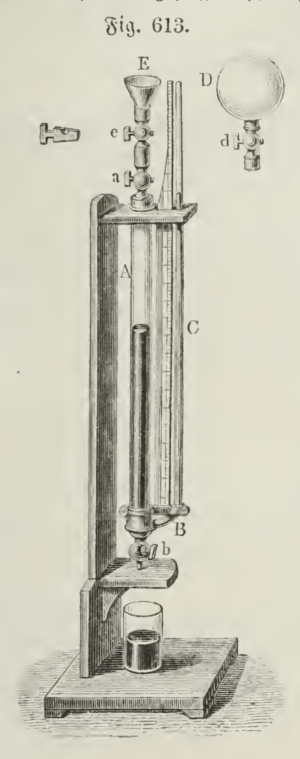
§. 394 **Gas- und Dampfgemenge.** Wenn zwei gasförmige Flüssigkeiten, welche keine chemische Wirkung auf einander ausüben, in einem und demselben Gefäße eingeschlossen werden, so lagern sich dieselben nicht, wie die wasserförmigen Körper, nach ihren specifischen Gewichten über einander, sondern es verbreiten sich beide gleichmäßig über den ganzen Gefäßraum, und es ist hierbei die Expansivkraft des Gasgemenges gleich der Summe der Spannungen, welche jedes einzelne Gas haben würde, wenn es für sich allein den ganzen Raum einnähme.

Außer diesem zuerst von Dalton aufgestellten Gesetze gilt für Dämpfe auch noch folgendes: Wenn in einen mit Gas erfüllten Raum ein Liquidum gebracht wird, so verwandelt sich von demselben so viel in Dampf, als wenn derselbe Raum luftleer wäre.

Man kann sich von der Richtigkeit dieser beiden Gesetze durch folgenden Versuch überzeugen. Die Glasröhre AB, Fig. 613, communicirt unten mit einer engeren Glasröhre BC, und ist an beiden Enden mit Hähnen a und b versehen. Oeffnet man den Hahn a und verschließt den Hahn b,

so kann man den Apparat durch Zugießen von oben mit Quecksilber anfüllen. Ist dies geschehen, so verschließt man *a* und öffnet *b* so lange, bis so viel Quecksilber abgeflossen ist, daß über dem in der Röhre *AB* zurückgebliebenen Quecksilber ein leerer Raum sichtbar wird. Verschließt man nun auch *b*, so kann man an einer zwischen beiden Röhren befindlichen Scala, wie an einem Heberbarometer, den den Druck der äußeren Luft messenden Niveauabstand h_1 zwischen beiden Quecksilbersäulen *AB* und *CB* ablesen. Hierauf schraubt man über dem Hahne *a* einen mit trockener Luft angefüllten und durch einen Hahn *d* verschließbaren Ballon *D* an, und öffnet alle drei Hähne *a*, *b* und *d*, so daß sich die in *D* eingeschlossene Luft in dem oberen Ende der Röhre *AB* ausbreiten kann. Ist nun auf diese Weise das Quecksilber in *AB* um eine gewisse Höhe gesunken, so verschließt man *b*, und liest den Niveauabstand h_2 zwischen beiden Quecksilbersäulen in *AB* und *CB* von Neuem ab. Die Spannung der in *D* und *A* eingeschlossenen Luft ist die Differenz $x = h_1 - h_2$ zwischen dem ersten und dem letzten Niveauabstande.

Fig. 613.



Nachher verschließt man den Hahn *a*, schraubt statt des Ballons *D* einen durch einen engen Hahn *e* verschließbaren Trichter *E* auf, in welchen man Wasser oder diejenige Flüssigkeit gießt, deren Dämpfe in Untersuchung gezogen werden sollen, und führt nun durch ruckweise Eröffnung des Hahnes *e* die Flüssigkeit tropfenweise in die Röhre *AB*. So lange die sich aus dieser Flüssigkeit bildenden Dämpfe das Quecksilber in *AB* noch tiefer herabdrücken, so lange läßt man auch noch neue Flüssigkeit zutröpfeln; wenn aber dieses Sinken aufhört, so hat sich die Luft vollkommen mit den Dämpfen der eingeführten Flüssigkeit gesättigt. Man gießt nun durch *CB* so viel Quecksilber zu, bis die Oberfläche des Quecksilbers in *AB* wieder den vorigen Stand einnimmt, und liest den Niveauabstand h_3 zwischen beiden Quecksilbersäulen zum dritten Male ab. Die Spannung der in *A* eingeschlossenen und mit gesättigten Dämpfen erfüllten Luft ist wieder die Differenz $y = h_1 - h_3$ zwischen dem ersten und dem letzten Niveauabstande, und folglich auch

$$y = x + (h_2 - h_3),$$

also um $h_2 - h_3$ größer als die Spannung x der trockenen Luft. Da sich endlich ergiebt, daß $h_2 - h_3$ nahe gleich ist der Spannung des gesättigten Dampfes bei der Temperatur während des Versuches, so ist dadurch die angenäherte Richtigkeit des Dalton'schen Gesetzes nachgewiesen.

§. 395 **Feuchte Luft.** Die freie Luft enthält gewöhnlich eine kleinere oder größere Menge Wasserdampf, und es ist die Bestimmung derselben Gegenstand der Hygrometrie. Ist die Luft mit Wasserdampf gesättigt, so wird die Dichtigkeit γ aus der Temperatur t und Spannung p derselben wie folgt bestimmt. Mittels der Temperatur t bestimmt sich zunächst durch eine der Formeln der Paragraphen 387 und 388 die Spannung p_1 des Dampfes in der Luft, und hieraus durch Subtraction auch die Spannung $p_2 = p - p_1$ der trockenen Luft. Nun ist aber die Dichtigkeit des Dampfes:

$$\gamma_1 = {}^5/_8 \cdot \frac{1{,}3\, p_1}{1 + \delta t},$$

und die der trockenen Luft:

$$\gamma_2 = \frac{1{,}3\, p_2}{1 + \delta t} = \frac{1{,}3\, (p - p_1)}{1 + \delta t} \text{ Kilogramm}$$

(s. Bd. I, §. 393),

daher folgt die Dichtigkeit der mit Wasserdampf gesättigten Luft:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1{,}3}{1 + \delta t}(p - p_1 + {}^5/_8\, p_1) = \frac{1{,}3}{1 + \delta t}(p - {}^3/_8\, p_1),$$

d. i.:

$$\gamma = \frac{1{,}3\, p}{1 + \delta t}\left(1 - {}^3/_8 \frac{p_1}{p}\right) \text{ Kilogramm},$$

wobei man die Spannung p in Atmosphären anzugeben hat. Ist, wie gewöhnlich, die Luft nicht mit Wasserdampf gesättigt, so muß man noch den Feuchtigkeitsgrad der Luft in diese Formel einführen. Man versteht unter demselben das Verhältniß ψ zwischen der wirklichen Dampfmenge in der Luft zu derjenigen Dampfmenge, welche dieselbe im Sättigungszustande enthält. Ist folglich γ_1 die Dichtigkeit des gesättigten Dampfes, so läßt sich die Dichtigkeit des ungesättigten Dampfes $= \psi \gamma_1$ setzen, und ist ebenso, p_1 die Spannung des Dampfes im ersten Zustande, so hat man, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge, die Spannung desselben im ungesättigten Zustande $= \psi p_1$. Dies vorausgesetzt, hat man folglich die Dichtigkeit der feuchten Luft bei dem Feuchtigkeitsgrade ψ und der Spannung p:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = {}^5/_8 \cdot \frac{1{,}3\,\psi\, p_1}{1 + \delta t} + \frac{1{,}3\,(p - \psi p_1)}{1 + \delta t}$$
$$= \frac{1{,}3\,p}{1 + \delta t}\left(1 - {}^3/_8\,\frac{\psi p_1}{p}\right).$$

Da ${}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p}$ meist nur ein kleiner Bruch ist, so kann man auch

$$\gamma = \frac{1{,}3\,p}{(1 + \delta t)\left(1 + {}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p}\right)} = \frac{1{,}3\,p}{1 + \delta t + {}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p}}$$
$$= \frac{1{,}3\,p}{1 + \left(\delta + {}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p t}\right)t}$$

setzen.

Im Mittel ist der Feuchtigkeitsgrad der freien Luft $\psi = {}^1/_2$; nehmen wir noch die Temperatur derselben $t = 10$ Grad an und setzen hiernach $\frac{p_1}{p} = 0{,}012$, so erhalten wir:

$${}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p t} = {}^3/_8 \cdot {}^1/_2 \cdot \frac{0{,}012}{10} = 0{,}00023,$$

folglich

$$\delta + {}^3/_8\,\psi\,\frac{p_1}{p t} = 0{,}00367 + 0{,}00023 = 0{,}0039,$$

wofür wir einfacher 0,004 setzen können, so daß nun einfach die Dichtigkeit der freien Luft im mittleren Feuchtigkeitszustande

$$\gamma = \frac{1{,}3\,p}{1 + 0{,}004\,t} \text{ Kilogramm}$$

gesetzt werden kann.

Giebt man p in Kilogramm pr. Quadratcentimeter, so erhält man

$$\gamma = \frac{0{,}7821\,p}{1 + 0{,}004\,t} \text{ Kilogramm},$$

und giebt man p in Pfund pr. Quadratzoll, so ist die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikfuß feuchte Luft

$$\gamma = \frac{0{,}003539\,p}{1 + 0{,}004\,t} \text{ Pfund}$$

zu setzen (vergl. Bd. I, §. 393).

Hygrometer. Um den Feuchtigkeitsgrad der Luft zu messen, hat man §. 396
verschiedene Hülfsmittel, sogenannte Hygrometer, (franz. hygromètre; engl. hygrometer) angewendet. Dieselben sind entweder chemische, oder Absorptions- oder Condensationshygrometer.

Läßt man die Luft, deren Feuchtigkeitsgrad bestimmt werden soll, durch ein Rohr strömen, in welchem sich eine Substanz befindet, wozu der Wasserdampf eine große Verwandtschaft hat, wie z. B. Chlorcalcium, so absorbirt dieselbe den in der Luft enthaltenen Wasserdampf, und die Luft tritt völlig getrocknet aus dem Rohre heraus. Wiegt man den absorbirenden Körper vor und nach seiner Verwendung, so giebt die Differenz der gefundenen Gewichte das Gewicht des eingesaugten Wassers an, und dividirt man dasselbe durch das Volumen der durch das Rohr geleiteten Luft, so erhält man dadurch den Wassergehalt pr. Raumeinheit in Gewicht ausgedrückt. Zur Erzeugung des Luftstromes dient ein sogenannter Aspirator, d. i. ein oben verschlossenes Ausflußreservoir. Wenn man das mit Chlorcalcium locker angefüllte Rohr oben in den vorher mit Wasser angefüllten Aspirator einmünden läßt, so strömt durch das Rohr gerade so viel Luft in den Aspirator, als nöthig ist, um den Raum auszufüllen, welchen das abfließende Wasser frei läßt.

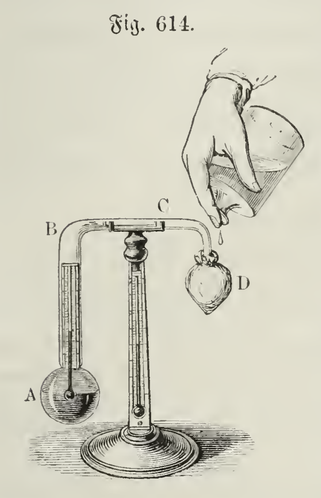
Einfacher, jedoch weit weniger genau sind die Absorptionshygrometer, welche sich darauf gründen, daß sich gewisse organische Substanzen in der Nässe ausdehnen und im Trocknen zusammenziehen. Es gehört hierher vorzüglich das Haarhygrometer von Saussure. Das hierzu verwendete und vom Fett gereinigte Haar ist an einem Ende befestigt, und mit dem anderen Ende um eine mit einem Zeiger und einem kleinen Gegengewichte versehene Leitrolle gelegt; und es bewegt sich nun die Rolle sammt dem Zeiger nach der einen oder nach der anderen Seite, je nachdem sich das Haar ausdehnt oder zusammenzieht, je nachdem also der Feuchtigkeitsgrad der Luft ein größerer oder kleinerer wird.

Mittels der Condensationshygrometer bestimmt man den Feuchtigkeitsgrad der Luft dadurch, daß man in derselben einen Körper allmälig erkältet und nun zusieht, bei welcher Temperatur desselben sich der Dampf aus der Luft als Thau an diesem Körper niederschlägt. Da mit dem Erscheinen des Thaues der Sättigungszustand des Dampfes eingetreten ist, so kann man nun aus der Temperatur des Körpers mittels der bekannten Formeln (s. §. 387 und §. 388) sowohl die entsprechende Expansivkraft, als auch die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft berechnen, und vergleicht man nun dieselbe mit derjenigen, welche der Temperatur der Luft im Sättigungszustande entspricht, so drückt das sich ergebende Verhältniß den Feuchtigkeitsgrad der Luft aus. Wäre z. B. die Temperatur der Luft, $t = 20$ Grad, und dagegen die des Körpers, bei welcher der Niederschlag von Wasser auf demselben erscheint, $t_1 = 5$ Grad, so hätte man, da der Temperatur $t = 20^0$, die Expansivkraft $p = 1{,}7391$ Centimeter, und der Temperatur $t = 5^0$, die Expansivkraft $p_1 = 0{,}6534$ Centimeter entspricht, den Feuchtigkeitsgrad der Luft:

$$\psi = \frac{6534}{17391} = 0{,}376.$$

Bei dem Daniell'schen Hygrometer $ABCD$, Fig. 614, besteht der Körper A, an welchem sich der Dampf aus der Luft niederschlägt, in einer mit glänzendem Gold oder Platin überzogenen Glaskugel A, welche zu zwei Drittel mit Schwefeläther angefüllt ist und die Kugel eines Thermometers enthält, woran die Temperatur im Augenblicke der Thaubildung abzulesen ist. Diese Kugel steht durch eine gebogene Röhre CB mit einer anderen Glaskugel D in Verbindung, und es ist der ganze Apparat luftleer herzustellen. Um nun die erforderliche Erkältung der ersten Kugel hervorzubringen, hat man nur nöthig, auf die zu diesem Zwecke mit einem Musselin- oder Leinwandläppchen umgebene Kugel D Schwefeläther tröpfeln zu lassen. Die Verdampfung dieses Aethers erzeugt nun eine Kälte in D, wobei eine Verminderung der Spannung des Aetherdampfes im ganzen Apparate entsteht, und womit nicht allein das Niederschlagen dieses Dampfes in D, sondern auch die Bildung neuer Aetherdämpfe und die Abkühlung des zurückbleibenden Aethers in A verbunden ist.

Fig. 614.



In der Hauptsache beruht sowohl das Hygrometer von Regnault als auch das Psychrometer von August auf demselben Principe.

Erwärmungskraft. Die Wärme, welche zur Verwandlung des Wassers in Dampf nöthig ist, wird in der Regel durch Verbrennung von Körpern gewonnen. Die Verbrennung (franz. und engl. combustion) besteht in einer raschen Verbindung eines Körpers, des Brennstoffes (franz. combustible; engl. fuel), mit Sauerstoff (franz. oxygène; engl. oxygen). Als Brennstoff werden vorzüglich kohlenstoffhaltige Körper benutzt, den Sauerstoff aber liefert die atmosphärische Luft, die im gewöhnlichen Zustande 23 Procent dieses Stoffes enthält. Die Erwärmungskraft (franz. puissance calorifique; engl. warming power) oder die Wärmemenge, welche bei der Verbrennung entwickelt wird, ist bei verschiedenen Brennstoffen sehr verschieden, z. B. bei Wasserstoffgas größer als bei Kohlenstoff, und bei diesem größer als bei Holz u. s. w. Es haben Rumford, Lavoisier und Laplace, ferner Despretz und besonders noch Dulong Versuche über die §. 397

Erwärmungskraft verschiedener Körper angestellt, und hierbei vorzüglich aus der Stärke der Erwärmung einer bestimmten Wassermenge, welche durch Verbrennung einer bestimmten Quantität des Brennstoffes erlangt wurde, auf die Erwärmungskraft des letzteren geschlossen. Auf diesem Wege hat z. B. Dulong gefunden, daß 1 Gramm Wasserstoffgas bei seiner Verbrennung 34600 Gramm Wasser um einen Grad erwärmt und dazu 4,32 Gramm Sauerstoff verbraucht; daß dagegen 1 Gramm Kohlenstoff hierbei nur 7299 und 1 Gramm Kohlenoxydgas gar nur 2490 Gramm Wasser um einen Grad in der Temperatur erhöht, jener aber 2,73 Gramm und dieses 4,36 Gramm Sauerstoff erfordert. Nach §. 373 ist folglich die Erwärmungskraft des Wasserstoffgases = 34600, die des Kohlenstoffes = 7290 und die des Kohlenoxydgases = 2490 Wärmeeinheiten (calories).

Was die zur Verbrennung nöthige Sauerstoffmenge anlangt, so läßt sich diese auch direct aus dem Producte der Verbrennung berechnen. Bei der vollkommenen Verbrennung von Kohle ist dieses Product Kohlensäure (franz. acide carbonique; engl. carbonic acid), und diese besteht aus 27,36 Theilen Kohlenstoff und 72,64 Theilen Sauerstoff; daher erfordert ein Gramm Kohlenstoff zu seiner Verbrennung $\frac{72,64}{27,36} = 2,65$ Gramm Sauerstoff, oder $\frac{2,65}{0,23} = 11,52$ Gramm atmosphärische Luft, da die atmosphärische Luft aus 23 Gewichtstheilen Sauerstoff und 77 Gewichtstheilen Stickstoff besteht.

§. 398 **Verbrennungswärme.** Neuere Versuche über die Verbrennungswärme sind von Andrews (Poggendorff's Annalen Bd. 75) sowie von Favre und Silbermann (Annales de chim. et de phys. Sér. III. Tom. 34) angestellt worden. Das Calorimeter, welches die letzteren Experimentatoren angewendet haben, bestand in der Hauptsache in einer metallenen Verbrennungskammer von circa 5 Centimeter Weite und 10 Centimeter Höhe, welche in ein mit Wasser angefülltes Gefäß eingetaucht war und mit außen durch drei Röhren in Verbindung stand, wodurch der zur Verbrennung nöthige Sauerstoff und das zu verbrennende Gas zu- sowie die gasförmigen Verbrennungsproducte abgeführt wurden. Um die Wärme der letzteren dem Kühlwasser mitzutheilen, erhielt das dritte oder Ableitungsrohr eine große Länge und wurde schlangenförmig um die Verbrennungskammer herumgewickelt. Wenn statt eines Gases ein fester oder flüssiger Körper verbrannt werden sollte, so mußte natürlich derselbe schon vor dem Versuche in die Kammer gebracht und die zweite oder Gaszuleitungsröhre geschlossen werden. Um den Gang der Verbrennung von außen beobachten zu können, war mitten im Deckel der Kammer eine durch eine starke Glasplatte verschlossene weitere Röhre, sowie

darüber ein geneigter Spiegel angebracht. Ferner war das Kühlgefäß noch mit einem weiteren Mantel umgeben und mit diesem in ein noch weiteres, mit Wasser angefülltes Gefäß gesetzt, damit dasselbe so wenig wie möglich Wärme von außen aufnehmen konnte. Um endlich die Wärme im Kühlwasser möglichst auszubreiten, wurde dieses durch Auf- und Niederziehen eines aus zwei Blechringen bestehenden Rührwerks in Bewegung gesetzt.

Aus dem Gewichte Q des Kühlwassers und der beobachteten Wärmezunahme t desselben in Folge der Verbrennung ließ sich nun die entsprechende Wärmemenge $W = Qt$ (s. §. 373) berechnen.

Auf diese Weise ergab sich die Wärmemenge bei Verbrennung von 1 Kilogramm

Holzkohle	8080	Wärmeeinheiten,
Graphit	7797	"
Kohlenoxydgas. . .	2403	"
Wasserstoffgas . . .	34462	"

u. s. w.

Diesen Versuchen zufolge ist die Verbrennungswärme oder Heizkraft der Kohle oder des reinen Kohlenstoffes größer als Dulong und Andere gefunden haben. Die gefundene Differenz hat aber nach Favre und Silbermann ihren Grund darin, daß die Kohle gewöhnlich nicht vollständig zu Kohlensäure, sondern auch theilweise nur zu Kohlenoxydgas verbrennt. Diese Experimentatoren haben nun noch die Menge des letzteren Gases besonders bestimmt und die Wärme, welche die Verbrennung derselben giebt, noch mit zur ganzen Verbrennungswärme addirt.

Während das kohlensaure Gas aus 27,27 Gewichtstheilen Kohlenstoff und 72,73 Gewichtstheilen Sauerstoff besteht, ist das Kohlenoxydgas aus 42,86 Gewichtstheilen Kohlenstoff und 57,14 Gewichtstheilen Sauerstoff zusammengesetzt, und es ist folglich zur Verbrennung eines Grammes Kohle zu Kohlenoxydgas nur $\frac{57,14}{42,86} = 1,333$ Gramm Sauerstoff oder $\frac{1,333}{0,23} = 5,8$ Gramm, d. i. nahe nur halb so viel atmosphärische Luft nöthig, als bei der Verbrennung zu Kohlensäure. Deshalb bildet sich das Kohlenoxydgas nur dann in größerer Menge, wenn es an Luftzug oder an der zur Bildung von Kohlensäure nöthigen Menge von Sauerstoff mangelt.

Da nach den Versuchen von Favre und Silbermann die Verbrennung von 1 Kilogramm Kohlenstoff zu Kohlensäure 8080 Wärmeeinheiten, dagegen die von 1 Kilogramm Kohlenoxydgas zu Kohlensäure 2403 Wärmeeinheiten giebt, und da das Kohlenoxydgas 42,86 Procent Kohlenstoff enthält, also 1 Kilogramm Kohlenstoff in diesem Gase $\frac{2403}{0,4286} = 5607$ Wärme-

einheiten entspricht, so ist folglich die Wärmemenge, welche bei der unvollständigen Verbrennung der Kohle zu Kohlenoxydgas entwickelt wird:

$$8080 - 5607 = 2473 \text{ Wärmeeinheiten},$$

also circa drei Zehntel von derjenigen Wärmemenge (8080 Wärmeeinheiten), welche aus der vollständigen Verbrennung zu Kohlensäure hervorgeht.

Die Wärmemengen, welche bei Verbrennung von Kohlenwasserstoffverbindungen entwickelt werden, lassen sich mit Hülfe der Wärmemengen ihrer Bestandtheile leicht berechnen. Das Gruben- oder Sumpfgas (schlagende Wetter) besteht dem Gewichte nach aus 25 Proc. Wasserstoff und 75 Proc. Kohlenstoff, giebt folglich bei seiner Verbrennung

$$\tfrac{1}{4} . 34462 + \tfrac{3}{4} . 8080 = 8615{,}5 + 6060 = 14675{,}5$$

Wärmeeinheiten, dagegen das ölbildende Gas besteht aus $\frac{1}{7}$ Wasserstoff und $\frac{6}{7}$ Kohlenstoff, und liefert folglich bei seiner Verbrennung nur

$$\tfrac{1}{7} . 34462 + \tfrac{6}{7} . 8080 = 4923 + 6926 = 11849$$

Wärmeeinheiten.

Anmerkung. Ueber die Wärmeentwickelung bei anderen chemischen Verbindungen, sowie über die Wärmequellen überhaupt ist nachzulesen: Müller's Physik, Band 2, sowie Wüllner's Experimentalphysik Band II.

§. 399 **Brennstoffe.** Die Brennstoffe, welche zur Erzeugung von Wasserdämpfen benutzt werden, sind vorzüglich Steinkohlen, Braunkohlen, Torf, Holz und Kokes. Dieselben sind Verbindungen von Kohlenstoff (C), Wasserstoff (H) und Sauerstoff (O), enthalten zuweilen noch etwas Stickstoff (N) und fast durchgängig verschiedene Mengen unorganischer Bestandtheile, welche bei der Verbrennung als Asche zurückbleiben. Außerdem enthalten dieselben noch eine größere oder kleinere Menge freies oder hygroskopisches Wasser, welches bei der Verbrennung die Dampfform annimmt und hierbei eine gewisse Wärmemenge bindet, wodurch die Heizkraft des Brennstoffes herabgezogen wird. Deshalb soll man auch die Brennstoffe vor ihrer Verwendung möglichst trocknen. Frisch gefälltes Holz enthält 35 bis 50 Procent, und gehörig lufttrockenes Holz noch 20 bis 25 Procent Wasser. Da 1 Pfund Wasser circa 640 Wärmeeinheiten erfordert, um es in Dampf zu verwandeln, und 1 Pfund ganz trockenes Holz bei seiner Verbrennung 3600 Wärmeeinheiten entwickelt, so wird 1 Pfund Holz mit 25 Procent Wasser bei seiner Verbrennung nur $3600 . 0{,}75 = 2700$ Wärmeeinheiten liefern, und überdies hiervon noch $640 . 0{,}25 = 160$ Wärmeeinheiten an das Wasser zur Umwandlung desselben in Dampf absetzen, so daß folglich nur

$$2700 - 160 = 2540 \text{ Wärmeeinheiten}$$

nutzbar gemacht werden können.

Das durch die chemische Analyse in den Brennmaterialien gefundene Sauer-

stoffquantum O ist mit einem Theile $H_1 = \frac{O}{8}$ des Wasserstoffes (H) zu Wasser verbunden, folglich kann auch nur das Wasserstoffquantum

$$H - H_1 = H - \frac{O}{8}$$

zur Verbrennung gelangen, und die Wärmemenge

$$W_1 = 34462 \left(H - \frac{O}{8}\right)$$

entwickeln. Addirt man hierzu die Wärmemenge

$$W_2 = 8080\, C,$$

welche aus der Verbrennung der Kohlenstoffmenge C hervorgeht, so erhält man dadurch die gesammte theoretische Heizkraft eines Brennmaterials:

$$W = W_1 + W_2 = 34462 \left(H - \frac{O}{8}\right) + 8080\, C.$$

Der Anthracit (franz. und engl. anthracite) ist das kohlenstoffreichste Brennmaterial; er besteht im Mittel aus 91 Procent Kohlenstoff, 3 Procent Wasserstoff, 3 Procent Sauerstoff und 3 Procent Asche, wonach sich die theoretische Brennkraft desselben

$$W = 34462 . (0{,}03 - {}^1/_8 . 0{,}03) + 8080 . 0{,}91 = 905 + 7353$$
$$= 8258 \text{ Wärmeeinheiten}$$

ergiebt.

Die Steinkohle (franz. houille; engl. pit-coal) besteht im Mittel aus 80 Procent Kohlenstoff, 5 Procent Wasserstoff, 10 Procent Sauerstoff und 5 Procent Asche, es ist folglich ihre theoretische Heizkraft:

$$W = 34462 . (0{,}05 - {}^1/_8 . 0{,}1) + 8080 . 0{,}80 = 1292 + 6464$$
$$= 7756 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Die Braunkohle (franz. lignite; engl. brown-coal) enthält dagegen im Mittel nur 60 Procent Kohlenstoff, 5 Procent Wasserstoff, 25 Procent Sauerstoff und 10 Procent Asche, wonach folglich die theoretische Brennkraft dieses Brennstoffes

$$W = 34462 . (0{,}05 - {}^1/_8 . 0{,}25) + 8080 . 0{,}60 = 646 + 4848$$
$$= 5494 \text{ Wärmeeinheiten ist.}$$

Der Torf (franz. tourbe; engl. peat, turf) enthält im Mittel 52 Procent Kohlenstoff, 5 Procent Wasserstoff, 33 Procent Sauerstoff und 10 Procent Asche; es ist daher die theoretische Brennkraft desselben:

$$W = 34462 . (0{,}05 - {}^1/_8 . 0{,}33) + 8080 . 0{,}52 = 301 + 4202$$
$$= 4503 \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Was ferner das Holz (franz. bois; engl. wood) anlangt, so besteht

dasselbe durchschnittlich aus 49 Procent Kohlenstoff, 6 Procent Wasserstoff, 44 Procent Sauerstoff und 1 Procent Asche, so daß die theoretische Brennkraft desselben

$$W = 34462 . (0,06 - {}^1/_8 . 0,44) + 8080 . 0,49 = 172 + 3959$$
$$= 4131 \text{ Wärmeeinheiten}$$

folgt.

Durch die Verkohlung (franz. carbonisation; engl. carbonisazion) der Brennmaterialien wird nicht allein der Wasserstoff und Sauerstoff aus denselben entfernt, sondern es geht auch ein Theil des Kohlenstoffes verloren, indem sich zugleich Verbindungen von Wasserstoff, Kohlenstoff und Sauerstoff bilden und in Gasform entweichen. Deshalb giebt denn auch 1 Pfund lufttrockenes Holz mit 20 Procent hygroskopischem Wasser und 40 Procent Kohlenstoff nur 0,18 bis 0,25 Pfund Holzkohle (franz. charbon de bois; engl. char-coal), und ebenso, 1 Pfund Steinkohle nur 0,45 bis 0,6 Pfund Coaks (franz. und engl. coke). Uebrigens sind weder die Holzkohlen noch die Coaks reiner Kohlenstoff, sondern es enthalten dieselben nebst den die Asche gebenden festen Bestandtheilen noch immer etwas Wasserstoff und Sauerstoff, und es ist deshalb ihre theoretische Brennkraft nur 7000 bis 7500 Wärmeeinheiten.

Es ist hiernach die Anwendung von verkohlten Substanzen mit einem großen Wärmeverluste verbunden, und daher nur zulässig, wo es entweder auf die Erzeugung einer sehr intensiven Hitze oder auf die Entfernung gewisser flüchtiger Bestandtheile, z. B. des Schwefels, ankommt.

Die nutzbaren Wärmemengen, welche man bei der Verbrennung der Brennmaterialien auf Feuerherden gewinnt, sind, weil auf denselben nie eine vollständige Verbrennung zu Kohlensäure möglich ist, weil zumal die Verbrennungsproducte eine ansehnliche Wärmemenge mit sich fortnehmen, sowie auch Wärme durch Mittheilung an die Ofenwände und durch Abfälle verloren geht, stets viel kleiner als die im Vorstehenden angegebenen theoretischen Wärmemengen. Es folgt aus vielfachen und namentlich auch aus sehr gründlich angestellten Versuchen von Dr. W. Brix (siehe dessen Untersuchung über die Heizkraft der wichtigsten Brennstoffe), daß die nutzbare Verbrennungswärme im Mittel bei den meisten Brennherden nur zwei Drittel von der theoretischen Verbrennungswärme ist.

§. 400 **Verbrennung.** Die zur Verbrennung einer gewissen Menge Brennstoff nöthige Luftmenge, sowie das Quantum des hieraus hervorgehenden und durch den Schornstein abzuleitenden Gasgemenges läßt sich wie folgt ermitteln.

Die Kohlenstoffmenge C des Brennmaterials erfordert zur Bildung von Kohlensäure die Sauerstoffmenge

$$O_1 = {}^8/_3\, C = 2{,}67\, C,$$

und es ist die Menge der gebildeten Kohlensäure:

$$C + O_1 = {}^{11}/_3\, C = 3{,}67\, C.$$

Ferner das Verbrennen der freien Wasserstoffmenge $H - \frac{O}{8}$ zu Wasser erfordert das Sauerstoffquantum:

$$O_2 = 8\left(H - \frac{O}{8}\right) = 8\,H - O,$$

und giebt das Wasserquantum:

$$9\left(H - \frac{O}{8}\right) = 9\,H - {}^9/_8\, O.$$

Hiernach ist also der ganze Sauerstoffbedarf:

$$O = O_1 + O_2 = 2{,}67\ C + 8\,H - O,$$

und folglich die erforderliche Menge atmosphärischer Luft:

$$L = \frac{2{,}67\, C + 8\,H - O}{0{,}231} = 11{,}56\, C + 34{,}63\, H - 4{,}33\, O,$$

oder in Cubikmeter, wenn wieder C, H und O in Kilogramm ausgedrückt werden, und vorausgesetzt wird, daß bei einer mittleren Temperatur von 10 Grad und 0,76 Meter Barometerstand, 1 Cubikmeter Luft, $\gamma = 1{,}25$ Kilogramm wiegt:

$${}^4/_5\, L = 9{,}25\, C + 27{,}70\, H - 56{,}0\, O \text{ Cubikmeter.}$$

Dagegen ist die nöthige Luftmenge für 1 Pfund Brennstoff:

$$V = \frac{32{,}346}{2}\,(9{,}25\, C + 27{,}70\, H - 3{,}46\, O)$$

$$= 149{,}6\, C + 448{,}0\, H - 56{,}0\, O \text{ Cubikfuß.}$$

Nach dem Obigen ist z. B. für 1 Pfund Steinkohle, $C = 0{,}80$, $H = 0{,}05$ und $O = 0{,}10$ Pfund, und daher die hierzu erforderliche Menge atmosphärischer Luft:

$$V = 146{,}6 \,.\, 0{,}8 + 448{,}0 \,.\, 0{,}05 - 56{,}0 \,.\, 0{,}01$$

$$= 119{,}7 + 22{,}4 - 5{,}6 = 147{,}7 \text{ Cubikfuß.}$$

Um eine schnelle und vollständige Verbrennung zu erlangen, ist es nöthig, dem Brennherde die doppelte Luftmenge zuzuführen.

Was das durch den Schornstein abzuführende Gasgemenge anlangt, so besteht dasselbe aus dem Stickstoff der zugeführten atmosphärischen Luft, aus dem durch die Verbrennung erhaltenen kohlensauren Gas, sowie aus dem sich hierbei bildenden Wasserdampfe.

Das aus der Zerlegung der atmosphärischen Luft hervorgehende Stickstoffquantum ist dem Gewichte nach:

$$Q_1 = \frac{0,769}{0,231}(2,67\,C + 8\,H - O) = 3,329\,.(2,67\,C + 8\,H - O)$$
$$= 8,88\,C + 26,63\,H - 3,33\,O \text{ Kilogramm,}$$

oder, da bei 10 Grad Wärme und dem mittleren Barometerstande die Dichtigkeit des Stickgases $= 1,25\,.\,0,9713 = 1,2141$ Kilogramm ist,

$$Q_1 = (8,88\,C + 26,63\,H - 3,33\,O) : 1,2141$$
$$= 7,315\,C + 21,93\,H - 2,74\,O \text{ Cubikmeter,}$$

und folglich das Stickgasquantum pr. Pfund Brennstoff:

$$Q_1 = 118,3\,C + 354,7\,H - 44,3\,O \text{ Cubikfuß.}$$

Da ferner die Dichtigkeit des Kohlensäuregases

$$\gamma = 1,25\,.\,1,529 = 1,911 \text{ Gramm}$$

beträgt, so ist die aus einem Kilogramm Brennstoff hervorgehende Menge dieses Gases:

$$= \frac{3,67\,C}{1,911} = 1,919\,C \text{ Cubikmeter,}$$

also diese Menge pr. Pfund Brennstoff:

$$Q_2 = 16,17\,.\,1,919\,C = 31,0\,C \text{ Cubikfuß.}$$

Endlich geht aus dem Wasserstoff H die Wassermenge $9\,H$ hervor, welche, da 1 Cubikmeter Wasserdampf, $^5/_8\,.\,1,25$ Gramm $= 0,78125$ Kilogramm wiegt, eine Dampfmenge

$$\frac{9\,H}{0,78125} = 11,52\,H \text{ Cubikmeter}$$

giebt, so daß pr. Pfund Brennstoff die Dampfmenge

$$Q_3 = 16,17\,.\,11,52\,H = 186,3\,H \text{ Cubikfuß}$$

liefert.

Hiernach folgt nun das Volumen des aus der vollständigen Verbrennung hervorgehenden Gasgemenges:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 118,3\,C + 354,7\,H - 44,3\,O + 31,0\,C + 186,3\,H$$
$$= 149,3\,C + 541,0\,H - 44,3\,O \text{ Cubikfuß.}$$

Das Gewicht dieses Gemenges ist das Gewicht C des Brennstoffes plus das Gewicht der zugeführten Luft $L = 11,56\,C + 34,63\,H - 4,33\,O$, folglich das Gewicht eines Cubikfußes desselben:

$$\gamma = \frac{11,56\,C + 34,63\,H - 4,33\,O}{149,3\,C + 541,0\,H - 44,3\,O}.$$

Z. B. für $C = 0,8$, $H = 0,05$ und $O = 0,10$, wie oben,

$Q = 149,3\,.\,0,8 + 541,0\,.\,0,05 - 44,3\,.\,0,10 = 142,1$ Cubikfuß,

und wiegt

$G = 12,56\,.\,0,8 + 34,63\,.\,0,05 - 4,33\,.\,0,10 = 11,33$ Pfund,

so daß die Dichtigkeit dieses Gasgemenges

$$\gamma = \frac{11,33}{133,7} = 0,08475 \text{ Pfund}$$

folgt, während die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft

$$= \frac{1,25}{15,13} = 0,08262 \text{ Pfund ist.}$$

Wenn man doppelt so viel Luft zuführt, als zu einer langsamen Verbrennung nöthig, so ist das Quantum des durch den Schornstein abzuführenden Gasgemenges noch um $V = 139,7\,C + 419,1\,H - 52,40\,O$ größer, folglich

$$Q = 279,4\,C + 940,8\,H - 10,9\,O \text{ Cubikfuß,}$$

und die Dichtigkeit des Gasgemenges:

$$\gamma = \frac{24,08\,C + 69,26\,H - 8,66\,O}{279,4\,C + 940,8\,H - 10,9\,O}.$$

Diese Werthe für Q und γ beziehen sich nur auf die mittlere Temperatur (10 Grad) der zutretenden Luft; da aber die Temperatur t der fortströmenden Verbrennungsgase eine höhere ist, so hat man das Volumen derselben

$$\left(\frac{1 + \delta t}{1 + 10\,\delta}\right) Q = \left(\frac{1 + 0,00367\,t}{1,0367}\right) Q$$

zu setzen.

Gewöhnlich nimmt man $t = 300$ Grad an, und erhält daher dieses Gasquantum

$$= \frac{2,101}{1,0367}\,Q = 2,027\,Q,$$

und dessen Dichtigkeit

$$= \frac{\gamma}{2,027} = 0,4934\,\gamma.$$

Für 1 Pfund Steinkohle ist demnach, wenn man $t = 10$ Grad annimmt:

$$Q = 279,3 \,.\, 0,8 + 940,8 \,.\, 0,05 - 9,39 \,.\, 0,10 = 269,5 \text{ Cubikfuß}$$

und

$$\gamma = \frac{21,80}{269,5} = 0,08089 \text{ Pfund;}$$

dagegen wenn man $t = 300$ Grad setzt:

$$Q = 2,027 \,.\, 269,5 = 546,3 \text{ Cubikfuß}$$

und

$$\gamma = 0,4934 \,.\, 0,08089 = 0,03991 \text{ Pfund.}$$

Folgende Tabelle giebt die theoretische Verbrennungskraft der vorzüglichsten Brennstoffe, sowie die zur Verbrennung derselben nöthigen Luftmengen und die hieraus hervorgehenden Gasmengen an.

Brennstoffe.	Wärmemengen.	Kalte Luft zum Verbrennen von 1 Pfund Brennstoff.	Aus der Verbrennung hervorgehende Gasmenge, reducirt	
			auf 0°.	auf 300°.
Stark gedörrtes Holz	3600 Cal.	102 Cbkf.	111 Cbkf.	233 Cbkf.
Lufttrockenes Holz mit 20 Proc. Wasser	2800 "	82 "	93 "	194 "
Holzkohle	7000 "	248 "	248 "	519 "
Stark gedörrter Torf	4800 "	171 "	178 "	371 "
Torf mit 20 Proc. Wasser . .	3600 "	137 "	146 "	305 "
Torfkohle	5800 "	200 "	200 "	418 "
Mittlere Steinkohle	7500 "	274 "	279 "	584 "
Koaks mit 15 Proc. Asche . .	6000 "	227 "	227 "	475 "
Reiner Koaks	7050 "	250 "	250 "	520 "

Beispiel. Wie viel lufttrockenes Holz ist nöthig, um 30 Cubikfuß Wasser von 10° Temperatur auf 70° zu erhitzen? Die nöthige Wärmemenge ist, wenn man den Cubikfuß Wasser 61,75 Pfund schwer annimmt,

$$61{,}75 \,.\, 30 \,.\, (70 - 10) = 1852{,}5 \,.\, 60 = 111150 \text{ Cal.}$$

Nun liefert aber 1 Pfund lufttrockenes Holz bei seiner Verbrennung 2800 Cal.; daher ist denn zu der geforderten Erwärmung $\frac{111150}{2800} = \frac{2223}{56} = 39{,}69$ Pfund oder circa 1 Cubikfuß Holz erforderlich. Uebrigens ist die hierbei zur Verbrennung nöthige Luftmenge $= 82 \,.\, 39{,}69 = 3255$ Cubikfuß, und die daraus hervorgehende Gasmenge bei 250° Temperatur:

$$= (1 + 0{,}00367 \,.\, 250) \,.\, 93 \,.\, 39{,}69 = 1{,}9175 \,.\, 93 \,.\, 39{,}69 = 7078 \text{ Cubikfuß.}$$

§. 401 **Brennstoffmenge.** Es läßt sich nun auch leicht der Brennstoffaufwand berechnen, der zur Erzeugung einer gewissen Dampfmenge nöthig ist. Wir haben oben (§. 380) angegeben, daß die Gesammtwärme des Dampfes von t^0 Temperatur (nach Regnault)

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t$$

ist, und können daher die Wärmemenge, welche nöthig ist, um 1 Pfund Wasser von t_1 Temperatur in Dampf von der Temperatur t zu verwandeln, setzen:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t_1 \text{ Calorien,}$$

oder genauer, da der Temperatur t_1 des Wassers die Wärmemenge

$$W_1 = t_1 + 0{,}00002\,t_1^2 + 0{,}0000003\,t_1^3$$

entspricht,

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t - (1 + 0{,}00002\,t_1 + 0{,}0000003\,t_1^2)\,t_1 \text{ Cal.}$$

Vor Ausführung der Versuche von Regnault berechnete man die Wärmemenge des Dampfes entweder mittels einer hypothetischen Formel von Watt oder mittels einer anderen von Southern. Nach Watt, Sharp, Clément-Désormes, und zumal nach den neueren Beobachtungen von Pambour ist die Gesammtwärme des Dampfes bei allen Temperaturen eine und dieselbe, nimmt also die latente Wärme ab, wenn die sensible Wärme eine größere wird. Nimmt man an, daß bei der Bildung des Dampfes von 100° Temperatur eine Wärmemenge von 540 Cal. gebunden wird, so hat man hiernach die Wärmemenge, welche bei der Verwandlung des Wassers von t_1^0 Temperatur in Dampf von jeder Temperatur nöthig ist, einfach

$$W = 540 + 100 - t_1 = 640 - t_1.$$

Nach Southern, Poncelet u. A. wäre hingegen die latente Wärme des Dampfes constant (540 Cal.), nähme also die Gesammtwärme mit der Temperatur zu, und daher die Wärmemenge:

$$W = 540 + t - t_1.$$

Nimmt man die Temperatur des Wassers = Null an, und setzt man die des Dampfes $t = 100$, 125, 150 Grad u. s. w., so läßt sich folgende Vergleichung machen:

Temperatur des Dampfes.	50°	75°	100°	125°	150°	175°	200°
Wärmemenge nach Watt	640	640	640	640	640	640	640
Wärmemenge nach Southern .	590	615	640	665	690	715	740
Wärmemenge nach Regnault .	611,7	629,4	637	644,6	652,2	659,9	667,5

Man ersieht hieraus, daß bei Temperaturen von 100 bis 150 Grad, wie sie bei Dampfmaschinen meist vorkommen, das Watt'sche Gesetz nicht bedeutend von der Regnault'schen Formel abweicht, daß dagegen bei Temperaturen über 120 Grad die Southern'sche Regel schon auf ansehnlichere Abweichungen führt.

Wenn man, nach Regnault, $W = 606,5 + 0,305\,t - t_1$ setzt, so erhält man das Wärmequantum, welches zur Verwandlung der Wassermenge $Q\gamma$ Pfund in Dampf nöthig, d. i.:

$$W = (606,5 + 0,305\,t - t_1)\,Q\gamma \text{ Calorien.}$$

Nehmen wir für t und t_1 Mittelwerthe an, setzen wir $t = 125$ und $t_1 = 15$ Grad, so erhalten wir:

$$W = 630 \text{ Calorien.}$$

Wenden wir reinen Kohlenstoff zur Verbrennung an, und setzen wir voraus, daß $^2/_3$ der dadurch entwickelten Wärme zur Wirkung gelange, so können wir die durch 1 Pfund Kohle gewonnene Wärmemenge

$$= {}^2/_3 . 7050 = 4700 \text{ Calorien}$$

setzen, und da nach der letzten Regel die Wärmemenge, welche 1 Pfund Wasser von 10° Temperatur zur Verwandlung in Dampf erfordert, 630 Cal. ist, so läßt sich hiernach annähernd als richtig annehmen, daß jedes Pfund Kohlenstoff bei seiner Verbrennung $\frac{4700}{630} = 7^1/_2$ Pfund Dampf liefere oder 1 Pfund Dampf zu seiner Erzeugung, $^2/_{15} = 0,133$ Pfund Kohlenstoff erfordere. Erfahrungsmäßig giebt 1 Pfund Steinkohle 5 bis 7 Pfund, 1 Pfund Koaks $4^2/_3$ bis 5,8 Pfund, 1 Pfund Holzkohle 6 Pfund und 1 Pfund Holz 2,5 bis 2,7 Pfund Dampf (s. Guide du chauffeur par Grouvelle et Jaunez).

Für die zur Dampferzeugung dienenden Steinkohlen sind folgende Mittelwerthe in Anwendung zu bringen.

Steinkohlen.	Gewicht roher Steinkohle pr. Tonne zu je 4 Scheffel.	Wassergehalt in Procenten der rohen Kohle.	Unverbrennliche Rückstände in Procenten der rohen Kohle.	Effective Verdampfungskraft; Dampfmenge pr. Pfd. roher Kohle.
nordamerikanische . .	361,0 Pfd.	1,39	10,3	8,27 Pfd.
englische	391,5 „	3,37	7,8	7,82 „
preußische	349,2 „	3,00	4,8	8,28 „
sächsische	367,6 „	10,83	25,5	8,20 „

Noch lassen sich folgende Mittelwerthe annehmen.

Name des Brennstoffs.	Gewicht des Brennstoffs.	Wassergehalt.	Heizkraft beim angegebenen Wassergehalt.	
			von 1 Pfund.	von 1 Klafter.
Nadelholz . .	1 Klafter = 108 Cbfß. = 2600 Pfd.	15 Proc.	4,0	10400
Laubholz . .	1 „ = 3000 „	15 „	3,7	11100
				von 1000 St.
Torf	1000 Stück = 1800 Pfd.	25 „	3,64	6552
Braunkohle .	1 Scheffel = 290 „	30 „	3,95	1150

Beispiel. Welchen Steinkohlenaufwand erfordert eine Dampfmaschine stündlich, welche in jeder Minute 500 Cubikfuß Dampf von 3 Atmosphären Spannung consumirt, wenn das Speisewasser eine Temperatur von 30° hat? Nach der Tabelle II. in §. 388 entspricht 3 Atmosphären Spannung die Temperatur $t = 133{,}9$ Grad, und nach der Tabelle in §. 391 erfordern 500 Cubikfuß Dampf bei 3 Atmosphären Spannung,

$$\frac{500}{587{,}4} \text{ Cubikfuß} = \frac{500}{587{,}4} \cdot 61{,}75 = 52{,}56 \text{ Pfund Wasser,}$$

und dieses erfordert nach der obigen Formel die Wärmemenge:

$$W = (606{,}5 + 0{,}305\, t - t_1)\, Q \gamma_1 = (606{,}5 + 0{,}305 \,.\, 135 - 30) \,.\, 52{,}56$$
$$= (606{,}5 + 41{,}2 - 30) \,.\, 52{,}56 = 617{,}5 \,.\, 52{,}56 = 32463 \text{ Cal.}$$

Nehmen wir an, daß 1 Pfund Steinkohle effectiv 4000 Cal. Wärme liefere, so erhalten wir die nöthige Steinkohlenmenge pr. Minute:

$$K = \frac{W}{4000} = \frac{32463}{4000} = 8{,}116 \text{ Pfund,}$$

also stündlich $= 60\, K = 487$ Pfund, oder, wenn man die Tonne Steinkohle 350 Pfund schwer annimmt,

$$\frac{487}{350} = 1{,}39 \text{ Tonne.}$$

Schlußanmerkung. Außer den Werken über Physik, von **Müller**, **Ganot**, **Wüllner** u. A. handeln über Wärme und Brennmaterialien folgende Schriften: Traité de la chaleur consid. dans les applications, par E. Péclet. III. édition. Paris 1860; ferner die Wärmemeßkunst und deren Anwendung, von C. **Schinz**, Stuttgart 1858; Untersuchungen über die Heizkraft der wichtigeren Brennstoffe im preußischen Staate, von P. W. **Brix**, Berlin 1853. A report to the navy departement of the United States on Americal coals etc. Philadelphia 1844. Im Auszuge in den Verhandlungen des Vereines zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 1846. Siehe auch Formules, Tables etc., ou Aide-Memoire des Ingenieurs etc., par J. Claudel, Paris 1854. Ferner Untersuchungen über die Heizkraft der Steinkohlen Sachsens von **Ernst Hartig**, Leipzig 1860. Sowie: Des Machines à vapeur, par Morin und Treska, Tome I, Production de la vapeur, Paris 1863.

Drittes Capitel.

Von den Dampferzeugungsapparaten.

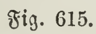
§. 402 **Dampfkessel.** Der Dampfkessel (franz. la chaudière à vapeur; engl. the steam boiler) ist das metallene Gefäß, in welchem das Wasser erhitzt und in Dampf verwandelt wird. Ein zweckmäßiger Dampfkessel soll in einer gegebenen Zeit eine bestimmte Dampfmenge von einer bestimmten Spannung bei möglich kleinstem Brennmaterialaufwand und der größten Sicherheit vor dem Zersprengen liefern. Um diesen Erfordernissen zu genügen, hat man zu demselben ein geeignetes Material auszuwählen, ihm bestimmte Formen und Dimensionen zu geben, ihn mit den nöthigen Hülfsvorrichtungen auszurüsten u. s. w. Als Material zu Dampfkesseln wird in der Regel starkes Eisenblech verwendet, sehr selten verbraucht man hierzu Kupferblech, und nur zu engen oder röhrenförmigen Kesseln verwendet man Gußeisen oder Messing. Die Verbindung der Bleche unter einander erfolgt durch starke, dicht neben einander stehende Nietnägel (franz. cloues rivés; engl. rivets). Dem Kupfer würde wegen seines größeren Leitungsvermögens (s. Bd. II, §. 367) der Vorzug vor dem Eisen zu geben sein, allein wegen der großen Kostspieligkeit wendet man dasselbe zu Dampfkesseln selten an.

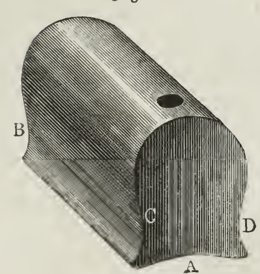
In der neueren Zeit verwendet man mit Vortheil Gußstahlblech bei der Kesselfabrikation.

Was die Form der Dampfkessel anlangt, so hat man zu berücksichtigen, daß von derselben die Haltbarkeit und das Verdampfungsvermögen zugleich abhängen. Die Haltbarkeit oder die Widerstandsfähigkeit eines Kessels fällt jedenfalls um so größer aus, je regelmäßiger und abgerundeter seine Form ist, das Verdampfungsvermögen hingegen nimmt um so mehr zu, je größer die Oberfläche des Kessels ist, je mehr also dieselbe von einer regelmäßigen und abgerundeten Form abweicht. Da diese Forderungen einer zweckmäßigen Kesselform einander widerstreiten, so hat man immer einen Mittelweg einzuschlagen, und die Form von der Dampfspannung abhängig zu machen, namentlich zur Erzeugung von stark gespannten Dämpfen mehr runde und zur Erzeugung von schwachen Dämpfen mehr eckige Kesselformen auszuwählen. Ein aus Röhren oder einzelnen Kesseln bestehender Dampferzeugungsapparat ist in beiderlei Beziehung zweckmäßig; er bietet dem Feuer eine größere Erwärmungsfläche dar und gewährt auch eine größere Sicherheit.

Dampfkesselformen. Nach den Formen lassen sich die Kessel in §. 403
folgende Classen bringen.

1. Die Wagen- oder Kofferkessel nach Watt (franz. chaudière à tombeau; engl. waggon-boiler), Fig. 615. Dieselben lassen sich nur bei


Fig. 615.

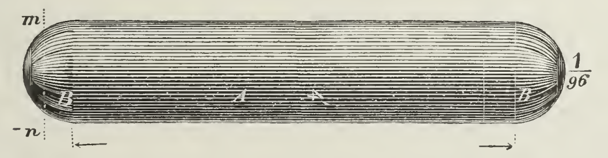


Dampf mit kleiner Spannung (4 bis 6 Pfund Ueberdruck auf den Quadratzoll) anwenden, weil sie bei höheren Spannungen keine hinreichende Haltbarkeit besitzen. Das Feuer geht hier an der Unterfläche *A* hin und dann noch einmal an den Seiten *BC*, *CD*... um den ganzen Kessel herum, ehe es in den Schornstein tritt.

Um das Ausbiegen der concaven Boden- und concaven Seitenflächen zu verhindern, werden diese Kesseltheile innen noch durch Eisenstäbe verankert.

2. Die Walzenkessel mit äußerer Feuerung, nach Woolf (franz. chaudières cylindriques à foyer extérieur; engl. cylindrical-boilers with external-furnace), Fig. 616. Dieselben werden vorzüglich zur Er-

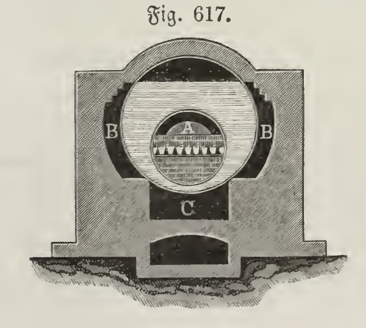
Fig. 616.



zeugung von Dämpfen mit hoher Spannung gebraucht. Die Endflächen dieser Kessel sind nicht eben, sondern in der Regel von Kugelsegmenten oder Halbkugeln *B*, *B* gebildet. Die Züge laufen, wie bei den Wagenkesseln, außen um die Kesselwand herum.

3. Die Walzenkessel mit innerer Feuerung, sogenannten Cornwallkessel (franz. chaudières cylindriques à foyer intérieur, engl. cylindrical-boilers with internal furnace), Fig. 617. Hier befindet

Fig. 617.

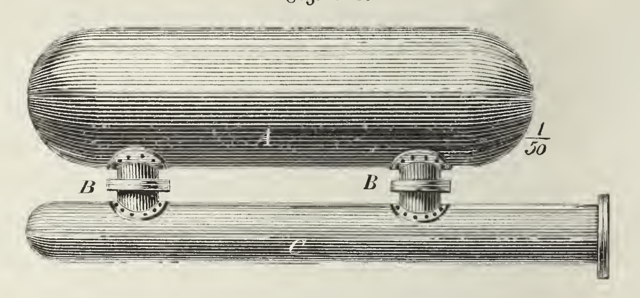


sich der Feuerraum und Rost in einer Röhre *A*, die durch den ganzen Kessel hindurchgeht. Diese Kessel, welche, bei gleicher Größe eine größere Heizfläche als andere Kessel haben, sind unter dem Namen Cornwaller Kessel bekannt. Die Feuerluft geht hier, nachdem sie das Innere des Kessels durchlaufen hat, in Seitenzügen *B*, *B* noch einmal um den ganzen Kessel herum

und wohl auch in einem Zuge C unter dem Kessel hin. Große Kessel erhalten neben einander laufende Feuerröhren. Bei den sogenannten Butterly-boilers ist der Feuerraum vor der Einmündung der durch den Hauptkessel gehenden Heizröhre.

4. Kessel mit Siederöhren oder Siedern (franz. bouilleurs; engl. boiler-tubes), Fig. 618. Die Siederöhre C liegt unter dem eigentlichen Kessel A (Hauptkessel) und ist mit diesem durch verticale Röhren B,B verbunden. Der Vortheil dieser Kessel ist einleuchtend; der Hauptkessel

Fig. 618.



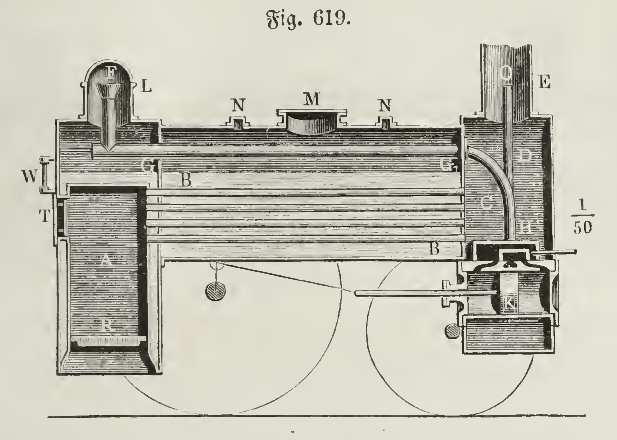
kommt hier gar nicht in das eigentliche Feuer und wird daher sehr geschont; die Siederöhren aber können, da sie enger sind, auch schwächere Wände bekommen. Sehr zweckmäßig ist die Anwendung von zwei unter dem Hauptkessel hinlaufenden Siederöhren.

Von den Dampfkesseln mit Siederöhren sind die mit Vorwärmern oder Wärmeröhren (franz. tubes réchauffeurs; engl. heating-tubes) insofern verschieden, als sich bei den ersteren der Feuerherd unter den Siederöhren, dagegen aber bei den letzteren unter dem Hauptkessel befindet, dort also die Züge von den Siederöhren nach dem Kessel und von da in die Esse, hier aber vom Kessel aus erst nach den Wärmeröhren und dann in die Esse führen.

5. Röhrenkessel (franz. chaudières tubulaires; engl. tubular-boilers), insbesondere Dampfwagenkessel, Fig. 619. Sie werden vorzüglich dann angewendet, wenn es darauf ankommt, Raum zu ersparen und die Dampferzeugung zu beschleunigen, weshalb man sie vorzüglich bei Dampfwagen und Dampfschiffen anwendet. Bei den älteren Röhrenkesseln von J. Barlow waren die Röhren mit Wasser angefüllt und außen von der Feuerluft umgeben, bei den neueren Röhrenkesseln von Seguin werden dagegen die Röhren, sogenannte Heiz- oder Feuerröhren, durch den mit Wasser angefüllten Kessel geführt. Die Heizröhren der Dampfwagenkessel sind entweder aus Messing oder aus Schmiedeeisen, sie haben eine Weite von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll, eine Länge von 6 bis 12 Fuß und ihre Anzahl ist 100 bis 200 oder noch größer.

Aus der Figur ist zu sehen: *A* der Feuerraum mit dem Roste *R* und der Ofenthür *T*, *BB* der Wasserkasten mit den Rauchröhren, *CD* der Rauch-

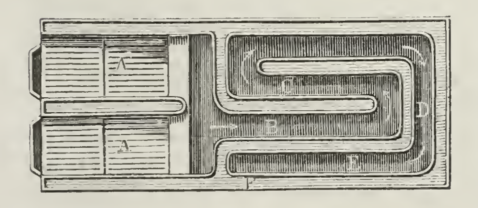
Fig. 619.



kasten und *E* die Esse. Das Uebrige findet weiter unten seine Erklärung. Bei anderen Röhrenkesseln, z. B. bei denen von Zambeaux, stehen die Heizröhren vertical.

6. Kessel mit Kammern (franz. chaud. à galeries; engl. boilers with chambres), insbesondere die mit lothrechten Kammern für Dampfschiffe, Fig. 620. Hier legt die Feuerluft innerhalb des Wasserraumes einen längeren Weg *ABCDE* zurück, ehe sie bei *F* in die Esse tritt. Jedenfalls sind diese Kessel in ökonomischer Beziehung sehr zweckmäßig, lassen sich jedoch nur bei niedrigem Dampfdrucke anwenden, da sie starke Biegungen enthalten. Diese Dampfschiffkessel sind in neueren Zeiten vielfach abgeändert und vervollkommnet worden.

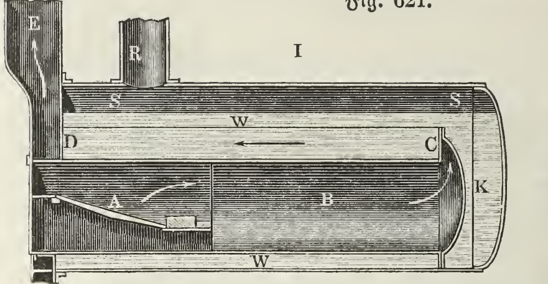
Fig. 620.

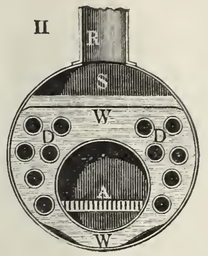


7. Zusammengesetzte Kessel mit rückströmender Flamme (franz. à retour de flamme; engl. with returning flamme). Durchschnitte eines solchen Kessels für eine Locomobile sind in Fig. 621, I. II. (a. f. S.), abgebildet. *ABS* ist ein gewöhnlicher Kessel mit innerer Feuerung *AB*, und *CD* sind 12 Heizröhren, durch welche die erhitzte Luft aus der Kammer *K* nach der Esse *E* zurückgeführt wird. Das Wasser *WKW* umgiebt die sämmtlichen Feuerröhren, und der sich im Dampfraume *SS* ansammelnde Dampf wird durch das Rohr *R* nach der Dampfkammer u. s. w. geleitet.

Anmerkung. Ueberdies giebt es noch besondere Kesselconstructionen. In Deutschland zeichnen sich namentlich noch die Dampfkessel von Alban und die

Fig. 621.





von Henschel aus. Alban's Apparat ist ein Dampfkessel mit einem Systeme von Sieteröhren, welche unmittelbar über dem Feuerraume liegen (s. Alban's Schrift „die Hochdruckdampfmaschine"). Henschel's Kessel hat eine oder mehrere schiefliegende Sieteröhren und eine darüber horizontal liegende Dampfröhre. Um die Reinigung der Heizröhren vornehmen zu können, ist es nöthig, die Röhrenkessel mit einem abnehmbaren Feuerkasten (franz. foyer amovible) und einem ablösbaren Deckel zu versehen. Solche Röhrenkessel sind für stehende Dampfmaschinen von Farcot et fils, sowie auch von Anderen construirt worden. Die Dampfkessel mit Circulation des Wassers haben bis jetzt noch keine allgemeine Anwendung gefunden. Dieselben verwandeln das stetig zufließende Wasser fast momentan in Dampf, erfordern daher auch nur einen sehr kleinen Wasserraum und haben deshalb den Vortheil der Gefahrlosigkeit und der schnellen Dampferzeugung, dagegen aber auch den Mangel einer ungleichförmigen Dampfentwickelung. Es gehören hierher die Dampfkessel von Perkins, Belleville, Boutigny u. s. w. Bei den letzteren wird das Wasser in Dampf verwandelt, während es durch die Löcher über einander gestellter Schalen fließt. S. Morin: Des Machines à vapeur, Tome I.

§. 404 **Heizfläche.** Das Dampferzeugungsvermögen eines Kessels hängt vorzüglich von der Größe der Feuer-, Heiz- oder Erwärmungsfläche (franz. surface de chauffe; engl. heating surface), d. i. von demjenigen Theil der Oberfläche des Dampfkessels ab, welcher von dem Feuer und von der erwärmten oder Feuerluft bespielt wird, bevor sie in den Schornstein tritt. Die Angaben über die Größe der Heizfläche, welche einer gegebenen Dampfmenge entspricht, sind sehr verschieden; nach den Versuchen, welche Cavé hierüber angestellt hat (s. Bataille et Jullien, Traité des machines à vapeur), sind für eiserne Dampfkessel auf jedes Quadratmeter Heizfläche stündlich 19 Kilogramme Dampfquantum zu rechnen. Nach dem preußischen Maße kommen hiernach auf 1 Quadratfuß Heizfläche 4 Pfund Dampf oder $104\frac{3}{4}$ Cubikzoll Wasser.

Sehr oft bezieht man auch die Productionskraft der Dampfkessel auf Pferdekräfte oder auf das Arbeitsvermögen des erzeugten Dampfes. Nach

Grouvelle kann man auf jede Pferdekraft rechnen: für Hochdruckdampfmaschinen mit Condensation 1 Quadratmeter = 10 Quadratfuß Erwärmungsfläche, ferner für solche ohne Condensation 1,3 Quadratmeter = 13 Quadratfuß, und für Tiefdruckmaschinen 1,4 Quadratmeter = 14 Quadratfuß. Die letzteren Angaben lassen aber noch eine große Unsicherheit zurück, da eine Maschine um so weniger Dampf erfordert, je vollkommener sie ist. Maschinen, welche auch noch den Theil der Arbeit benutzen, welchen der Dampf durch Expansion verrichten kann, erfordern deshalb eine kleinere Heizfläche, als Maschinen ohne Expansion. Uebrigens bezieht sich die obige Angabe auch nur auf feststehende Dampfmaschinen, denn bei Dampfschiffkesseln ist das Dampfquantum pr. Quadratmeter 30 bis 35 Kilogramme und bei Dampfwagenkesseln gar 100 bis 130 Kilogramme; also im ersten Falle $6^1/_2$ bis $7^1/_2$ Pfund, und im letzteren 21 bis 26 Pfund Dampf auf jeden Quadratfuß Heizfläche zu rechnen. Ebenso geben auch die Cornwaller Dampfkessel mit innerer Heizung eine ungewöhnlich große Heizfläche, indem sie nach Wickstee d's Versuchen pr. Quadratfuß nur 0,94 Pfund Dampf erzeugen. Bei dem Dampfkessel, welchen Herr Dr. Brix zu seinen Untersuchungen über die Heizkraft der wichtigsten Brennstoffe angewendet hat, war die Heizfläche ebenfalls ungewöhnlich groß, da hier, wo allerdings die Verbrennungsgase nur mit 100 bis 150 Grad Wärme in die Esse traten, 1 Quadratfuß Heizfläche nur 1,2 bis 2,6 Pfund Dampf gab.

Die Heizfläche ist natürlich nur ein Theil der ganzen Kesseloberfläche. Bei den Wagen- und Walzenkesseln ist sie ungefähr nur die Hälfte, bei denjenigen mit Siedern kann sie aber auf $^2/_3$ des Inhaltes sämmtlicher Oberflächen steigen.

Es ist endlich leicht zu ermessen, daß das Productionsvermögen eines Dampfkessels auch noch von der Dicke und von der Beschaffenheit der Kesselwände, sowie von der Lage derselben gegen den Feuerstrom abhängt, und daß dasselbe durch die Temperaturdifferenz zwischen dem Kessel und Feuerherde bedingt ist. Da die Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers (s. §. 367) $2^1/_2$ mal so groß ist, als die des Eisens, so eignet sich dieses Metall ganz besonders zu Dampfkesseln, um so mehr, da es in Folge seiner gleichförmigen Textur mehr Sicherheit gewährt; und es ist daher nur der hohe Preis des Kupfers die Ursache, daß statt desselben gewöhnlich Eisenblech zu Dampfkesseln verwendet wird.

Rasche Verbrennung erzeugt ein intensiveres Feuer und giebt daher auch ein großes Verdampfungsvermögen, wie z. B. bei den Dampfwagenkesseln, wo ein künstlicher Luftzug angewendet wird.

Man unterscheidet noch die directe und die indirecte Heizfläche. Jene ist derjenige Theil der Kesselfläche, welcher sich unmittelbar über dem Feuerherde befindet und daher von der Flamme bespielt wird; der übrige,

weit größere Theil der Heizfläche ist die indirecte Heizfläche. Die directe Heizfläche empfängt die Wärme vorzüglich durch Ausstrahlung, die indirecte hingegen lediglich durch Leitung (s. §. 367). Bei gleicher Fläche und unter übrigens gleichen Umständen ist die Wärmemenge, welche die directe Heizfläche aufnimmt, ungefähr 4- bis 5mal so groß als die von der indirecten Heizfläche aufgenommene Wärmemenge. Nach Fairbairn (siehe dessen Useful information for engineers) ist bei guten Kesselanlagen die directe Heizfläche $^1/_{11}$ der ganzen Heizfläche. Bei den Cornwaller Dampfkesseln ist jedoch dieses Verhältniß nur $^1/_{25}$, und dagegen bei Kesseln auf Dampfschiffen $^1/_8$ bis $^1/_6$.

§. 405 **Wasser- und Dampfraum.** Die Größe eines Dampfkessels wird vorzüglich durch die von dem zu erzeugenden Dampfquantum abhängige Größe der Erwärmungsfläche bedingt, nächstdem hat aber auch das Verhältniß zwischen dem Dampf- und dem Wasserraume desselben einen Einfluß auf die Kesselgröße. Was den Wasserraum eines Dampfkessels anlangt, so muß dieser mindestens denjenigen Theil der Kesselfläche von innen bedecken, der von außen von der erhitzten Luft in den Zügen bespielt wird, weil außerdem das Glühen und in Folge dessen das Zerspringen des Kessels eintreten könnte. Der Sicherheit wegen läßt man in der Regel die Oberfläche des Wassers im Kessel 4 Zoll hoch über den Heizcanälen stehen. Es darf aber auch der Wasserraum in dem Kessel deshalb nicht sehr klein sein, damit kleine Unregelmäßigkeiten in der Zuführung des Speisewassers (franz. eau d'alimentation; engl. feed water) keine großen Veränderungen in der Temperatur und in dem Stande des Kesselwassers hervorbringen.

Auf der anderen Seite ist es aber auch nöthig, daß der Dampfraum keinen zu kleinen Theil des Kessels einnehme, damit kein Wasser vom Dampfe mechanisch mit fortgerissen werde und keine große Schwankungen in der Dampfspannung eintreten. In der Regel macht man den Dampfraum mindestens 12mal so groß, als das pr. Spiel aus demselben abgeführte Dampfvolumen. Nach Zusammenstellungen des Artizan-Club (s. dessen Treatise on the Steam Engine) ist auf jede nominelle Pferdekraft einer Dampfmaschine zu setzen im Mittel: der Wasserraum = 5 engl. (= 4,85 preuß.), und der Dampfraum = 3,2 engl. (= 2,93 preuß.) Cubikfuß; also das Verhältniß des letzteren zum ganzen Fassungsraume des Kessels, $= \frac{3,2}{8,2}$, oder ungefähr 0,4.

Nach Tredgold hat man den Dampfraum so groß zu machen, daß die Veränderlichkeit in der Dampfspannung, welche aus dem ungleichmäßigen Verbrauche des Dampfes entspringt, nicht größer als $^1/_{30}$ ausfällt. Halten wir dieses Verhältniß fest, so können wir folgende Beziehung ableiten. Es

sei V der Dampfraum, C der mit gesättigtem Dampf auszufüllende Cylinderraum, und μ das Verhältniß der Abflußzeit zur Zeit eines ganzen Spieles, also $1 - \mu$ das Verhältniß der Sperrzeit zur Spielzeit. Dann läßt sich die während der Absperrung angesammelte Dampfmenge setzen:

$$V_1 = (1 - \mu)\, C,$$

und legt man $V_1 = {}^1/_{30}\, V$ zu Grunde, so erhält man endlich die Bedingung:

$$V = 30\,(1 - \mu)\, C.$$

Man hat also hiernach den Dampfraum um so größer zu machen, je größer das pr. Spiel verbrauchte Dampfquantum ist und je länger die Unterbrechung des Dampfabflusses dauert. Diese Formel ist übrigens nur auf einfachwirkende und Expansionsmaschinen, wo $\mu = {}^1/_2$ oder weniger beträgt, anwendbar, nicht aber auf doppeltwirkende Maschinen mit Kurbelmechanismus, wenn dieselben ohne Expansion arbeiten. Für diese Maschinen hat man, der Theorie des Krummzapfens zufolge,

$$V = 30\ V_1 = 30 \,.\, 0{,}2105\ C = 6{,}3\ C$$

zu setzen.

Grösse der Dampfkessel. Mit Zugrundelegung des Vorhergehenden lassen sich nun leicht die Dimensionen der Dampfkessel berechnen, namentlich wenn man sich mit Näherungswerthen begnügt und noch die Dimensionsverhältnisse giebt. §. 406

1. Für einen Wagen- oder Kofferkessel führt man die Rechnung auf folgende Weise. Es sei die Länge eines solchen Kessels $= l$, die mittlere Breite desselben $= b$ und die mittlere Höhe $= h$. Behandeln wir ihn als Parallelepiped, so haben wir für seinen Fassungsraum $= bhl$, und nehmen wir den Dampfraum $= 0{,}4$ des Fassungsraumes, so bekommen wir den Wasserraum $= 0{,}6\, bhl$, und dessen mittlere Höhe $= 0{,}6\, h$. Setzen wir nun voraus, daß die Heizfläche F den ganz unteren Theil der Kesselfläche bis zur Höhe $0{,}6\, h$ einnehme, so können wir setzen:

$$F = \text{Grundfläche } bl + \text{vier Seitenflächen } 2\,b \,.\, 0{,}6\,h + 2\,l \,.\, 0{,}6\,h$$
$$= bl + 1{,}2\,(b + l)\,h.$$

Nun ist aber gewöhnlich $b = {}^3/_4\, h$ und $l = {}^5/_2\, h$ bis $3\, h$; behalten wir daher das erstere Verhältniß bei, so folgt:

$$F = {}^{15}/_8\, h^2 + 1{,}2 \,.\, {}^{13}/_4\, h^2 = 5{,}775\, h^2,$$

daher die mittlere Kesselhöhe:

$$h = \sqrt{\frac{F}{5{,}775}} = 0{,}416\,\sqrt{F},$$

die mittlere Kesselbreite:

$$b = 0{,}312\sqrt{F},$$

und die Kessellänge:

$$l = 1{,}040\sqrt{F}.$$

Da der Wasserspiegel im Kessel noch einige Zoll über den Feuercanälen stehen muß und durch die Auflagerung des Kessels noch ein Theil der Heizfläche verloren geht, so hat man allen diesen Dimensionen noch etwas zuzusetzen, oder nach Befinden den Dampfraum kleiner als 0,4 des Fassungsraumes zu nehmen.

2. Bei dem Walzenkessel ohne Siederöhren und mit äußerer Feuerung führt sich die Rechnung auf folgende Weise. Setzen wir wieder den Dampfraum = 0,4 des ganzen Fassungsraumes, so können wir nach der Kreissegmententafel (s. „Ingenieur", S. 218) den Centriwinkel, welcher dem Dampfraume entspricht, $= 161^0\,51'$, und daher den Centriwinkel, welcher dem Wasserraume oder der Feuerfläche entspricht, $= 360^0 - 161^0\,51' = 198^0\,9'$ setzen. Nun ist aber der hierzu gehörige Bogen für den Halbmesser 1, = 3,458; daher folgt der cylindrische Theil der Erwärmungsfläche, wenn r den Halbmesser und l die Länge desselben bezeichnet,

$$F_1 = 3{,}458\,rl.$$

Was noch den die Kugelsegmente des Kessels einnehmenden Theil der Erwärmungsfläche anlangt, so können wir denselben

$$F_2 = 2 \,.\, 0{,}6 \,.\, \pi r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right]$$

setzen, wenn h die Höhe von jedem dieser Segmente bezeichnet, und es ist diesemnach die Erwärmungsfläche:

$$F = F_1 + F_2 = 3{,}458\,rl + 1{,}2\,\pi r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right].$$

Gewöhnlich hat man aber $l = 8\,r$ bis $12\,r$; nehmen wir aber $l = 10$ an, so bekommen wir:

$$F = 34{,}58\,r^2 + 3{,}80\,r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] = 38{,}35\,r^2 \left[1 + 0{,}1 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right],$$

daher den Kesselhalbmesser:

$$r = \sqrt{\frac{F}{38{,}35\left[1 + 0{,}1\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]}},$$

oder einfacher:

$$r = 0{,}1615\left[1 - 0{,}05\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]\sqrt{F}.$$

Für Kessel mit ebenen Endflächen ist $\frac{h}{r} = 0$ und für die Kessel mit

halbkugelförmigen Endflächen $\frac{h}{r} = 1$. Aus oben angegebenen Gründen hat man aber den so berechneten Dimensionen r und l etwas zuzusetzen, oder einen kleineren Dampfraum anzuwenden.

3. Für einen Walzenkessel mit Siederöhren hat man, da hier in der Regel die letzteren ganz und der erstere halb mit Feuerluft bespielt werden:

$$F = \pi r l + 2 n \pi r_1 l_1,$$

wo r und l den Halbmesser und die Länge des eigentlichen Kessels, ferner r_1 und l_1 den Halbmesser und die Länge der Siederöhren, und n die Anzahl der letzteren ausdrückt. Gewöhnlich ist

$n = 2$, $r_1 = 0{,}4\,r$ und $l = l_1 = 10\,r$; daher $F = 26\,\pi r^2$, also:

$$r = \sqrt{\frac{F}{26\,\pi}} = 0{,}1106\,\sqrt{F} \quad \text{und} \quad r_1 = 0{,}04424\,\sqrt{F}.$$

In diesem Falle ist aber der Dampfraum = 0,38 des ganzen Fassungsraumes.

Wegen der unvollkommenen Mittheilung der Wärme von oben nach unten bringt man bei den Siederöhren auch wohl nur $^2/_3$ bis $^5/_6$ ihrer Oberfläche als Heizfläche in Rechnung.

4. Bei Kesseln mit innerer Heizung ist die ganze innere Fläche als Heizfläche anzusehen.

Beispiel. Man soll die Dimensionen für einen Dampfkessel berechnen, welcher stündlich 520 Pfund Wasser in Dampf verwandelt. Rechnen wir auf jeden Quadratfuß Heizfläche stündlich 4 Pfund Dampf, so erhalten wir hiernach die nöthige Heizfläche:

$$F = \frac{520}{4} = 130 \text{ Quadratfuß}.$$

Für einen Kofferkessel hat man nun die mittlere Höhe desselben $0{,}416\,\sqrt{130} = 4{,}74$ Fuß, die mittlere Breite $^3/_4 \,.\, 4{,}74 = 3{,}56$ Fuß, und die Länge $= {}^5/_2 \,.\, 4{,}74 = 11{,}85$ Fuß. Für einen Walzenkessel aber, wenn man den Segmenten die Höhe $h = {}^1/_2\, r$ giebt, den Halbmesser

$$r = 0{,}152\,(1 - 0{,}0125)\,\sqrt{130} = 0{,}150 \,.\, 11{,}4 = 1{,}71 \text{ Fuß},$$

also die Kesselweite = 3,42 Fuß und die Länge des Mittelstückes = 17,1 Fuß, die ganze Kessellänge aber 17,1 + 1,71 = 18,81 Fuß.

Für einen Walzenkessel mit zwei Siederöhren ist dagegen der Halbmesser $r = 0{,}1106\,\sqrt{130} = 1{,}26$ Fuß, also die Weite = 2,52 Fuß, und dagegen die Weite einer Siederöhre = 0,4 . 2,52 = 1,008 Fuß, folglich die Länge der Hauptröhre und die der Siederöhren = 12,6 Fuß. Wegen der Auflagerung und wegen des Spielraumes des Wasserspiegels sind diese Dimensionen noch etwas zu vergrößern.

§. 407 **Kesselwandstärke.** Ein sehr wichtiges Verhältniß bei Dampfkesseln ist die Stärke oder Dicke der Kesselwand. Wir haben schon in Band I, §. 363, die Beziehung zwischen Röhrenstärke e, Röhrenweite $2r$ und Druck p kennen gelernt und können nun die dort gefundene Formel

$$e = \frac{rp}{T}$$

auch hier auf Dampfkessel oder Dampfröhren anwenden. Hierbei führt man gewöhnlich statt r den Durchmesser $d = 2r$, statt p aber den Ueberdruck von innen nach außen in Atmosphären und für T den Tragmodul des Kesselbleches ein, und fügt auch noch ein Glied e_1 hinzu, wodurch die Stärke ausgedrückt wird, welche die Kesselwand haben muß, damit der Kessel der Wirkung seines eigenen Gewichtes und des Wassers in demselben widerstehe. Nach den neuesten Versuchen von Fairbairn (s. „Civilingenieur" Bd. 4) fällt der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens erst bei der Rothglühhitze ansehnlich kleiner aus, als bei den gewöhnlichen Temperaturen (vergl. auch §. 359), und es ist daher bei Dampfkesseln für T der bei gewöhnlichen Temperaturen bestimmte Tragmodul einzusetzen.

In Frankreich ist die gesetzlich bestimmte Kesselwanddicke:

$$e = 1{,}8\,pd + 3 \text{ Millimeter},$$

wo d in Metern gegeben sein muß. Das preußische Dampfkesselgesetz hingegen schreibt vor:

$$e = (2{,}71828^{0{,}003p} - 1)\,r + 0{,}1 \text{ Zoll},$$

oder annähernd und für die gewöhnlich vorkommenden Fälle hinreichend genau,

$$e = 0{,}0015\,pd + 0{,}1 \text{ Zoll},$$

wo d in Zollen auszudrücken ist. Denjenigen Theilen des Kessels, welche unmittelbar mit dem Feuer in Berührung kommen, giebt man oft eine größere Dicke.

Gußeiserne Siederöhren sollen nach französischen Vorschriften fünfmal so dick sein, als schmiedeeiserne oder kupferne, nach preußischen Vorschriften ist aber die Dicke dieser Röhren nach der Formel

$$e = (2{,}71828^{0{,}01p} - 1)\,r + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll},$$

oder annähernd nach dem Ausdrucke:

$$e = 0{,}005\,pd + \tfrac{1}{3} \text{ Zoll}$$

zu bestimmen.

Um die Mittheilung der Wärme durch die Kesselwand zu erleichtern und um eine sehr große Ungleichheit in der Spannung des Kesselbleches zu vermeiden, steigt man mit der Kesselstärke nicht gern auf $\frac{1}{2}$ Zoll, und wendet deshalb lieber engere und längere oder zwei oder mehrere Kessel statt einen

an. Nach dem französischen Dampfkesselgesetze soll die Kesseldicke nie $1\frac{1}{2}$ Centimeter = 7 Linien übersteigen.

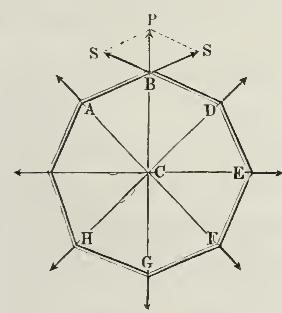
Die Dampfkessel müssen vor ihrem Gebrauche einer hydrostatischen Probe unterworfen werden. Nach preußischen Gesetzen wird ein Dampfkessel bei dem Anderthalb-, dagegen nach französischen Vorschriften bei dem Dreifachen des Druckes geprüft, welchem er beim Gebrauche ausgesetzt ist.

Die aus Band I, §. 363 entnommene Formel §. 408

$$e = \frac{pr}{T}$$

für die Wandstärke eines Dampfkessels läßt sich, wenn man den Querschnitt desselben als ein regelmäßiges Polygon $ABDE\ldots$, Fig. 622, ansieht, wie folgt entwickeln. Nehmen wir an, daß in jeder Kante der prismatischen Kesselwand eine Kraft P radial auswärts wirke. Zerlegen wir nun diese Kraft nach den Richtungen der benachbarten Seiten BA und BD, und bezeichnen wir die diesen Seiten gegenüberliegenden Centriwinkel $BCA = BCD$ durch α, so erhalten wir die Spannung einer Kesselwand:

Fig. 622.



$$S = \frac{P}{2\,sin.\frac{\alpha}{2}},$$

oder, wenn die Anzahl der Seiten sehr groß, also α sehr klein ist,

$$S = \frac{P}{\alpha}.$$

Bezeichnet p den Ueberschuß des inneren Luft-, Dampf- oder Wasserdruckes auf jeden Quadratzoll über dem äußeren Luftdruck, ferner l die Länge des Kessels und s eine Polygonseite $\overline{AB} = \overline{BD}$, so hat man:

$$P = lsp.$$

Nun ist aber

$$s = 2\,r\,sin.\frac{\alpha}{2},$$

wobei r den Kesselhalbmesser $\overline{CA} = \overline{CB}$ bezeichnet, daher hat man auch:

$$P = 2\,rl\,sin.\frac{\alpha}{2}p$$

und

$$S = rlp.$$

Diese Spannung hat der Querschnitt le der Kesselwand auszuhalten, folglich ist die dem Tragmodul T gleichzusetzende Spannung pr. Quadratzoll:

$$T = \frac{S}{le} = \frac{rlp}{le} = \frac{rp}{e},$$

und daher umgekehrt, die erforderliche **Wandstärke**:

$$e = \frac{rp}{T}.$$

In dieser Formel bezeichnet r eigentlich den mittleren Kesselhalbmesser; verstehen wir aber unter r den inneren Kesselhalbmesser, so müssen wir hiernach statt r, $r + \frac{e}{2} = r\left(1 + \frac{e}{2r}\right)$ einführen und folglich

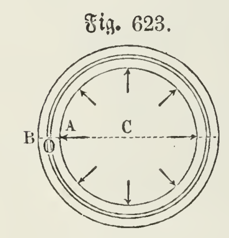
$$e = \frac{pr}{T}\left(1 + \frac{e}{2r}\right) = \frac{pr}{T}\left(1 + \frac{p}{2T}\right)$$

setzen.

(§. 409) **Dicke Kesselwände.** Jedenfalls gilt die Formel $e = \frac{pr}{T}$ nur für Blechkessel, wo $\frac{e}{r}$ nur eine kleine Zahl ist. Setzt man aber größere Blechdicken voraus, so ist diese Formel nicht mehr ausreichend.

Nimmt man an, daß sich die Blechdicke $\overline{AB} = e$, Fig. 623, bei der Ausdehnung der Kesselwand in Folge des inneren Druckes p pr. Flächeneinheit, nicht ändere, so sind wir auch genöthigt, anzunehmen, daß sich hierbei sämmtliche concentrische Schalen, in welche wir die Kesselwand zerlegen können, gleichviel erweitern und folglich auch gleichviel ausdehnen. Ist nun λ diese Ausdehnung und x der Halbmesser $\overline{CO}$ einer solchen Kesselschale, sowie ∂x die Dicke derselben, so hat man nach der bekannten Elasticitätsformel (s. Bd. I, §. 204) die Spannung dieser Schale:

Fig. 623.



$$\partial S = \frac{\lambda}{2\pi x} l \partial x . E = \frac{\lambda l E}{2\pi} \cdot \frac{\partial x}{x},$$

und folglich die Spannung der ganzen Kesselwand, nach Art. 22 der analyt. Hülfslehren:

$$S = \frac{\lambda l E}{2\pi} \int \frac{\partial x}{x} = \frac{\lambda l E}{2\pi} Ln. \left(\frac{x}{r}\right).$$

Da sich die innerste Kesselschale vom Halbmesser $CA = r$ verhältnißmäßig am meisten ausdehnt und folglich auch am stärksten gespannt wird, so hat man auch die Spannung derselben pr. Flächeneinheit dem Tragmodul, also

$$\frac{\lambda}{2\pi r} E = T$$

zu setzen, so daß nun

$$S = lr\,TLn\left(\frac{x}{r}\right),$$

oder, da $S = rlp$ ist,

$$p = TLn\left(\frac{x}{r}\right),$$

sowie umgekehrt,

$$\frac{x}{r} = (2{,}718\ldots)^{\frac{p}{T}}$$ (s. analyt. Hülfslehren, Art. 20)

zu setzen ist.

Jedenfalls ist endlich für x der äußere Kesselhalbmesser $\overline{CB} = r + e$ einzusetzen, so daß

$$\frac{r+e}{r} = (2{,}718\ldots)^{\frac{p}{T}},$$

und daher die Kesseldicke

$$e = r\left((2{,}718\ldots)^{\frac{p}{T}} - 1\right),$$

annähernd

$$= r\left[\frac{p}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{p}{T}\right)^2\right] = \frac{rp}{T}\left(1 + \frac{p}{2\,T}\right)$$

folgt.

Lamé (siehe dessen Traité de l'Elasticité) und Rankine (siehe dessen Manual of applied Mechanics) finden auf einem ganz anderen Wege

$$e = r\left(\sqrt{\frac{T+p}{T-p}} - 1\right),$$

wonach, wenn T viel größer als p ist,

$$\frac{T+p}{T-p} = 1 + \frac{2\,p}{T} + 2\left(\frac{p}{T}\right)^2, \text{ sowie } \sqrt{\frac{T+p}{T-p}} = 1 + \frac{p}{T} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{p}{T}\right)^2$$

ausfällt, und daher ebenfalls

$$e = \frac{rp}{T}\left(1 + \frac{p}{2\,T}\right)$$ zu setzen ist.

Der Abhandlung über die Festigkeit der Röhren von E. Winkler im Civilingenieur Bd. 6 zufolge ist annähernd zu setzen, 1) für offene Röhren:

$$e = \frac{rp}{T}\left(1 + \tfrac{5}{6}\,\frac{p}{T}\right),$$

dagegen für Röhren, welche an den Enden verschlossen sind:

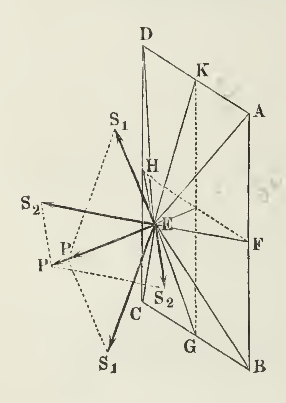
$$e = \tfrac{7}{8}\,\frac{rp}{T}\left(1 + \frac{91}{112}\,\frac{p}{T}\right).$$

Nach der Festigkeitslehre von D. F. Grashof, Berlin 1866, ist dagegen annähernd

$$e = \frac{rp}{T}\left(1 + {}^3/_2\,\frac{p}{T}\right) \text{ anzunehmen.}$$

§. 410 **Endflächen der Dampfkessel.** Die cylindrischen Dampfkessel werden an den Enden durch Halbkugeln oder durch Segmente einer Kugel oder eines Sphäroides begrenzt, und es entsteht daher noch die Frage, welche Stärken diesen Theilen der Kesselwand zu geben sind. Denken wir uns den Kessel in Form eines Polyeders und nehmen wir an, daß derselbe von ebenen dreiseitigen Flächen begrenzt sei, welche in vierkantigen Ecken wie E, Fig. 624, zusammenstoßen. Denken wir uns ferner dieses Eck über einer rectangulären Basis $ABCD$ stehend, dessen Seite $AB = CD = s_1$ und Seite $AD = BC = s_2$ sei, und bezeichnen wir wieder den Druck auf die Flächeneinheit durch p, so erhalten wir den Druck auf das ganze Eck:

Fig. 624.



$$P = s_1 s_2 p.$$

Diese Kraft läßt sich in zwei Theile P_1 und P_2 zerlegen, wovon der eine den Spannungen S_1, S_1 der Flächen ADE und BCE, und der andere den Spannungen S_2, S_2 der Flächen ABE und CDE das Gleichgewicht hält; es ist daher:

$$P_1 = \alpha_1 S_1 \quad \text{und} \quad P_2 = \alpha_2 S_2,$$

wenn α_1 und α_2 die den Winkeln α_1^0 und α_2^0 entsprechenden Bögen bezeichnen, welche die Neigungen der Flächen ADE und BCE, sowie ABE und CDE, d. i. die Winkel GEK und FEH zwischen den Höhenlinien dieser Flächen zu zwei Rechtwinkeln ergänzen.

Es ist also

$$P = P_1 + P_2, \text{ d. i. } s_1 s_2 p = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2.$$

Bezeichnen wir ferner die Halbmesser der durch G, E und K und durch F, E und H zu legenden Kreise durch r_1 und r_2, so haben wir:

$$\alpha_1 = \frac{s_1}{r_1} \text{ und } \alpha_2 = \frac{s_2}{r_2},$$

daher auch:

$$s_1 s_2 p = \frac{s_1 S_1}{r_1} + \frac{s_2 S_2}{r_2}.$$

Ist noch S die Spannung der Flächeneinheit, so kann man folglich die Spannung S_1, welche bei der Wanddicke e_1 der Breite $\overline{BC} = \overline{AD} = s_2$ entspricht, $= e_1 s_2 S$, und die Spannung S_2, welche der Breite $\overline{AB} = \overline{CD}$ zukommt, $= e_1 s_1 S$ setzen, und man erhält daher:

$$s_1 s_2 p = \frac{e_1 s_1 s_2 S}{r_1} + \frac{e_1 s_1 s_2 S}{r_2},$$

d. i.:

$$p = e_1 S \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

oder, wenn man für S den Tragmodul T einsetzt:

$$p = e_1 T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

und es ist daher die gesuchte Wanddicke:

$$e_1 = \frac{p}{T\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)}.$$

Diese Formel läßt sich auf jede Kesselform anwenden, wenn man nur für r_1 den größten und für r_2 den kleinsten Krümmungshalbmesser von demjenigen Theile der Kesselwand einsetzt, dessen Stärke (e_1) diese Formel angiebt.

Wenden wir diese Formel auf die Endflächen eines cylindrischen Kessels an, und setzen wir hierbei voraus, daß dieselben durch Sphäroide von der Höhe h gebildet werden, so haben wir für die Stärke einer solchen Endfläche, da hier jeder der Krümmungshalbmesser (nach „Ingenieur" S. 238) $= \frac{r^2}{h}$ ist,

$$e_1 = \frac{p}{T\left(\frac{h}{r^2} + \frac{h}{r^2}\right)} = \frac{p r^2}{2\,Th} = \frac{r}{2\,h} \cdot \frac{p\,r}{T}.$$

Für halbkugelförmige Endflächen ist $h = r$, daher $e_1 = \frac{1}{2} e$ (vergl. Bd. I, §. 363); wäre hingegen die Blechstärke für die Endsegmente dieselbe wie für den cylindrischen Mittelkörper, hätte man also $e_1 = e$, so würde die Höhe $h = \frac{r}{2}$, d. i. der Hälfte von dem Halbmesser des Kessels genommen werden können. Es ist hiermit eine Abhandlung von Lamé in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 30, oder das Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1850, Nro. 19 zu vergleichen.

Beispiele. 1. Man will zur Erzeugung von Dämpfen von 4 Atmosphären Spannung einen halbkugelförmig auslaufenden Walzenkessel von 4 Fuß Weite und 22 Fuß Länge construiren, und fragt nun nach dessen Wandstärke. Die Formel $e = 0{,}0015\,pd + 0{,}1$ Zoll giebt, wenn man $p = 4 - 1 = 3$ und $d = 4 \,.\, 12 = 48$ Zoll einsetzt, die gesuchte Kesselstärke

$$e = 0{,}0015 \,.\, 3 \,.\, 48 + 0{,}1 = 0{,}316 \text{ Zoll}.$$

Nach dem Obigen könnten die hemisphärischen Enden nur halb so dick sein, als der cylindrische Theil der Kesselwand, allein wegen der leichteren Herstellung

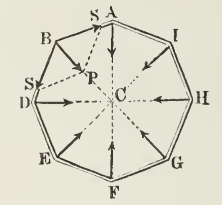
und wegen der Schwächung durch das stärkere Biegen ändert man an diesen Stellen die Blechstärken gewöhnlich nicht.

2. Welche Wandstärke soll man einem Kofferkessel von 6 Fuß Höhe, $4\frac{1}{2}$ Fuß Weite und 18 Fuß Länge ertheilen? Hier hat man statt d die größte Weite einzuführen, welche 7 Fuß oder 84 Zoll betragen kann. Nimmt man nun den Ueberschuß des inneren Druckes über den äußeren, $\frac{1}{4}$ Atmosphäre an, so erhält man die gesuchte Kesselstärke:

$$e = 0{,}0015 \,.\, \tfrac{1}{4} \,.\, 84 + 0{,}1 = 0{,}1315 \text{ Zoll}.$$

§. 411 **Feuerröhren.** Es ist nun noch die Frage zu beantworten, welche Stärken erfordern die durch den Kessel gehenden und durch den Dampf von außen nach innen gedrückten Feuer- oder Rauchröhren? Um diese Frage zu beantworten, denken wir uns vorerst einen Kessel mit polygonalem Querschnitte AEG, Fig. 625, und nehmen nun an, daß in jedem der Ecke A, B, D... eine Kraft P von außen nach innen wirke. Zerlegen wir nun dieselbe nach den Richtungen der benachbarten Seiten, so bekommen wir, wie oben, §. 408, die Compressionskraft in jeder Seite:

Fig. 625.



$$S = \frac{P}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

oder, wenn wir den Centriwinkel $\alpha^0 = ACB = BCD$ ... klein annehmen:

$$S = \frac{P}{\alpha}.$$

Nun ist aber der Druck P in jeder Ecke oder vielmehr in jeder Seitenkante, $= \alpha r l p$ zu setzen, deshalb folgt denn $S = r l p$. Je zwei der Kräfte S, S... drücken das zwischen befindliche Kesselstück zusammen, es ist daher:

$$S = e l T, \quad \text{oder} \quad r l p = e l T,$$

und die gesuchte Kesseldicke:

$$e = \frac{r p}{T}.$$

Da der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens gegen das Zerreißen beinahe doppelt so groß ist als der gegen das Zerdrücken (s. Band I, Tab. §. 212), so folgt hiernach, daß bei gleichem Drucke und gleicher Größe ein von außen gedrückter Kessel eine doppelt so dicke Wand erhalten muß, als ein von innen gedrückter Kessel. Dies bleibt richtig, so lange die Kessel vollkommen rund sind, aber vielfachen Beobachtungen zufolge (s. Traité des machines à vapeur, par Bataille u. s. w.) werden von außen gedrückte Röhren sehr leicht platt gedrückt, wenn sie unrund sind, deshalb ist es erforderlich, solchen Röhren von außen die genaue Kreiscylinderform zu geben.

Um nun die Erscheinung des Plattdrückens dieser Röhren zu ergründen, denken wir uns gleich einen Kessel mit elliptischem Querschnitte $ABDE$, Fig. 626, und bestimmen die Kraftmomente eines Quadranten AB von demselben. Die sämmtlichen Drücke, welche rund herum auf diese Ellipse wirken, lassen sich zunächst nach zwei Richtungen zerlegen. Ist die große Halbaxe $\overline{CA} = a$, die kleine Halbaxe $\overline{CB} = b$, sowie Länge des Kessels $= l$ und der Druck auf den Quadratzoll $= p$, so hat man aus bekannten hydrostatischen Gründen (s. Bd. I, §. 360) die Kraft auf AB, in der Richtung von $BC, = alp$ und die in der Richtung von $AC, = blp$. Ebenso groß sind die Kräfte auf die übrigen drei Quadranten; denken wir uns daher A als Stützpunkt, so haben wir auf AB folgende Hebelkräfte als wirksam zu betrachten. Erstens die Kraft $S = blp$ am Hebelarme $\overline{CB} = b$ vom Drucke auf BD herrührend, zweitens die Summe alp der Kräfte $Q\ldots$, welche in die Richtung BC, und drittens die Summe blp der Kräfte $R\ldots$, welche in der Richtung AC und AB wirken. Die erste Kräftesumme besteht aus den Componenten $\frac{al}{n}p, \frac{al}{n}p \cdots \frac{al}{n}p$ mit den Hebelarmen $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n} \cdots \frac{na}{n}$, und hat daher das Moment:

Fig. 626.

$$\frac{al}{n}p\left(\frac{a}{n} + \frac{2a}{n} + \cdots + \frac{na}{n}\right) = \frac{a^2lp}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

oder, da die Anzahl der Componenten unendlich groß zu nehmen ist, das Moment $\frac{a^2lp}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}a^2lp$, und aus ähnlichen Gründen hat die zweite Kräftesumme das Moment $\frac{1}{2}b^2lp$. Nun wirkt aber das Moment b^2lp von S den letzten beiden Momenten entgegen, es ist daher das Brechungsmoment von AB:

$$M = \frac{a^2lp}{2} + \frac{b^2lp}{2} - b^2lp = \frac{(a^2 - b^2)lp}{2}.$$

Wenn nun noch e die Dicke der Kesselwand bezeichnet, so hat man, damit die letztere dem Abbrechen in A hinreichend widerstehe, zu setzen:

$$le^2T = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)lp,$$

und daher:

$$e = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{2T}\right)p}.$$

Ist der Querschnitt der Kesselwand genau kreisförmig, so fällt $b = a$, daher $e =$ Null aus; dann tritt folglich ein Zerbrechen nicht ein.

Wird derselbe Kessel von innen nach außen gedrückt, so stellt sich zwar das Biegungs- oder Brechungsmoment und also auch die nöthige Kesselstärke ebenso groß heraus, allein es findet doch insofern ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Fällen Statt, als ein Druck von außen den Kessel noch mehr deformirt, ein Druck von innen aber denselben mehr der richtigen Cylinderform nahe bringt. Ist nun durch das Zusammensetzen der Röhre schon eine gewisse Spannung in das Blech gekommen, so wird diese durch den Außendruck noch erhöht und dagegen durch den Innendruck vermindert, im ersten Falle also dem Zerspringen näher und im zweiten Falle von demselben entfernter geführt.

Nach vorläufigen Mittheilungen über die Versuche, welche Fairbairn in der neuesten Zeit angestellt hat, ist die nöthige Wanddicke der Röhren, welche von außen gedrückt werden, auch noch von der Länge l dieser Röhren abhängig, und annähernd $e = \mu \sqrt{p d l}$ anzunehmen, wo μ eine vom Tragmodul T abhängige Erfahrungszahl bezeichnet (s. „Civilingenieur", Band 4, Seite 53).

Nach Rankine ist $p = 659720 \frac{e^2}{l d}$ Atmosphären zu setzen, wonach $e = 0{,}0012312 \sqrt{p l d}$ Zoll folgt.

Herr Professor Grashof leitet aus diesen Versuchen folgende empirische Formel $p = 71917 \frac{e^{2,081}}{l^{0,564} \quad d^{0,889}}$ Atmosphären ab, in welcher d die Röhrenweite, l die Röhrenlänge und e die Dicke der Röhrenwand, in Zollen ausgedrückt, bezeichnet.

In Frankreich macht man die dem äußeren Drucke ausgesetzten Röhren noch einmal so dick, als die inneren Druck auszuhaltenden Röhren, unter übrigens gleichen Verhältnissen. Nach den Vorschriften in Preußen hingegen ist den Rauchröhren von Eisenblech die Dicke

$$e = 0{,}0067 d \sqrt[3]{p} + 0{,}05 \text{ Zoll},$$

und denen von Messingblech, die aber nie über 4 Zoll weit sein dürfen, die Dicke

$$e = 0{,}01 d \sqrt[3]{p} + 0{,}07 \text{ Zoll}$$

zu geben.

Beispiel. Welche Wandstärke muß man den 2 Zoll weiten Feuerröhren eines Dampfwagens geben, damit sie den Außendruck von 5 Atmosphären aushalten? Setzen wir $d = 2$ und $p = 5 - 1 = 4$, so bekommen wir nach preußischen Vorschriften bei Anwendung von Eisen- oder Kupferblech die gesuchte Stärke:

$$e = 0{,}0067 . 2 \sqrt[3]{4} + 0{,}05 = 0{,}021 + 0{,}05 = 0{,}071 \text{ Zoll} = 0{,}85 \text{ Linien},$$

und bei der Anwendung von Messingblech

$e = 0{,}01 . 2 \sqrt{4} + 0{,}07 = 0{,}102$ Zoll $= 1{,}22$ Linien.

Setzen wir in der Formel $e = \sqrt{\frac{(a^2 - b^2)\,p}{2\,T}}$, $a = 1$ und $b = 0{,}9$ Zoll, ferner $p = 4 . 14{,}14 = 56{,}6$ und $T = 6000$, so erhalten wir hingegen:

$e = \sqrt{\frac{0{,}19 . 60{,}2}{12000}} = \sqrt{0{,}000895} = 0{,}0299$ Zoll $= 0{,}36$ Linien.

Ebene Kesselwände. Einfache ebene Kesselwände können bei §. 412
gleicher Dicke viel weniger Druck aushalten, als gekrümmte Wände; deshalb werden dieselben auch nur bei niedrigem Dampfdrucke angewendet, und bei größerer Ausdehnung noch verankert, oder, wie z. B. AB, Fig. 627, durch trianguläre Blechzwickel (franz. goussets; engl. gussets) $a, b, c, d \dots$ verstärkt.

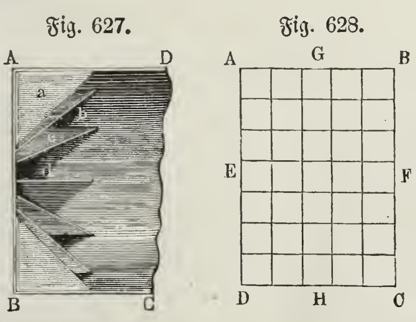


Fig. 627. Fig. 628.

Die Theorie der Biegung belasteter ebener Platten führt auf ganz complicirte Ausdrücke, auf deren Entwickelung hier Verzicht geleistet werden muß (s. Navier's Mechanik der Baukunst, §. 641 u. s. w.); auf folgende Weise erhalten wir aber wenigstens einiges Anhalten bei Beurtheilung der erforderlichen Dicke solcher Platten. Es sei $ABCD$, Fig. 628, eine rectanguläre Blechtafel von der Länge $AB = l$ und Breite $AD = b$, welche von einem Rahmen oder von Nietenreihen eingefaßt ist, und pr. Flächeneinheit einen Druck p auszuhalten hat. Denken wir uns dieses Blech in Längenstreifen zerlegt, deren Enden in AD und BC festgehalten werden, und nehmen wir an, daß vom Drucke p gegen diese Fläche der Theil p_1 auf die Spannung dieser Streifen verwendet werde, so können wir, wenn wir noch die Breite eines solchen Streifens durch s und die Dicke des Bleches durch e bezeichnen, setzen (s. Band I, §. 446)

$$l s p_1 = \frac{12\ W T}{\frac{1}{2}\, l e} = 12\, \frac{s e^2}{l}\, \frac{T}{6} = 2\, \frac{s e^2}{l}\, T,$$

oder:

$$l^2 p_1 = 2\, e^2\, T,$$

und daher:

$$e = l \sqrt{\frac{p_1}{2\,T}}.$$

Denken wir uns dagegen die Bleche durch Breitenstreifen, wie GH, zerlegt, deren Enden in AB und CD festsitzen, und nehmen wir an, daß diese Spannung dieser Streifen den Theil p_2 des Druckes $p = p_1 + p_2$ in Anspruch nimmt, so finden wir auf gleiche Weise

$$e = b\sqrt{\frac{p_2}{2\,T}}.$$

Da die Durchbiegung im ersten Falle wie $\frac{l^4 s p_1}{W} = \frac{l^4 s p_1}{s e^3} = \frac{l^4 p_1}{e^3}$ und im anderen Falle wie $\frac{b^4 p_2}{e^3}$ wächst (s. Band I, §. 223), und da die eine so groß ist, wie die andere, so läßt sich $l^4 p_1 = b^4 p_2$, daher

$$p_2 = \frac{l^4}{b^4}\,p_1 \quad \text{und} \quad p_1\left(1 + \frac{l^4}{b^4}\right) = p,$$

d. i.

$$p_1\,(l^4 + b^4) = b^4 p, \text{ folglich } p_1 = \frac{b^4 p}{l^4 + b^4}$$

und die gesuchte Blechstärke

$$e = b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4}\cdot\frac{p}{2\,T}} \text{ setzen.}$$

Unter der zweiten Voraussetzung ist

$$e = l\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4}\cdot\frac{p}{2\,T}}.$$

Ist nun $b > l$, so wird man natürlich die erforderliche Blechstärke stets nach der Formel

$$e = b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4}\cdot\frac{p}{2\,T}}$$

berechnen müssen.

Für quadratische Bleche hat man $l = b$, und daher:

$$e = b\sqrt{\frac{p}{4\,T}} = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{p}{T}}.$$

Bei den cylindrischen Kesselwänden ist die Wandstärke:

$$e = \frac{dp}{2\,T} = 0{,}0015\,pd + 0{,}1 \text{ Zoll},$$

daher:

$$\frac{1}{2\,T} = 0{,}0015;$$

setzen wir nun diesen Werth für $\frac{1}{2\,T}$ in die gefundene Formel für die Dicke ebener Kesselwände, so erhalten wir:

$$e = b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4} \cdot \frac{p}{2\,T}} = 0{,}0387\,b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4} \cdot p},$$

also für $l = b$:

$$= 0{,}03\,b\,\sqrt{p} \text{ Zoll.}$$

Beispiel. Ebene Platten, welche $\frac{1}{4}$ Atmosphäre Ueberdruck ($p = \frac{1}{4}$) auszuhalten haben, müssen nach der gefundenen Formel die Dicke

$$e = 0{,}0387\,b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{4\,(l^4 + b^4)}} = 0{,}01935\,b\sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^3 + b^4}} \text{ Zoll}$$

erhalten, und wäre die Breite einer solchen Platte $b = 72$, und die Länge $l = 60$ Zoll, also $\frac{b}{l} = \frac{72}{60} = \frac{6}{5}$, so würde

$$e = 0{,}01935 \,.\, 72\sqrt{\frac{6^2 \,.\, 5^2}{6^4 + 5^4}} = \frac{1{,}393 \,.\, 6 \,.\, 5}{\sqrt{3921}} = \frac{41{,}79}{62{,}62} = \frac{2}{3} \text{ Zoll}$$

anzuwenden sein.

Stehbolzen. Ebene Kesselflächen kommen auch noch bei den Dampf- §. 413
generatoren der Dampfwagen und Dampfschiffe vor. Da diese Dampfkessel Dampf von Hochdruck erzeugen, so sind hier Verankerungen u. s. w. unumgänglich nöthig. Insbesondere gehören hierher die parallelepipedischen Feuerkästen (s. §. 403) der Locomotiven. Um die in einem solchen Raume erzeugte Wärme soviel wie möglich auf Dampferzeugung zu verwenden, setzt man denselben aus zwei in einander steckenden Blechkästen zusammen und läßt den Raum zwischen den Wänden derselben mit dem Wasserraume des Kessels communiciren. Das diesen Zwischenraum erfüllende Wasser drückt nun mit derselben Kraft p wie der darüberstehende Dampf auf die Wände dieser Kästen, und es müssen deshalb dieselben noch durch Anker oder sogenannte Stehbolzen (franz. entretoises; engl. stays) mit einander verbunden werden. Der innere oder eigentliche Feuerkasten besteht in der Regel aus Kupferblech von $\frac{3}{8}$ Zoll Dicke, wogegen der äußere oder Wasserkasten auch aus Eisenblech gebildet wird. Der Zwischenraum hat eine Weite von 3 bis 4 Zoll, und die eisernen oder kupfernen Stehbolzen sind 4 bis 5 Zoll von einander entfernt und haben eine mittlere Dicke von $\frac{3}{4}$ Zoll. Nach den Versuchen von Fairbairn (s. dessen Usefull information for Engineers) ist die Tragkraft eiserner Platten mit eisernen Stehbolzen circa doppelt so groß, als die kupferner Platten mit kupfernen Stehbolzen, auch ist die der Bolzen mit Köpfen, wie AA, Fig. 629 (a. f. S.), um $\frac{1}{4}$ größer als die der einfachen Schrauben BB.

Denken wir uns das durch Stehbolzen $a, b, c \ldots$ unterstützte Blech $ABCD$, Fig. 630, in Streifen wie AF und GH zerlegt, welche parallel den Diagonalen ac und bd der von je vier Stehbolzen gebildeten Quadrate

gerichtet sind, so können wir hier die im vorigen Paragraphen entwickelte Formel

Fig. 629.

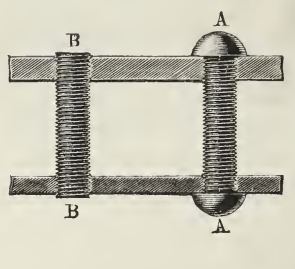
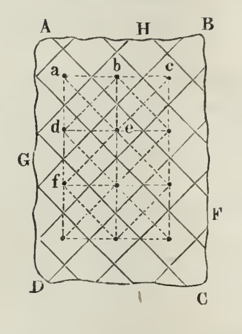


Fig. 630.



$$e = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{p}{T}}$$

zur Bestimmung der nöthigen Blechdicke unmittelbar anwenden, wenn wir nur statt b die Diagonale $b = a\sqrt{2}$ des Quadrates einsetzen, dessen Seitenlänge a die Entfernung zwischen je zwei neben einander stehenden Stehbolzen ist.

Hiernach hat man also:

$$e = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2p}{T}} = a\sqrt{\frac{p}{2T}},$$

und daher für $\frac{1}{2T} = 0{,}0015$:

$$e = 0{,}0387\, a\sqrt{p} \text{ Zoll.}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit der von Brix gefundenen Formel (s. die Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, Jahrg. 1849) vollkommen überein. Der Stärke der inneren, dem Feuer zugekehrten Wände kann man noch ein Viertel zusetzen.

Die Stärke d eines Stehbolzens ist, da ein solcher den Druck a^2p auf das Quadrat a^2 von der Seitenlänge auszuhalten hat, durch die Gleichung

$$\frac{\pi d^2}{4}\, T = a^2 p$$

bestimmt, welche auf den Ausdruck

$$d = a\sqrt{\frac{4p}{\pi T}}$$

führt.

Setzt man auch hier $\frac{1}{2T} = 0{,}0015$ ein, so erhält man:

$$d = \sqrt{\frac{0{,}012}{\pi}}\, a\sqrt{p} = 0{,}0619\, a\sqrt{p}.$$

Nach Brix ist

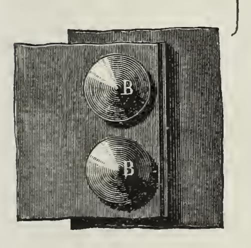
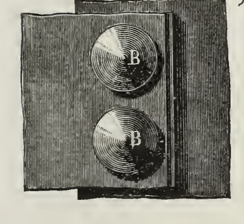
$$d = 0{,}069\, a \sqrt{p} + 0{,}125 \text{ Zoll}$$

in Anwendung zu bringen.

Die Decke des Feuerkastens besteht aus einer einfachen Platte und erhält durch eiserne Tragstäbe die nöthige Tragfähigkeit, deren Stärke nach bekannten Formeln der relativen Festigkeit (s. Band I, §. 240 u. s. w.) zu berechnen ist.

Nietverbindungen. Die ebene und krummflächige Verbindung der Kesselbleche durch Nieten führt Fig. 631 im Durchschnitte und im Grundrisse vor Augen. Ist wieder e die Blechstärke, so erhält der Nietbolzen C die Stärke §. 414

Fig. 631.



$$d = 2e,$$

der halbkugelförmige oder Setzkopf A den Durchmesser

$$d_1 = 3e,$$

und der kegelförmige oder Schließkopf B den Durchmesser

$$d_2 = 4e,$$

sowie die Höhe

$$h_2 = {}^3/_2\, e,$$

so daß das zur Bildung desselben nöthige Bolzenstück die Länge

$$l_2 = 2e$$

erhalten muß.

Ferner ist der Abstand der Axen je zweier Bolzen von einander:

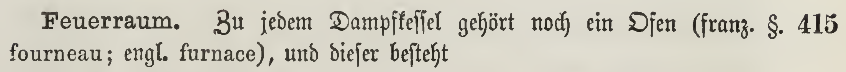
Fig. 632.

$$a = 5e$$

und der Abstand dieser Axen vom Blechrande:

$$a_1 = 3e.$$

Die Winkelverbindung zweier Bleche wird durch ein Winkelblech DEF, Fig. 632, mit zwei Nietreihen bewerkstelligt. Die mittlere Dicke dieses Winkelbleches ist gleich der Dicke e der zu verbindenden Bleche, in der Mitte nimmt man sie aber $^1/_7$ größer, sowie am Ende $^1/_7$ kleiner als e. Die Breite $\overline{ED} = \overline{EF}$ eines Blechschenkels nimmt man $= 1$ Zoll $+ 4{,}5\, e$.



Feuerraum. Zu jedem Dampfkessel gehört noch ein Ofen (franz. fourneau; engl. furnace), und dieser besteht §. 415

1) aus dem Feuerraume (franz. foyer; engl. hearth, furnace),

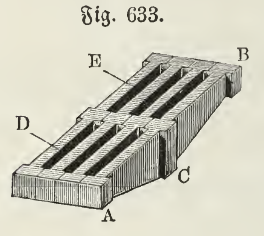
2) aus den **Feuerkanälen** oder **Zügen** (franz. carneaux; engl. flues) und

3) aus der **Esse** oder dem **Schornstein** (franz. cheminée; engl. chimney).

In dem ersten Raume findet die Verbrennung des Brennstoffes Statt, im zweiten wird das Product der Verbrennung, die Feuerluft, der Rauch u. s. w. an der Heizfläche des Kessels hingeführt, um seine Wärme diesem mitzutheilen, und im dritten werden dieselben in die freie Luft abgeführt.

Was zunächst den Feuerraum betrifft, so wird dieser durch den sogenannten **Rost** (franz. la grille; engl. the grate) in zwei Abtheilungen zertheilt, und es bildet nur die oberste Abtheilung den eigentlichen Brennherd, die unterste aber dient zur Aufnahme der Asche und anderer festen Rückstände der Verbrennung, und heißt deshalb der **Aschenraum** (franz. le cendrier; engl. the ashpit). Der Rost wird durch eiserne Stäbe gebildet, welche schmale und nach unten zu sich erweiternde Spalten zum Durchziehen der Luft und zum Durchfallen der Rückstände zwischen sich lassen. Diese Zwischenräume erhalten bei Steinkohlenfeuerung ungefähr $^1/_2$ Zoll, bei Holz- und Torffeuerung aber nur bis $^1/_5$ Zoll Breite, und im ersten Falle nehmen sie $^1/_4$, im zweiten aber $^1/_6$ der ganzen Rostfläche ein. In Fig. 633 sind einige an einander stoßende Roststäbe abgebildet. Es ist ABC der vorderste Roststab, und es sind D und E die Zwischenräume zwischen je zwei Stäben.

Fig. 633.



Bei kleineren Kesselanlagen wendet man mit Vortheil sogenannte **Schüttelroste** an, wo die Roststäbe cylindrisch auslaufen und so gelagert sind, daß sie durch einen einfachen Mechanismus in eine schwingende Bewegung gesetzt und dadurch leicht von den Rückständen gereinigt werden können.

Sehr wichtig für die Verbrennung ist die Größe der Rostfläche. Nach den neueren Beobachtungen von **Cavé** soll dieselbe $^1/_{17}$ der Heizfläche des Kessels sein. Uebrigens rechnet man auch noch auf den stündlichen Verbrauch von 14 Pfund Steinkohle oder 73 Pfund Holz einen Quadratfuß Rostfläche. Bei Dampfwagenkesseln, wo ein künstlicher Luftzug statthat, und Koaks verbrannt wird, sind die Verhältnisse ganz anders; hier ist die Rostfläche nur $^1/_{50}$ bis $^1/_{60}$ der Heizfläche. Bei Steinkohlenfeuerung soll die Rostfläche 13 bis 18 Zoll unter der Kesselfläche liegen, bei Holzfeuerung aber 18 bis 24 Zoll. Der Aschenraum unter dem Roste soll wenigstens $2^1/_2$ Fuß tief sein, damit die Roststäbe durch die angehäuften Rückstände nicht sehr erhitzt werden. Die zur Verbrennung nöthige Luft tritt durch eine Thür in den Aschenraum und von da zwischen den Roststäben hindurch

in den Feuerraum. Um den Luftzug zu reguliren, kann man ein besonderes Register (Schieber) anbringen, und um denselben zu erhöhen, kann man die Luft durch einen unterirdischen Gang (Anzucht) zuführen.

Der Feuerraum über dem Herde ist mit einer Thür versehen, welche nur dann geöffnet wird, wenn es darauf ankommt, das Feuer zu schüren, den Rost zu reinigen und neues Brennmaterial einzuführen. Um die Abkühlung durch die Ofenthür möglichst zu mäßigen und diese vor dem Feuer zu schützen, ist es gut, sie mit doppelten Wandungen zu versehen, oder von innen mit Backsteinen zu bekleiden.

Rauchfreie Verbrennung. Der aus der Verbrennung hervorgehende Rauch besteht aus einer Menge unverbrannter Kohlentheilchen und kommt folglich nur bei einer unvollkommenen mit Verlust von Wärme verbundenen Verbrennung vor. Aus diesem Grunde hat man daher auch bei jeder Feuerung soviel wie möglich eine rauchfreie Verbrennung zu erzielen. Sehr viel ist hierbei schon durch gute Abwartung und Unterhaltung des Feuers zu thun, namentlich dadurch, daß man das Brennmaterial in nicht zu großen Partien aufgiebt, dasselbe möglichst auf den Rost ausbreitet und so schürt, daß der sich bei dem neu aufgegebenen Brennstoffe bildende Rauch über dem bereits vollkommen in Verbrennung befindlichen Brennstoffe wegstreichen muß. Es kommt natürlich hierbei vorzüglich darauf an, daß dem Feuerherde eine hinreichende Menge atmosphärische Luft zugeführt und derselben hinreichende Gelegenheit geboten werde, sich über das Brennmaterial auszubreiten und mit den Verbrennungsgasen in Berührung zu kommen. **§. 416**

Die Doppelherde sind die vorzüglichsten Mittel zur Erzeugung einer rauchlosen Verbrennung.

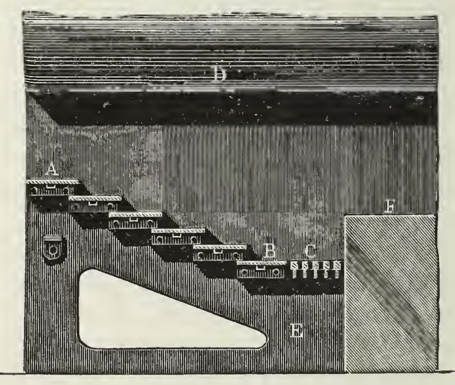
Ein solcher Herd ist der Länge nach durch eine Scheidewand in zwei Theile getheilt, welche jedoch mit einem und demselben Zug- oder Feuercanal communiciren. Wenn nun das Brennmaterial abwechselnd in der einen oder der anderen Abtheilung aufgegeben wird, so strömen die mit Rauch geschwängerten Verbrennungsgase, welche bei dem frisch aufgetragenen Brennstoffe entstehen, mit den Verbrennungsgasen, welche aus den vollständig in Verbrennung befindlichen Brennstoffen hervorgehen und noch mit freier atmosphärischer Luft gemengt sind, gemeinschaftlich in und durch die Züge, und können hierbei vollständig zur Verbrennung gelangen.

Als Rauchverbrennungsmittel sind auch besondere Luftcanäle, welche unmittelbar hinter der Feuerbrücke einmünden, angewendet worden. Die durch diese Canäle zugeführte atmosphärische Luft vermengt sich dann beim Eintritte in die Züge mit den Verbrennungsgasen, wobei der in den letzteren enthaltene Rauch vollkommen verbrennt. Nach Fairbairn ist bei Anwendung dieser Canäle, wenn der Querschnitt desselben $^1/_{115}$ der Rostfläche be-

trägt, das Ersparniß an Brennmaterial mindestens $12\frac{1}{2}$ Procent. Diese Luftcanäle haben sich aber nicht überall bewährt.

Ein anderes Hülfsmittel zur Erzeugung einer rauchlosen Verbrennung besteht in der Anwendung eines sogenannten Treppenrostes (franz. grilles à gradins; engl. grate with steps). Derselbe unterscheidet sich von dem gewöhnlichen Rost dadurch, daß hier die Roststäbe durch circa 8 Zoll breite Eisenplatten ersetzt sind, welche in Abständen von je $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll stufenförmig über einander liegen und dabei circa je 2 Zoll über einander übergreifen. Die Einrichtung eines solchen Feuerherdes mit Treppenrost ist aus Fig. 634 zu ersehen. Es ist hier AB der aus sechs Platten bestehende Treppenrost, C ein daran anschließender kurzer Barrenrost, D der Dampfkessel, E der Ascheneimer und F die Feuerbrücke.

Fig. 634.



Die Treppenroste werden vorzüglich bei Heizung mit Torf, Braunkohle und schlechteren Steinkohlensorten angewendet, wo es darauf ankommt, den Zutritt der atmosphärischen Luft zu erleichtern. Statt derselben wendet man auch oft gewöhnliche Roste mit Neigung an.

§. 417 **Feuercanäle.** Damit das Feuer den Kessel sehr nahe bestreiche, vorzüglich aber durch innigere Berührung mit der Luft eine vollständigere Verbrennung eingeleitet werde, ist es nöthig, an der Uebergangsstelle aus dem Feuerraume in die Feuercanäle eine Feuerbrücke (franz. autel; engl. firebridge), d. i. eine Mauer aufzuführen, welche nur noch 4 bis 6 Zoll Zwischenraum zwischen ihr und dem Kesselboden übrig läßt. Die Verengung des Feuercanales durch die Feuerbrücke hat den Zweck, die Verbrennungsgase in nähere Berührung mit der zuströmenden Luft zu bringen und dadurch eine vollkommnere Verbrennung zu erlangen.

Was die Feuercanäle oder Züge anlangt, so bestehen diese entweder aus einem einzigen, ein oder mehrere Male um oder auch in dem Kessel herumgehenden Canale, oder sie bestehen aus mehreren einzelnen Canälen oder Röhren, wovon jeder für sich den Rauch in die Esse führt. Die letzte Art der Feuercanäle kommt fast nur bei der Feuerung von innen, und zumal bei den Dampfwagenkesseln vor. Was diesen Canälen an Länge abgeht, wird durch

den Umfang des Querprofiles ersetzt. Denken wir uns z. B. einen einzigen Circulircanal mit kreisförmigem Querschnitte, von der Länge l und Weite d, ersetzt durch n Züge neben einander, jeder von der Länge l_1 und Weite d_1, so können wir folgende Gleichungen aufstellen:

$$\pi d l = n \pi d_1 l_1 \quad \text{und} \quad \frac{\pi d^2}{4} = \frac{n \pi d_1^2}{4},$$

und erhalten hiernach

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{n}} \text{ sowie } l_1 = \frac{l}{\sqrt{n}}.$$

Z. B. für $n = 64$:

$$d_1 = \frac{d}{8} \quad \text{und} \quad l_1 = \frac{l}{8};$$

es können also 64 Röhren achtmal so kurz und achtmal so eng gemacht werden, als eine einzige Rauchröhre.

Die Canäle der ersten Art bestehen in blechernen Röhren [vergl. §. 403 (5)], die der zweiten Art aber werden aus feuerfesten Steinen aufgeführt und erhalten mehr oder weniger rectanguläre Querschnitte, von denen die eine Seite durch den Kessel begrenzt wird. Es ist eine Erfahrungsregel, diesem Querschnitte $^1/_4$ bis $^1/_6$ mal so viel Inhalt zu geben, als der Rostfläche. Die Länge der Züge darf übrigens auch nicht zu groß sein, wenigstens nicht mehr als 90 Fuß betragen. In der Regel begnügt man sich, wenn die in den Schornstein tretende Feuerluft nicht mehr als 250 bis 300^0 Wärme behält. Am Ende des ganzen Feuercanales, in dem sogenannten, zwischen dem Kessel und der Esse befindlichen Fuchse, ist noch eine Thür oder ein Schieber (franz. registre, engl. damper) anzubringen, um das Feuer reguliren und den Ofen gänzlich schließen zu können. Uebrigens ist die ganze Feuerungsanlage mit einer starken Mauer, dem sogenannten Rauhgemäuer, zu umschließen.

Kesselanlage. Die Haupteinrichtung einer Kesselanlage mit äußerer Feuerung ist aus Fig. 635 (a. f. S.) im Längendurchschnitte und aus Fig. 636 im Querschnitte zu ersehen. Es ist hier A der Dampfkessel mit zwei Rauchröhren B, B, ferner C das Mauerwerk, D der Rost, E die Feuerthür, F der Aschenfall, G der Theil des Feuercanals, in welchem die Feuerluft unter dem Kessel, und H, H sind die Canäle, in welchen dieselbe an den Seiten des Kessels hingeht, nachdem sie durch die Röhren B, B nach vorn zurückgekehrt ist. Die atmosphärische Luft strömt durch den Luftcanal K von hinten zu, kann aber auch wie in Fig. 635 angedeutet ist, von der Seite her zuströmen. §. 418

Eine zweckmäßige Kesselanlage mit Doppelfeuerungen nach Fairbairn ist in den Figuren 637 bis 640 (a. S. 931) abgebildet, und zwar in einem

Längendurchschnitt, einem Horizontaldurchschnitt, einem Querschnitt und in der Frontansicht. Der Dampfkessel *A D* enthält zwei innere Heizröhren *B C* und

Fig. 635.

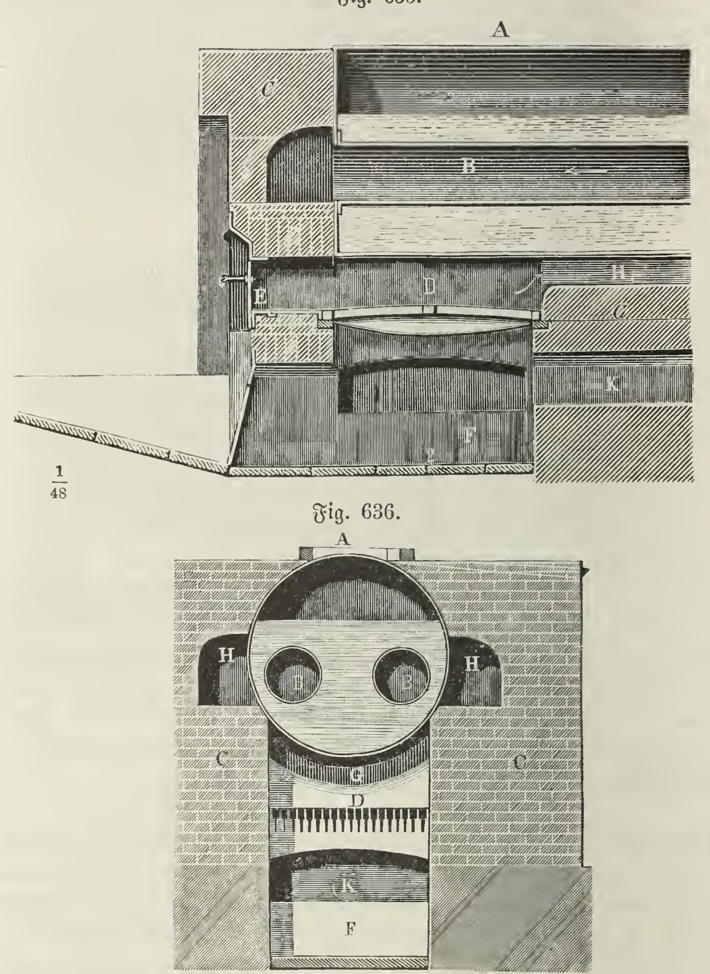


Fig. 636.

B_1 C_1 mit je einem Feuerherde; diese Heizröhren münden bei *E* an der Hinterfläche dieses Kessels in einem gemeinschaftlichen Zuge *EFGH* aus, welcher die Verbrennungsgase an der Außenfläche ein Mal um den Kessel herum und bei *H* in den Schornstein führt. Um eine vollständigere Verbrennung zu erlangen, ist in jeder Feuerbrücke *K* eine Oeffnung *ab* angebracht, welche aus dem Aschenfall erwärmte Luft in den Raum unmittelbar hinter der Feuerbrücke einführt; auch wird zu diesem Zwecke abwechselnd der

eine oder der andere Brennherd beschickt, so daß der bei frisch aufgeschütteten Kohlen sich bildende Rauch beim Eintritte E in den Zug noch verbrennen kann.

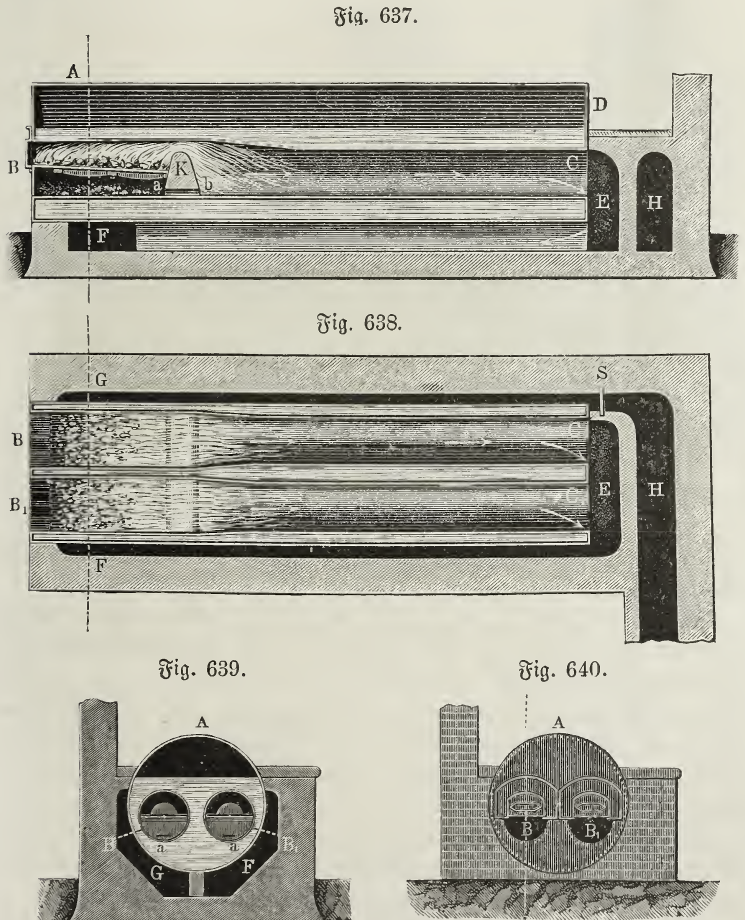


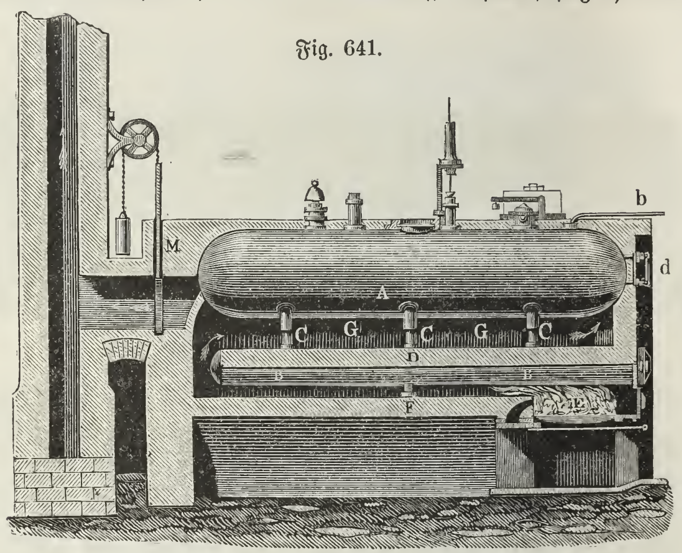
Fig. 637. Fig. 638. Fig. 639. Fig. 640.

Eine Kesselanlage mit Siederöhren ist noch in Fig. 641 (a. f. S.) abgebildet. Es ist hier der Dampfkessel A von den Siedern B und B durch ein Gewölbe D getrennt und es werden die letzteren der Einwirkung der unmittelbar vom Feuerraume kommenden und nach hinten strömenden Feuerluft gänzlich ausgesetzt, während der erstere von der in den Zügen G, G zurückkehrenden und nach Befinden um den ganzen Kessel herumgehenden Feuerluft erwärmt wird.

Zwischen einem Dampfkessel mit Siederöhren und einem solchen mit

Vorwärmeröhren findet der Unterschied Statt, daß sich dort der Feuerherd unter den Röhren, hier aber unter dem Kessel befindet, folglich dort die

Fig. 641.



Feuerluft von den Röhren nach dem Kessel strömt, hier aber erst den Kessel und dann die Röhren erwärmt.

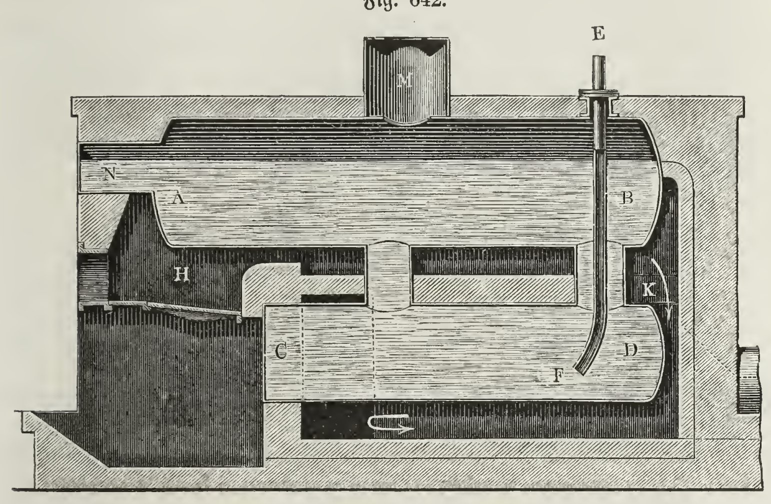
Um von der Feuerluft in den Zügen möglichst viel Wärme auf den Dampfgenerator überzutragen, ist nöthig, daß diese Luft an derjenigen Stelle in den Schornstein trete, wo die geringste Wärme statthat, wo also die Einführung des Speisewassers und die Bewegung des Wassers im Kessel beginnt; aus diesem Grunde ist den Dampfkesseln mit Vorwärmern der Vorzug zu geben vor den mit Siederöhren. Dieses Princip ist auch schon bei dem in den Fig. 637 und 638 abgebildeten Fairbairn'schen Kessel in Anwendung.

Eine besondere Kesselanlage mit Vorwärmeröhre führt noch Fig. 642 vor Augen. Es ist hier AB der Dampfkessel, CD der Vorwärmer, und EF das in denselben einmündende Speiserohr. Die Feuerluft bewegt sich erst vom Brennherde H aus auf dem Wege HK unter dem Kessel hin, sinkt dann herab in das Niveau des Vorwärmers CD und läuft um denselben herum, ehe sie in den Schornstein tritt.

§. 419 **Gasheizung.** Zuweilen verwendet man zur Kesselfeuerung auch brennbare Gase, oder gasförmige Brennstoffe (franz. combustibles gazeux; engl. gaseous fuels). Man kann diese Gase entweder in einem verschlossenen Raume verbrennen und direct auf den Kolben einer besonderen Maschine wirken lassen, oder man kann dieselben durch Verbrennung auf einem gewöhnlichen Feuer-

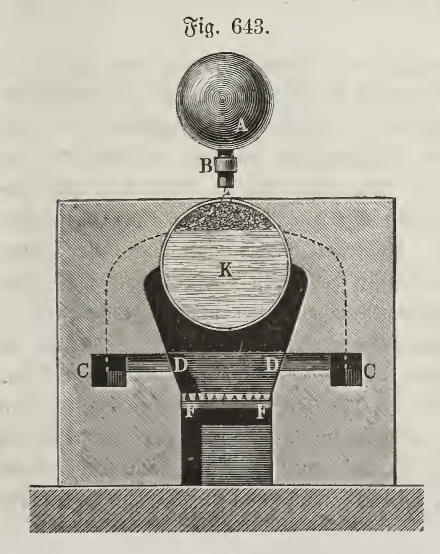
herd mit Dampfkessel zur Wirkung kommen lassen. Die zur Kesselfeuerung dienenden Gase sind das Kohlenoxydgas, das Leuchtgas, das Hohofengas,

Fig. 642.



und das Gas von Puddelöfen. Das Kohlenoxydgas wird wie das Leuchtgas in verschlossenen Gefäßen erzeugt, und das Hohofengas hingegen auf der Gicht von einem Hohofen abgeleitet. Das von den Puddelöfen abziehende Gas enthält nur wenig Kohlenoxydgas und wirkt deshalb hauptsächlich durch seine eigene Wärme, wogegen das Hohofengas außer 2 Procent Wasserstoff noch 13 Procent Kohlenoxyd enthält. Während ein Pfund gute Steinkohle, sowie auch reiner Kohlenstoff durch vollkommene Verbrennung nahe 8000 Calories liefert, giebt 1 Pfund Kohlenoxydgas nur 2400 Calories, und sind von 1 Pfund Hohofengas gar nur 900 Calories zu erlangen, wogegen durch Verbrennung von 1 Pfund Leuchtgas nahe 10000 Calor. erzeugt werden.

Fig. 643.



Die Einrichtung eines Ofens zur Dampferzeugung mittels der Hohofengase ist aus Figur 643 zu ersehen. Das Gicht=

gas wird zunächst in dem Reservoir *A* gesammelt, dann durch die Zweigröhren *BC*, *BC* in die Canäle *C*, *C* und von da durch eine Reihe von Seitencanälen wie *CD*, *CD* in den Feuerraum *DD* geleitet. Der Dampfkessel *K* wird an seiner unteren Hälfte von dem Gichtgase umspielt, dessen Verbrennung einer auf dem Rost *FF* ausgebreitete dünne Kohlenschicht unterhält.

Die Kessel zur Benutzung der Puddelofenflamme bestehen gewöhnlich in einer verticalen Röhre, an deren Umfang die Gasflamme außen emporsteigt; auch verwendet man dazu zuweilen horizontale Röhrenkessel ähnlich wie bei den Locomobilen.

§. 420 **Essen.** Der zum Verbrennen nöthige Luftwechsel wird vorzüglich durch den Schornstein oder die Esse herbeigeführt, es ist daher auch dieser ein wichtiger Bestandtheil einer Feuerungsanlage. Vorzüglich kommt es bei einer solchen Anlage darauf an, der Esse die hinreichende Höhe und Weite zu geben, und für sie ein zweckmäßiges Material auszuwählen. Kann man die Essen nicht hinreichend hoch machen, so muß man den nöthigen Luftzug durch besondere Mittel oder Maschinen hervorbringen. Bei Dampfwagen läßt man in dieser Absicht den verbrauchten Dampf durch die Esse ausströmen; in anderen Fällen wendet man auch Luft- oder Wettermaschinen an, welche die Luft entweder unter den Rost blasen oder aus den Feuercanälen heraussaugen.

Man stellt die Essen aus Steinen oder aus Metall her, und verwendet zu denselben im ersten Falle vorzüglich Ziegel, im zweiten aber Eisenblech. Die äußere Form der Essen aus Ziegeln oder anderen Steinen ist gewöhnlich eine vier- oder achtseitige Pyramide, seltener, dagegen die einer Blechesse, stets ein abgekürzter Kegel.

Man giebt den Essen gewöhnlich eine äußere Böschung von 0,015 bis 0,025 pr. 1 Fuß Höhe; ferner erhalten die Essenmauern oben die gewöhnliche Ziegelbreite von 6 Zoll und unten die zwei- bis dreifache Ziegelbreite zur Dicke.

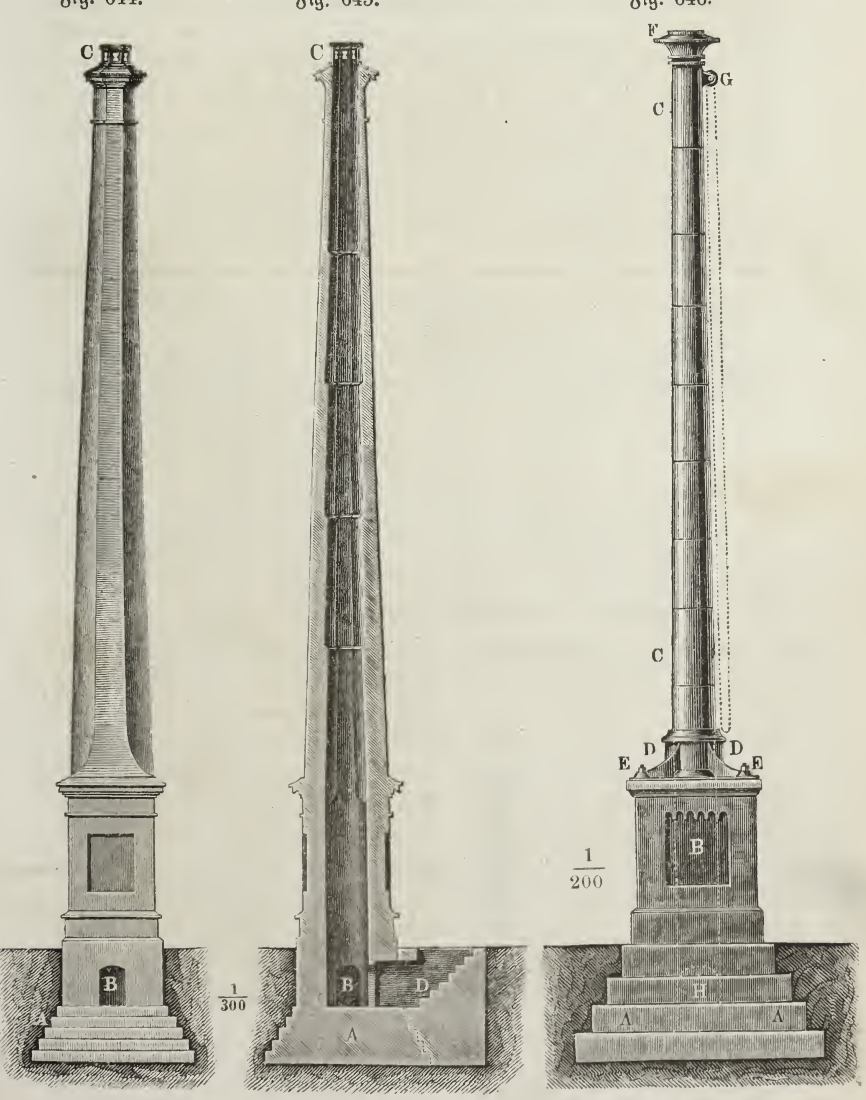
Was die Höhe und Weite der Schornsteine anlangt, so hängt die eine Dimension von der anderen ab; je höher eine Esse ist, desto mehr giebt dieselbe auch Zug, desto kleiner braucht also zur Abführung einer bestimmten Rauchmenge ihre Weite zu sein. Außerdem hängen aber auch diese Dimensionen noch von der Temperatur des in den Schornstein tretenden Rauches ab, und es müssen diese bei gleichem Rauchquantum um so größer sein, je niedriger die Temperatur des Rauches oder der abzuführenden Feuerluft ist. Hiernach erfordert also eine gute Wärmebenutzung hohe und weite Essen. Die gewöhnliche Essenhöhe ist 60 bis 120 Fuß; selten findet man sie nur 40 Fuß und niedriger. Nur ausnahmsweise werden Essen von 300 bis 400 Fuß Höhe ausgeführt. Es ist eine praktische Regel, dem Schornsteine denselben Querschnitt zu geben, wie den Feuercanälen. Im folgenden Pa-

ragraphen wird jedoch zur Ausmittelung der Essenweite eine besondere Regel gefunden werden.

Es ist sehr nöthig, die Schornsteine auf einen soliden Grund zu setzen, weil das geringste Nachgeben desselben eine Beschädigung oder gar das Zusammenstürzen des Schornsteins zur Folge hat.

Die äußere Ansicht und der Durchschnitt einer achteckigen Esse aus Ziegeln ist in Fig. 644 und 645, und die äußere Ansicht einer Blechesse in Fig. 646 abgebildet. Bei den ersten Abbildungen ist *A* das Fundament,

Fig. 644. Fig. 645. Fig. 646.



B die Einmündung des Feuercanales oder Fuchses, *C* der gußeiserne Hut der Esse und *D* eine nach der Zug- und Reinigungsöffnung führende Treppe. Damit sich der Rauch beim Eintritte in die Esse nicht stoße, ist die obere Kante zwischen der Esse und dem Fuchse abzurunden.

Bei der Abbildung Fig. 646 ist *A* das auf festem Grunde stehende, aus Ziegeln aufgeführte Fundament, sind ferner *D, D* Ankerschrauben, welche den Fuß des Schornsteins mittels einer Platte *EE* fest mit dem Fundamente verbinden, sowie *E* eine unter dem Essenkopf *F* angebrachte Rolle, über die eine Kette weggeht, an der ein Arbeiter beim Reinigen und Anstreichen des Schornsteins hinauf gewunden werden kann. Noch sieht man bei *B* die Einmündung des Fuchses und bei *H* die Ausputzöffnung. Um den Umsturz einer solchen Esse durch den Sturm zu verhindern, werden nicht selten noch Drähte oder Drahtketten von der Esse in schräger Richtung herab nach dem Erdboden gezogen und darin verankert.

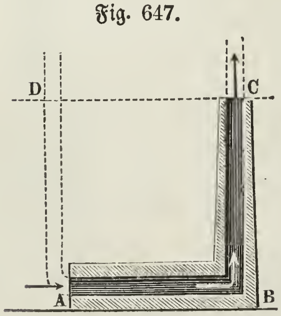
Anmerkung. Die berühmte $455\frac{1}{2}$ engl. Fuß hohe Esse zu St. Rollor bei Glasgow hat folgende Dimensionen. (S. Verhandl. des Preuß. Gewerbevereins, 1845.)

Abtheilung der Esse.	Höhe über dem Grunde.	Aeußerer Durchmesser in Fußen.	Mauerdicke in	
			Fuß.	Zoll.
	$435\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{2}$		
V.			1	2
	$350\frac{1}{2}$	$16\frac{3}{4}$		
IV.			1	6
	$210\frac{1}{2}$	24		
III.			1	$10\frac{1}{2}$
	$114\frac{1}{2}$	$30\frac{1}{2}$		
II.			2	3
	$54\frac{1}{2}$	35		
I.			2	$7\frac{1}{2}$
	0	40		

Das Fundament dieser Esse ist 20 Fuß tief und hat 50 Fuß Durchmesser.

§. 421 **Theorie des Essenzugs.** Die Theorie der Bewegung des Rauches in den Schornsteinen läßt sich nach den im ersten Bande entwickelten Regeln der Hydraulik leicht aufstellen, um so mehr, da wir wegen der unbedeutenden Differenz zwischen der Spannung der Luft im Schornsteine und der der äußeren Luft die Regeln des Ausflusses des Wassers hier anwenden können. Ist γ die Dichtigkeit der äußeren Luft und h die senkrechte Höhe AD eines Schornsteines ABC, Fig. 647, sammt Luftzuführungscanal, so läßt sich der Ueber-

Fig. 647.



schuß des Druckes auf die Einmündung A über dem auf die Ausmündung C setzen:

$$q = h\gamma.$$

Diesem Ueberschusse wirkt aber der Druck q_1 der warmen Luft- oder Rauchsäule entgegen; bezeichnen wir daher die Dichtigkeit dieser Säule durch γ_1, so erhalten wir den die Ausflußgeschwindigkeit v des Rauches erzeugenden Druck:

$$q - q_1 = h\gamma - h\gamma_1 = h(\gamma - \gamma_1),$$

und es läßt sich daher ohne Berücksichtigung der Nebenhindernisse setzen:

$$\frac{v^2}{2g}\gamma_1 = h(\gamma - \gamma_1) \text{ oder } v = \sqrt{\frac{2gh(\gamma - \gamma_1)}{\gamma_1}}$$

(s. Band I, §. 399).

Ist nun noch t die mittlere äußere und t_1 die mittlere innere Temperatur oder die des Rauches, so hat man nach Band I, §. 393:

$$\gamma = \frac{0{,}00567\,p}{1 + 0{,}00367\,.\,t} \text{ und } \gamma_1 = \frac{0{,}00567\,p_1}{1 + 0{,}00367\,.\,t_1},$$

daher:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{1 + 0{,}00367\,t} \cdot \frac{p}{p_1};$$

oder da die Pressungen p und p_1 der äußeren und inneren Luft nicht sehr verschieden von einander sein können, wegen der mäßigen Geschwindigkeit des Rauches, annähernd:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{1 + 0{,}00367\,t},$$

und daher die Rauchgeschwindigkeit beim Austritte aus der Esse:

$$v = \sqrt{2gh\left(\frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{1 + 0{,}00367\,t} - 1\right)} = \sqrt{\frac{0{,}00367\,(t_1 - t)}{1 + 0{,}00367\,t} \cdot 2gh},$$

wofür auch annähernd

$$v = \sqrt{0{,}00367\,(t_1 - t)\,.\,2gh} = 0{,}479\sqrt{(t_1 - t)\,h} \text{ Fuß}$$

gesetzt werden kann.

Diese Geschwindigkeit wird allerdings durch die Nebenhindernisse, welche die Verengungen im Feuerherde und die Reibung im Schornsteine u. s. w. herbeiführen, bedeutend herabgezogen. Die entsprechenden Verluste sind übrigens ganz nach den bekannten Regeln der Hydraulik zu berechnen. Aus der Höhe h und Weite d des Schornsteines ergiebt sich nach Band I, §. 466, der Druckhöhenverlust in Folge der Reibung durch die Formel

$$h_1 = \zeta \cdot \frac{h}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Obwohl nach Obigem $\zeta = 0{,}024$ zu nehmen ist, so möchte doch der

Sicherheit wegen nach den Beobachtungen Péclet's für die mit Ruß überzogenen Schornsteine $\zeta = 0{,}025 \,.\, 1{,}962 = 0{,}049$ oder einfacher $0{,}05$ zu setzen sein. Die übrigen Druckhöhenverluste, welche aus der Reibung der Feuerluft in den Zügen, dem Durchgang derselben durch die Spalten des Rostes und das aufgeschüttete Brennmaterial hervorgeht, und noch durch andere Bewegungshindernisse vergrößert wird, lassen sich nach Péclet durch den Widerstandscoefficienten $\zeta_1 = 30$ ausdrücken, daher folgt

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}00367\,(t_1 - t)\; h - 0{,}05\;\frac{h}{d}\cdot\frac{v^2}{2g} - 30\cdot\frac{v^2}{2g},$$

oder

$$\frac{v^2}{2g}\left(30 + 0{,}05\,\frac{h}{d}\right) = 0{,}00367\;(t_1 - t)\; h.$$

Berücksichtigt man endlich noch, daß die halb verbrannte Luft, wie sie in den Schornsteinen vorkommt, ungefähr 1,044mal so dicht ist, als frische Luft, so muß man setzen:

$$v = \sqrt{\frac{0{,}00367\;(t_1 - t)\,.\,2\,g h}{1{,}044\left(30 + 0{,}05\;\frac{h}{d}\right)}} = 0{,}0595\;\sqrt{\frac{(t_1 - t)\,.\,2\,g h}{30 + 0{,}05\,\frac{h}{d}}}$$

$$= 0{,}47\;\sqrt{\frac{(t_1 - t)\;.\;h d}{30 d + 0{,}05\,h}} \text{ Fuß.}$$

§. 422 **Dimensionen der Essen.** Mit Hülfe der im Vorstehenden entwickelten Formel ist es nun leicht, den Querschnitt S und die Dimensionen einer Esse zu finden, durch welche ein bestimmtes Luft- oder Rauchquantum Q pr. Secunde abgeführt wird.

Es ist

$$Q = Sv = 0{,}47\;S\;\sqrt{\frac{(t_1 - t)\,h d}{30\,d + 0{,}05\,h}} \text{ Cubikfuß,}$$

und daher der gesuchte Querschnitt des Schornsteines:

$$S = \frac{Q}{v} = 2{,}13\;Q\;\sqrt{\frac{30\,d + 0{,}05\,h}{(t_1 - t)\,h d}} \text{ Quadratfuß.}$$

Für eine Esse mit kreisförmigem Querschnitte ist ferner

$$S = \frac{\pi\,d^2}{4},$$

daher:

$$d^{5/2} = 2{,}13\cdot\frac{4}{\pi}\;Q\;\sqrt{\frac{30 d + 0{,}05 h}{(t_1 - t)\,h}},$$

und die gesuchte mittlere Weite der Esse:

$$d = 1{,}49 \sqrt[5]{\frac{30\,d + 0{,}05\,h}{(t_1 - t)\,h}\,Q^2} \text{ Fuß.}$$

Für eine Esse mit quadratischem Querschnitte ist dagegen $S = b^2$, und daher die Weite oder Seitenlänge derselben:

$$b = 1{,}353 \sqrt[5]{\frac{30\,d + 0{,}05\,h}{(t_1 - t)\,h}\,Q^2}.$$

Setzt man annähernd $h = 100\,d$, so erhält man

$$v = 0{,}08 \sqrt{(t_1 - t)\,h} \text{ Fuß} = 0{,}045 \sqrt{(t_1 - t)\,h} \text{ Meter, und}$$

$$S = \frac{Q}{v} = \frac{12{,}5\,Q}{\sqrt{(t_1 - t)\,h}} \text{ Quadratfuß, wonach sich}$$

$$d = \frac{4\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{(t_1 - t)\,h}}, \text{ oder } b = \frac{3{,}54\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{(t_1 - t)\,h}} \text{ Fuß ergiebt.}$$

Das Rauchquantum $Q = Sv = 0{,}08\,S\sqrt{(t_1 - t)\,h\,d}$ auf die äußere Temperatur t reducirt, fällt

$$Q_1 = \left(\frac{1 + \delta t}{1 + \delta t_1}\right) Sv, \text{ annähernd da } t_1 \text{ viel größer als } t \text{ ist,}$$

$$Q_1 = \frac{Sv}{1 + \delta t_1} = 0{,}08\,S\sqrt{\frac{(t_1 - t)\,h\,d}{(1 + \delta t_1)^2}} = 0{,}08\,S\sqrt{\frac{t_1\,h\,d}{(1 + 0{,}00367\,t_1)^2}}$$

aus, und ist mit $\frac{t_1}{(1 + 0{,}00367\,t_1)^2}$ ein Maximum.

Leicht findet man die entsprechende Bedingungsgleichung $1 + 0{,}00367\,t_1 = 2 \,.\, 0{,}00367\,t_1$, wonach $0{,}00367\,t_1 = 1$, und die erforderliche Temperatur des in den Schornstein tretenden Rauches:

$$t_1 = \frac{1}{0{,}00367} = 273 \text{ Grad folgt.}$$

Nimmt man annähernd $t_1 - t = 270^0$ an, so läßt sich setzen:

$$v = 1{,}32\sqrt{h} \text{ Fuß und}$$

$$S = \frac{0{,}76\,Q}{\sqrt{h}} \text{ Quadratfuß.}$$

Das durch den Schornstein abzuführende Luftquantum Q läßt sich aber auch aus der Heizfläche F, sowie aus dem Gewichte K der verbrauchten Brennstoffmenge leicht berechnen (s. §. 400).

Ist K das stündlich verbrannte Kohlenstoffquantum und nimmt man an, daß jedes Pfund Kohlenstoff 600 Cubikfuß durch den Schornstein abzuführende Luft giebt, setzt also:

$$Q = \frac{600\,K}{60 \,.\, 60} = \frac{K}{6},$$

so erhält man

$$S = 0{,}128 \frac{K}{\sqrt{h}} \text{ Quadratfuß,}$$

sowie

$$h = 0{,}0164 \left(\frac{K}{S}\right)^2 \text{ Fuß.}$$

Für $\frac{K}{S} = 75$ würde hiernach die Höhe der Esse:

$$h = 0{,}0164 \, . \, (75)^2 = 92{,}2 \text{ Fuß ausfallen.}$$

Die gewöhnliche Essenhöhe ist in der That 60 bis 120 Fuß.

Wenn man von der zu fordernden Stabilität ausgeht, kann man die zulässige Essenhöhe wie folgt finden.

Ist die Geschwindigkeit des gegen die Esse stoßenden Windes $= c$, sowie γ die Dichtigkeit desselben, ferner h die Höhe und b die mittlere äußere Breite der Esse, so läßt sich die Stärke des Windstoßes gegen dieselbe

$$P = 3 \, \frac{c^2}{2g} \, b h \gamma \text{ (s. §. 344),}$$

und ebenso das Moment dieser Kraft in Hinsicht auf eine Kante am Fuße der Esse

$$\frac{Ph}{2} = 3 \, \frac{c^2}{2g} \cdot \frac{b h^2}{2} \, \gamma$$

setzen.

Ist ferner e die mittlere Dicke der Essenwände und γ_1 die Dichtigkeit der Essenmauer, so hat man das Gewicht der Esse:

$$G = 4 \, (b - e) \, e h \gamma_1 ,$$

sowie das Moment derselben:

$$\frac{Gb}{2} = \frac{4 \, (b - e) \, e h b \gamma_1}{2} = 2 \left(1 - \frac{e}{b}\right) e h b^2 \gamma_1,$$

und setzt man beide Momente einander gleich, so erhält man folgende Gleichung:

$$3 \, \frac{c^2}{2g} \, \frac{b h^2}{2} \, \gamma = 2 \left(1 - \frac{e}{b}\right) e h b^2 \gamma_1 ,$$

so daß nun das Verhältniß der Essenhöhe zur mittleren äußeren Essenbreite

$$\frac{h}{b} = {}^4/_3 \cdot \left(1 - \frac{e}{b}\right) \frac{2ge}{c^2} \, \frac{\gamma_1}{\gamma} \text{ folgt.}$$

Diese Formel gilt nur für eine Esse mit quadratischem Querschnitte; für eine solche mit kreisförmigem Querschnitte kann man $\frac{h}{b}$ um die Hälfte größer machen, also:

$$\frac{h}{b} = 2\left(1 - \frac{e}{b}\right)\frac{2ge}{c^2}\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

setzen, und für eine achteckige Esse ist ein Mittelwerth, also

$$\frac{h}{b} = {}^5/_3\left(1 - \frac{e}{b}\right)\frac{2ge}{c^2}\cdot\frac{\gamma_1}{\gamma}$$

anzunehmen.

Beispiel 1. Welche Weite soll man einer Esse geben, die bei 100 Fuß Höhe den Rauch eines Feuerherdes abzuführen hat, auf dem stündlich 120 Pfund Steinkohlen verbrannt werden? Nach dem Früheren können wir annehmen, daß aus der Verbrennung von 120 Pfund Steinkohlen bei 300° mittlerer Wärme in dem Schornsteine, 120 . 584 = 70080 Cubikfuß warme Luft hervorgehen, so daß in der Secunde das Quantum

$$Q = \frac{70080}{60\,.\,60} = 19^1/_2 \text{ Cubikfuß}$$

abzuführen bleibt. Nehmen wir nun noch $t_1 - t = 300 - 10 = 290$ an und führen wir $h = 100$ Fuß ein, so erhalten wir den erforderlichen inneren Essendurchmesser

$$d = 1{,}49\sqrt[5]{\frac{30\,.\,d + 0{,}05\,.\,100}{290\,.\,100}\cdot(19{,}5)^2} = 0{,}627\sqrt[5]{30\,d + 5}.$$

Hiernach unter der Wurzel annähernd, $d = 1{,}25$ angenommen, folgt genauer:

$$d = 0{,}627\sqrt[5]{42{,}5} = 1{,}33 \text{ Fuß},$$

und diesen Werth noch einmal rechts eingesetzt, ergiebt sich noch schärfer

$$d = 0{,}627\sqrt[5]{44{,}5} = 1{,}34 \text{ Fuß}.$$

Wollte man den Schornstein nur 40 Fuß hoch machen, so würde man diese Weite

$$= 1{,}49\sqrt[5]{\frac{30\,d + 0{,}05\,.\,40}{290\,.\,40}(19{,}5)^2} = 0{,}753\sqrt[5]{30\,d + 2} = 1{,}67 \text{ Fuß}$$

machen müssen.

Beispiel 2. Nimmt man die größte Windgeschwindigkeit $c = 100$ Fuß an, setzt ferner $\gamma = 0{,}0766$ und $\gamma_1 = 61{,}75\,.\,1{,}6 = 98{,}8$ Pfund, so erhält man für eine vierseitige Esse, welche dem Windstoß bei dieser Windgeschwindigkeit widerstehen soll:

$$\frac{h}{b} = {}^4/_3\cdot\left(1 - \frac{e}{b}\right)\frac{e}{0{,}016\,.\,10000}\cdot\frac{98{,}8}{0{,}0766} = \frac{140{,}8\left(1 - \frac{e}{b}\right)e}{13{,}2}$$

$$= 10{,}7\left(1 - \frac{e}{b}\right)e.$$

Führt man noch $e = 1$ Fuß und $\frac{e}{b} = {}^1/_4$ Fuß ein, so erhält man

$$\frac{h}{b} = {}^3/_4\,.\,10{,}7 = 8.$$

Um einem Orkan mit 100 Fuß Geschwindigkeit widerstehen zu können, müßte also die mitlere äußere Essenbreite $^1/_8$ der Essenhöhe sein. Wäre die Esse rund, so könnte $\frac{h}{b} = 12$, also den mittleren äußeren Essendurchmesser $^1/_{12}$ der Essen-

höhe betragen. Es ist hiernach zu ermessen, daß manche freistehende Esse einem Orkan von 100 Fuß Geschwindigkeit nicht widerstehen kann.

Anmerkung. Aus der Formel

$$d = 1{,}49 \sqrt[5]{\frac{30\,d + 0{,}05\,h}{(t_1 - t)\,h}\,Q^2}$$

ist, da mit h auch l wächst, leicht zu ersehen, daß die Weite der Esse um so kleiner ausfallen kann, je höher die Esse ist, und daß, umgekehrt, eine Esse um so weiter gemacht werden muß, je kleiner die Höhe derselben ist.

Streng genommen ist den Principien der Hydraulik zufolge (siehe Bd. I, §. 425) in der Formel

$$Q = 0{,}47\,S \sqrt{\frac{(t_1 - t)\,h\,d}{30\,d + 0{,}05\,h}}$$ für das Rauchquantum Q, statt S nicht der mittlere, sondern der Querschnitt der Essenmündung einzuführen, und hiernach leicht zu ermessen, daß unter übrigens gleichen Verhältnissen eine nach oben zu allmälig weiter werdende Esse mehr Rauch abführt als eine Esse von gleichem oder nach oben zu allmälig abnehmendem Querschnitt.

(§. 423) **Wirkungsgrad der Dampfkessel.** Nach den Beobachtungen von Péclet läßt sich die mittlere Temperatur t_1 in der Esse für Dampfkessel $= 300^0$ setzen. Die Temperatur t_2 hingegen, welche die Luft im Brennherde bei der Verbrennung annimmt, läßt sich aus der Wärmemenge W, welche ein Pfund Brennstoff erzeugt, und aus der Luftmenge V Cubikfuß, welche die Verbrennung erfordert, leicht berechnen, wenn man die Wärmecapacität der Luft $\omega = \frac{1}{4}$ von der des Wassers und das Gewicht eines Cubikfußes derselben, $\gamma = 0{,}080$ Pfund annimmt; es ist nämlich:

$$W = \omega\,V\gamma\,(t_2 - t_0) = \tfrac{1}{4}\,.\,0{,}080\,V(t_2 - t_0),$$

und daher:

$$t_2 = \frac{4\,W}{0{,}080\,V} + t_0 = 50\,\frac{W}{V} + t_0;$$

wobei t_0 die Temperatur der zutretenden Luft bezeichnet.

Endlich folgt hiernach der Wärmeverlust, herbeigeführt durch das Fortgehen der Wärme in der Esse:

$$W_1 = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}\,W.$$

Nehmen wir für W den mittleren Werth 6000 Cal., für $V = 225$ Cubikfuß und für $t_0 = 0$ Grad an, so bekommen wir die Wärme im Brennherde:

$$t_2 = \frac{50\,.\,6000}{225} = 1333^0,$$

und den Wärmeverlust durch den Abzug in der Esse:

$$W_1 = \frac{300}{1333}\,W = \frac{300\,.\,6000}{1333} = 1350 \text{ Calorien},$$

oder ungefähr ein Viertel der ganzen, aus dem Brennstoffe entwickelten Wärme.

Unter der Voraussetzung, daß das auf die Dampferzeugung verwendete Wärmequantum proportional der Temperaturdifferenz sei (s. §. 368), können wir auch die Temperatur t_1 der Erwärmungsluft beim Eintritte in den Schornstein wie folgt ermitteln.

Ist z die Temperatur an irgend einer Stelle des Zuges, Y die Größe der Heizfläche, bis zu dieser Stelle gerechnet, und $\varkappa$ das Wärmequantum, welches pro Quadratfuß Heizfläche bei einem Grad Wärmedifferenz in der Secunde auf das Wasser im Kessel übergeht, so folgt das dem Flächenelement dY und der Temperaturdifferenz $z - t$ entsprechende Wärmequantum:

$$\varkappa (z - t)\, dY = - \omega V \gamma\, dz,$$

und es ist hiernach

$$Y = - \frac{\omega V\gamma}{\varkappa} \int \frac{dz}{z - t} = - \frac{\omega V\gamma}{\varkappa} Ln. (z - t) + Con.$$

Für $Y = 0$ ist aber $z = t_2$, und für $Y = F$ (die ganze Heizfläche) $z = t_1$, daher folgt:

$$F = \frac{\omega V\gamma}{\varkappa} Ln. \left(\frac{t_2 - t}{t_1 - t}\right),$$

und die gesuchte Temperatur der Heizluft beim Eintritte in den Schornstein

$$t_1 = t + (t_2 - t)\, e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V\gamma}}.$$

Hiernach folgt nun die durch den Schornstein abgeführte Wärme:

$$W_1 = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} W = \frac{t - t_0 + (t_2 - t)\, e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V\gamma}}}{t_2 - t_0} W,$$

und folglich der **Wirkungsgrad des Dampfkessels**, oder das Verhältniß der von demselben aufgenommenen Wärme zur Gesammtwärme:

$$\eta = 1 - \frac{W_1}{W} = \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_0}\right) \left(1 - e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V\gamma}}\right),$$

oder, da $t_2 - t_0$ auch $= \dfrac{W}{\omega V\gamma}$ ist,

$$\eta = \left(1 - \frac{t - t_0}{t_2 - t_0}\right) \left(1 - e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V\gamma}}\right)$$

$$= \left(1 - (t - t_0)\, \frac{\omega V\gamma}{W}\right) \left(1 - e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V\gamma}}\right).$$

Setzt man $t_2 - t_0 = 1200$ ein, so hat man einfach

$$\eta = \left(1 - \frac{t - t_0}{1200}\right)\left(1 - e^{-\frac{\varkappa F}{\omega V \gamma}}\right).$$

Noch ist hierin

$$\omega \gamma = \frac{1}{4} \, . \, 0{,}086 = 0{,}0215,$$

$$\varkappa = 0{,}0007,$$

und

$$\frac{F}{V} = \frac{60 \, . \, 60}{22} f = 163 f,$$

zu setzen, wo f die Heizfläche bezeichnet, welche stündlich 1 Pfund Dampf geben soll; daher hat man:

$$\eta = \left(1 - \frac{t - t_0}{1200}\right)\left(1 - e^{-5{,}3 f}\right),$$

z. B. für $t - t_0 = 120^0$,

$$\eta = 0{,}9 \left(1 - e^{-5{,}3 f}\right).$$

Wir haben oben (§. 404) auf einen Quadratfuß Heizfläche stündlich 4 Pfund Dampf gerechnet; daher ist hier

$$f = \frac{1}{4} \text{ Quadratfuß}$$

und

$$\eta = 0{,}9 \left(1 - e^{-1{,}33}\right) = 0{,}9 \, . \left(1 - 0{,}2645\right) = 0{,}66;$$

machen wir aber die Heizfläche noch ein Mal so groß, setzen also $f = \frac{1}{2}$, so fällt

$$\eta = 0{,}9 \left(1 - e^{-2{,}66}\right) = 0{,}9 \, . \left(1 - 0{,}093\right) = 0{,}81$$

aus, und machen wir dagegen die Heizfläche nur halb so groß als erst, setzen also $f = \frac{1}{8}$, so erhalten wir:

$$\eta = 0{,}9 \left(1 - e^{-0{,}665}\right) = 0{,}9 \, . \left(1 - 0{,}514\right) = 0{,}9 \, . \, 0{,}486 = 0{,}44.$$

Man ersieht hieraus, daß es zur Erzielung einer vortheilhaften Dampferzeugung nöthig ist, eine große Heizfläche anzuwenden.

Wenn man die Temperatur im Dampfkessel $t = 140$ Grad annimmt, so ist im ersten Falle die Temperatur der Erwärmungsluft beim Eintritt in den Schornstein:

$$t_1 = t + (t_2 - t)\, e^{-1{,}33}$$

$$= 140 + 1060 \, . \, 0{,}2645 = 140 + 280 = 420^0,$$

ferner im zweiten:

$$t_1 = 140 + 1060 \, . \, 0{,}093 = 140 + 99 = 239^0,$$

dagegen im dritten:

$$t_1 = 140 + 1060 \, . \, 0{,}514 = 140 + 545 = 685^0.$$

Natürlich haben diese Temperaturen einen großen Einfluß auf die nöthigen Dimensionen der Schornsteine, und es ist hiernach leicht zu ermessen, daß es zweckmäßig sein kann, bei einer sehr niedrigen Temperatur der abströmenden Erwärmungsluft den erforderlichen Zug derselben durch einen Ventilator zu unterstützen (s. einen dahin einschlagenden Artikel vom Herrn Prof. Zeuner im „Civilingenieur“ Bd. 4).

Speiseapparate. Zu einem Dampfkessel gehören noch besondere Apparate zum Speisen des Kessels mit Wasser, zur Ableitung des Dampfes, zum Reguliren der Dampferzeugung, zum Sicherstellen vor dem Zerspringen des Kessels u. s. w.; von ihnen wird nun die Rede sein. §. 424

Das Speisen eines Dampfkessels muß so gleichförmig wie möglich vor sich gehen, in nicht zu großen Mengen auf einmal und mit möglichst reinem und warmem Wasser erfolgen. Aus letzterem Grunde wärmt man das Wasser durch besondere im Fuchse oder Schornsteine u. s. w. angebrachte Röhren an, oder verwendet hierzu einen Theil des Condensationswassers. Wird in dem Kessel Dampf von niedrigem Drucke erzeugt, dessen Spannung den Atmosphärendruck nur $^1/_4$ bis $^1/_5$ übertrifft, so genügt zur Einführung des Wassers in den Kessel ein einfaches Rohr; bei einem Kessel mit Dämpfen von Hochdruck hingegen muß das Speisewasser durch eine Pumpe zugedrückt werden, weil eine bloße Speiseröhre zu lang ausfallen würde.

Das Speiserohr (franz. le tube d'alimentation; engl. feed pipe) geht von oben durch den Kesselraum hindurch und endigt etwa $^1/_2$ Fuß über dem Kesselboden, möglichst entfernt von dem eigentlichen Feuerherde. Um das Speisen mit Wasser zu reguliren, d. i. um immer so viel Wasser zuzuleiten, als durch Dampfbildung verbraucht wird, wendet man gewöhnlich einen Schwimmer (franz. flotteur; engl. float) an, der mit dem Wasserspiegel im Kessel steigt und sinkt, und dabei den Zutritt des Wassers zum Kessel versperrt oder herstellt.

Die Einrichtung eines Speiseapparates für Dampfkessel mit Dämpfen von niedrigem Drucke führt Fig. 648 (a. f. S.) vor Augen. Hier ist A der Wasserbehälter, welchem das Wasser zugeführt wird, BC die etwa 8 Fuß lange Speiseröhre, D der Dampf und E das Wasser im Kessel, sowie F der Schwimmer aus Kalk- oder Sandstein, der etwas mehr als zur Hälfte ins Wasser eintaucht. Ferner ist ab ein um c drehbarer Hebel, an welchem einerseits der Schwimmer und andererseits ein Gewicht G aufgehängt, zugleich aber auch ein kegelförmiges Ventil e befestigt ist. Wenn nun der Wasserspiegel und mit ihm der Schwimmer sinkt, so wird der Hebel ab mittels des bei f durch eine Stopfbüchse gehenden Kupferdrahtes aF nieder-

und folglich bei *d* aufgezogen, und somit *e* gehoben, so daß nun neues Wasser eintreten kann; wenn hingegen *F* mit dem Wasser steigt, so erhält

Fig. 648.

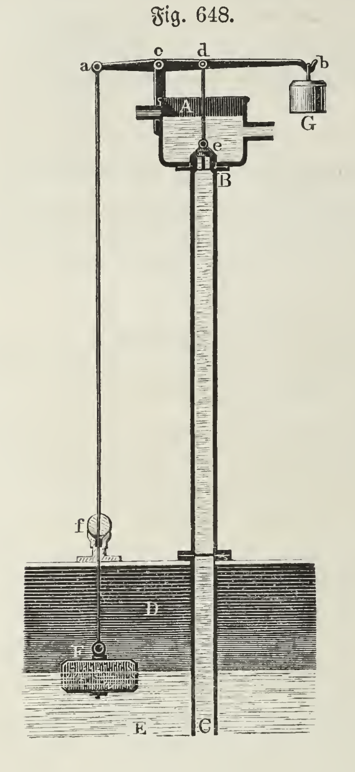
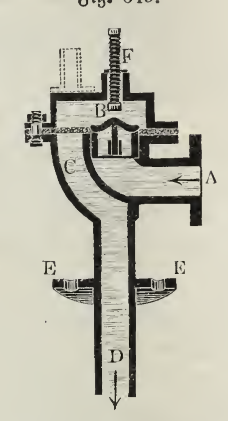


Fig. 649.



G das Uebergewicht, es geht der Hebel bei *d* nieder und verschließt daher den Eintritt des Wassers in den Kessel durch das Ventil *e*.

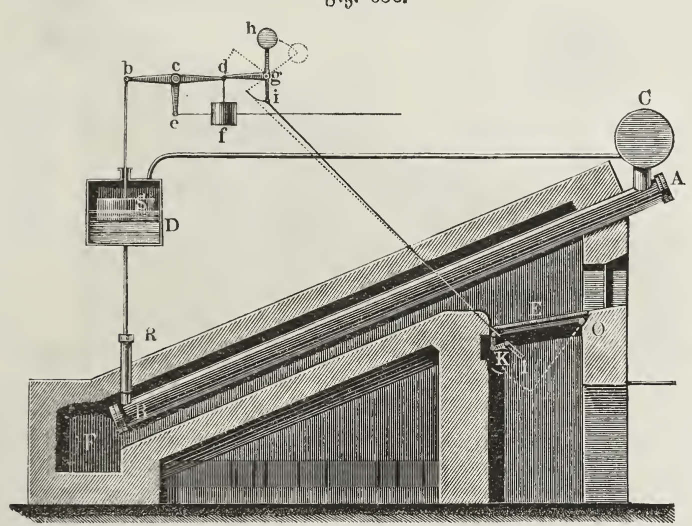
Bei den Hochdruckmaschinen ist die Einführung des Speisewassers schwerer, weil sich hier eine bedeutende Dampfkraft demselben entgegensetzt; deshalb wird auch hierzu eine besondere Pumpe, die sogenannte Speisepumpe (franz. pompe d'alimentation; engl. feed pump), nöthig. Da später an einem anderen Orte die Pumpen besonders abgehandelt werden, so genüge die Bemerkung, daß die Vorrichtung in einer einfachen Druckpumpe mit Mönchskolben besteht. Die Speiseröhre, welche hierbei in Anwendung kommt, ist in Fig. 649 abgebildet. Bei *A* wird das Wasser durch die Pumpe zugedrückt, *B* ist ein Ventil, durch welches es hindurchgehen muß, um in die eigentliche Speiseröhre *CD* zu gelangen, mit der Flantsche *EE* sitzt die Röhre auf dem Kessel auf. Um den Hub des Ventiles *B* zu reguliren, ist in dem Deckel *C* eine Stellschraube *F* angebracht, gegen welche das Ventil beim Oeffnen anschlägt.

Die Speisevorrichtung wird in der Regel nicht durch die Maschine, sondern durch den Heizer regulirt, der nach dem Stande des Wassers in dem Kessel eine Hahnstellung vornimmt, und dadurch den Zutritt des Wassers nach Befinden verstärkt oder schwächt. Man hat zwar auch bei Hochdruck-

maschinen Schwimmer zum Selbstreguliren des Speisens angewendet, da sie aber zu viel Aufsicht erfordern und ihren Dienst oft versagen, so zieht man das Reguliren mit der Hand gewöhnlich vor.

Anmerkung. Bei den Henschel'schen Dampfkesseln wird das Speisen des Kessels mit Wasser durch einen Schwimmer regulirt. Die ganze Anlage eines solchen Kessels führt Fig. 650 vor Augen. *AB* ist eine 6 bis 12 Zoll weite und circa 10 bis 20 Fuß lange Sieberöhre, und neben derselben liegen nach

Fig. 650.

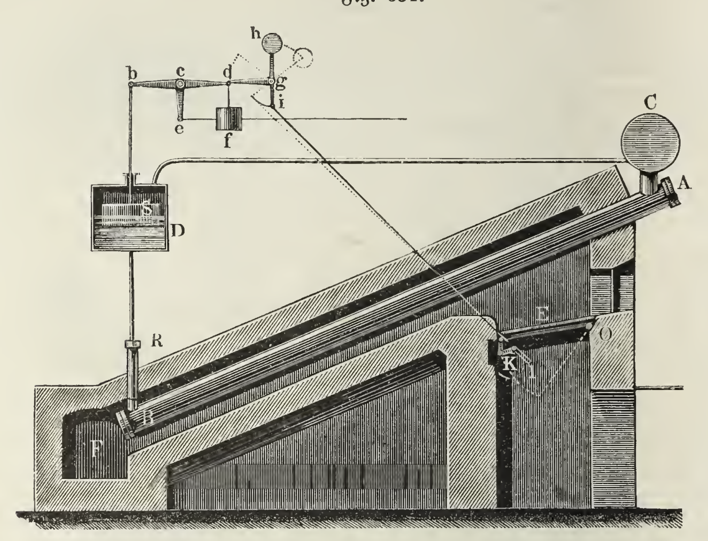


befinden noch mehrere vollkommen gleiche Sieberöhren. Unten bei *B* tritt das Speisewasser ein, und *C* ist die horizontale Röhre, worin der sich bei *D* erzeugende Dampf gesammelt wird. Die im Feuerraume sich bildende warme Luft umgiebt bei ihrer Bewegung durch den unter 24° Neigung sich niederziehenden Canal *EF* die Sieberöhren vollständig, und gelangt unten bei *F* in den Schornstein. Der Rost *E* ist um eine horizontale Axe *O* drehbar und wird am anderen Ende durch den oberen Arm eines kleinen Winkelhebels *K* unterstützt. Ferner ist *R* eine von den Röhren, welche das Speisewasser den einzelnen Sieberöhren zuführen. Zum Reguliren dieses Zuführens dient nun aber ein mit Blech eingefaßter Stein *S*, der auf dem in einem gußeisernen Gefäße *D* eingeschlossenen Speisewasser schwimmt. Damit er dies kann, wird ein um *c* drehbarer Doppelhebel *bcd* angewendet, der mittels Drähte auf der einen Seite den Schwimmer *S* und auf der anderen das Gegengewicht *f* trägt und durch den Arm *ce* u. s. w. mit dem Saugventil der Speisepumpe in Verbindung gesetzt ist. Wenn es an Wasser in der Speiseröhre fehlt, so sinkt *S* und es wird mittels *ce* das Saugventil der Speisepumpe in den Stand gesetzt, sein Spiel zu verrichten; wenn aber Wasser im Ueberfluß vorhanden ist und *S* steigt, so hebt der Arm *ce* das Saugventil in die Höhe, und es ist dadurch die Pumpe außer Stand gesetzt, Wasser in den Kessel zu drücken. Sollte endlich die Dampfentwickelung sehr heftig vor sich gehen und eine gewisse Grenze überschreiten, so würde das Armende *d* den

60*

Arm dg eines um g drehbaren und mit einem Gegengewichte h versehenen Winkelhebels dgi emporheben, und dabei eine Stange il aufziehen, welche

Fig. 651.



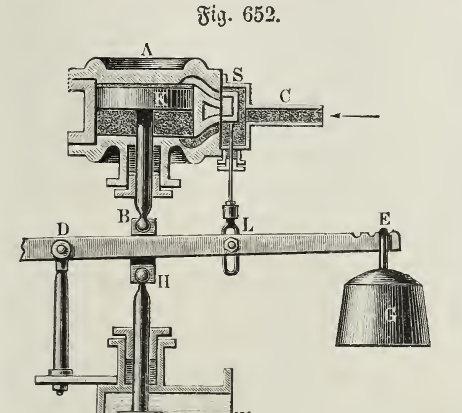
mittels eines länglichen Gliedes den unteren Arm des Winkelhebels K erfaßt; dabei würde der obere Arm dieses Hebels unter dem äußersten Ende des Rostes weggleiten, dieser nun, seiner Stütze beraubt, niederfallen und den Brennstoff in den Aschenfall ausschütten, und dadurch endlich die Gefahr einer weiteren Ueberhitzung der Dämpfe beseitigt sein. Nach Henschel vereinigt ein solcher Dampferzeugungsapparat viele Vorzüge in sich; doch möge hier nur Folgendes hervorgehoben werden. Der Apparat bedarf nur einer kleinen Heizfläche von 4 Quadratfuß pr. Pferdekraft, die Dampferzeugung geht sehr schnell vor sich, die Abwartung und Reinigung dieses Kessels ist leicht zu vollziehen und die Sicherheit desselben ist sehr groß, zumal da sich aus dem kleinen Füllungsquantum keine große Menge überhitzter Dämpfe bilden und die Fläche, wo die Ueberhitzung stattfinden kann, nur klein ist. Auf der anderen Seite wirft man aber auch diesen Kesseln vor, daß bei ihrer kleinen Wasserfläche die Dämpfe viel unverdampftes Wasser mit fortreißen.

§. 425 **Neuere Speiseapparate.** In neueren Zeiten sind statt der gewöhnlichen Speiseapparate mit Speisepumpen verschiedene selbstthätige Speiseapparate zur Anwendung gekommen. Unter anderen der Speiseapparat von Auld, sowie der von Jolly und von Brière, insbesondere aber der Injector oder Speiseapparat von Giffard.

Der selbstthätige Regulator zur Kesselspeisung von Jolly (s. Armengaud's Génie industriel, Juli 1865, auch Dingler's Journal Bd. 178) besteht in der Hauptsache in einer kleinen Dampfmaschine ABC, Fig. 652,

deren Schieber S mittels der stellbaren Stangen SL an den um D drehbaren Hebel DE eines Schwimmers (s. §. 427) angeschlossen ist, und deren Kolben K mittels der articulirten Stangen KB und HV das Ventil V aufhebt und niederläßt. Das Gewicht G äquilibirt den (in der Abbildung nicht dargestellten) Schwimmer im Innern des Dampfkessels. Wenn beim Mangel an Wasser im Kessel der Schwimmer niedergeht, so steigt der Hebel desselben auf der Seite des Gewichtes G und es hebt der Arm DE den Schieber S mittels der Stange LS empor. Bei der hierbei eintretenden oberen Stellung des Schiebers kann der Dampf von C durch die Dampfkammer hindurch und unter den Kolben K strömen, welcher nun sammt dem Eintrittsventil vom Dampfdruck emporgehoben wird. Hierbei wird nun die Communication zwischen der bei W angeschlossenen Speisepumpe und der bei U nach dem Kessel führenden Speiseröhre hergestellt und dem Speisewasser der Zutritt in den Kessel gestattet. Ist später das Speisewasser im Uebermaß zugeflossen und der Schwimmer auf eine gewisse Höhe gestiegen, so zieht der nun sinkende Hebelarm DE den Schieber wieder herab und der jetzt über den Kolben K tretende Dampf schiebt hierauf denselben sammt dem Ventil V nieder, wobei der weitere Zufluß des Speisewassers wieder aufgehoben wird.

Fig. 652.

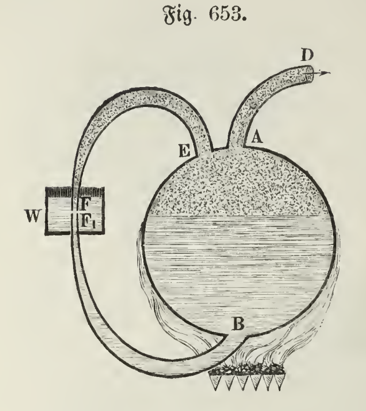


Ein anderer selbstthätiger Speiseapparat von Brière, beschrieben in Armengaud's Génie industriel, 1866, sowie in Dingler's Journal, Bd. 180.

Der Injector oder die Giffard'sche Speisepumpe. Wenn man aus dem Dampfkessel AB, Fig. 653 (a. f. S.), nicht bloß durch das Dampfrohr AD, sondern auch durch ein zweites Rohr EF Dampf abführt, so kann man durch den letzteren das nöthige Speisewasser in den Kessel drücken lassen. Es ist hierzu nur nöthig, daß sich das Rohr EF in ein conisches Mundstück endige, daß ferner die Speiseröhre F_1B mit einem in der Einmündung nur wenig weiteren, conisch divergenten Einmündungsstück §. 426

versehen ist, und daß endlich beide Mundstücke unter Wasser und so gegen einander gestellt werden, daß nur ein schmaler Raum zwischen den Mündungsebenen übrig bleibt. Es fließt dann der ausströmende Dampf mit einer so großen Geschwindigkeit aus F in die Röhre $F_1 B$, wobei er nicht allein das sich aus demselben bildende Wasser, sondern auch das von der Atmosphäre durch den ringförmigen Spalt zugedrückte Wasser in den Kessel treibt.

Fig. 653.



Ist $Q\gamma$ das Gewicht des durch den Zwischenraum zwischen F und F_1 zuströmenden und in Dampfform durch die Röhre AD abzuführenden Wasserquantums, sowie $Q_1\gamma$ das Gewicht des durch die Röhre EF aus dem Kessel abzuführenden Dampfquantums, und bezeichnet h die den Druck im Dampfkessel messende Höhe einer Wassersäule, so läßt sich der zur Einführung des Kesselwassers nöthige Arbeitsaufwand

$$L = (Q + Q_1)h\gamma \text{ setzen.}$$

Annähernd ist das Arbeitsvermögen des abströmenden Dampfes:

$$L_1 = Q_1\gamma \cdot \frac{v^2}{2g} = Q_1\gamma \cdot \mu h = Q_1 \mu h \gamma,$$

wenn μ das specifische Dampfvolumen und v die Geschwindigkeit des unter der Druckhöhe h ausfließenden Dampfes bezeichnet. Setzt man nun $L_1 = L$, so folgt

$$\mu Q_1 = Q + Q, \text{ und daher}$$

$$Q_1 = \frac{Q}{\mu - 1},$$

wofür $Q_1 = \frac{Q}{\mu}$ gesetzt werden kann.

Wegen der Abkühlung des Dampfes beim Ausfluß und der Berührung desselben mit dem Speisewasser fällt jedoch Q_1 viel kleiner aus als $\frac{Q}{\mu}$. Hat das bei W zuströmende Speisewasserquantum Q die Wärme t und das bei F_1 eintretende Gesammtwasserquantum $Q + Q_1$ die Temperatur t_1, so läßt sich, indem man den Wärmeverlust von Q_1 gleich dem Wärmegewinn von $Q + Q_1$ und die latente Wärme des zuströmenden Dampfes wenigstens annähernd $= 640$ Grad annimmt,

$$Q_1 (640 - t_1) = Q(t_1 - t) \text{ setzen.}$$

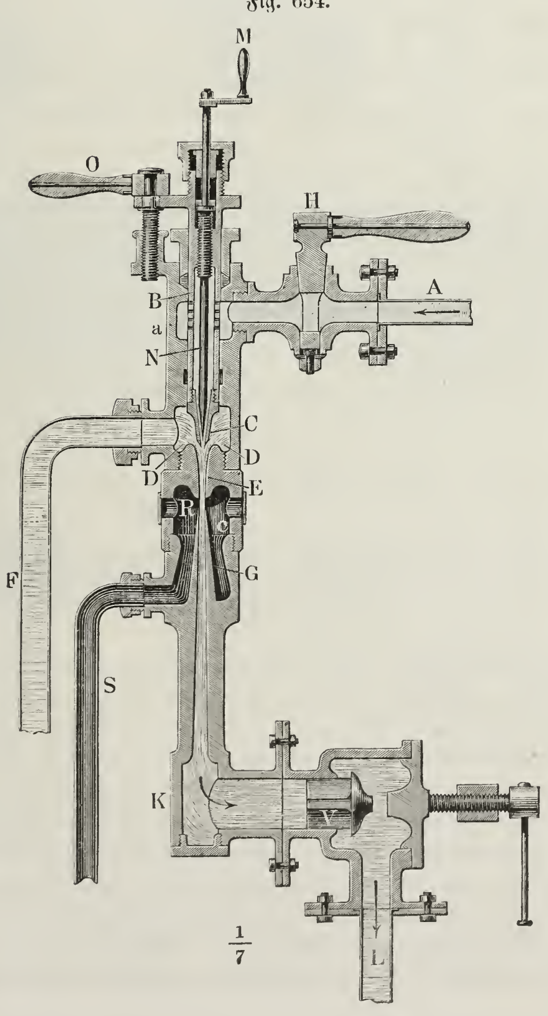
Hiernach folgt

$$Q_1 = \left(\frac{t_1 - t}{640 - t_1}\right) Q.$$

Ist z. B. die Temperatur des zugeführten Speisewassers $t = 15^0$, und die des durch den zuströmenden Dampf angewärmten und direct nach dem Kessel geleiteten Speisewassers, $t_1 = 60$ Grad, so fällt das circulirende Dampfquantum

$$Q_1 = \frac{45}{580} Q = \frac{Q}{13} \text{ aus.}$$

Fig. 654.



Die weitere Ausführung der Theorie des Injectors ist ein Gegenstand der mechanischen Wärmetheorie.

Die specielle Einrichtung eines solchen Speiseapparates führt der Durchschnitt in Fig 654 (a. vor. S.) vor Augen. Das Rohr A steht mit dem Dampfraume des Dampfkessels in Verbindung und führt bei geöffnetem Hahne H den Dampf durch eine Menge Löcher in die Röhre BC mit dem conischen Mundstücke C. Letzteres mündet in einer als Condensator dienenden Kammer DD aus, welche durch das Saugrohr F mit dem Speisewasserbassin communicirt und mit einem conoidischen Mundstück E versehen ist, durch welches nicht allein das mittels des aus C austretenden Dampfstrahles durch die Röhre F angesaugte, sondern auch das Wasser, welches aus der Condensation des Dampfes hervorgeht, abströmt. Ein anderes nach oben gerichtetes conisches Mundstück G fängt den aus E kommenden Wasserstrahl auf und leitet denselben in die Röhre K, welche durch die Röhre L mit dem Wasserraume des Dampfkessels communicirt. Es ist hiernach leicht zu ermessen, daß auf diese Weise der bei C ausströmende Dampf nach seiner Condensation auf dem Wege GKL einen stetigen Wasserstrom in den Kessel leitet. Das Reguliren der Dampfmenge erfolgt durch eine Kurbel M, welche mittels eines in einer conischen Spitze auslaufenden Dornes N in das Mundstück C der Röhre BC beliebig tief hineingeschoben werden kann, sowie das Reguliren der Speisewassermenge, durch eine andere Kurbel O, mittels welcher die Röhre BC gehoben und gesenkt, folglich auch der Abstand ihrer Ausmündung von dem Boden der Kammer DD beliebig vergrößert und verkleinert werden kann. Das überflüssige Speisewasser, welches nicht in das Mundstück G eintritt, sammelt sich in der Kammer R und fließt durch die Röhre S ab.

Anmerkung. Ueber den von Türk verbesserten Injector handelt Gagg im Civilingenieur Bd. XI. Der patentirte Injector von Schäffer und Budenberg ist beschrieben in Dingler's Journal Bd. 182.

§. 427 **Wasserstandszeiger.** Bei jedem Dampfkessel müssen ferner Apparate angebracht sein, welche uns über den Stand des Wassers in demselben die nöthige Auskunft geben. Es sind dies Schwimmer, Probirhähne und Wasserstandsröhren.

Der Schwimmer oder das Schwimmniveau (franz. niveau au flotteur; engl. float gauge) besteht aus einem doppelarmigen Hebel ABC, Fig. 655, an welchem einerseits ein eiserner oder steinerner Schwimmer S, andererseits aber ein Gewicht G angehängt ist. Die Drehungsaxe C, Fig. 656, ist entweder schneidig wie bei einem Wagebalken, oder sie wird durch zwei Stahlspitzen gebildet, welche AB mittels einer eingesetzten Nuß erfassen. Das Lager D wird gewöhnlich auf den Speiseapparat F auf-

gesetzt. Um den Stand des Schwimmers genau anzugeben, wird ein Zeiger *Z* an den Hebel angesetzt, der über einer festen Scala *E* hinläuft. Uebrigens ersicht man noch aus der Figur in *XX* den Wasserspiegel und in *H* die Stopfbüchse für den Kupferdraht, woran der Schwimmer hängt.

Fig. 655.

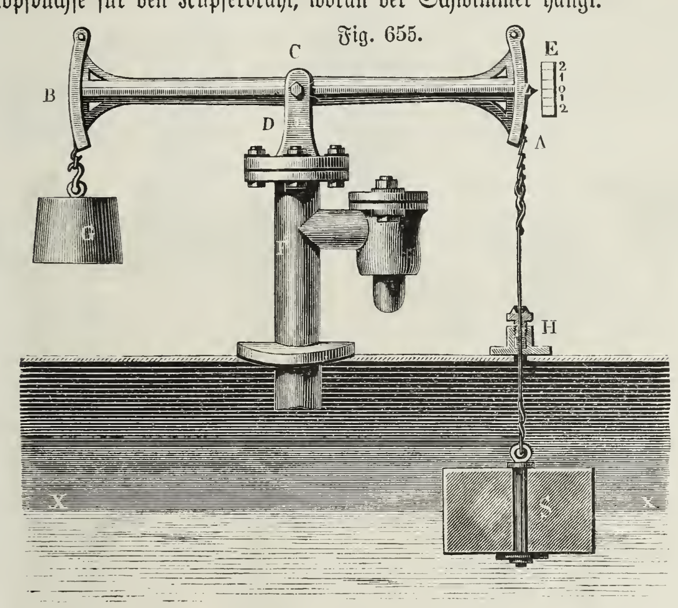


Fig. 656.

Zuweilen verbindet man mit dem Schwimmer eine Warn- oder Sicherheitspfeife (franz. siflet à vapeur; engl. steam whistle), durch die der Dampf bläst, wenn der Wasserspiegel mit dem Schwimmer zu tief gesunken ist.

Die Probir- oder Wasserstandshähne (franz. robinets de niveau; engl. gauge cocks) geben nur dann den Wasserstand im Dampfkessel mit einiger Sicherheit an, wenn die Wallungen des Wassers in demselben nicht sehr groß sind, was jedoch nur bei großen Kesseln und bei niedrigem Dampfdrucke eintritt. Von diesen hat man deren stets zwei (zuweilen sogar drei), der eine mündet etwa 2 Zoll unter und der andere eben so viel über dem mittleren Wasserniveau ein; so lange daher der Wasserspiegel zwischen diesen Mündungen steht, wird bei Eröffnung durch den einen Wasser und durch den anderen Dampf ausströmen. Man hat horizontale und auch verticale Wasserstandshähne; jene münden an der Stirnfläche, diese aber an der Decke des Kessels aus. Fig. 657 (a. f. S.) zeigt in *A* die Seitenansicht und in *B* die vordere Ansicht von den Hähnen der ersten

Art. In Fig. 658 hingegen sind die zwei verticalen Wasserstandshähne A und B mit dem nöthigen Holzschlüssel C abgebildet. Man ersieht, daß B über und A unter dem Wasserspiegel XX einmündet.

Am sichersten erkennt man den Wasserstand an einer **Wasserstandsröhre** (franz. niveau à tube de verre; engl. glass gauge). Die Einrichtung eines solchen Wasserstandszeigers ist aus Fig. 659 zu ersehen. A ist die Glasröhre, B und C sind die metallenen Communicationsröhren,

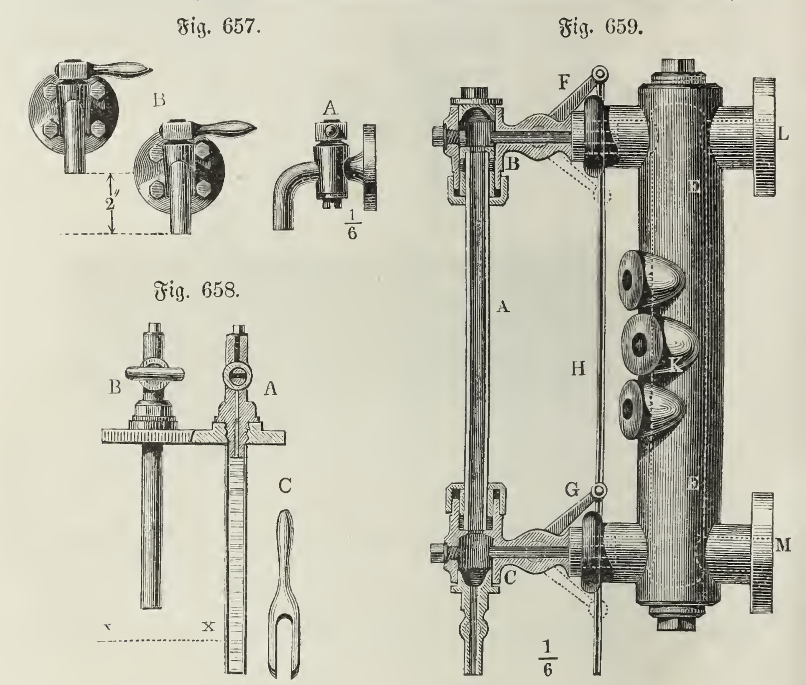


Fig. 657. Fig. 658. Fig. 659.

wovon die untere in den Wasser- und die obere in den Dampfraum einmündet. F und G sind zwei durch eine Stange H verbundene Hebel, wodurch die Hähne in Bewegung gesetzt und die Communication der Glasröhre mit dem Kessel hergestellt und aufgehoben werden kann; endlich sind noch in der Röhre EE, welche die beiden bei L und M in den Kessel einmündenden Hahnstücke mit einander verbindet, die Ansetzstücke K für drei Probirventile angebracht.

Wegen der Zerbrechlichkeit und wegen des leichten Verstopfens und Trübewerdens werden die Wasserstandsröhren nicht so oft angewendet, als sie es in anderer Beziehung verdienen; dagegen empfiehlt **Scholl** in seinem „Führer des Maschinisten“ einen Wasserstandszeiger, von dem Fig. 660

einen horizontalen, sowie Fig. 661 einen verticalen Durchschnitt und Fig. 662 die vordere Ansicht desselben vorstellt. Das Ganze bildet einen Messingkasten

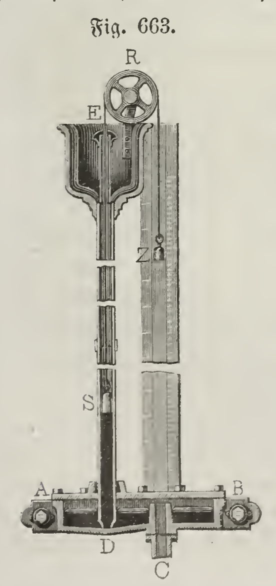
Fig. 660. Fig. 661. Fig. 662.

AB, der von unten mit dem Wasser- und von oben mit dem Dampfraume im Kessel communicirt, und nur von vorn durch zwei dicke Glastafeln G begrenzt wird. Auch bringt man in der neueren Zeit statt der Glastafeln Glasprismen zur Anwendung.

Manometer. An jedem Kessel ist ferner wenigstens eine Vorrichtung nö- §. 428
thig, welche die Dampfspannung anzeigt, um vorzüglich darnach die Feuerung reguliren zu können. Diese Vorrichtungen sind die Manometer oder Dampfmesser (franz. manomètres; engl. steam gauges) und Ventile.

Die Manometer sind entweder offene (franz. à air libre; engl. with open leg) oder verschlossene Luftmanometer (franz. à air comprimé; engl. with compressed air). Von beiden ist schon in Band I, §. 386 und 394, die Rede gewesen, weshalb hier nur noch Ergänzungen, betreffend die besondere Anwendung bei Dämpfen, zu machen sind. Man verwendet zu diesen Instrumenten nicht gern Glasröhren, weil dieselben sehr zerbrechlich sind und weil sie bei der Dunkelheit des Ortes, wo sie gewöhnlich stehen, kein bequemes Erkennen des Quecksilberstandes zulassen, um so mehr, da sie durch Absätze aus dem Quecksilber leicht trübe werden. Dagegen bedient man sich gewöhnlich eiserner Röhren und läßt sich den Quecksilberstand in denselben durch Schwimmer angeben.

Fig. 663.



Die Durchschnittszeichnung eines Gefäßmanometers mit Schwimmer giebt Fig. 663. Es ist AB das eiserne Quecksilbergefäß, C die Röhre, wodurch es mit dem Dampfkessel communicirt, DE die eiserne Manometerröhre, S der Schwimmer und Z der Zeiger, welcher mit dem Schwimmer durch eine über der Leitrolle R liegende Schnur verbunden ist und den Quecksilberstand in der Röhre DE auf einer Scala anzeigt.

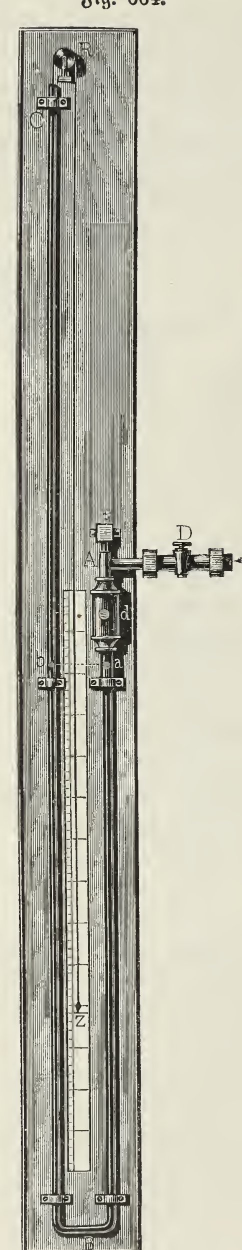


Fig. 664.

Ein Hebermanometer ist in Fig. 664 abgebildet. ABC ist die heberförmige Röhre, welche sich auf der einen Seite an das mit Wasser gefüllte Gefäß Aa anschließt, auf der anderen Seite in die freie Luft ausmündet, übrigens aber bis a und b mit Quecksilber gefüllt ist. Der Dampf wird durch die Röhre DA über das Wasser in Aa geführt, und indem er dieses niederdrückt, wird das Quecksilber im Schenkel aB zum Sinken und das im Schenkel BC zum Steigen genöthigt. Der Stand des letzteren läßt sich aber an einer Scala mittels eines Zeigers Z beobachten, der durch eine, über einer kleinen Rolle R liegenden seidenen Schnur mit einem kleinen metallenen Schwimmer in der Quecksilbersäule verbunden ist.

Es ist hierbei die Frage, um welche Höhe x steigt der Quecksilberspiegel in dem Schenkel BC oder sinkt der äußere Zeiger Z, wenn der Dampf mit einer gewissen Kraft p auf den Wasserspiegel im ersten Schenkel aB drückt? Bei gleicher Weite beider Schenkel sinkt die Oberfläche des Quecksilbers im ersten Schenkel ebenso viel als die im zweiten steigt, es ist folglich der Niveauabstand zwischen beiden Oberflächen $= 2x$, und ist nun der Barometerstand $= b$, so hat man den von unten nach oben wirkenden Druck der Quecksilbersäule $= 2x + b$. Der Gegendruck von oben nach unten bestimmt sich aber aus der als constant anzusehenden Höhe h der Wassersäule in dem weiten Gefäße, aus der Höhe x der in den ersten Schenkel eingedrungenen Wassersäule, dem specifischen Gewichte ε des Quecksilbers und der Dampfpressung p, gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule:

$$= p + \frac{h + x}{\varepsilon},$$

es ist also zu setzen:

$$2x + b = p + \frac{h + x}{\varepsilon},$$

und folgt daher:

$$x = \frac{\varepsilon\,(p - b) + h}{2\,\varepsilon - 1}.$$

Drücken wir p in Atmosphären, h und x aber in Zollen aus, so erhalten wir, da noch $\varepsilon = 13{,}6$ ist,

$$x = \frac{13{,}6\,.\,29\,(p - 1) + h}{26{,}2} = 15{,}09\,(p - 1) + 0{,}0382\,h \text{ Zoll.}$$

Hiernach folgt, wenn man den Nullpunkt $0{,}0382\,h$ über den Punkt (b) der Röhre $B\,C$ setzt,

für $p = 1$	$^5/_4$	$^3/_2$	$^7/_4$	2	3	4	Atmosphären,
$x = 0$	3,77	7,545	11,32	15,09	30,18	45,27	Zoll.

Die Füllung des Instrumentes mit Quecksilber und das Nachgießen des Wassers erfolgt durch die mittels eines Stöpsels verschließbare Oeffnung e im Kopfe des ersten Schenkels. Damit diese Flüssigkeiten in der richtigen Quantität eingegossen werden, öffnet man während des Eingießens von Quecksilber das Loch a und nachher, während des Eingießens von Wasser, das Loch d.

Luftmanometer. Das eben behandelte Manometer mit Schwimmer wird vorzüglich bei Niederdruckkesseln angewendet, weil hier die Manometerröhre ziemlich kurz sein kann; jedoch findet man es auch bei Mitteldruckkesseln, worin Dämpfe von 3 bis 4 Atmosphären Spannung erzeugt werden, angewendet, da hier eine Röhrenlänge von reichlich $2\,.\,29 = 58$ bis $3\,.\,29 = 87$ Zoll ausreicht. Für Hochdruckdämpfe erhalten aber diese Manometer eine zu große Ausdehnung, und man wendet daher statt derselben auch andere Instrumente an. §. 429

Das Luftmanometer, dessen Theorie bereits in Band I, §. 394, abgehandelt worden ist, läßt sich zwar zum Ausmessen aller Dampfspannungen gebrauchen, allein wegen der Unsicherheit seiner Angaben, in Folge der Oxydation des Quecksilbers, wird es nicht sehr häufig an stehenden Dampfmaschinen angewendet. Um bei höheren Dampfspannungen nicht zu kleine Veränderungen in dem Quecksilberstande zu erhalten, verbindet man wohl mit der Manometerröhre $B\,C$, Fig. 665 (a. f. S.), ein Reservoir E, aus welchem erst dann alle Luft ausgetrieben wird, wenn die Spannung eine höhere ist. Steht z. B. bei 3 Atmosphären Spannung das Quecksilber unmittelbar über E, so nimmt es bei 6 Atmosphären die Mitte M von $C\,E$ ein, und es lassen sich an einer Eintheilung von $E\,M$ alle Spannungen zwischen 3 und 6 Atmosphären ablesen. Einem ähnlichen Zwecke entspricht auch das hyperbolische Manometer von Delaveye (s. Dingler's Journal, Bd. 93), das nach dem Ende zu sich immer mehr und mehr zusammenzieht, und in eine Kugel ausläuft, und die Eigenschaft hat, daß es gleiche

Veränderungen in der Dampfspannung auch durch gleiche Veränderungen in dem Quecksilberstande anzeigt.

Eine complicirte Einrichtung haben die Luftmanometer von Hofmann in Breslau (s. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes in Preußen, Jahrgang 1849). Die wesentliche Einrichtung solchen Instrumentes ist aus Fig. 666 zu ersehen; es ist hier ABC eine mit dem Dampfkessel in Verbindung stehende Kupferröhre, CHD ein Hahnstück, $DEFG$ ein zweimal gebogenes Kupferrohr und KL eine sich nach oben etwas verengernde und in ein birnförmiges Ende auslaufende Glasröhre. Die eigentliche Füllung EFG dieses Instrumentes besteht aus Spiritus, außerdem ist aber auch noch eine Füllung BCD von Wasser vorhanden, welche den Dampfdruck unmittelbar aufnimmt und mittels der Luftsäule DE auf den Spiritus fortpflanzt, der wieder die Luft in der Mano-

Fig. 665.

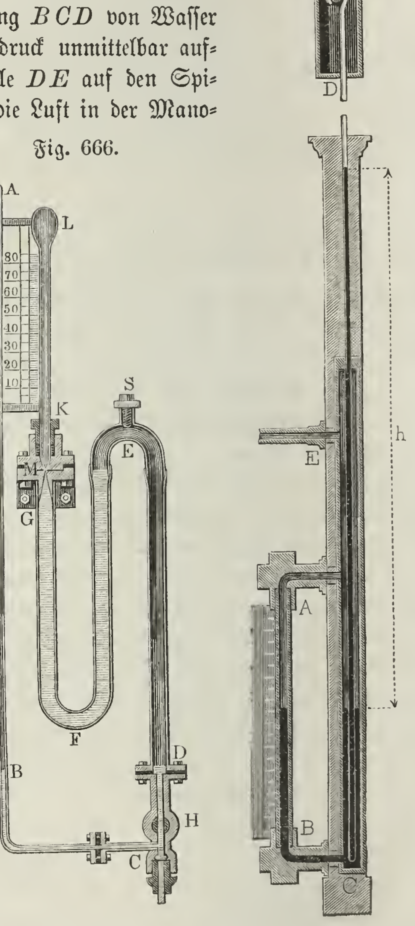


Fig. 666.

Fig. 667.

meterröhre KL zusammendrückt. Der Spiritus wird durch eine zu verstöpselnde Mündung S in solcher Menge eingefüllt, daß er durch ein feines und ebenfalls später zu verstöpselndes Loch bei M abzufließen anfängt. Wenn man den Dampfdruck kennen lernen will, so öffnet man den Dampfhahn und beobachtet an einer Scala den Stand des Spiritus in der Röhre KL. Die Eintheilung der Scala ist natürlich auf dem experimentellen Wege zu finden.

Ihrer Sicherheit wegen wendet man jetzt selbst bei hohem Dampfdrucke offene Hebermanometer an; um sie aber mit einer kleinen Scala versehen zu können, giebt man demjenigen Theile AB, Fig. 667, desselben, an welchem man den Quecksilberstand abliest, eine größere Weite. Ist z. B. die Weite von diesem Theile dreimal so groß als die Weite der übrigen Röhre, so fällt die Bewegung des Quecksilbers in ihm neunmal so klein als in dem anderen Schenkel CD aus; da aber die Spannung durch die Niveaudifferenz, d. i. durch die Senkung des Quecksilbers in dem einen Schenkel plus Steigung desselben im anderen gemessen wird, so ist in diesem Falle die Bewegung des Quecksilbers im weiteren Theile ein Zehntel des Niveauabstandes, d. i. es giebt der Quecksilberstand in diesem Theile die Dampfspannung zehnfach verjüngt an. Bei dem abgebildeten Manometer von Decoudun ist der weitere Theil AB unten und drückt der bei E zutretende Dampf auf das Quecksilber in demselben; bei dem von Desbordes hingegen nimmt derselbe die obere Stelle ein und es drückt die Luft zunächst auf das Quecksilber in diesem Theile.

Differenzialmanometer. Sehr geeignet zum Messen hoher Dampf- §. 430
spannungen sind noch die Differenzialmanometer. Ein solches Instrument besteht aus einem Systeme paralleler und unter einander verbundener Röhren AB, BC, $CD\ldots$, Fig. 668 (a. f. S.), von welchen die unteren Hälften bis zur Linie MN mit Quecksilber, die oberen Hälften aber mit Wasser gefüllt sind. Wird nun das eine Ende K mit dem Dampfe, das andere Ende L aber mit der Luft in Communication gesetzt, so sinkt das Quecksilber im ersten, dritten, fünften Schenkel u. s. w., und steigt im zweiten, vierten, sechsten u. s. w. so weit, bis dem Dampfdrucke auf der einen und dem Luftdrucke auf der anderen Seite durch den vereinigten Quecksilber- und Wasserdruck das Gleichgewicht gehalten wird. Sind alle Röhren gleich weit, was der Brauchbarkeit des Instrumentes wegen auch gefordert werden muß, so ist die Steighöhe x des Quecksilbers im ersten Schenkel so groß, wie die Senkung im anderen, also die Niveaudifferenz zwischen beiden $= 2x$, und ebenso groß auch die zwischen dem Quecksilber in der vierten und dritten Röhre, ferner zwischen der sechsten und fünften u. s. w. Dagegen fällt hierbei die Wassersäule in der zweiten Röhre um $2x$ kürzer

aus, als die in der ersten, ebenso die in der vierten um $2x$, als die in der dritten u. s. w. Bezeichnet nun ε das specifische Gewicht des Quecksilbers, so folgt die Höhe einer Quecksilbersäule, welche einer Wassersäule von der Höhe $2x$ das Gleichgewicht hält, $= \frac{2x}{\varepsilon}$, und daher die Spannung, welche das Eintreten der Niveaudifferenz $2x$ hervorbringt:

Fig. 668.

$$= 2x - \frac{2x}{\varepsilon}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot 2x$$

$$= \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} x.$$

Diese Spannung wird aber durch den Niveauabstand zwischen dem vierten und dritten Schenkel verdoppelt, ferner durch den zwischen dem sechsten und fünften verdreifacht u. s. w. Ist nun n die Anzahl der Röhrenschenkel, p die Dampfspannung am Anfange des ersten Schenkels und b der durch die Höhe einer Quecksilbersäule gemessene Luftdruck am Ende des anderen Schenkels, so hat man:

$$p = b + \frac{n}{2} \cdot \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} x,$$

d. i.

$$p = b + \frac{n(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} x = b + 0{,}9266\, n x;$$

sowie

$$x = \frac{\varepsilon(p - b)}{(\varepsilon - 1) n} = 1{,}079 \frac{(p - b)}{n} \text{ Zoll},$$

oder, wenn man p in Atmosphären ausdrückt und $b = 1$ annimmt:

$$x = 31{,}29 \cdot \frac{p - 1}{n} \text{ Zoll}.$$

Bei einem Instrumente mit acht Röhren hat man z. B. für $p = 1$, $1^1/_2$, 2, 3, 4, 5, 6 Atmosphären die Manometerstände

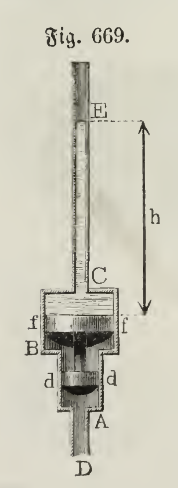
$x = 0$ Zoll, 1,955 Zoll, 3,91 Zoll, 7,82 Zoll, 11,73 Zoll, 15,64 Zoll, 19,56 Zoll.

Das Endstück FL der ganzen Schlangenröhre ist gläsern und mit einer Scala MS zum Ablesen des Quecksilberstandes eingefaßt. Damit bei einem Dampfstoße das Quecksilber nicht aus der Röhre verschüttet werde, ist dieselbe durch einen Hut L bedeckt und mit einem Gefäße G verbunden, in welchem sich das übergetriebene Quecksilber sammeln kann. Das Nähere über die Einrichtung eines solchen Instrumentes nach Richard ist im 44. Jahrgange (1845) des Bulletin de la société d'encour., sowie in den Annales des mines, T. VII, 1845, nachzulesen.

Kolbenmanometer. In der neuesten Zeit sind noch andere Manometer zum Messen des hohen Dampfdruckes vorgeschlagen und angewendet worden. Es gehört hierher vorzüglich das offene Manometer von Galy-Cazalat oder Journeux, und nächstdem das Metallmanometer von Bourdon (s. Annales des mines, IV. Sér., T. XVI, 1849, oder die Zeitschrift „der Ingenieur", Bd. II). §. 431

Das Princip, welches bei den ersteren Manometern zur Anwendung kommt, besteht in Folgendem. In dem Gefäße ABC, Fig. 669, sind zwei durch einen Stiel fest mit einander verbundene Kolben $\overline{dd}$ und $\overline{ff}$ von verschiedenen Durchmessern verschiebbar, wovon der eine den Druck des bei D zutretenden Dampfes und der andere den Druck einer Flüssigkeitssäule CE aufnimmt. Sind nun r und r_1 die Halbmesser der Kolben $\overline{dd}$ und $\overline{ff}$, ist ferner p der Dampfdruck, h der Manometerstand oder die Höhe der Flüssigkeitssäule CE, und γ die Dichtigkeit derselben, so hat man die Kraft, mit welcher jeder dieser Kolben gedrückt wird:

Fig. 669.



$$\pi r^2 p = \pi r_1^2 h \gamma,$$

und daher:

$$h = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{p}{\gamma},$$

z. B. für $\frac{r}{r_1} = 1/_3$:

$$h = 1/_9 \, \frac{p}{\gamma};$$

es wird also dann eine Atmosphäre von 28 Zoll durch eine $^{28}/_9 = 3^1/_9$ Zoll hohe Flüssigkeitssäule in CE angezeigt.

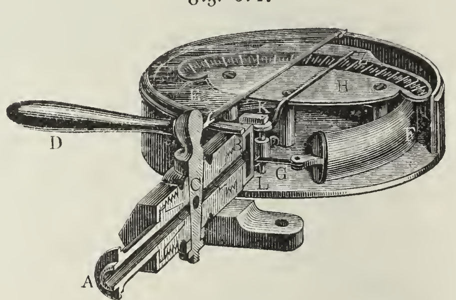
Bei dem Manometer von Journeux (Fig. 670) sind, um die Unsicherheit wegen der Kolbenreibung zu umgehen, die Kolben durch Metallscheiben $\overline{dd}$ und $\overline{ff}$ ersetzt, und es wird der Druck durch eine besondere Kolbenverbindung g von einer solchen Scheibe auf die andere übergetragen. Zum genauen Abschluß des Dampfes von Quecksilber sind die beiden Metallscheiben noch mit Scheiben von vulcanisirtem Kautschuk belegt, und damit die Luft auf die Scheibe $\overline{ff}$ eben so gut von unten als von oben drücken kann, ist in den unteren Theil des Gefäßes ein Loch o zum Eintritt der Luft gebohrt. Das Quecksilber wird mittels eines Trichters durch den Aufsatz D eingeführt.

Fig. 670.



§. 432 **Metallmanometer.** Das Metallmanometer von Bourdon besteht, wie das zuerst von Schinz construirte Metallmanometer, der Hauptsache nach aus einer gebogenen Messingröhre BEF, Fig. 671, mit elliptischem Querschnitte, deren Gestalt sich mit dem Drucke der in ihr eingeschlossenen Flüssigkeit ändert. Das eine Ende B der Röhre ist offen und

Fig. 671.



steht mit der Dampfröhre AB in Verbindung, das andere Ende F hingegen ist verschlossen und frei beweglich, und ein mit ihm durch eine stehende Welle KL verbundener Zeiger Z rückt auf einer Scala H fort, wenn sich die Röhre in Folge des Dampfdruckes in derselben streckt.

Da in Folge des Dampfdruckes der elliptische Querschnitt der Röhre sich mehr dem Kreise nähert (s. §. 411), so geht die Breite DF (Fig. 672) derselben in D_1F_1 über, wobei die Seiten DE und FG in die Lagen D_1E_1 und F_1G_1 gelangen, ferner der Querschnitt EG die Lage E_1G_1

annimmt und der Krümmungshalbmesser $CA = CB$ in $C_1 A = C_1 B$ übergeht, also um CC_1 größer wird.

Bei dem Metallmanometer von Schäfer und Budenberg ist die Spiralröhre durch eine wellenförmige Stahlplatte und bei dem von Gäbler

Fig. 672.

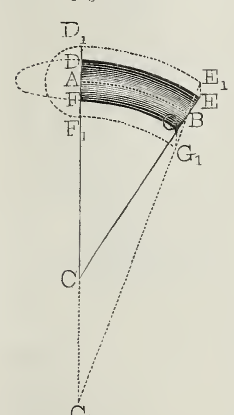
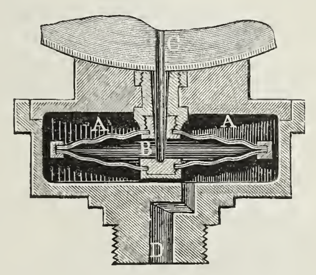


Fig. 673.



und Veitshaus durch ein linsenförmig verbundenes Plattenpaar AA, Fig. 673, ersetzt. Der bei D zutretende Dampf drückt dieses Plattenpaar zusammen, und schiebt dabei den Stift BC aufwärts, welcher wieder einen Zeigermechanismus in Bewegung setzt und dadurch die Größe des Dampfdruckes anzeigt.

Endlich sind Thermometer ebenfalls noch Vorrichtungen, welche die Spannkraft der Dämpfe anzeigen, da man mittels Formeln oder Tabellen die Expansivkraft aus der Temperatur, welche diese Instrumente anzeigen, finden kann. Man hängt diese von oben durch eine Stopfbüchse in den Kessel und schützt sie durch eine metallene Hülle vor dem Zerbrechen. Siehe Herrn Dr. H. Schefflers Monographie: die Ursachen der Dampfkesselexplosionen und das Dampfkesselthermometer.

Sicherheitsventile. Sicherheitsventile (franz. soupapes de sûreté; engl. safety valves) sind die wichtigsten Sicherheitsapparate eines Dampfkessels. Man unterscheidet innere und äußere Sicherheitsventile. Aeußere Sicherheitsventile oder Sicherheitsventile schlechtweg (franz. soupapes externes; external valves) öffnen sich nach außen, wenn der Dampfdruck im Kessel eine gewisse Grenze überschreitet, und lassen nun so lange Dampf abströmen, bis die Dampfspannung wieder unter diese Grenze herabgegangen ist, in welchem Falle sie sich von selbst wieder schließen. §. 433

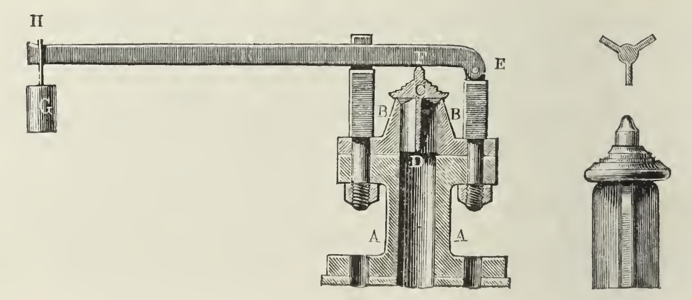
Die inneren Sicherheits- oder Luftventile (franz. soupapes internes, soupapes renversées, soupapes atmosphèriques; engl. vacuum valves, atmospheric safety valves) hingegen öffnen sich nach innen, wenn der Druck im Inneren des Kessels, vielleicht durch Abkühlung bei Unterbrechung der Feuerung, unter eine gewisse Grenze hinabgeht, und

lassen dann so lange Luft von außen nach innen strömen, bis die Spannung im Kessel beinahe dem Atmosphärendrucke gleichkommt. Während die äußeren Sicherheitsventile das Zerreißen der Dampfkessel durch den Dampfdruck verhindern sollen, haben die inneren Sicherheitsventile den Zweck, das Zerdrücken desselben durch den Atmosphärendruck zu verhindern. Man kann leicht ermessen, daß die inneren Sicherheitsventile oder sogenannten Luftventile nur dann in Wirksamkeit treten, wenn sich nach Beendigung der Feuerung eines Kessels die Dämpfe in demselben condensiren.

Nach der Art und Weise, wie die Sicherheitsventile beschwert werden, um dem Dampfdrucke das Gleichgewicht zu halten, hat man die Ventile mit directer Belastung zu unterscheiden von den Ventilen mit indirecter oder Hebelbelastung. Die Ventile der ersten Art werden vorzüglich bei mäßigen Dampfspannungen angewendet, wogegen man sich der letzteren mehr bei starken Dampfspannungen bedient, um weniger Belastung nöthig zu haben. Bei jenen liegt die einen Cylinder bildende Belastung unmittelbar auf der oberen Fläche des Ventiles, bei diesen hingegen hängt sie an dem längeren Arme eines einarmigen Hebels, und wirkt so dem am kürzeren Arme von unten nach oben auf das Ventil drückenden Dampfe entgegen. Noch hat man auch Ventile mit Federdruck; wegen der großen Veränderlichkeit der Federkraft gewähren jedoch diese nicht hinreichende Sicherheit.

Der leichteren Eröffnung wegen giebt man den Sicherheitsventilen nicht eine konische, sondern eine ebene Plattenform, und läßt sie nur auf die schmale Stirnfläche des röhrenförmigen Ventilsitzes aufruhen. Nach belgischen Vorschriften darf die Breite der ringförmigen Berührungsfläche zwischen dem Sicherheitsventile und seinem Sitze nur 2 Millimeter betragen; in Frankreich muß aber diese Breite ein Dreißigstel des Durchmessers der inneren Ventilfläche ausmachen, wenn dieser Durchmesser 30 oder mehr Millimeter mißt, ist er aber kleiner, so soll diese Breite 1 Millimeter betragen. Fig. 674 stellt ein Sicherheitsventil mit Hebelbelastung vor. AA ist das Ventilgehäuse, welches auf den Dampfkessel aufgeschraubt wird, BB der oben etwas erweiterte Ventilsitz, CD das Ventil, und zwar C die Ventilplatte,

Fig. 674.



und *D* sind die zum geraden Auf- und Niedersinken nöthigen Ventilflügel; *EFH* ist der um *E* drehbare Hebel, welcher in *H* durch ein Gewicht *G* nieder- und durch das Ventil in *F* aufwärts gedrückt wird.

Fig. 675.

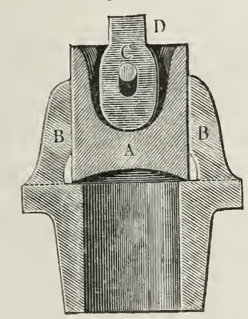
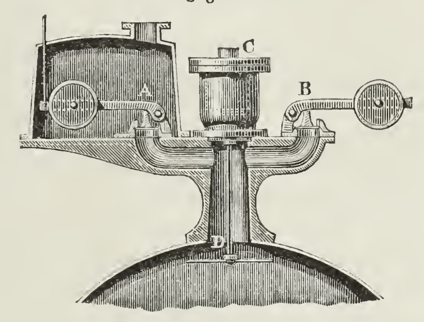


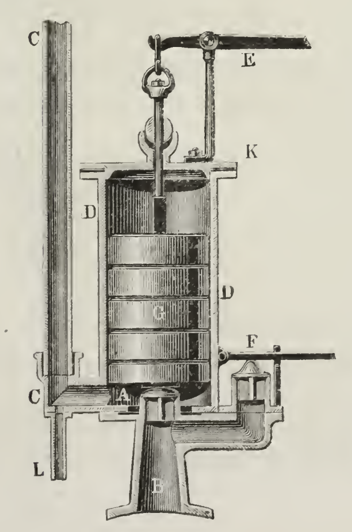
Fig. 676.



Neuere Sicherheitsventile wie *A*, Fig. 675, sind außen cylindrisch abgedreht, haben eine aus vier Backen *B, B* bestehende Führung und hängen mittels eines Bolzens *C* an der vom Ventilhebel herabhängenden Stange *D*.

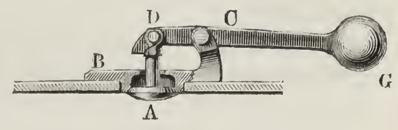
Ein vollständiger Sicherheitsventilapparat ist in Fig. 676 abgebildet. Beide Ventile *A* und *B* haben, wie das Ventil in Fig. 675, äußere Führungsstangen. Das Ventil *A* ist von einem Gehäuse eingeschlossen und daher dem Heizer unzugänglich; das andere Ventil ist dagegen ganz frei. In dem Gehäuse *C* befindet sich das Absperrventil und an demselben ist eine Schutzplatte *D* angebracht, welche das Aufsteigen des Kesselwassers in das Dampfrohr verhindern soll. Ferner stellt Fig. 677 die Durchschnittszeichnung eines Ventiles mit directer Belastung dar, *A* ist das Ventil, *G* sind die über eine vierkantige Ventilstange geschobenen Belastungsgewichte, *B* ist das auf dem Kessel aufsitzende und den Ventilsitz bildende Fußstück, *CC* ferner das Dampfableitungsrohr, *DD* das dem Heizer unzugängliche Ventilgehäuse, *E* ein Hebel zum Lüften und Probiren des Ventiles, und endlich *F* ein zweites dem Heizer zugängliches Hebelventil.

Fig. 677.



In Fig. 678 ist ein Luftventil

Fig. 678.



abgebildet. Hier ist das Ventil A durch ein Gelenk D mit dem um C drehbaren Hebel DG verbunden, und es wird dasselbe durch ein mäßiges Gewicht G am längeren Arme des Hebels ganz schwach von unten nach oben an den Ventilsitz B angedrückt.

§. 434 **Theorie der Sicherheitsventile.** Die äußeren Sicherheitsventile müssen nicht allein mit einem gewissen Gewichte beschwert werden, damit sie sich erst bei einer gewissen Dampfspannung öffnen, sondern sie müssen auch eine gewisse Größe erhalten, damit sie bei ihrer Eröffnung einen hinreichenden Dampfabfluß gewähren. Es ist wenigstens zu verlangen, daß das Abflußquantum größer sei, als die in derselben Zeit erzeugte Dampfmenge. Ueber die Ausmittelung der Belastung eines Sicherheitsventiles ist bereits in Bd. I, §. 386, das Nöthigste gesagt worden. Ist p die Dampfspannung, sowie b die äußere oder Atmosphärenspannung, und r der innere Halbmesser des Sicherheitsventiles, so hat man die Kraft, mit welcher das Ventil emporgetrieben wird:

$$P = \pi r^2 (p - b);$$

bei directer Belastung ist das Gewicht G des ganzen Ventiles dieser Kraft gleich zu machen, bei einer Hebelbelastung hingegen hat man das am Hebelarme a anzuhängende Gewicht

$$G = \frac{Pd - Qs}{a}$$

zu machen, insofern d den Hebelarm der Kraft P und Qs das statische Moment des unbelasteten Ventiles ausdrücken. Einige Unsicherheit läßt diese Bestimmung immer zurück, zumal wenn die ringförmige Berührungsfläche nicht sehr schmal ist, weil die Metallporen in der Nähe dieser Fläche nicht bloß mit atmosphärischer Luft, sondern auch, wenigstens nach innen zu, mit Dampf ausgefüllt sind, folglich die Druckfläche des Dampfdruckes noch etwas größer als πr^2 ist (s. eine Abhandlung hierüber von Cato, im polytechnischen Centralblatt, Bd. VIII, 1846).

Um die nöthige Größe der Ventilfläche zu finden, nehmen wir der mechanischen Wärmetheorie zufolge an, daß bei Eröffnung des Sicherheitsventils durch den Mündungsquerschnitt F Quadratmeter desselben, bei dem Druck von p Atmosphären, außer einer größeren Menge heißen Wassers, das Dampfquantum

$$Q = 20\, p F \text{ Kilogramm pr. Secunde}$$

zum Ausfluß gelange (siehe Zeuner's Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie Seite 421).

Nehmen wir ferner nach dem Obigen (siehe, §. 404) an, daß F_1 Quadratmeter Heizfläche eines Dampfkessels die Dampfmenge

$$Q = \frac{19\,F_1}{60\,.\,60} = 0{,}00528\,F_1 \text{ Kilogramm liefert,}$$

so folgt das erforderliche Verhältniß der Ventilfläche F zur Heizfläche F_1:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{0{,}00528}{20\,p} = \frac{0{,}000264}{p}.$$

Dieser Formel zufolge ist für die

Dampfspannung p =	$^4/_3$	2	3	4	5	6 Atmosphären
Das Flächenverhältniß $\frac{F}{F_1}$ =	0,0001980	0,0001320	0,0000880	0,0000660	0,0000528	0,0000440

Je größer also der Dampfdruck ist, je kleiner fällt die erforderliche Größe der Fläche des Sicherheitsventils aus.

Nach der preußischen Verordnung soll $\frac{F}{F_1}$ wenigstens $^1/_{3000}$ sein; es ist also hier beim Niederdruck von $^4/_3$ Atmosphäre eine ($^1/_{3000}$: 0,000198) $= \frac{1}{0{,}594} = 1{,}68$, d. i. nahe $^5/_3$ fache Sicherheit vorhanden, und dieselbe bei hohen Dampfspannungen noch größer.

Die französischen „Ordonnances" schreiben vor, den Ventildurchmesser nach der von Thrémery auf dem Wege der Empirie gefundenen Formel

$$d = 2{,}6\sqrt{\frac{F_1}{p - 0{,}412}} \text{ Centimeter}$$

zu bestimmen, so daß hiernach, da F_1 in Quadratmetern auszudrücken ist,

$$\frac{F}{F_1} = \frac{(0{,}026)^2\,.\,\pi}{4\,(p - 0{,}412)} = \frac{0{,}000531}{p - 0{,}412},$$

also für $p = {}^5/_4$

$$\frac{F}{F_1} = 0{,}000634 = \frac{1}{1577}$$

folgt.

Damit die Sicherheit noch mehr erhöht werde, wendet man zwei Sicherheitsventile, jedes von der vorgeschriebenen Größe, an und setzt dieselben an den entgegengesetzten Kesselenden auf.

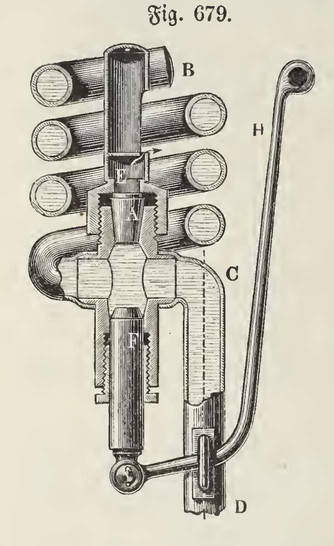
Um ein Sicherheitsventil dem Heizer unzugänglich zu machen, kann man nach Fairbairn den Hebel desselben im Innern des Kessels aufhängen.

Leichtflüssige, aus Blei, Wismuth und Zink bestehende und in die Kessel-

wand eingesetzte Metallplatten oder Stöpsel sind unbequeme und sogar nicht immer genügende Sicherheitsvorrichtungen.

Hierher gehört auch der in Fig. 679 abgebildete **Warner** von **Black**, welcher durch Schmelzen eines bei 100 Grad schmelzbaren conischen Pfropfes dem Tiefersinken des Kesselwassers eine Grenze setzt. Dieser Apparat besteht aus einem Kupferrohr BCD, welches unten in den Dampfkessel D führt, und oben durch den schmelzbaren Pfropf A geschlossen ist. Wenn der Wasserspiegel im Kessel so tief sinkt, daß die Mündung D frei wird, so fließt das Wasser aus der Röhre CD ab und es füllt sich dieselbe mit Dampf, durch welchen der Pfropf zum Schmelzen gebracht wird. In Folge dessen strömt nun Dampf durch eine über A sitzende Dampfpfeife E und zeigt dadurch den entstandenen Mangel an Kesselwasser an. Durch die Schlangenform der Röhre BC bewirkt man, daß das Wasser in derselben nur eine Temperatur von 40 bis 50 Grad annimmt. Hebt man später den Kolben F mittels des Hebels H empor, so kann man dadurch die durch das Schmelzen des Pfropfes entstandene Höhle wieder mit einem neuen Pfropf ausfüllen.

Fig. 679.



Beispiel. Welche Dimensionen sind den beiden Sicherheitsventilen eines Dampfkessels zu geben, durch welchen man stündlich 500 Pfund Dampf von 4 Atmosphären Spannung erzeugen will? Die nöthige Heizfläche ist

$$F_1 = \frac{1}{4} \cdot 500 = 125 \text{ Quadratfuß},$$

folglich nach preußischen Vorschriften jede Ventilfläche:

$$F_1 = \frac{F_1}{3000} = \frac{125}{3000} = 0{,}04167 \text{ Quadratfuß},$$

und daher der Ventildurchmesser:

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}04167}{\pi}} = 0{,}23 \text{ Fuß} = 2\frac{3}{4} \text{ Zoll}.$$

Nach französischen Gesetzen hingegen hat man

$$d = 2{,}6 \sqrt{\frac{125 \cdot 0{,}0985}{4{,}000 - 0{,}412}} = 2{,}6 \sqrt{\frac{12{,}3125}{3{,}588}} = 4{,}82 \text{ Centimeter} = 1\frac{5}{6} \text{ Zoll}.$$

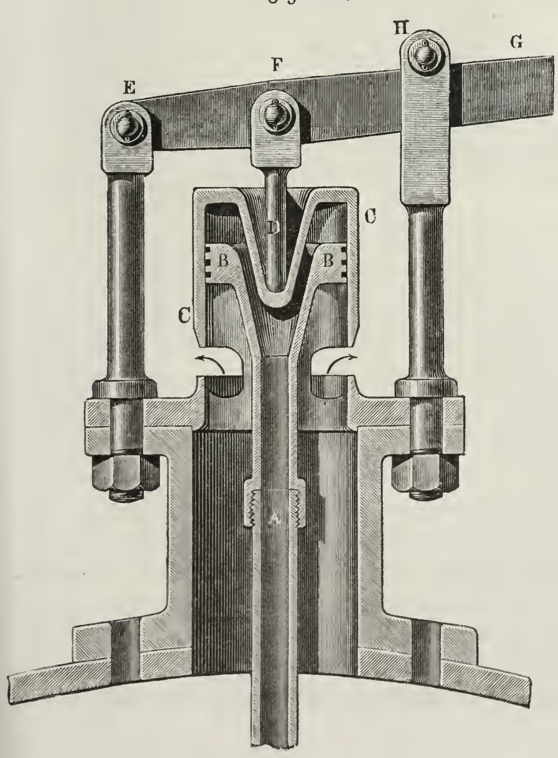
Unsere Formel giebt bei 3facher Sicherheit:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{3 \,.\, 0{,}000264}{p} = 0{,}000198, \text{ daher}$$

$F = 0{,}000198 \,.\, 125 = 0{,}02475$ und demnach $d = 0{,}178$ Fuß $= 2^1/_3$ Zoll.

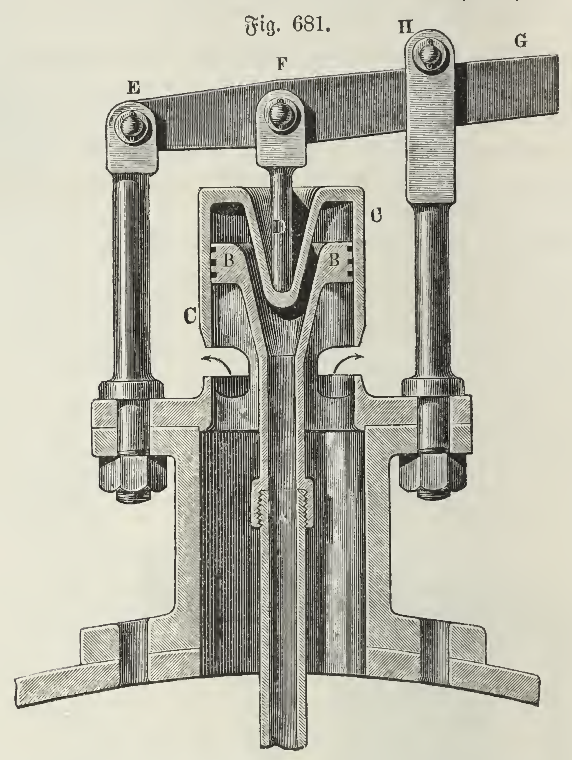
Neuere Sicherheitsventile. Mehrfache Beobachtungen und Versuche §. 435 an Sicherheitsventilen haben dargethan, daß sich dieselben während der Dampfausströmung in der Regel nur wenig heben, und deshalb nicht so viel Dampf durchlassen als der Querschnitt derselben bei einer gegebenen Dampfspannung erwarten läßt. Insbesondere hat der Regierungsrath v. Burg gefunden, daß sich die gewöhnlichen Sicherheitsventile nur $^1/_8$ bis $^1/_3$ Linie eröffnen (siehe dessen Abhandlung über die Wirksamkeit der Sicherheitsventile, Wien 1863). Auf Grund der Ergebnisse seiner Versuche schließt Herr v. Burg, daß die Sicherheitsventile nur als Regulatoren für den Heizer anzusehen sind. Auch fand er durch seine Versuche bestätigt, daß sich die Sicherheitsventile eher eröffnen als dem Dampfdruck oder den Dampfregulativen entsprechend anzunehmen ist. Hiermit stimmen auch die Ergebnisse der Versuche von Baldwin überein (siehe Polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1867). Bei den neueren verbesserten Sicherheitsventilen sollen die Mängel der gewöhnlichen Ventile beseitigt oder wenigstens vermindert sein. Unter anderen gehören hierher die Sicherheitsventile von Hartley, Bodmer u. s. w. Bei dem Sicherheitsventil von Hartley wird die gewöhnliche Kreismündung durch zwei ringförmige und auch die Ventilplatte durch zwei ein Ganzes bildende Ventilringe ersetzt und ist die Belastung unten an das Ventil angehangen, reicht also in den Kesselraum hinein. Das Bodmer'sche Sicherheitsventil CC, Fig. 680, wird nicht direct durch

Fig. 680.



den Dampfdruck, sondern durch das Kesselwasser gehoben. Zu diesem Zwecke ist eine Röhre AB angebracht, welche sich oben conisch

Fig. 681.



erweitert und daselbst das Kesselwasser in den inneren Raum des Ventils führt. Der leichteren Eröffnung wegen ist die cylindrische Ventilwand CC innen genau ausgeschliffen und der äußere Umfang des Röhrenendes statt der Liderung mit ringförmigen Rinnen versehen. Der nur zum Theil abgebildete Ventilhebel EFG ist um die Axe E drehbar und drückt das Ventil mittels des Stiels DF nieder, welcher sich unten gegen den conischen Ventildeckel stemmt.

§. 436 **Sicherheitsventile mit Federdruck.** Bei den Locomotiven und Locomobilen lassen sich wegen der unvermeidlichen Schwankungen die Sicherheitsventile nicht durch Gewichte belasten, hier sind statt der letzteren die allerdings weniger sicheren Stahlfedern in Anwendung zu bringen.

Die Einrichtung eines gewöhnlichen Sicherheitsventils mit Federdruck ist aus der Abbildung in Fig. 682 zu ersehen. Das Ende E des Hebels DCE, woran das Sicherheitsventil A aufgehangen ist, umfaßt eine Schrauben-

spindel FF_1, welche von einer im Gehäuse FGH eingeschlossenen Spiralfeder getragen wird. Während das Hebelende E durch den Dampfdruck

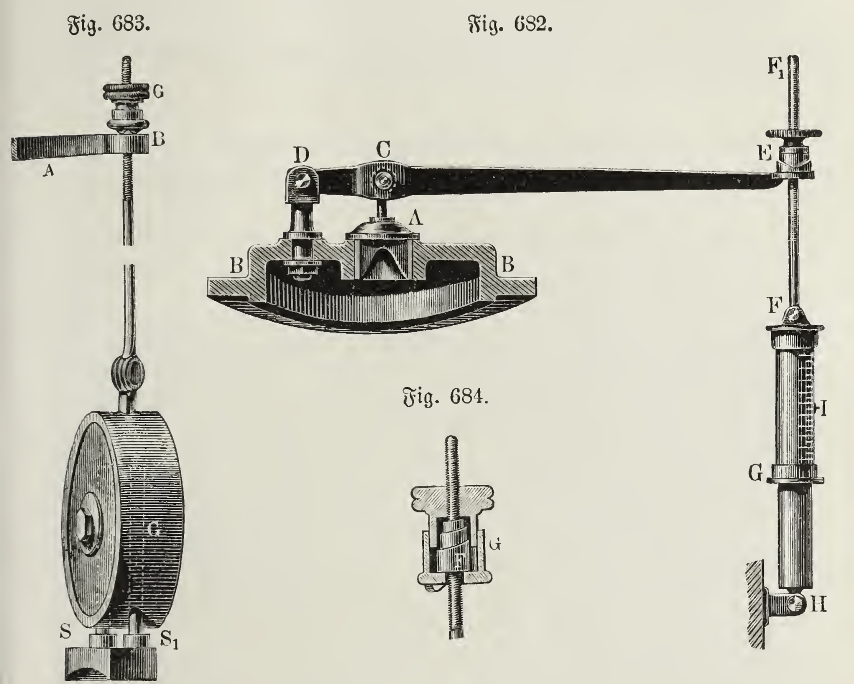


Fig. 683. Fig. 682. Fig. 684.

nach oben getrieben wird, zieht die Federwage dasselbe abwärts; und es läßt sich durch Einstellen der Schraubenmutter E das Gleichgewicht zwischen der Federkraft und dem Dampfdruck herstellen. Ein durch einen Schlitz aus dem Federgehäuse herausgeführter Zeiger I zeigt an einer am äußeren Umfang des Gehäuses angebrachten Scala die Größe des Dampfdrucks an.

Die Sicherheitsventile mit Federbelastung haben den Fehler, daß die Kraft, mit welcher sie dem Dampfdruck entgegenwirken, nicht constant ist, sondern mit der Eröffnung des Ventils wächst. Zur Beseitigung desselben läßt man nach Meggenhofen die Feder nicht unmittelbar auf den Hebel wirken, sondern mittels eines Winkelhebels, dessen Armverhältniß sich mit der Federspannung ändert.

Um endlich auch bei Locomotiven Sicherheitsventile mit Gewichtsbelastung anwenden zu können, hat Herr Kirchweger das Gewicht G, Fig. 683 mittels einer Spiralfeder an den Ventilhebel AB angeschlossen. Diese Feder F ist in einem Gehäuse H eingeschlossen, wovon Fig. 684 einen Durchschnitt zeigt. Außerdem sind zur Führung des Gewichts noch zwei

Stifte S_1 S angebracht, welche in das Innere desselben eindringen und ein Polster von Gummischeiben tragen.

§. 437 **Entleeren und Oeffnen der Dampfkessel.** An einem Dampfkessel ist ferner noch anzubringen:

1) das Dampfrohr, zum Fortleiten des Dampfes,

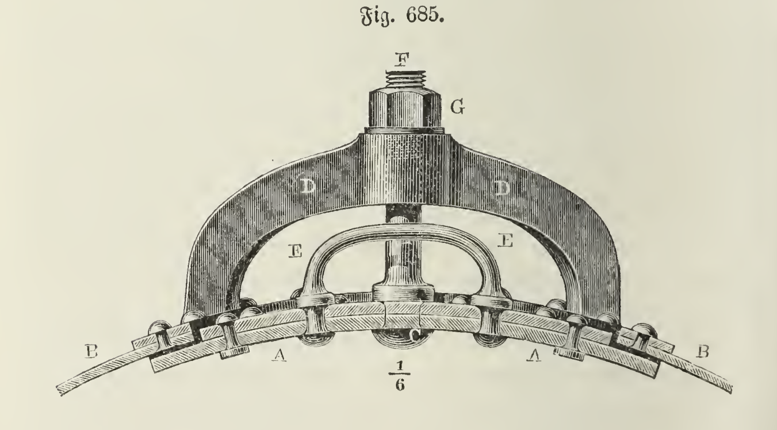
2) das Mann- oder Fahrloch, zum Einsteigen in den Kessel,

3) das Ablaßrohr, zum Ablassen, und

4) das Ausblaserohr, zum Ausblasen des Wassers.

Von dem Dampfrohre, als dem Mittel, den Dampf aus dem Kessel nach der Maschine zu leiten, ist im folgenden Capitel die Rede. Was aber das Fahrloch anlangt, so bildet dieses eine runde Oeffnung von 16 bis 18 Zoll Länge und 13 Zoll Weite im Deckel des Kessels, und wird, wie aus Fig. 685 ersehen werden kann, durch eine starke gußeiserne Platte AA verschlossen. In dem Zwischenraume BB zwischen dieser Platte und dem Kessel kommt ein eiserner mit Hanf und Oelkitt belegter Ring zu liegen; um die Platte zu handhaben, dient der Bügel EE, und um sie scharf anzudrücken, der an C befestigte und durch einen Bügel DD gehende Schraubenbolzen CF sammt Mutter G. In neueren Zeiten versieht man auch die Dampfkessel für stehende Dampfmaschinen, wie die Locomotivkessel, mit einer besonderen Dampfhaube oder einem sogenannten Dome, und bringt in demselben

Fig. 685.



nicht allein das Mannloch an, sondern läßt auch in denselben das Speiserohr, das Dampfrohr, die Röhren für die Sicherheitsventile u. s. w. einmünden, wodurch natürlich der Kessel selbst mehr geschont wird, als wenn diese verschiedenen Apparate auf der Kesselwand aufgeschraubt sind. Nach preußischen Vorschriften darf dieser Dom nicht aus Gußeisen bestehen, sondern muß, wie der Kessel selbst, durch Eisenblech zusammen- und auf diesen aufgenietet werden.

Das Loch zum Ablassen des Wassers aus dem Dampfkessel befindet sich im Boden desselben und über dem Feuerroste, und wird durch einen konischen Stahlzapfen von innen verstopft.

Das Wasser, womit ein Dampfkessel gespeist wird, ist nie ganz rein; deshalb wird das Kesselwasser bald trübe und schlammig, und es ist daher nöthig, von Zeit zu Zeit eine Reinigung des Kessels vorzunehmen. Um diesen Schlamm im Kessel sich nicht anhäufen zu lassen, wird das Ausblaserohr, ein bis nahe an den Boden reichendes und sich da konisch erweiterndes und außen durch einen Hahn verschließbares Rohr angewendet. Oeffnet man, nachdem die Feuerung aufgehört und die Spannung des Dampfes nur noch eine mäßige Höhe hat, den Hahn, so wird das trübe Wasser ohne Gefahr durch den Dampf fortgetrieben. Dieses Ausblasen ist zumal auch bei den Seedampfschiffkesseln nöthig, da diese mit Seewasser gespeist werden. Besonders nachtheilig können die im Wasser aufgelösten Bestandtheile, wie Kalk, Gyps, Koch- oder Glaubersalz u. s. w., auf den Kessel wirken, indem sich aus denselben eine feste Rinde, der sogenannte Kessel- oder Pfannenstein, bildet, der den Boden des Kessels bedeckt. Diese steinartige Masse erschwert nicht allein den Durchgang der Wärme, sondern wirkt auch zerstörend auf den Kessel, zumal da dieser an der Stelle, welche mit Kesselstein bedeckt ist, leicht glühend wird. Damit sich diese Masse nicht unmittelbar über dem Feuerherde ansetze, führt man das Wasser an der dem Feuerherde entgegengesetzten Stelle in den Kessel ein, und legt auch den Kessel hier 1 bis 3 Zoll tiefer, als vorn beim Feuerraume; auch setzt man wohl besondere Boden- oder Seitenbleche oder Fangkästen ein, um das Absetzen des Kesselsteins auf dem Boden des Kessels selbst oder wenigstens auf dem über dem Feuerraume desselben befindlichen Theile zu verhindern. Es ist natürlich nöthig, den Kesselstein von Zeit zu Zeit von den Kesselwänden loszuschlagen oder, nach Befinden, durch chemische Mittel (Salzsäure) zu beseitigen. Durch Anwendung von Soda wird besonders dem Ansetzen von Kesselstein bei fetthaltigen Substanzen entgegengewirkt.

Kesselprobe. Mit jedem Dampfkessel soll vor dem Gebrauche eine Probe gemacht werden. Vorschriftsmäßig unterwirft man ihn in der Regel der hydrostatischen Probe bei der zweifachen Belastung des Sicherheits- §. 438

ventiles. Wenn hierbei das Wasser höchstens in den Fugen in Nebelform hervortritt, hat man den Kessel als brauchbar anzusehen. Jedenfalls hat man den Druck bei der Kesselprobe nicht zu übertreiben, weil hierbei leicht bleibende nachtheilige Veränderungen im Material oder in der Zusammensetzung des Kessels eintreten können, derselbe also gerade durch die Probe erst geschwächt werden kann. Nach Jobard soll man einen ganz mit Wasser angefüllten Dampfkessel so lange erhitzen, bis das Manometer 2 bis 3 Atmosphären Ueberdruck über den normalen Druck, den er künftig aushalten soll, anzeigt. Diese Prüfung, behutsam durchgeführt, ist wenigstens nicht so gefährlich, als eine Prüfung durch gespannte Dämpfe, gleichwohl aber eine angemessenere als die gewöhnliche Wasserprobe, weil der Kessel durch die Erwärmung in eine Spannung und in einen Zustand versetzt wird, der dem beim Gebrauche des Kessels nahe gleichkommt.

Trotz aller Proben und aller Sicherheitsmaßregeln kommt doch zuweilen noch ein Zerspringen oder Bersten (franz. und engl. explosion) der Kessel vor, und es wird dadurch nicht allein der Kessel und Ofen, sondern auch das Gebäude, nach Befinden auch die nebenstehende Maschine beschädigt, ja nicht selten eine bedeutende Verletzung oder Tödtung des Heizers, Maschinenwärters und anderer in der Nähe befindlicher Menschen herbeigeführt. Leider kennt man bis jetzt nur die allgemeinen Ursachen, welche diese Ereignisse herbeiführen, und ist nicht einmal im Stande, die Verhältnisse und Ursachen, durch welche viele der bis jetzt vorgekommenen Dampfkesselexplosionen entstanden sind, speciell nachzuweisen. Zu den allgemeinen Ursachen dieser Explosionen rechnet man

1) Die übermäßigen Dampfspannungen, zumal wenn sie mit Erschütterungen oder Stößen des Kessels verbunden sind.

2) Wassermangel, wobei das Kesselblech rothglühend wird und entweder eine zu rasche Dampfentwickelung oder eine Zersetzung des Wasserdampfes eintritt.

3) Mangelhafte Construction, sowie schlechter oder unangemessener Zustand und zu starke Abnutzung des Kessels. Z. B. Mangel einer Verstärkung der Mannloch- und Dampfdomränder.

4) Schlechte Abwartung des Dampfkessels.

5) Loslösen des Kesselsteins von den Kesselwänden.

6) Zu schnelle Zuführung von Speisewasser nach vorausgegangenem Wassermangel, wobei sich die bloßgestellte Kesselfläche im Zustande des Rothglühens befindet, und eine zu starke Dampfentwickelung eintritt.

7) Plötzliche Eröffnung des Sicherheitsventils, wobei der Gleichgewichts-

zustand des Wassers und Dampfes aufgehoben wird und das Kesselwasser in starke Wallungen geräth.

8) Stoßweise Dampfentwickelung bei rascher Abnahme des Drucks.

Man hat auch vorzüglich die atmosphärische Luft, welche durch das Speisewasser mit in den Kessel eingeführt wird, und welche bei Berührung mit dem sich aus dem zersetzten Wasser bildenden Knallgas heftig explodirt, als Hauptursache der Kesselexplosionen angesehen. Nach Anderen werden Kesselexplosionen herbeigeführt durch die Wallungen des Wassers und zumal durch die Bildung von Wasserhosen im Kessel, welche machen, daß statt Dampf, Wasser durch die Ventil- oder andere Oeffnungen ausströmt.

Dieser Gegenstand läßt sich hier nicht weiter verfolgen, und wir müssen auf die im Folgenden mitgetheilte Literatur verweisen.

Schlußanmerkung. Ueber Heizung und zumal über die Dampferzeugung können wir folgende Schriften zum Nachlesen empfehlen. Den Gegenstand allgemein und ausführlich behandelt Péclet in seinem Traité de la chaleur etc., II. Tom., 2. Edit., Paris 1843. In praktischer Beziehung sehr zu empfehlen ist: Grouvelle et Jaunez, Guide du chauffeur et du propriétaire des machines à vapeur etc., 4. Edit., Paris 1858. Sehr ausführlich über Dampfkesselanlagen wird auch gehandelt in der dritten Abtheilung von Verdam's Dampfmaschinenlehre, welche deutsch unter dem Titel „Die Grundsätze, nach welchen alle Arten von Dampfmaschinen zu beurtheilen und zu erbauen sind", erschienen ist. Ferner ist zu empfehlen: Traité des machines à vapeur, par Bataille et Jullien; oder das englische Original: A Treatise on the Steam engine, by the Artizan-Club, edited by J. Bourne, London 1846, neue Auflage 1861. Einen kurzen Unterricht über diesen Gegenstand ertheilt Claudel in seinen Formules, Tables etc., vorzüglich aber Scholl in seinem „Führer des Maschinisten", und Baumgartner in seiner Anleitung zum Heizen der Dampfkessel. Ueber Brennmaterialersparniß von E. Bède, siehe Civilingenieur, Band 4. Versuche mit Dampfkesseln von E. Burnat, siehe Civilingenieur, Bd. 9. Ueber Sicherheit der Kesselanlagen ist nachzulesen in den Ordonnances du roi relat. aux appareils à vapeur etc., par C. E. Jullien, Paris 1843; ferner Machines à vapeur, arrêtés et instructions, Bruxelles 1844; auch in den Gesetzen und Verordnungen deutscher Staaten über die Anlage von Dampfkesseln und Dampfmaschinen, z. B. das Königl. Preuß. Regulativ oder die Oesterr. Verordnung (s. polytechn. Centralblatt. Bd. VI, 1845) hierüber. Ueber Dampfkesselexplosionen siehe Annales des ponts et chaussées, T. IV, Paris 1842 u. s. w.; Verhandlungen des Preuß. Gewerbevereins, Jahrg. 20 und 21, Berlin 1841 und 1842; Annales des mines, T. VII, Paris 1845 u. s. w.; Dingler's polytechn. Journal, Band 94; s. die im folgenden Paragraphen citirten Abhandlungen von Arago. Von Dufour's Schrift: Sur l'ebullition de l'eau et sur une cause probable d'explosion des chaudières à vapeur giebt Herr Grimburg einen Auszug im Civilingenieur Bd. 11. Ueber Sicherheitsventile eine Abhandlung von Thrémery in den Annales des mines, T. XX, 1841. Ueber Schornsteine siehe Verhandlungen des Preuß. Gewerbevereins, Jahrg. 19, Berlin 1840 u. s. w. Auch Useful Informations for Engineers etc., by W. Fairbairn, London 1856.

Ueber die Gasfeuerung, namentlich für Dampfkessel, ist nachzulesen: Die Wärmemeßkunst von Schinz. Angaben über die Heizung der Dampfkessel durch Hohofengase sowie durch die Flammöfen u. s. w. enthält Claudel's Sammlung von Formules, Tables etc., troisième édition, 1854. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus ist zu empfehlen: Th. Weiß: Allgemeine Theorie der Feuerungsanlagen, Leipzig 1862. S. auch Compendium der Gasfeuerung u. s. w. von F. Steinmann, Freiberg 1868. Ferner Theorie der Zugerzeugung durch Schornsteine vom Professor F. Grashof, Berlin 1866; Separatabdruck aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

Ueber Dampfkesselexplosionen, namentlich über die englische Association, welche die Verhinderung der Kesselexplosionen zum Zweck hat, handelt Prof. Hartig in einer besonderen Monographie, welche in Leipzig 1867 bei Teubner erschienen ist. S. auch Blum, die Dampfkesselexplosionen, Chemnitz 1867. Ueber die Ursachen der Dampfkesselexplosionen handelt auch Herr C. Kayser in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. IX, X und XI. Siehe auch die Ursachen der Dampfkessel-Explosionen u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Berlin, 1867.

Viertes Capitel.

Von den Dampfmaschinen.

§. 439 **Dampfmaschinen.** Dampfmaschinen (franz. machines à vapeur; engl. steam-engines) sind Maschinen, welche durch die Kraft des Dampfes mittelbar oder unmittelbar in Bewegung gesetzt werden. Mittelbar wirkt Dampf, wenn durch Condensation desselben ein beinahe leerer Raum erzeugt und dadurch die Atmosphäre in den Stand gesetzt wird, daß sie mechanische Arbeit verrichten, z. B. einen Kolben in diesen Raum hineinschieben kann; unmittelbar hingegen wirkt der Dampf, wenn er vermöge seiner Expansivkraft einen Körper, z. B. den Kolben im Innern eines Cylinders, in Bewegung setzt oder durch seine lebendige Kraft Arbeit verrichtet, z. B. ein Rad in Umdrehung setzt. Die Maschinen mit mittelbarer Dampfwirkung heißen auch atmosphärische Dampfmaschinen (franz. machines atmosphériques; engl. atmospheric engines) und sind nur noch selten im Gebrauche, weswegen in der Folge vorzüglich nur von den eigentlichen Dampfmaschinen, und zwar nur von den Kolbendampfmaschinen die Rede sein wird.

Die Dampfmaschinen sind, wie die Wassersäulenmaschinen (s. Bd. II, §. 297), entweder einfachwirkende oder doppeltwirkende. Bei der ersten Classe dieser Maschinen treibt der Dampf den Kolben nur nach der einen Richtung, und es wird die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung durch ein Gegengewicht hervorgebracht; bei der zweiten Classe hingegen bewirkt die Dampfkraft sowohl den Hin- als auch den Rückgang des Kolbens in dem

meist senkrecht stehenden Dampfcylinder. Erstere dienen nur zur Unterhaltung einer auf- und niedergehenden Bewegung, kommen deshalb nur als Kraftmaschinen bei Pumpen und Hammerwerken vor, und bilden dann die sogenannten Dampfkünste in Berg- sowie Dampfhämmer in Hüttenwerken. Die doppeltwirkenden Dampfmaschinen hingegen finden in allen den Fällen ihre Anwendung, wo es darauf ankommt, eine rotirende Bewegung zu erzeugen.

In Hinsicht auf die Größe der Dampfspannung theilt man die Dampfmaschinen ein

1) in Niederdruck-,
2) in Mitteldruck- und
3) in Hochdruckdampfmaschinen.

Bei den Tief- oder Niederdruckdampfmaschinen (franz. machines à basse pression; engl. low-pressure engines) hat der Dampf eine Spannung, welche den Atmosphärendruck höchstens um die Hälfte übertrifft; bei den Mitteldruckdampfmaschinen (franz. machines à moyenne pression; engl. middle-pressure engines) ist die Spannung des Dampfes zwei bis vier Atmosphären, und bei den Hochdruckdampfmaschinen (franz. machines à haute pression; engl. high-pressure engines) beträgt die Dampfspannung fünf und mehr Atmosphären.

Anmerkung. Die erste Dampfmaschine von Savery hatte keinen Kolben und diente nur zum unmittelbaren Heben des Wassers, weshalb sie einer Pumpe ähnlich construirt war. Sie wurde durch Newcomen von den atmosphärischen Maschinen verdrängt, sowie diese später durch Watt von den eigentlichen Dampfmaschinen. Die Engländer sehen den Marquis of Worcester als den Erfinder der Dampfmaschinen an, Arago sucht jedoch nachzuweisen, daß der bekannte Papin der eigentliche Erfinder der Dampfmaschinen sei. Das Nähere über die Geschichte der Dampfmaschine ist nachzulesen im Annuaire du bureau des longitudes, pour l'année 1837 et pour l'année 1838. Der erstgenannte Jahrgang enthält die Geschichte der Dampfmaschinen und der zweite Watt's Lebensbeschreibung, beide von Arago bearbeitet. Diese wie noch viele andere Artikel aus dem Annuaire sind auch von Remy und Krieb ins Deutsche übersetzt. Ferner ist nachzusehen Stuart's Histoire de la machine à feu; der zweite Band (Artikel steam) von Robison's System of mechanical Philosophy; Lardner's Lectures on the Steam-Engine; Bourne's Treatise on the Steam-Engine u. s. w. Auch A Treatise on the Steam-Engine, by Russel. S. auch des Verfassers Abhandlung über die Fortschritte des Dampfmaschinenwesens in den letzten hundert Jahren, Freiberg 1866.

Bei den eigentlichen Dampfmaschinen wird der Dampf nach vollbrachter Leistung entweder in die freie Luft gelassen oder durch kaltes Wasser condensirt; man hat daher hiernach zu unterscheiden: §. 440

die Dampfmaschinen ohne Condensation von
den Dampfmaschinen mit Condensation.

Die Kraft, mit welcher sich der Kolben einer Dampfmaschine bewegt, ist, wie bei dem Kolben einer Wassersäulenmaschine, die Differenz zwischen den Drücken auf beiden Seiten desselben. Bei den Dampfmaschinen ohne Condensation wirkt der Dampf auf der einen und die Atmosphäre auf der anderen Seite des Kolbens, es ist folglich hier die arbeitende Kraft um den ganzen Atmosphärendruck kleiner als die Dampfkraft; bei den Condensationsmaschinen hingegen wirkt dem Dampfe auf der einen Seite des Kolbens nur die schwache Kraft des aus der Condensation des Dampfes hervorgegangenen Luft- und Dampfgemenges entgegen; es ist folglich hier die arbeitende Kraft nur wenig (etwa $^1/_{10}$ Atmosphäre) kleiner als die Dampfkraft. Hieraus ist nun zu schließen, daß unter übrigens gleichen Umständen Maschinen mit Condensation eine größere Leistung hervorbringen, als solche ohne Condensation, und auch leicht zu ermessen, daß nur bei Hochdruckdampfmaschinen der Vortheil der Condensation weniger beträchtlich ist, und daß dagegen Tiefdruckmaschinen gar nicht ohne Condensation arbeiten können. Bei einer Hochdruckmaschine mit 6 Atmosphären Dampfspannung geht durch den Austritt des Dampfes in die freie Luft nur $^1/_6$ der Kraft verloren, bei einer Mitteldruckmaschine mit 3 Atmosphären Dampfspannung beträgt dieser Verlust schon $^1/_3$, bei den Niederdruckmaschinen mit $^4/_3$ Atmosphären Spannung endlich ist dieser Verlust $1 : {}^4/_3 = {}^3/_4$; es bleibt also hier nur noch $^1/_4$ des disponibeln Arbeitsvermögens übrig. Bei Condensation der Dämpfe, welche $^1/_{10}$ Atmosphäre Gegendruck übrig läßt, würde der Verlust nur $^3/_{40}$, also das übrigbleibende Arbeitsvermögen $1 - {}^3/_{40} = {}^{37}/_{40} = 0{,}925$ des disponibeln betragen.

Obgleich hiernach bei den Hochdruckmaschinen die Condensation des Dampfes nach vollbrachter Wirkung mechanisch vortheilhaft ist, so findet man doch dieselbe hier seltener angewendet, weil das Condensationswasserquantum, welches das Speisewasserquantum mindestens um das Zwanzigfache übertrifft, an vielen Orten nicht vorhanden ist oder nur mit großem Geld- oder Kraftaufwande herbeigeschafft werden kann, also der Vortheil der Condensation durch den genannten Aufwand wieder verloren gehen würde, und weil überdies die Maschinen ohne Condensation einfacher ausfallen, als die Condensationsdampfmaschinen.

Endlich hat man noch Dampfmaschinen mit und ohne Expansion von einander zu unterscheiden. Bei den Dampfmaschinen ohne Expansion (franz. machines sans détente; engl. engines without expansion) findet während des ganzen Kolbenspieles ununterbrochener Dampfzufluß Statt, und es bleibt der Dampf immer in derselben Spannung; bei den Expansionsmaschinen (franz. machines à détente; engl. expansion-engines) hingegen wird der Dampfzufluß noch während der Kolbenbewegung aufgehoben; es dehnt sich daher der Dampf immer mehr und mehr aus und

verliert immer mehr und mehr an Spannung, während der Kolben den letzten Theil seines Weges zurücklegt. Die Arbeit, welche der Dampf während der Expansion verrichtet, geht bei den Maschinen ohne Expansion verloren; es sind daher von den Expansionsmaschinen größere Wirkungsgrade zu erwarten, als von den Maschinen ohne Expansion.

Man unterscheidet auch noch stationäre und locomobile Dampfmaschinen von einander. Während die stationären Dampfmaschinen an einem Orte feststehen, befinden sich die locomobilen Dampfmaschinen auf einem Wagen oder einem Schiffe und lassen sich hierdurch von einem Orte nach dem anderen transportiren. Eine besondere Art von locomobilen Dampfmaschinen sind die Locomotiven, und zwar die Dampfwagen und Dampfschiffe, welche bloß dazu dienen, sich selbst, und zwar mit oder ohne angehängte Vehikel, fortzubewegen. Von den Dampfwagen und Dampfschiffen ist erst später, bei den Förderungsmaschinen die Rede.

Dampfcylinder. Die Haupttheile einer Maschine sind: §. 441

1) der Dampfcylinder,
2) der Dampfkolben mit seiner Stange und
3) die Steuerung.

Der Dampfcylinder (franz. cylindre à vapeur; engl. steam-cylinder) ist eine gußeiserne, genau ausgebohrte Röhre, welche den Dampf während seiner Arbeitsverrichtung umschließt. Er ist oben mit einem Deckel und unten mit einem Bodenstück verschlossen und enthält in der Nähe beider Stücke Seitenmündungen zum Ein- und Austritte des Dampfes. Die Höhe des Dampfcylinders muß zur Weite desselben in einem schicklichen Verhältnisse stehen. Gewöhnlich ist die Höhe 2- bis $2\frac{1}{2}$ mal so groß als die Weite; bei Maschinen, welche eine große Anzahl von Spielen machen sollen, wie z. B. bei den locomobilen Dampfmaschinen und namentlich bei den Dampfschiffsmaschinen, ist jedoch dieses Verhältniß noch kleiner.

Um einen möglichst kleinen Wärmeverlust durch Abkühlung in dem Cylinder zu erhalten, muß die Cylinderhöhe in einem gewissen Verhältnisse zur Cylinderweite stehen. Die Abkühlung des Dampfes fällt um so größer aus, je größer das Product aus der Größe der Abkühlungsfläche und aus der Zeit der Abkühlung ist. Bei einem Dampfcylinder ist die Abkühlungsfläche aus zwei kreisförmigen Grundflächen und einer veränderlichen Cylindermantelfläche zusammengesetzt. Bezeichnen wir den Durchmesser des Cylinders durch d und die Zeit, in welcher der Kolben den Weg s in demselben zurücklegt, durch t, so haben wir das Maß der Abkühlung an den beiden Kreisflächen:

$$O_1 = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{2} \cdot t = \frac{\pi}{2} d^2 t;$$

setzen wir ferner voraus, daß der Kolben in jedem Zeittheil $\frac{t}{n}$ den Wegtheil $\frac{s}{n}$ durchlaufe, so erhalten wir das Maß der Abkühlung an der nach und nach die Inhalte

$$\pi d \cdot \frac{s}{n}, \pi d \cdot \frac{2s}{n}, \pi d \cdot \frac{3s}{n} \cdots \pi d . \frac{ns}{n}$$

einnehmenden Cylinderfläche:

$$O_2 = \frac{\pi d s}{n} \cdot \frac{t}{n} + \frac{2\pi d s}{n} \cdot \frac{t}{n} + \frac{3\pi d s}{n} \cdot \frac{t}{n} + \cdots + \frac{n\pi d s}{n} \cdot \frac{t}{n}$$

$$= \frac{\pi d s t}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{\pi d s t}{n^2} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{\pi}{2} d s t;$$

daher das Maß der Abkühlung am ganzen Cylinder und während der ganzen Bewegungszeit:

$$O = O_1 + O_2 = \frac{\pi}{2} d^2 t + \frac{\pi}{2} d s t = \left(2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} + \pi d \cdot \frac{s}{2}\right) \cdot t$$

gleich dem Product aus Zeit und aus der Oberfläche eines Cylinders, dessen Höhe die Hälfte ist von dem Kolbenwege.

Damit die Abkühlung möglichst klein ausfalle, muß also nicht nur die Zeit eines Spieles, sondern auch jene Oberfläche möglichst klein sein. Nun lehrt aber die Geometrie, daß unter allen Cylindern derjenige die kleinste Oberfläche bei gegebenem Inhalte hat, welcher eben so hoch als weit ist; es ist daher auch im vorliegendem Falle die schwächste Abkühlung zu erwarten, wenn die Höhe $\frac{s}{2}$ dieses mittleren Cylinders der Weite d desselben gleich, also die Hubhöhe oder der Kolbenweg $s = 2d$, d. i. gleich der doppelten Cylinderweite ist. Die Cylinderhöhe ist reichlich um die Kolbenhöhe größer als der Kolbenweg.

Um die Abkühlung des Dampfes im Dampfcylinder möglichst zu verhindern, muß man denselben mit schlechten Wärmeleitern, z. B. mit einem Holz- oder Filzmantel, umgeben, oder ihn in eine Luft- oder Dampfhülle einschließen; auch muß man ihm eine glatte Oberfläche geben, weil bei dieser die Wärmeausstrahlung schwächer ist, als bei einer rauhen Oberfläche. Sehr oft wendet man eine Dampfhülle an, indem man den Cylinder mit einem eisernen Mantel (Dampfmantel) umgiebt und den Zwischenraum mit Dampf ausfüllen läßt. Hierbei können aber drei Fälle vorkommen; es kann der Dampf den Zwischenraum zwischen dem Dampfcylinder und seinem Mantel stillstehend ausfüllen, oder es kann derselbe diesen Zwischenraum durchströmen, und zwar vor oder nach seiner Wirkung in dem Cylinder. Die letzte Methode scheint, obgleich sie selten vorkommt, die vorzüglichste zu sein, weil hier von der Wärme des fortgehenden Dampfes noch Nutzen gezogen wird.

Der Umstand, daß in diesem Falle die Dampfhülle weniger Wärme hat, als der Dampf im Cylinder, und deshalb die Hülle dem Cylinder Wärme entzieht, während bei der zweiten Methode dieselbe dem Cylinder mittheilt, macht keineswegs diese Einhüllungsmethode unzweckmäßig, da die Abkühlung mit der Temperaturdifferenz wächst und diese bei einem in Dampf eingehüllten Cylinder gewiß kleiner ist, als bei einem freistehenden Cylinder.

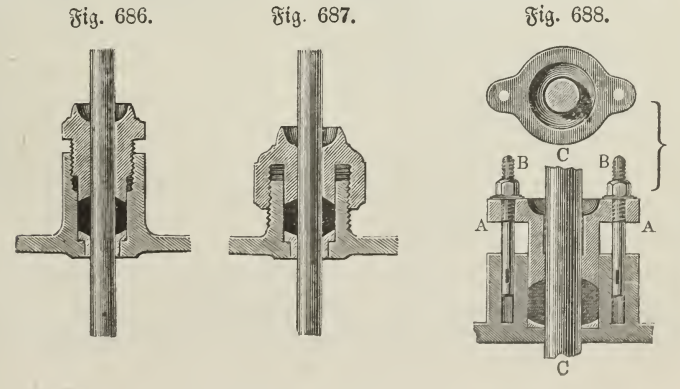
Da sich in der Dampfhülle immer etwas Wasser niederschlägt, so befindet sich unten an dem Dampfmantel ein durch einen Hahn verschließbares Ablaßrohr.

Die Wandstärke der Dampfcylinder läßt sich, wie die der Dampfröhren überhaupt, berechnen; wegen des allmäligen Ausschleifens und der nöthigen Steifheit geht man jedoch mit dieser nie unter $^5/_6$ Zoll herab, nimmt also dieselbe bei der Cylinderweite d und der Dampfspannung $(p + 1)$ Atmosphären

$$e = 0{,}005\, p d + {}^5/_6 \text{ Zoll.}$$

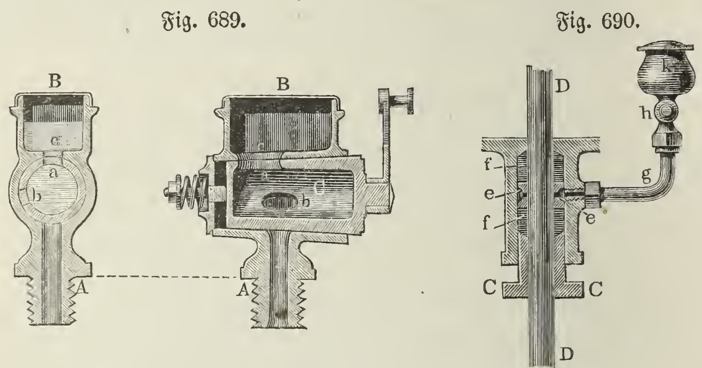
Stopfbüchse (franz. boite à garniture, engl. stuffing-box). Das Deckel- und das Fußstück des Dampfcylinders werden durch Schrauben und Kitte mit dem Cylindermantel fest und dampfdicht verbunden. In der Mitte des Deckels sitzt die Stopfbüchse fest, durch welche die Kolbenstange hindurchgeht. Die Stopfbüchse (vergl. Bd. II, §. 301) wird in der Regel mit in Oel und Talg getränkten Hauflunten ausgestopft, doch wendet man statt derselben in der neueren Zeit auch übereinanderliegende und je aus drei Sectoren bestehende Metallringe an, welche durch eiserne Federn, die zwischen dem inneren Umfange der Stopfbüchse und dem äußeren Umfange der Ringe zu liegen kommen, an die Kolbenstange angedrückt werden. Die Stopfung oder Liderung der Stopfbüchse wird von oben durch einen Deckel zusammengedrückt oder zusammengehalten, der sich entweder unmittelbar auf das Stopfbüchsengehäuse aufschrauben oder mittels zwei oder drei Ziehschrauben mit demselben verbinden läßt. Stopfbüchsen der ersten Art sind in den Figuren 686 und 687 abgebildet; eine Stopfbüchse AA mit Ziehschrauben BB hingegen führt Fig. 688 vor Augen. §. 442

Fig. 686. Fig. 687. Fig. 688.



Sowohl der Cylinder- als auch der Stopfbüchsendeckel hat eine Vertiefung zur Aufnahme von Schmiere oder Talg. Auch sind bei Anwendung von Hanfkolben noch ein oder mehrere Schmiertrichter auf den Cylinderdeckel aufgesetzt. Die Einrichtung eines solchen Schmier- oder Fetttrichters zeigt Fig. 689 im Durchschnitt. Mit dem Ende *A* wird dieser Apparat auf den Deckel des Cylinders aufgeschraubt. *B* ist das Fettbehältniß und *C* ist ein Hahn mit zwei Bohrungen *a* und *b*. Ist die Bohrung *b* unten, so fließt das Fett aus dem Hahne durch die Bohrung des Fußstückes *A* in den Cylinder, ist aber *a* oben und unmittelbar unter der Bohrung *c* im Boden von *B*, so fließt Fett aus dem Trichter *B* in den Hahn *C*.

Fig. 689. Fig. 690.



In seltenen Fällen läßt man die Kolbenstange durch den Boden des Cylinders gehen. Man vermeidet dies so viel wie möglich, weil die hierzu nöthigen hängenden Stopfbüchsen das Fett nicht gut zurückhalten und durch die erdigen Theile, welche sich aus dem condensirten Dampfe absetzen, ihren dampfdichten Schluß verlieren. Die Einrichtung einer Stopfbüchse, welche in einem solchen Falle noch mit Vortheil anzuwenden ist, läßt sich aus Fig. 690 entnehmen. Es ist hier *AB* das Stopfbüchsengehäuse, *CC* der Deckel, *DD* die Kolbenstange, ferner *ee* eine messingene Scheibe mit einer auswendig rundherumlaufenden Nuth und sechs bis acht feinen radial laufenden Löchern, sowie *f* die Packung, *g* ein mit der Nuth communicirendes Kupferrohr, *k* ein Kelch zur Aufnahme des flüssigen Talges und *h* ein Hahn zum Abschluß, welcher nur geöffnet wird, wenn die Maschine stillsteht.

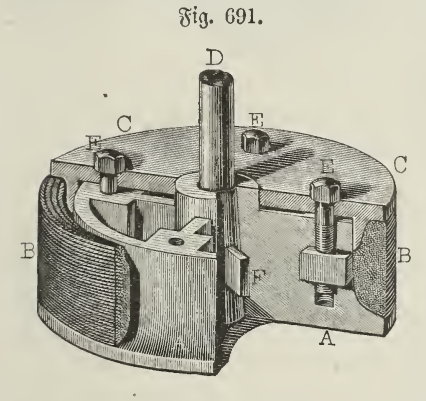
Uebrigens ist der Dampfcylinder mittels einer starken Grund- oder Sohlplatte auf ein festes Grundgemäuer zu setzen und mit diesem durch Anker und Schrauben fest zu verbinden.

§. 443 **Dampfkolben** (franz. piston à vapeur; engl. steam-piston). Die Dampfkraft wird zunächst von dem im Dampfcylinder auf- und niederbeweglichen Dampfkolben (vergl. Bd. II, §. 300) aufgenommen, von

diesem aber durch die **Kolbenstange** weiter fortgepflanzt. Der Dampfkolben bildet in seiner Hauptform einen an das Innere des Dampfcylinders genau anschließenden Cylinder und besteht hauptsächlich aus drei Theilen, aus dem **Kolbenstocke**, aus der **Liderung** und aus dem **Deckel**. In der Mitte des Kolbenstockes befindet sich eine Verstärkung, welche im Inneren konisch ausgedreht ist und zur Aufnahme des ebenfalls konisch abgedrehten Kolbenstangenendes dient. Der Kolbenstock und der Deckel sind aus Gußeisen, die Liderung hingegen ist entweder **Hanfliderung** (franz. garniture de chanvre; engl. hemp-packing) oder **Metallliderung** (franz. garniture métallique; engl. metallic-packing).

Die Einrichtung eines Kolbens mit **Hanfliderung** wird durch die Abbildung Fig. 691 eines solchen, theilweise zerschnittenen und abgedeckten Kolbens vor Augen geführt. Es ist *AA* der Kolbenstock, *BB* die aus Hanfzöpfen bestehende Liderung, ferner *CC* der durch Schrauben *E*, *E*... mit dem Kolbenstocke verbundene und die Liderung zusammendrückende Deckel; *D* ist endlich noch die Kolbenstange und *F* der Splint, womit deren Ende in der die Mitte des Kolbens einnehmenden Hülse festgekeilt wird.

Fig. 691.



Hanfliderung läßt sich bei Maschinen mit Hochdruck nicht anwenden, da dieselbe durch den heißen Dampf und durch die große Reibung zu schnell abgeführt wird; statt derselben kommt hier die ohnedies dauerhaftere und weniger Reibung gebende **Metallliderung** in Anwendung. Es giebt eine große Anzahl Metallliderungen; im Wesentlichen bestehen sie jedoch aus genau abgedrehten Metallringen, welche durch Federn von innen nach außen und zwar an die innere Fläche des Dampfcylinders, angedrückt werden. Die Einrichtung von zwei vorzüglichen Arten dieser Liderungen lernt man aus Fig. 692 und Fig. 693 (a. f. S.) kennen. In beiden Figuren ist *AA* der Kolbenstock oder Körper des Kolbens, *DD* der Deckel sowie *FG* das Kolbenstangenende und es sind *E*, *E* die Schrauben, wodurch der Deckel mit der Verbindungshülse verbunden ist. Die Liderung besteht aus zwei übereinanderliegenden Metallringen *BB* und *CC*, welche durch Schlagen elastisch gemacht und in Stücke zerschnitten sind, damit sie etwas gegen die Cylinderwand federn. Bei dem Kolben in Fig. 692 ist jeder dieser Liderungsringe an der schwächsten Stelle zerschnitten, und wird durch einen innen anliegen-

den, ebenfalls aufgeschnittenen Stahlring *R* nach außen gedrückt. Bei dem Kolben in Fig. 693 sind dagegen die Ringe an den breitesten Stellen zer-

Fig. 692. Fig. 693.

Fig. 694.

schnitten und Keile *K*, *K* in die Schnitte eingelassen, welche durch die Spiralfedern *S*, *S* angedrückt werden und diese Ringe in Spannung erhalten. Sehr einfach ist der Kolben *A A*, Fig. 694, von Ramsbottom. Hier besteht die Liderung aus 3 bis 5 elastischen Stahl- oder Messingringen. Damit dieselben federn und sich an die Cylinderwand gehörig anlegen, biegt man sie vor dem Einlegen nach einem Kreise, dessen Durchmesser den des Cylinders um 1 Zehntel übertrifft.

Bei dem Dampfkolben von Herrn Kraus besteht die Liderung aus zwei Doppelringen, je einem inneren aus Schmiedeeisen und einem äußeren aus Weißmetall, einer Composition von 80 Thln. Zinn, 10 Thln. Antimon und 10 Thln. Kupfer. Diese Ringe werden vom Dampfdruck angedrückt, bilden also eine autoclave Liderung. Zum genauen Abschließen sind an den Schnittfugen der Ringe Zungen *Z* eingesetzt, wie Fig. 695 darstellt.

Fig. 695.



§. 444 **Kolbenstange** (franz. tige de piston, engl. piston rod). Zwei Dimensionsverhältnisse sind bei dem Dampfkolben und der Stange des-

selben von besonderer Wichtigkeit, nämlich das Verhältniß der Kolben- oder Liderungshöhe zu dem Kolbendurchmesser, und das Verhältniß zwischen der Stärke der Kolbenstange und dem genannten Durchmesser oder der Cylinderweite. Da weder die innere Cylinderwand noch die Liderungsfläche vollkommen glatt ist oder ein vollkommenes Continuum bildet, so kann die Liderungsfläche nur dann vollkommen abschließen, wenn sie eine gewisse Breite hat, auf der anderen Seite darf aber diese Breite nicht sehr groß sein, weil mit ihr proportional die Reibung wächst (s. Bd. II, §. 320). Zum vollkommenen Abschließen gehört aber auch noch, daß die Kolbenfläche keine schiefe Lage gegen die Cylinderaxe annehme; diese Lage kann aber durch eine excentrische Lage der Kolbenstange und durch eine ungleiche Vertheilung der Reibung rings am Umfange des Dampfkolbens herbeigeführt werden, wenn die Liderung sehr niedrig ist, und es ist daher auch aus diesem Grunde ein gewisses Verhältniß zwischen der Liderungsbreite und der Cylinderweite in Anwendung zu bringen. Tredgold sucht theoretisch zu beweisen, daß dieses Verhältniß dem Reibungscoefficienten gleich sein müsse; es ist aber die Grundlage dieses Beweises zu unsicher, als daß man hierauf etwas geben könnte und es bleibt daher nichts weiter übrig, als die durch Erfahrung geprüften Verhältnisse in Anwendung zu bringen. Hiernach aber ist bei Hanfliderung dieses Verhältniß $^1/_3$ bis $^1/_6$, bei der Metallliderung aber nur $^1/_6$ bis $^1/_9$ und zwar der größere Werth bei kleinen und der kleinere bei großen Kolben in Anwendung zu bringen.

Die Kolbenstange, welche in der Regel aus Schmiedeeisen oder aus Stahl ist, muß eine hinreichende Stärke besitzen, um die Kolben- oder Dampfkraft auf die Arbeits- oder Zwischenmaschine übertragen zu können, ohne eine bedeutende oder bleibende Formveränderung zu erleiden. Die Formel zur Bestimmung dieser Dimensionen liefert die Theorie der Festigkeit; hierbei haben wir jedoch zu unterscheiden, ob, wie bei den einfachwirkenden Maschinen, die Kolbenstange nur einer Ausdehnungskraft, oder ob sie, wie bei den doppeltwirkenden Maschinen, abwechselnd einer Ausdehnungs- und Zusammendrückungskraft ausgesetzt ist. Ist p die Differenz der Dampfspannungen in Atmosphären auf beiden Seiten des Kolbens, und d der Durchmesser des Dampfkolbens, so hat man die Kraft, welche auf den Kolben wirkt:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} \cdot 14{,}10\, p \text{ Pfund};$$

bezeichnet aber d_1 den Durchmesser der Kolbenstange und T den Tragmodul der absoluten Elasticität, so hat man die Tragkraft der Kolbenstange:

$$P = \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot T;$$

setzen wir endlich beide Ausdrücke einander gleich, so bekommen wir folgende

Formel für die Stärke einer der Ausdehnung ausgesetzten Kolbenstange:

$$d_1^2 T = 14{,}10\, d^2 p,$$

und daher die Stärke der Kolbenstange:

$$d_1 = d\sqrt{\frac{14{,}10\, p}{T}}.$$

Führen wir statt T die Hälfte des in Bd. I, §. 212, angegebenen Tragmoduls von 18000 Pfund für Schmiedeeisen, also $T = 9000$ Pfund ein, so erhalten wir die Formel zur Bestimmung der schmiedeeisernen Kolbenstangenstärke bei einfachwirkenden Dampfmaschinen:

$$d_1 = \frac{d}{25}\sqrt{p} = 0{,}04\, d\sqrt{p},$$

oder, wenn man p nicht in Atmosphären, sondern in Pfund pr. Quadratzoll giebt,

$$d_1 = 0{,}01\, d\sqrt{p} \text{ (s. §. 301).}$$

Zur Bestimmung der Stärke der Kolbenstangen von doppeltwirkenden Dampfmaschinen kann man zweierlei Formeln anwenden, je nachdem man die Festigkeit des Zerdrückens oder die des Zerknickens in Betracht zieht. Der Länge der Kolbenstange wegen müßte allerdings die letztere in Anwendung kommen (s. Bd. I, §. 211), da aber schon durch eine mäßige excentrische Wirkung der Kraft in der cylindrischen Kolbenstange die Festigkeit bedeutend herabgezogen wird (s. Bd. I, §. 269), und diese Wirkung durch ungenaue Verbindung des Kolbens mit der Kolbenstange leicht herbeigeführt werden kann, so ist es angemessener, die Formel für die Festigkeit des Zerdrückens anzuwenden, und dabei einen vielfach verkleinerten Werth von T einzuführen. Aus diesem Grunde macht man erfahrungsmäßig bei doppeltwirkenden Maschinen die Stärke schmiedeeiserner Kolbenstangen:

$$d_1 = 0{,}08\, d\,(\sqrt{p} + 0{,}25) \text{ Zoll},$$

wenn p den Ueberdruck in Atmosphären bezeichnet.

Die Kolben von großen Dampfmaschinen, namentlich von Dampfschiffmaschinen erhalten zwei Kolbenstangen.

Beispiel. Welche Stärke hat man der schmiedeeisernen Kolbenstange einer doppeltwirkenden Dampfmaschine zu geben, die mit Dämpfen von 5 Atmosphären Spannung und ohne Condensation, also mit 4 Atmosphären Ueberdruck arbeitet, und eine Cylinderweite von 24 Zoll hat? Nach der letzten Formel ist diese Stärke

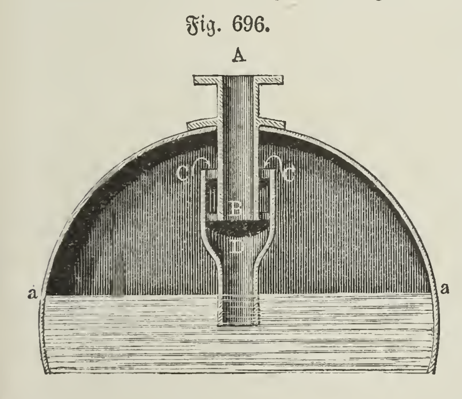
$$d_1 = 0{,}08\, d\,(\sqrt{5-1} + 0{,}25) = 0{,}08 \,.\, 2{,}25\, d$$
$$= 0{,}18\, d = 0{,}18 \,.\, 24 = 4{,}32 \text{ Zoll}.$$

§. 445. **Dampfrohr.** Der Dampf wird durch das Dampfrohr (franz. tuyau à vapeur; engl. steam-pipe) aus dem Dampfkessel zunächst in die Dampfkammer (franz. boîte à vapeur; engl. steam-box), d. i. in denjenigen

Raum geführt, wo die regelmäßige Vertheilung des Dampfes durch die sogenannte Steuerung statthat. In dem Dampfrohre befindet sich noch die Admissionsklappe (franz. valve regulatrice; engl. steam-valve), d. i. ein Drosselventil (s. Bd. I, §. 445), wodurch der Dampfzufluß und folglich auch die Dampfkraft regulirt werden kann.

Was zunächst das Dampfrohr anlangt, so hat man dasselbe an derjenigen Stelle in den Kessel einmünden zu lassen, wo die stärkste Dampfentwickelung statthat, und demselben vom Kessel aus eine aufsteigende Lage zu geben, damit das Fortreißen des Wassers mit dem Dampfe möglichst verhindert werde und das fortgerissene Wasser in den Kessel zurückfließen könne. Eine vorzügliche Einrichtung, wobei der Dampf möglichst trocken in das Dampfrohr tritt, ist in Fig. 696 abgebildet. Es ist hier an das Dampfrohr AB ein weiteres Rohr CCD angehängt, welches bis in das Kesselwasser herabgeht. Der bei CC eintretende Dampf läßt hier, bei seiner abwärts gerichteten Bewegung bis zur Mündung A des Dampfrohres, das mit fortgerissene Wasser größtentheils fallen.

Fig. 696.



Um die Bewegungshindernisse in dem Dampfrohre möglichst klein zu erhalten, muß man das Dampfrohr nicht unnöthig lang machen, in demselben alle plötzlichen Richtungs- und Querschnittsveränderungen zu vermeiden suchen und demselben eine ansehnliche Weite geben. Um aber den Wärmeverlust möglichst herabzuziehen, ist die Abkühlungsfläche klein, also das Dampfrohr kurz und eng zu machen, und diese Fläche oder das Dampfrohr mit schlechten Wärmeleitern zu umgeben, oder durch einen polirten Metallmantel zu umschließen. Man sieht, daß bei dem Dampfrohre ein anderes Verhältniß eintritt, als bei den gewöhnlichen Luft- oder Wasserleitungsröhren. Während die Röhren, namentlich aber die Einfallröhren, bei Wassersäulenmaschinen weit zu machen sind, damit sie möglichst kleine hydraulische Hindernisse darbieten, hat man den Dampfröhren nur eine mittlere Weite zu geben, damit die Abkühlung durch dieselbe nicht groß ausfalle, damit überhaupt die Summe aus den Arbeitsverlusten, welche die pneumatischen Hindernisse und die Abkühlung zugleich herbeiführen, ein Minimum werde. Die Untersuchung, in welche man bei Auffindung dieses Minimums verwickelt wird, ist jedoch zu weitläufig, als daß sie hier durchgeführt werden könnte. Wir können jetzt nur anführen,

daß man die Weite dieser Röhren gewöhnlich $^1/_5$ des Dampfkolbendurchmessers, also den Querschnitt $^1/_{25}$ der Kolbenfläche gleich macht. Hiernach ist die Geschwindigkeit des Dampfes 25mal so groß als die des Dampfkolbens; oder, da diese bei den meisten Maschinen 3 bis 5 Fuß beträgt, 75 bis 125 Fuß. Die Arbeitsverluste, welche aus dieser großen Dampfgeschwindigkeit entspringen, werden wir weiter unten näher kennen lernen; jedoch möge noch bemerkt werden, daß es zweckmäßig ist, die Dampfröhre eher etwas weiter als enger zu machen, zumal bei Maschinen mit Hochdruck und mit großer Kolbengeschwindigkeit.

Die Einrichtung einer Regulirungsklappe ist aus Fig. 697 zu ersehen. AA ist ein ausgebohrtes Stück des Dampfrohres, B die Klappe, CX die Axe derselben, D eine Stellschraube mit Gegenmutter, und EF der Hebel zur Bewegung der Klappe. Durch diese Klappe läßt sich der Dampf nicht ganz abschließen; um dies zu können, wendet man bei Hochdruckmaschinen ein besonderes Absperrventil an. Bei Tiefdruckmaschinen ist ein solches Ventil weniger nothwendig, da diese Maschinen durch Abstellung der Condensation in Stillstand versetzt werden können. Die Einrichtung eines Absperrventils ist aus Fig. 698 zu ersehen. Die Ventilplatte AA wird hier mittels des in eine Schraubenspindel C auslaufenden Stiels CD durch Umdrehung der Schraubenmutter E auf den Ventilsitz BB aufgedrückt. Das Stellrad RR mit der Handhabe H greift in das Zahnrädchen, welches die Schraubenmutter umfaßt; die Gabel G dient zum Festhalten der Schraubenstellung.

Fig. 697.

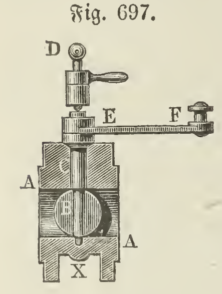
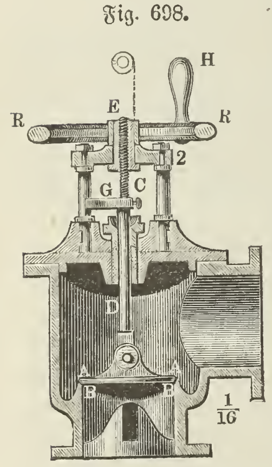


Fig. 698.



§ 446 **Steuerung.** Der in die Dampfkammer eingeführte Dampf wird durch besondere Canäle oder Dampfwege (franz. und engl. passages) in den Dampfcylinder und aus diesem heraus und in die freie Luft oder in den Condensator geführt. Das regelmäßige Zu- und Abführen des Dampfes erfolgt durch denjenigen Apparat, welchen man die Steuerung (franz. régulateur; engl. regulator) nennt. Auch hier, wie bei den den Dampfmaschinen so ähnlichen Wassersäulenmaschinen, unterscheidet man die innere und die äußere Steuerung. Die innere Steuerung (franz. le distributeur de la vapeur; engl. the steam-distributor) befindet sich im In-

neren des Dampfgehäuses und besteht aus Hähnen, Kolben, Klappen, Schiebern oder Ventilen, welche die Dampfwege abwechselnd eröffnen und verschließen. Von diesen wichtigen und sehr mannigfaltigen Theilen der Dampfmaschinen möge in Folgendem ausführlicher die Rede sein.

Die Kolbensteuerung wird bei den Dampfmaschinen nur selten angewendet; da wir sie bereits bei den Wassersäulenmaschinen kennen gelernt haben, so möge von ihr auch weiter nicht die Rede sein.

Die Steuerung durch Hähne ist ebenfalls wenig, und zwar nur bei kleinen Hochdruckmaschinen in Gebrauch; die Hähne führen sich schnell ab, erfordern viel Kraft zu ihrer Bewegung und geben zu enge Dampfwege. Bei den älteren Dampfmaschinen bestand die Steuerung in Hähnen, zumal aber in dem sogenannten Vierweghahne (franz. robinet à quatre voies ou à quatre ouvertures; engl. four-way cock), von dessen Anwendung bei Kolbenmaschinen schon in Bd. II, §. 297, die Rede gewesen ist.

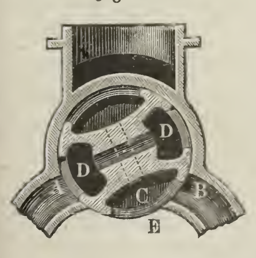
Eigenthümliche Hahnsteuerungen hat Maudslay bei kleinen Dampfmaschinen, sowie Cavé bei oscillirenden Dampfmaschinen in Anwendung gebracht (s. Récueil des machines etc. par le Blanc).

Die gewöhnlichsten und vorzüglichsten Steuerungen bei Dampfmaschinen sind die Schiebersteuerungen, d. i. die mit Schiebern oder Schiebventilen (franz. tiroirs; engl. slide-valves), und die Ventilsteuerung, d. i. die mittels der Ventile (franz. soupapes; engl. valves).

Es giebt platte und hohle oder sogenannte Muschel- und Röhrenschieber. Die Kreis- oder Drehschieber (franz. tiroir à rotation; engl. rotating slide-valves) stehen zwischen den gewöhnlichen Schiebern und den Hähnen inne.

Die Drehschieber von Wilson sowie auch die von Corliß sind von den Hähnen nicht wesentlich verschieden. Der Schwarzkopf'sche Drehschieber hat eine Elidirung wie der Schitko'sche Hahn bei Wassersäulenmaschinen, s. §. 303. Den Durchschnitt desselben führt Fig. 699 vor Augen. Der

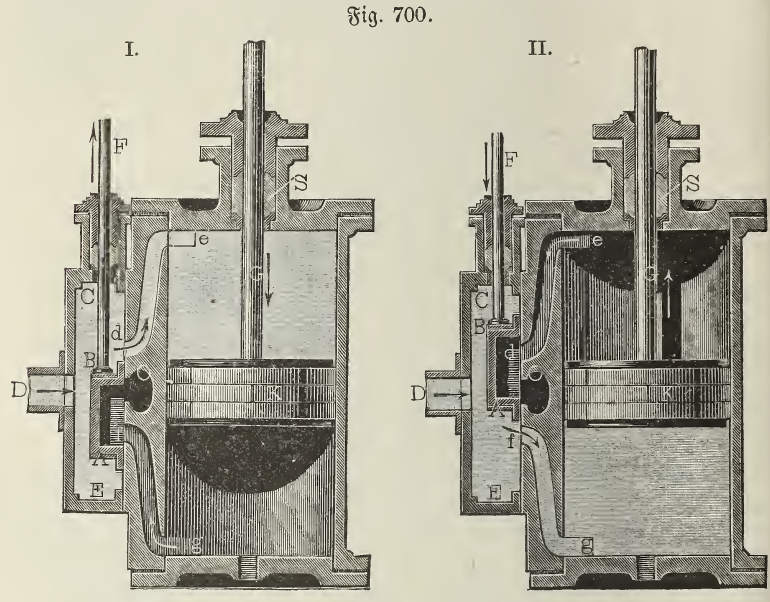
Fig. 699.



durch die axialen Canäle D, D zuströmende Dampf tritt, je nach der Stellung des Schiebers, abwechselnd durch die Canäle A und B über und unter den Dampfkolben, wogegen der verbrauchte Dampf abwechselnd durch den einen oder andern dieser Canäle nach dem Einschnitt C des Schiebers geleitet wird, von wo aus er bei E zum Austritt gelangt. Um den einseitigen Druck des Drehschiebers gegen das Gehäuse desselben aufzuheben, ist der diametrale Canal DD angebracht, in welchem der Dampf nach der einen Seite genau ebenso stark drückt als nach der anderen.

§. 447 **Schiebersteuerung.** Die Muschel- und Röhrenschieber sind die gewöhnlichsten Steuerungsmittel der Dampfmaschinen. Die ersteren haben die meiste Aehnlichkeit mit einem Schubkasten oder im Durchschnitte mit dem Buchstaben C, weshalb man sie auch Schubkastenventile oder C-Schieber nennen kann. Die Einrichtung der Steuerung mit dem Muschelschieber führt Fig. 700, I. und II., vor Augen. *AB* ist der Schieber, ein-

Fig. 700.

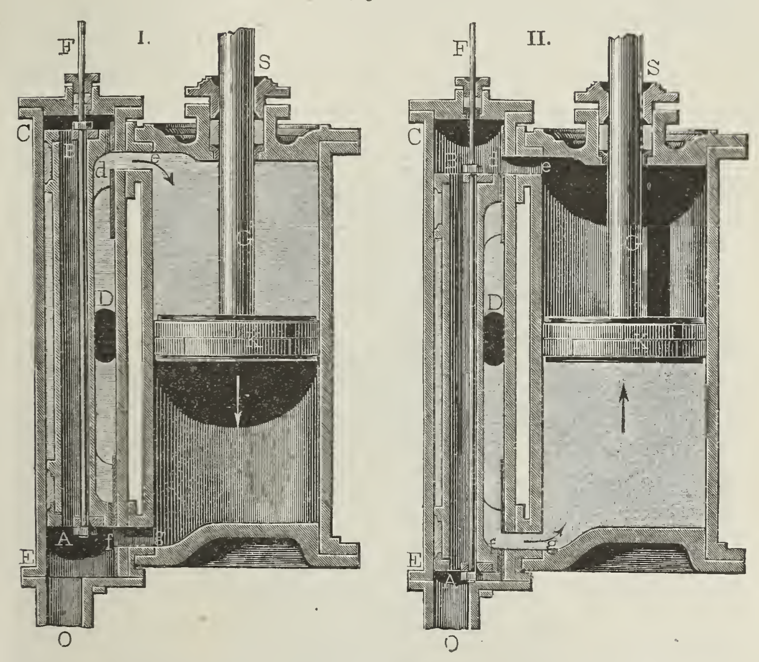


geschlossen in der Dampfkammer *CDE*, beweglich durch die Stange *BF* und anliegend mit seinen abgehobelten Stirnflächen an der ebenfalls abgehobelten Metallfläche *df*. Der durch das Dampfrohr *D* zugeführte Dampf tritt bei der Stellung I. des Schiebers durch *de* über den Dampfkolben *K* und treibt denselben nieder, dagegen bei der Stellung II. durch *fg* unter den Kolben und nöthigt denselben zum Aufgange; im ersten Falle strömt der benutzte Dampf durch *gf* in den Schieberraum und von da durch den Weg *O* in die freie Luft oder in den Condensator, im zweiten Falle hingegen schlägt er den Weg *ed* ein und gelangt dann durch *O* ebenfalls in's Freie oder in den Condensator.

Bei großen Maschinen verursacht das bei jedem Spiele nöthige Anfüllen der Canäle *de* und *fg* zu viel Dampfverlust, weswegen man es hier vorzieht, den D- oder Röhrenschieber anzuwenden. Fig. 701 I. und II. zeigt eine solche Schiebersteuerung. Es tritt hier der Dampf durch die Mündung *D*

in das Innere des Schiebers *Ad*, und aus diesem, je nach der Stellung desselben, entweder bei *de* über oder bei *fg* unter den Kolben. Auf dem

Fig. 701.

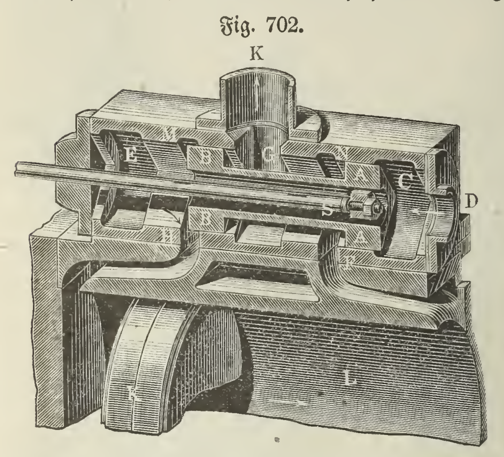


Rücken des Schiebers sitzt noch eine an beiden Enden offene Röhre *AB* mit halbkreisförmigem Querschnitte fest, und diese ist bei *A* und *B* abgelidert, um an dem halbcylindrischen Theile der Dampfkammer dampfdicht abzuschließen. Man sieht nun leicht ein, wie der benutzte Dampf während des Kolbenaufganges bei *ed* aus-, durch *BA* hindurchströmen und endlich bei *O* in den Condensator treten kann, und wie er dagegen beim Niedergange von *K* auf dem Wege *gf O* abgeführt wird.

Der letztere Schieber hat vor dem ersteren noch den Vorzug, daß er vom zutretenden Dampfe umgeben, daher nicht wie der erstere einseitig gedrückt wird, und folglich bei seiner Bewegung einen kleineren Reibungswiderstand zu überwinden hat, als der einfache C-Schieber. Dieser Widerstand verursacht bei größeren Maschinen mit hohem Druck einen Arbeitsaufwand von mehreren Pferdekräften. Deshalb hat man in neueren Zeiten auch kurze Schieber für Hochdruckmaschinen, ähnlich wie die langen Watt'schen Schieber, so construirt, daß sie vom Dampf nicht einseitig gedrückt werden und gleichsam in ihrer Führung schweben. Die Einrichtung eines solchen äqui-

librirten oder Entlastungsschiebers (franz. tiroir équilibré; engl. equilibrated slide-valve) nach Jobin (s. Bulletin de la Société d'Encouragement, T. V, 1858), angewendet an einer Dampfmaschine mit liegendem Cylinder, ist aus dem Durchschnitte in Fig. 702 zu ersehen. Die Dampfkammer *CE* hat viel Aehnlichkeit mit dem Steuercylinder einer Wassersäulenmaschine, und ebenso ist der Dampfschieber *AB* im Wesentlichen eine Verbindung von zwei Steuerkolben *AA* und *BB* mit einer hohlen Kolbenstange *AB*. Der bei *D* in die Dampfkammer eintretende Dampf füllt nicht allein die Räume *C* und *E* zu beiden Seiten des Dampfschiebers, sondern auch den inneren Raum *S* desselben aus, und drückt daher diesen Schieber von allen Seiten her gleich stark. Der aus dem Dampfcylinder *L* abströmende und durch das Ausblaserohr *K* ausströmende Dampf umhüllt den mittleren oder röhrenförmigen Theil *AB* des Schiebers von außen und giebt daher ebenfalls zu keinem Seitendrucke Veranlassung. Da die Dampfkammer an den beiden Stellen *MH* und *NF*, wo die Dampfcanäle einmünden, erweitert ist, so wird der Dampfschieber auch dann nicht einseitig eingedrückt, wenn er den einen oder den anderen dieser Canäle absperrt.

Fig. 702.

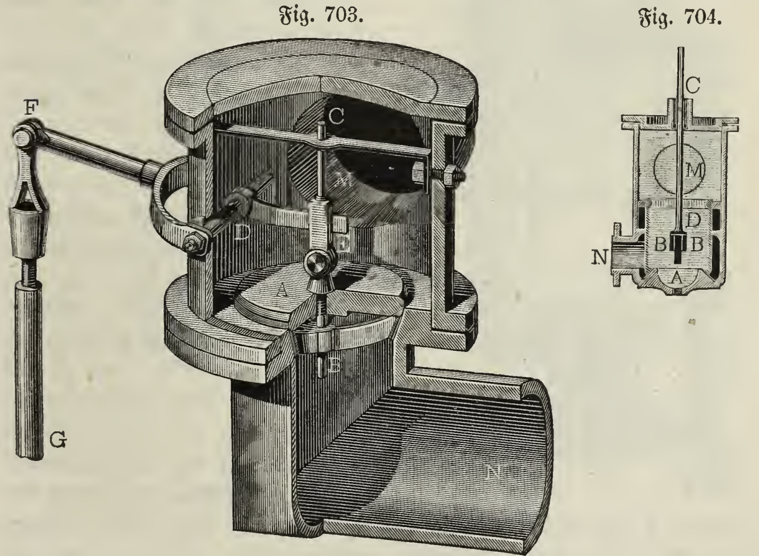


§. 448 **Ventilsteuerung.** Die Ventilsteuerung wird vorzüglich bei großen, zumal aber bei den einfachwirkenden Dampfmaschinen angewendet, da hier die Schieber zu groß ausfallen, um mit hinreichender Genauigkeit abschließen zu können, übrigens aber auch das Eröffnen und Abschließen der Dampfwege zu langsam vor sich geht. Die Ventile, welche man zur Steuerung verwendet, sind entweder Kegelventile (s. Bd. I, §. 445) oder Röhrenventile. Letztere unterscheiden sich von den ersteren dadurch, daß hier der Theil beweglich ist, welcher bei den Kegelventilen festsitzt, und der Theil ausschiebt, welcher dort den Sitz bildet. Beide Ventilarten sind entweder einfache oder doppelte; und letztere finden bei großen Maschinen deshalb ihre Anwendung, weil sie viel leichter zu bewegen sind, als die einfachen Ventile. Uebrigens werden die Ventile entweder durch Stangen oder Hebel in Bewegung gesetzt.

Zunächst zeigt Fig. 703 ein einfaches Kegelventil mit Hebelbewegung. Es ist hier *A* das Ventil, *BC* dessen Stiel, sowie *B* und *C* die büchsenförmige Leitung desselben; ferner *D* eine durch das Gehäuse hindurchgehende Drehaxe, *DE* ein Hebelarm im Inneren und *DF* ein solcher außerhalb des Gehäuses; jener ergreift den zu diesem Zwecke bei *E* ausgehöhlten Ventilstab, dieser aber ist mit einer Stange *FG* verbunden. Wird nun an der letzteren gezogen, so dreht sich die Hebelverbindung um *D*, es wird dadurch *A* gehoben und die Communication zwischen den Räumen *M* und *N* hergestellt.

In Fig. 704 ist dagegen ein Röhrenventil mit Stangenbewegung

Fig. 703. Fig. 704.

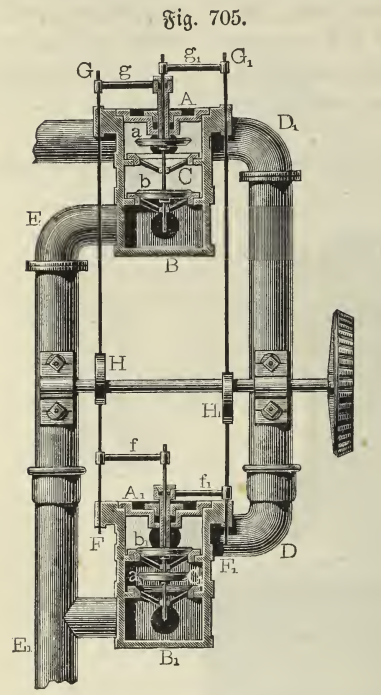


abgebildet. Hier ist die Ventilplatte *A* fest, und dagegen das Gehäuse *BB* beweglich, und zwar mit Hülfe einer durch eine Stopfbüchse *C* gehenden Ventilstange *CD*. Bei der Ventilstellung, welche in dieser Figur abgebildet ist, steht *B* auf *A*, und es ist die Verbindung der Räume *M* und *N* aufgehoben; wird aber *BB* mittels *CD* emporgezogen, so treten die Räume *M* und *N* in Communication und es kann nun Dampf von *M* durch *B* hindurch und unter *B* nach *N* strömen. Diese zuerst von Hornblower angewendeten Ventile haben den großen Vortheil, daß sie leichter zu bewegen sind, als die plattenförmigen Kegelventile, weil hier der Querschnitt eine Ringfläche, dort aber eine volle Kreisfläche ist.

Um von einem Punkte aus zwei Ventile mittels Stangen bewegen zu können, macht man die Stange des einen Ventiles hohl und steckt die Stange

des anderen Ventiles durch die Höhlung; auf diese Weise erhält man die sogenannten concentrischen Ventile von Murdoch. Eine vollständige Ventilsteuerung dieser Art ist in Fig. 705 abgebildet. Hier erfolgt die Vertheilung des Dampfes in zwei Kammern AB und $A_1 B_1$. Beide Kammern sind durch je zwei Ventilsitze in drei Kammern abgetheilt, und von diesen communiciren die oberen mit dem Dampfrohre DD_1, die mittleren mit dem Dampfcylinder und die unteren mit dem Ableitungsrohre EE_1. Es sind ferner FG und $F_1 G_1$ zwei durch Excentriks H, H_1 (§. 454) oder einen anderen Mechanismus auf- und niederbewegte Steuerstangen, welche mittels Querarmen f, g, f_1 und g_1 die Stiele ergreifen, an welchen die vier Ventile a_1, a, b_1 und b hängen. Man ersieht aus der Figur, daß die Stiele von a und b_1 hohl sind, die von b und a_1 aber durch jene hindurchgehen. Geht die Stange FG aufwärts, so öffnen sich die Ventile a und a_1, und es tritt Dampf aus DD_1 bei C in den Dampfcylinder und über den Kolben, wogegen der benutzte Dampf unter diesem Kolben bei C_1 aus dem Cylinder heraus- und von da in das Ableitungsrohr EE_1 strömt. Steigt hingegen $F_1 G_1$ auf und FG nieder, so wird b und b_1 geöffnet, a und a_1 aber geschlossen, und es strömt neuer Dampf bei C_1 unter den Kolben, wogegen der beim vorigen Spiele verbrauchte Dampf durch C zurück- und durch EE_1 abströmt.

Fig. 705.



§. 449 **Dampfventile.** Die Kraft zum Aufziehen eines einfachen Kegelventiles ist das Product aus Dampfdruck p und aus der Ventilfläche F; da nun aber bei großen Hochdruckmaschinen F und p bedeutende Factoren sind, so ist auch die Kraft und der nöthige Arbeitsaufwand zum Ziehen dieser Ventile sehr groß. Wir haben schon im vorigen Paragraphen angegeben, daß Röhrenventile, weil diese einen kleineren Querschnitt haben, einen kleineren Arbeitsverlust verursachen als Kegelventile, und müssen nun noch hinzufügen, daß man durch Anschließen eines Gegenkolbens oder Gegenventiles

den Kraftaufwand bei Kegelventilen bedeutend herabziehen kann. Ein **Kegelventil mit Gegenkolben** ist in Fig. 706 vor Augen geführt. *V* ist das Ventil, *K* der Gegenkolben und *CE* ein Seitenrohr, welches das nach dem Dampfcylinder führende Communicationsrohr *O* mit dem Raume unter dem Gegenkolben verbindet. Der Dampf drückt das Ventil nach oben und den Kolben nach unten ziemlich gleich stark; es besteht folglich die Kraft

Fig. 706.

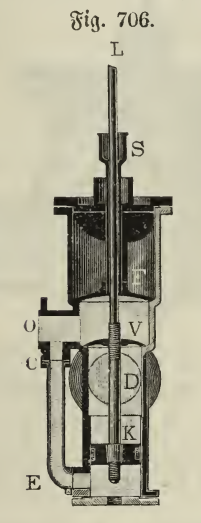
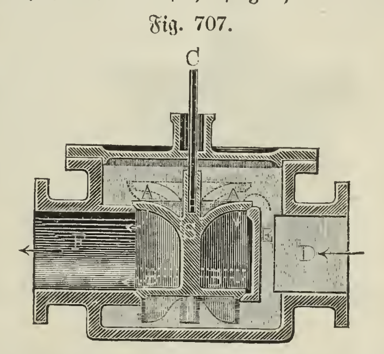


Fig. 707.



zum Aufziehen hauptsächlich nur in der Ueberwindung von Reibungen.

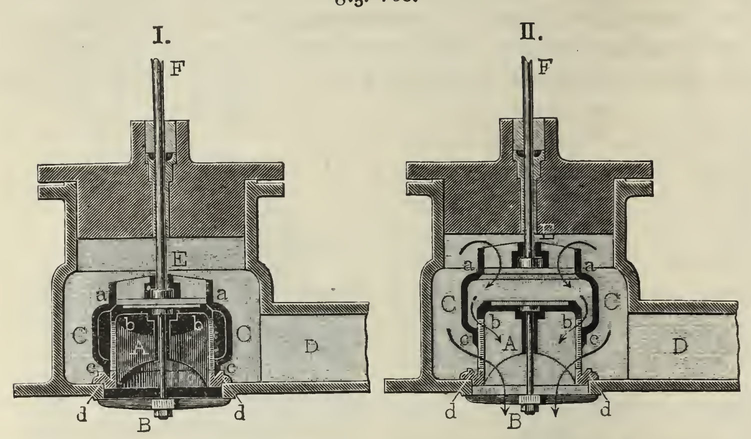
Ein zweites Ventil *F*, dessen Stange *FS* die Stange *KL*, worauf das Ventil *V* und der Kolben *K* sitzen, umgiebt, wird aufgezogen, um den Dampf nach vollbrachter Wirkung nach oben abzulassen.

Vollkommener wird allerdings der Zweck durch ein **Doppel- oder Laternenventil**, wie Fig. 707, erreicht. Es ist hier *AA* der eine und *BB* der andere Ventilteller, sowie *SC* der Stiel, wodurch das ganze Ventil aufgezogen wird. Der bei *D* zutretende Dampf umgiebt die beiden Ventile und deren Sitze von mehreren Seiten und drückt das eine Ventil fast ebenso stark von oben nach unten wie das andere von unten nach oben; es hat daher ein bei *C* angreifender Hebel nur eine mäßige Kraft auszuüben nöthig, um das Ventil zu heben. Sowie dies aber geschehen ist, kann der Dampf in den beiden ringförmigen Räumen zwischen den Ventilen und ihren Sitzen aus dem Ventilgehäuse heraus in die Dampfkammer *EF* treten und von da weiter fortgeleitet werden.

Endlich hat man auch doppelte Röhren, oder sogenannte **Glockenventile**, wie z. B. in Fig. 708 (a. f. S.), I. und II., abgebildet ist. Es sind hier die Ventilringe *bb* und *dd* fest, und es ist das Gehäuse *CC* mittels des Stieles *EF* beweglich. Ist das Ventil geschlossen, wie in I., so trifft die abgeschliffene Kegelfläche *aa* des Ventiles auf den ebenfalls kegelförmig abgeschliffenen

Umfang des Tellers bb, sowie die abgeschliffene Kegelfläche cc des Ventiles auf den konisch geschliffenen Umfang des Tellers dd. Es drückt dann der

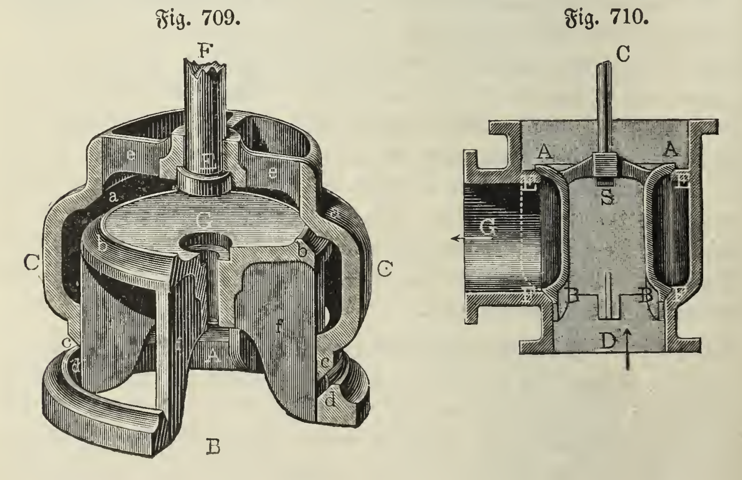
Fig. 708.



bei D zuströmende Dampf das ganze Glockenventil ziemlich ebenso stark von oben wie von unten und es ist daher die Kraft zum Aufziehen des Ventiles sehr unbedeutend. Nach vollbrachtem Aufziehen (siehe II.) kann nun der Dampf durch die ringförmigen Räume zwischen a und b sowie zwischen c und d in den Ventilraum A und von da durch B nach dem Punkte des Bedarfes strömen.

Die specielle Einrichtung eines solchen Glockenventiles ist aus der Abbildung in Fig. 709 zu ersehen. Man sieht hier die vom Teller G herab-

Fig. 709. Fig. 710.

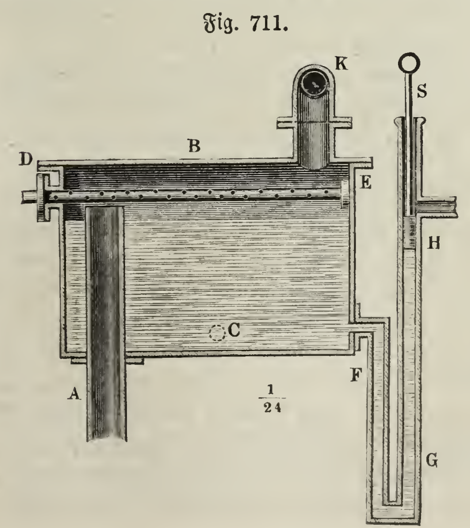


laufenden Flügel *f, f...*, welche der durch die Stange *EF* bewegten Glocke *CC* zur Führung dienen, sowie in *e, e* die Arme, welche die letztere mit der Stange *EF* verbinden.

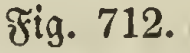
Die Röhrenventile lassen sich ebenfalls doppelsitzig einrichten (siehe Reuleaux: „Ein neues Doppelsitzventil" in der schweiz. polytechn. Zeitschrift, 1856). Ein solches Ventil ist in Fig. 710 abgebildet. Es ist hier die das Ventil bildende und mittels der Stange *CS* zu bewegende Röhre *ABBA* an beiden Mündungen erweitert und außen kegelförmig abgedreht, sowie das Ventilgehäuse *EFFE* mit entsprechenden Sitzen *EE*, *FF* versehen. In der abgebildeten Stellung dieses Ventiles ist der bei *D* zutretende und den inneren Ventilraum ausfüllende Dampf von dem mit dem äußeren Ventilraume communicirenden Rohre *G* ganz abgesperrt, wird aber das Ventil gezogen, so kann der Dampf zwischen *AA* und *EE* sowie zwischen *BB* und *FF* hindurchgehen und nach *G* strömen. Die Kraft, mit welcher der Dampf das Ventil in seinen Sitzen aufdrückt, ist natürlich proportional der Differenz der Querschnitte *AA* und *BB*.

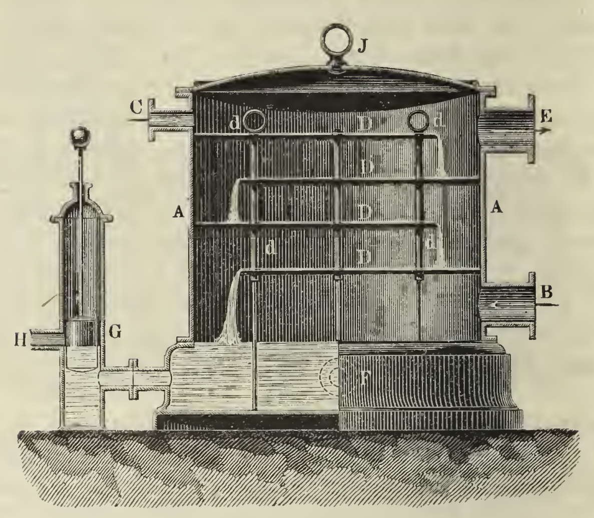
Condensator. Bei den Maschinen ohne Condensation strömt der Dampf, §. 450
nachdem er gewirkt hat, in freier Luft oder nach Befinden auch unter Wasser aus; bei den Maschinen mit Condensation hingegen wird er in den Condensator oder das Kühlgefäß (franz. condenseur; engl. condensor) geleitet. Im ersten Falle läßt man ihn auch gern durch einen Vorwärmer gehen, wo er das Speisewasser erwärmt, ehe es in die Speisepumpe tritt. Die Einrichtung eines solchen Apparates läßt sich aus Fig. 711 entnehmen. *A* ist das Austragerohr, welches den verbrauchten Dampf zunächst in das Reservoir *BC* leitet, und *DE* das Ausgußrohr der Kaltwasserpumpe, welches mit vielen kleinen Löchern versehen ist, wodurch das Wasser in feinen Strahlen in *BC* eingeführt wird. Dieses Wasser wird durch den Dampf erwärmt und größtentheils durch die bei *C* einmündende Speisepumpe nach dem Dampfkessel gedrückt; das überflüssige Wasser fließt aber durch

Fig. 711.



die mit einem Schwimmer *S* ausgerüstete Seitenröhre *FGH*, und der übrige Dampf durch das Rohr *K* ab. Vollkommener ist der in Fig. 712 abgebil-


Fig. 712.

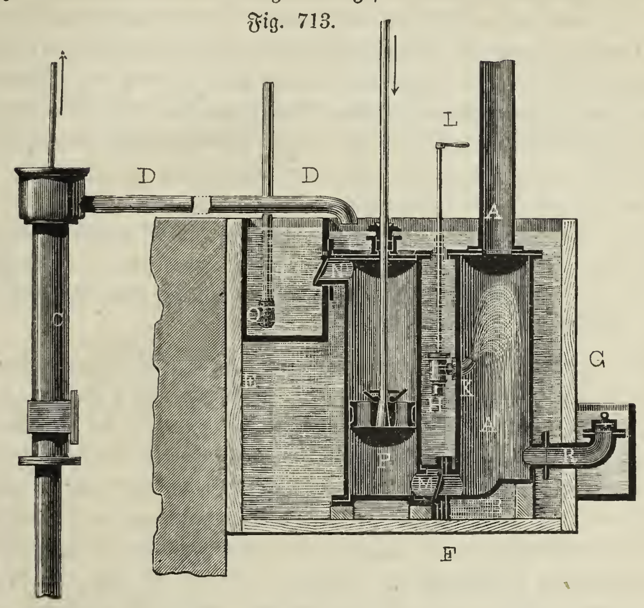


dete Vorwärmer *ABC*, in welchem das bei *C* eingeführte Speisewasser in dünnen Schichten auf den Platten *D*, *D* ... hinläuft und nach und nach von der einen auf die andere herabfließt, wobei es durch den bei *B* ein- und bei *E* austretenden Dampf bis mindestens 70 Grad vorgewärmt wird.

Der Condensator, durch welchen man den größten Theil der verbrauchten Dämpfe niederzuschlagen beabsichtigt, ist ein gußeisernes Gefäß *AB*, Fig. 713, welches von außen mit kaltem Wasser umgeben wird, und in welches auch ununterbrochen kaltes Wasser, das sogenannte Injections- oder Einspritzwasser (franz. eau d'injection; engl. water for injection), in einem Bündel feiner Strahlen einströmt. Das zur Condensation nöthige kalte Wasser wird durch eine Pumpe *C*, die sogenannte Kaltwasserpumpe (franz. pompe d'eau froide; engl. cold-water pump) mittels des Rohres *DD* in das den Condensator umgebende Reservoir *EFG* gefördert. Im letzteren befindet sich auch der Apparat *H*, durch welchen das Einspritzwasser in das Innere des Condensators geführt wird. Dieses Wasser tritt aus dem großen Reservoir von unten in diesen Apparat und fließt durch das mit einem Seiherbleche geschlossene und der Brause einer Gießkanne ähnliche Mundstück *HK* mit großer Geschwindigkeit in den Condensator, da hier nur ein kleiner Druck von $^1/_{10}$ bis $^1/_8$ Atmosphäre vorhanden ist. Zum Regu-

liren dieses Einspritzwassers dient ein Ventil oder ein Hahn, welcher durch einen Hebel L mittels einer Stange LH gestellt wird. Mit dem Conden-

Fig. 713.



sator in Verbindung ist eine Pumpe, die sogenannte Luftpumpe (franz. pompe à air; engl. air-pump); diese hat den Zweck, die sich aus dem Einspritzwasser entwickelnde atmosphärische Luft, sowie den noch übrigbleibenden Dampf und das aus dem niedergeschlagenen Dampfe und aus dem Einspritzwasser hervorgehende warme Wasser aus dem Condensator fortzuschaffen. Sie ist eine gewöhnliche Saugpumpe mit dem durchlochten Kolben P, dem Saugventile M und dem Druckventile N; ihre weitere Beschreibung gehört nicht hierher. Das warme Wasser fließt bei N in das Heißwasserreservoir NO, aus dem ein kleiner Theil durch die Speisepumpe mittels des Saugrohres O dem Kessel als Speisewasser zugeführt wird. Endlich steht mit dem Condensator noch ein kurzes, mit einem sich nach außen öffnenden Ventile versehenes Rohr R in Verbindung. Dieses Rohr heißt das Ausblaserohr, sowie sein Ventil das Ausblaseventil oder die Ausblaseklappe (franz. soupape à souffler; engl. blow-valve); es dient dasselbe dazu, die Luft abzuleiten, die sich in dem Condensator nach längerem Stillstande der Maschine angesammelt hat.

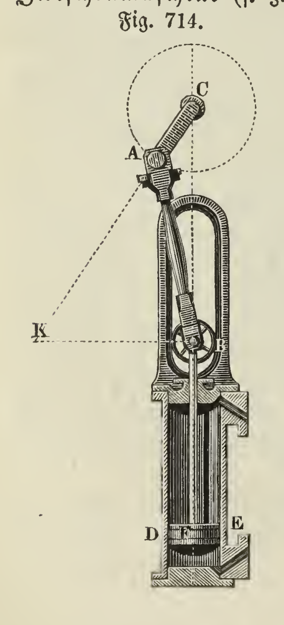
Zur Erlangung einer vollkommeneren Condensation wendet man in der neueren Zeit statt der einfachwirkenden, doppeltwirkende Luft- und Warmwasserpumpen an.

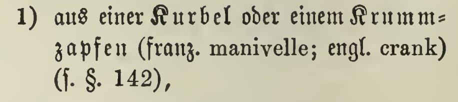
Ein kurzes Barometer, welches in den Condensator einmündet, dient dazu, den Luftdruck in demselben anzuzeigen (die Barometerprobe).

Außer dem im Vorstehenden beschriebenen Einspritzcondensator von Watt hat man noch den Oberflächencondensator von S. Hall in Anwendung gebracht. Bei letzterem strömt der Dampf durch ein System von Röhren, welche von außen mit kaltem Wasser umgeben sind. Der Umstand, daß die Oberflächencondensation sehr große Abkühlungsflächen erfordert, ist Ursache, daß dieselbe noch keine allgemeine Anwendung gefunden hat. Wegen des Salzgehaltes des Meerwassers ist es nöthig, von Zeit zu Zeit einen Theil des Kesselwassers der Seeschiffe abzulassen, wobei natürlich ein namhafter Wärmeverlust statt hat; deshalb wäre eine vollkommenere Oberflächencondensation, wo dieses Ablassen nicht nöthig ist, für die Dampfschifffahrt von großer Wichtigkeit.

§. 451 **Maschinensysteme.** Durch die gewöhnlichen Kolbendampfmaschinen wird unmittelbar nur eine geradlinig wiederkehrende, z. B. eine auf- und niedergehende, oder eine hin- und hergehende Bewegung in der geraden Linie erzeugt. Wenn sich nun die Arbeitsmaschine, welche von der Dampfmaschine zu bewegen ist, ebenfalls geradlinig wiederkehrend bewegen soll, so läßt sich die Verbindung dieser Maschinen entweder unmittelbar oder mittels eines Hebels bewerkstelligen; wenn dagegen die Arbeitsmaschine, wie meistens, eine ununterbrochene Kreisbewegung annehmen soll, so ist noch eine besondere Zwischenmaschine (s. §. 108) erforderlich, welche die geradlinig wiederkehrende Bewegung der Dampfmaschine in die verlangte stetig kreisförmige Bewegung der Arbeitsmaschine umsetzt. Gewöhnlich besteht diese Zwischenmaschine

Fig. 714.





1) aus einer Kurbel oder einem Krummzapfen (franz. manivelle; engl. crank) (s. §. 142),

2) aus einer Kurbel-, Lenk- oder Pleylstange (franz. bielle; engl. connecting rod), und

3) aus einem Schwungrade (franz. volant; engl. fly-wheel).

Die Kurbel CA, Fig. 714, bildet einen Theil der Welle C und ist mittels der Kurbelstange AB mit der Kolbenstange BF verbunden. Damit der Stangenkopf B von der Kurbelstange nicht zur Seite gezogen werde,

ist dieser mit einem besonderen Mechanismus, der sogenannten Geradführung, verbunden, und damit die Kurbelwelle C in Folge der veränderlichen Wirkung der Kurbelstange auf dieselbe nicht ungleichförmig umlaufe, wird auf dieselbe ein Schwungrad (s. §. 111) aufgesetzt. Die gewöhnlichen Kolbendampfmaschinen sind stationäre, d. i. an irgend einer Stelle fest aufgestellte; locomobile Dampfmaschinen, welche auf einem Wagen stehend nach dem Punkte des Bedarfs gefahren werden können, finden vorzüglich ihre Anwendung in der Landwirthschaft.

Die verschiedenen stehenden Kolbendampfmaschinen lassen sich in folgende Systeme zusammenstellen: §. 452

I. Nach der Anzahl der Dampfcylinder giebt es

1) eincylindrige,
2) zweicylindrige Dampfmaschinen.

II. In Hinsicht auf die Lage der Dampfcylinder hat man

1) solche mit festen und
2) solche mit beweglichen Cylindern.

Im ersten Falle sind die Cylinder

a. verticalstehend,
b. horizontal- oder
c. geneigtliegend.

Im zweiten Falle haben die Cylinder

a. eine schwingende,
b. eine rotirende Bewegung.

III. In Hinsicht auf die Dampfwirkung sind die Dampfmaschinen

a. einfachwirkende,
b. doppeltwirkende.

IV. In Hinsicht auf die Uebertragung der Dampfkraft hat man

1) directwirkende oder
2) indirectwirkende,

und im letzten Falle wieder entweder

a. solche mit Balancier oder
b. solche ohne Balancier.

Außer den Kolbendampfmaschinen hat man auch noch rotirende oder Raddampfmaschinen, wo der Dampf auf die Schaufeln eines im Inneren eines Gehäuses eingeschlossenen Rades wirkt und dasselbe in Umdrehung setzt. Diese directwirkenden Rotationsmaschinen haben aber keine allgemeine Ver-

breitung erlangt (s. die Verhandlungen des Vereins für Gewerbefleiß in Preußen, Jahrgang 1838). Das in Fig. 580, Seite 766, abgebildete Wassersäulenrad kann auch als eine solche Raddampfmaschine benutzt werden. In England haben noch die sogenannten Scheibendampfmaschinen (disc-engines) von Bishopp die meiste Verbreitung gefunden (s. The Steam Engine etc. by Tredgold, Vol. III, by J. Weale, 1853; sowie Traité des machines à vapeur etc. par C. E. Jullien, Sect. I.).

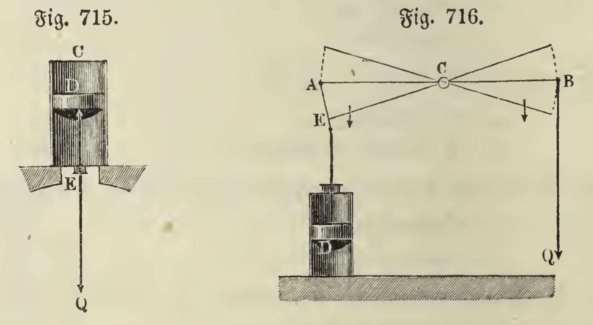
Die locomotiven Dampfmaschinen dienen nur zu einer besonderen Arbeitsverrichtung der fortschaffenden Mechanik, nämlich zum Fortschaffen der Lasten mittels Wagen und Schiffen, oder sogenannte Dampfwagen und Dampfschiffe.

§. 453 Mehrere der oben aufgezählten Dampfmaschinensysteme sind in folgenden Abbildungen skizzirt.

Fig. 715 stellt eine einfach- und directwirkende Dampfmaschine dar. Die Last, z. B. die Pumpenlast Q einer Dampfkunst, hängt hier unmittelbar an der Kolbenstange DE und wird mittels des Dampfkolbens D durch die Kraft des unter D befindlichen Dampfes emporgehoben.

Fig. 716 ist dagegen die Skizze von einer einfachwirkenden Dampfmaschine mit Balancier; es ist ACB der um C drehbare Balancier, DE

Fig. 715. Fig. 716.



die Kolbenstange, AE das Verbindungsglied zwischen dem Balancier und dieser Stange und BQ die Stange, woran die Last angeschlossen ist.

Fig. 717.

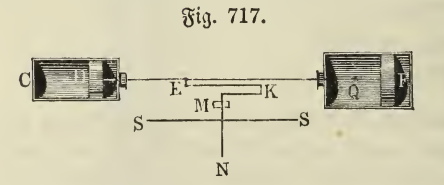


Fig. 717 ist ferner die Skizze einer liegenden doppelt- und directwirkenden Dampfmaschine. Der Dampfkolben D bewegt hier mittels der verlängerten Kolbenstange DF einen anderen Kolben F, z. B. den eines Cylindergebläses; zur Erzeugung einer regelmäßigen Bewe-

gung ist an diese Stange mittels einer Kurbelstange EK und einer Kurbel MK ein um die Axe MN umlaufendes Schwungrad SS angeschlossen.

Fig. 718.

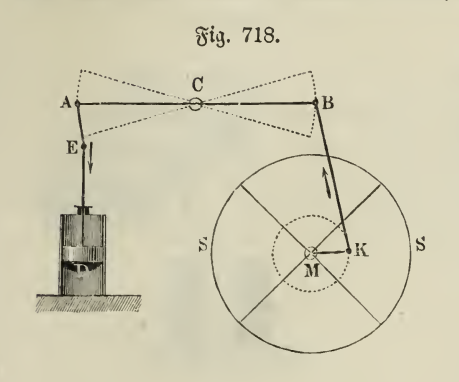
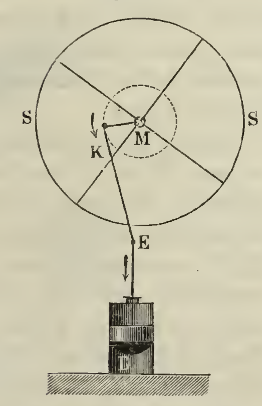


Fig. 718 stellt eine doppeltwirkende Balanciermaschine mit Drehbewegung vor; MK ist der Krummzapfen, BK die Lenkstange und SS das zur Erhaltung einer möglichst gleichförmigen Drehbewegung nöthige Schwungrad; die übrigen Bezeichnungen sind die vorigen.

Fig. 719 ist eine Maschine ohne Balancier, Fig. 720 eine solche ohne Lenkstange.

Fig. 719.



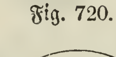
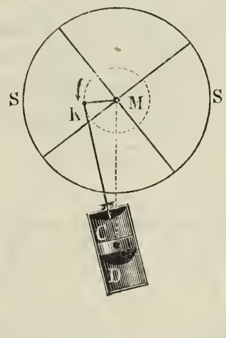


Fig. 720.



Damit die Kolbenstange in Fig. 718, 719 und 720 senkrecht auf- und niedergehe, ist bei E ein besonderer Leitungsapparat angebracht; und damit bei der sich um C schwingenden Maschine in Fig. 720 die Kolbenstange CK nur in ihrer Axenrichtung sich bewegen könne, ist ein Leitungsapparat auf den schwingenden Cylinder aufgesetzt. Ist die Entfernung CM der Schwingungsaxe C von der Drehungsaxe M kleiner als die Länge MK des Kurbelarmes, so geht die schwingende Bewegung des Dampfcylinders in eine rotirende über.

Fig. 721 (a. f. S.) ist die Skizze einer doppeltwirkenden Dampfmaschine wie die in Fig. 719, nur ist hier, um Raum zu ersparen, die Kurbelstange nicht am Ende einer massiven Kolbenstange, sondern in der Mitte D einer hohlen Kolbenstange EF angeschlossen.

Fig. 722 ist eine zweicylindrige doppeltwirkende Dampfmaschine ohne Balancier, nach Maudslay. Beide Kolbenstangen *BD*,

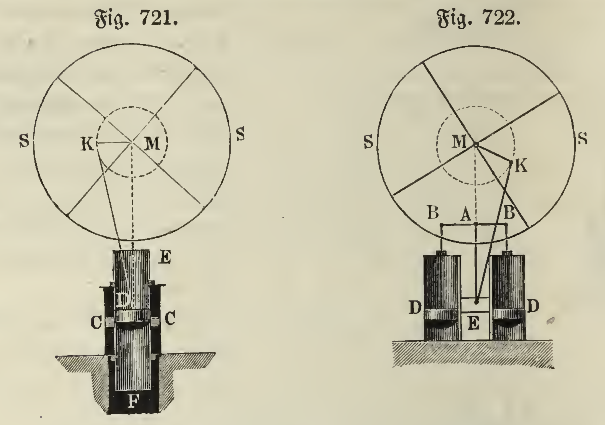


Fig. 721. Fig. 722.

BD sind hier durch ein Querhaupt *BAB* mit einander, und letzteres ist wieder durch eine dritte Stange *AE* mit einem zweiten Querhaupte *E* verbunden, welches in einer Senkrechtführung zwischen beiden Cylindern beweglich ist und mit der Kurbelstange *KE* in Verbindung steht.

Fig. 723 ist die Skizze einer sogenannten Woolf'schen Dampfmaschine mit zwei Cylindern, deren Kolben gleichzeitig auf- und niedergehen und durch die Kolbenstangen *DE*, D_1E_1 ... an einen Balancier *ACB* angeschlossen sind. Der Dampf, welcher den größeren Kolben *D* in Bewegung setzt, hat vorher schon im kleineren Cylinder D_1 gewirkt.

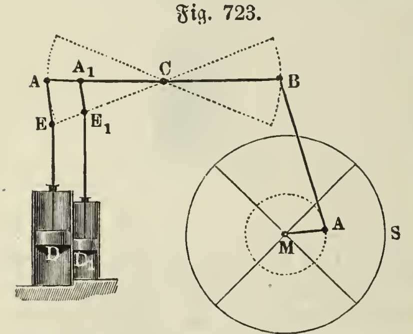


Fig. 723.

In neueren Zeiten construirt man, namentlich für die französische Marine, Woolf'sche Dampfmaschinen mit drei liegenden Cylindern *ABC*, Fig. 724, wovon nur der mittlere *B* mit frischem Dampf gespeist wird, während in den beiden anderen Cylindern *A* und *C* der Dampf nur durch Expansion wirkt. Die drei Kolbenstangen *D*, *E*, *F* dieser Maschinen sind mittels der Kurbelstangen *G*, *H* und *EO* an die dreifach gekröpfte Kurbelwelle *KL* angeschlossen, deren äußere Warzen *M* und *N* auf den Quadranten gegen einander gestellt sind, während die mittlere Warze *O* um den Winkel von $\pm$ 135 Grad von den ersteren abweicht.

Fig. 725 stellt endlich eine Dampfmaschine mit zwei schiefliegenden Cy-

lindern dar. Der Anschluß der Kolbenstangen DE, $D_1 E_1$ an die Kurbeln MK, MK_1 ist genau derselbe wie bei der Maschine in Fig. 719. Der Winkel KMK_1 zwischen den beiden Kurbelarmen ist gleich dem Winkel DMD_1 zwischen beiden Kolbenstangen minus 90 Grad. Liegen, wie bei den Dampfwagen, die Cylinder auf derselben Seite, so ist $DMD = 0$ Grad, und daher der Winkel zwischen beiden Kurbelwarzen 90 Grad.

Fig. 724.

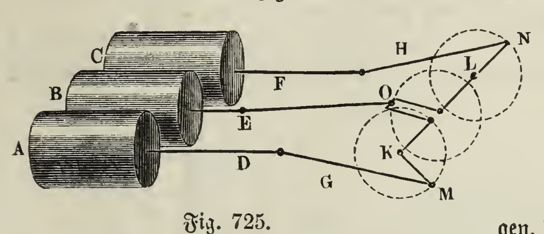
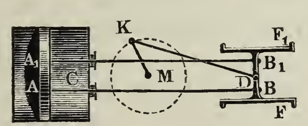


Fig. 725.

Eine liegende Schiffsdampfmaschine mit zwei langen Kolbenstangen AB, $A_1 B_1$ stellt Fig. 726 dar. Wegen Raumersparniß findet hier die Kurbelwelle M sammt Kurbelstange KD im Raume zwischen dem Cylinder C und der Führung FF_1 Platz.

Fig. 726.



Excentriks. Die innere Steuerung, bestehend in den sogenannten Distributoren, muß durch die Maschine selbst in Bewegung gesetzt werden; es ist daher nöthig, daß dieselbe mit der Kolbenstange oder mit einem anderen von der Dampfmaschine bewegten Maschinentheile, z. B. mit dem Balancier oder mit der Schwungradwelle, verbunden werde. Die Vorrichtungen, welche diese Verbindung hervorbringen, bilden die sogenannte äußere Steuerung, und diese besteht im Wesentlichen entweder §. 454

1) aus stetig umlaufenden excentrischen Scheiben (franz. excentriques; engl. eccentrics); oder

2) aus oscillirenden Hebeln (franz. encliquetages; engl. levers),

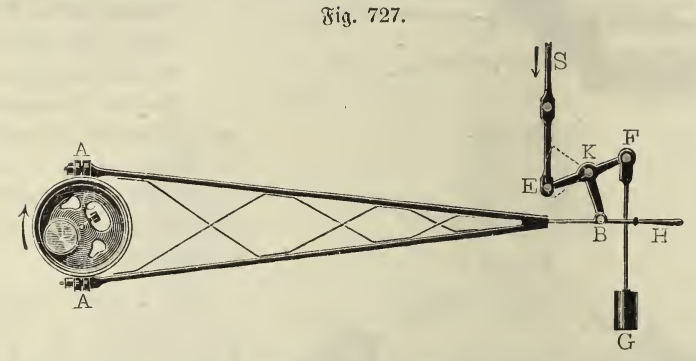
und man wendet jene nur bei doppeltwirkenden, diese hingegen vorzüglich bei einfachwirkenden Dampfmaschinen an, weil diese Maschinen keine stetige Kreisbewegung haben.

Das Excentrik oder die excentrische Scheibe kommt in sehr verschie-

denen Formen vor, namentlich hat man **kreisförmige**, **trianguläre** und dann noch vielerlei **zahnförmige Excentriks**. Das **Kreisexcentrik** ist aber von allen äußeren Steuerungsapparaten der einfachste und der gewöhnlichste; von ihm möge daher auch zunächst nur die Rede sein.

Das Kreisexcentrik besteht in einer gußeisernen cylindrischen Scheibe ACA, Fig. 727, welche sich um eine Axe D dreht, die von ihrer geometrischen Axe

Fig. 727.

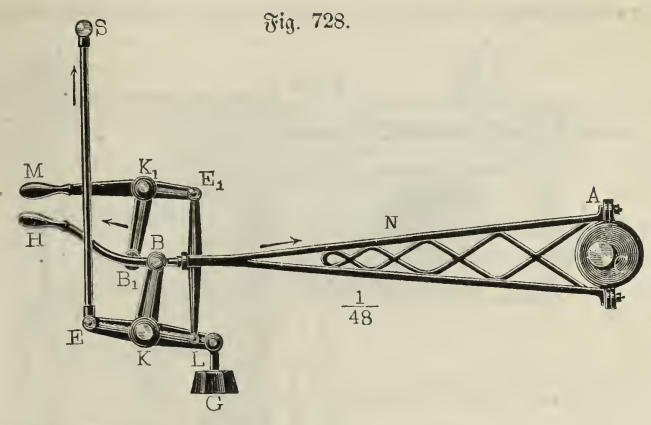


C abweicht, und wird von einem Bande aus Messing oder Schmiedeeisen umgeben, welches an das Ende einer langen, aus Eisenstäben zusammengesetzten Stange, der sogenannten **Excentrikstange** ABA, festgeschraubt ist. Das andere Ende dieser übrigens noch mit einer Handhabe H ausgerüsteten Stange ergreift den einen Arm KB eines Winkelhebels, an dessen anderem Arme KE die Schieberstange ES angeschlossen ist; um das Gewicht der letzteren auszugleichen, ist endlich noch an einem dritten Arme KF ein Gegengewicht G angehängt. Die Wirkung dieses Apparates ist leicht erklärlich; der Mittelpunkt C des Excentriks beschreibt bei jeder Umdrehung der Schwungradwelle, worauf das Excentrik gewöhnlich sitzt, einen Kreis, und schiebt dabei auch das Halsband um den der Excentricität CD gleichen Halbmesser dieses Kreises nach allen Richtungen auswärts, und folglich auch die Lenkstange in ihrer Axenrichtung um $2 . \overline{CD}$ hin und zurück. An dieser Bewegung nimmt natürlich auch das Ende B der Lenkstange Theil, und es wird dieselbe auch durch den Winkelhebel BKE auf die Schieberstange ES übertragen.

Bei manchen Maschinen, namentlich aber bei denjenigen, welche zur Förderung in Schächten dienen, ist es nöthig, dieselben zu jeder Zeit umsteuern, d. i. in der entgegengesetzten Richtung umgehen lassen zu können. Dies wird nun erreicht, wenn man der Steuerung die entgegengesetzte Stellung giebt, weil dann auch die entgegengesetzte Seite des Treibkolbens mit der Dampfkammer in Communication tritt. Fig. 728 führt nur eins von den älteren Hülfsmitteln, welche man zur Erreichung dieses Zweckes ange-

wendet hat, vor Augen. Es ist hier außer dem Winkelhebel EKB noch ein zweiter um die Axe K_1 drehbarer Hebel $E_1 K_1 B_1$ angebracht und durch

Fig. 728.



die Stange $E_1 L$ mit dem ersten verbunden. Um umzusteuern, hat man nur nöthig, beim mittleren Stande des Dampfkolbens, die Excentrikstange mit ihrem Auge von dem Bolzen B des ersten Hebels abzuheben und mittels der Handhabe M den oberen Hebel so zu bewegen, daß nun das Auge über dem Bolzen B_1 dieses Hebels zu liegen kommt. Dadurch wird auch der Dampf auf die entgegengesetzte Seite des Kolbens geleitet und daher auch das entgegengesetzte Kolben- und Steuerungsspiel bewirkt. Noch einfacher wird dieses Umsteuern durch Anwendung der Stephenson'schen Coulisse erreicht, deren Einrichtung und Wirkung weiter unten behandelt wird.

Watt'sche Dampfmaschine. Die Anwendung einer vereinigten Excentrik- und Schiebersteuerung führt Fig. 729 (a. f. S.) in einer Abbildung einer Niederdruck-Dampfmaschine von Watt vor Augen; auch giebt dieselbe ein deutliches Bild von einer vollständigen Maschine und ihren wesentlichen Theilen. Es ist hier A der Dampf- oder Treibcylinder, B der Dampf- oder Treibkolben in demselben, und C die Dampfkammer, in welcher der durch das Dampfrohr a zugeleitete Dampf durch einen Röhrenschieber bb so vertheilt wird, daß er bald durch den Weg c_1 unter, bald durch den Weg c über den Kolben B treten und denselben auf- oder niedertreiben kann. Ferner ist D der Condensator und E die Luftpumpe; in jenem wird der durch das Rohr d aus dem Cylinder tretende Dampf nach vollbrachter Arbeit condensirt, und durch diese wird die Luft und das Wasser in ein Reservoir F gebracht, aus dem erstere durch Oeffnungen im Deckel entweicht, letzteres aber größtentheils durch eine Seitenröhre abfließt. Ein kleiner Theil dieses Condensationswassers fließt aber auf dem Wege nn in die Speisepumpe m, und §. 455

wird von da durch das Rohr $o\,o_1\,p$ in den Dampfkessel gedrückt. Hinter der Speisepumpe befindet sich die nur von außen sichtbare Kaltwasserpumpe q, welche ununterbrochen kaltes Wasser durch das Rohr $q\,r$ in das Reservoir schafft,

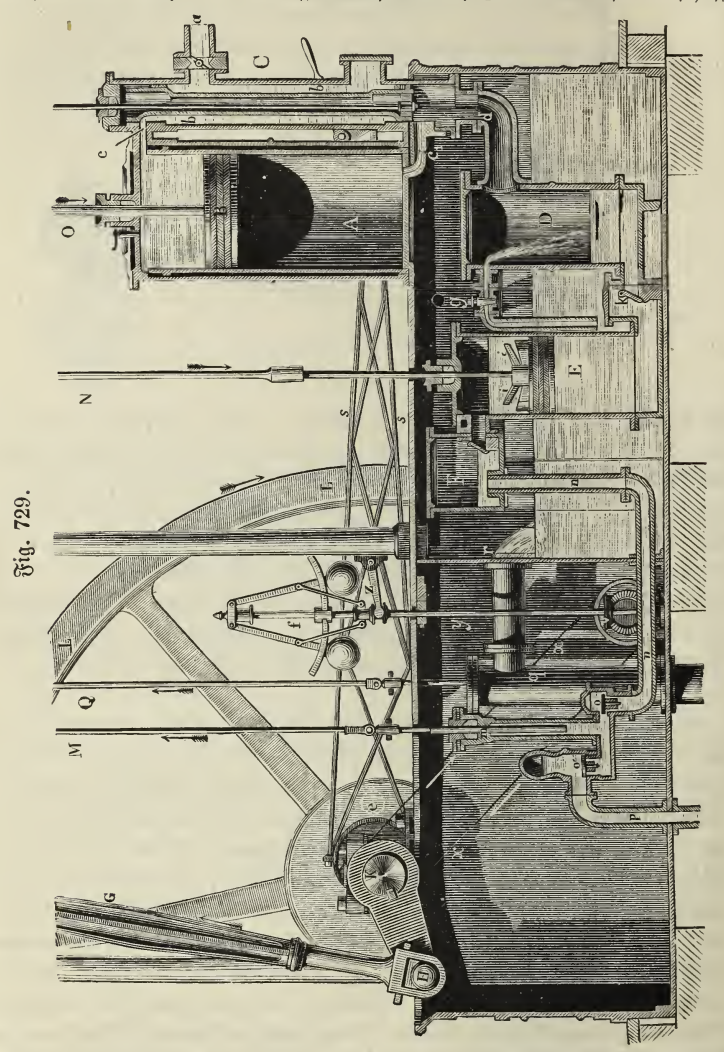


Fig. 729.

das D und E umgiebt. Noch sieht man in O die Treibkolbenstange und in N die Kolbenstange der Luftpumpe sowie in M und Q die der Speise- und Kaltwasserpumpen, alle vier, und zwar erstere durch ein sogenanntes Watt'sches Parallelogramm, an einen (in der Abbildung nicht sichtbaren)

Balancier angeschlossen. Die schwingende Bewegung, welche der Treibkolben dem Balancier ertheilt, wird durch die Kurbelstange G auf einen Krummzapfen HK übertragen und geht hier mit Unterstützung eines Schwungrades LL in eine stetige Kreisbewegung über. Auf der Welle dieses Rades sitzt noch das Kreisexcentrik e, welches mittels seiner Lenkstange ss und eines (in der Abbildung nicht sichtbaren) Winkelhebels die Steuerschieberstange auf- und niederzieht. Die nähere Einrichtung des Steuerapparates u. s. w. ist aus den Figuren 701 und 727 zu ersehen und aus dem Früheren schon bekannt.

Der Apparat f ist der sogenannte Centrifugalregulator, der mittels einer Schnur xx ohne Ende und mittels des Räderwerkes v und der Welle y durch die Schwungradwelle in Umdrehung gesetzt wird und durch seine Stangen sowie durch den Hebel z mit dem Drosselventile im Dampfrohre so in Verbindung gesetzt ist, daß bei Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit, durch Auseinandergehen oder Zusammenfallen zweier Metallkugeln, dieses Ventil mehr geschlossen oder mehr geöffnet und dadurch der Dampfzutritt erschwert oder erleichtert, also auch eine größere Veränderung in der Geschwindigkeit verhindert wird.

Die ausführliche Beschreibung und Theorie dieses Apparates sowie die des Watt'schen Parallelogrammes u. s. w. muß einem besonderen Abschnitte im dritten Bande aufbewahrt bleiben.

Voreilen des Schiebers. Die Wege (franz. lumières; engl. ports), §. 456
welche den Dampf aus der Dampfkammer in den Cylinder führen, müssen einen gewissen Querschnitt haben, damit sie nicht zu großen Widerständen Veranlassung geben. Am besten ist es, man macht die Querschnitte dieser Canäle so groß wie den Querschnitt des Dampfrohres, nämlich $^1/_{25}$ von der Kolbenfläche; zuweilen, namentlich bei Hochdruckmaschinen, macht man sie auch noch größer, nämlich $^1/_{20}$ bis $^1/_{15}$ der Kolbenfläche. Um zur Bewegung des Schiebers möglichst wenig Arbeit aufwenden zu müssen, ist es nöthig, die Mündung der Dampfwege mehr breit als hoch zu machen, weil dann der Weg des Schiebers kleiner ausfällt (vergl. Bd. II, §. 327). Gewöhnlich macht man das Verhältniß zwischen Breite und Höhe dieser Mündungen $= 4 : 1$ oder $5 : 1$.

Uebrigens bringt aber der Schieber noch besondere Verengungen hervor, zumal, wenn er durch ein gewöhnliches Kreisexcentrik bewegt wird, weil er die Mündungen der Dampfwege nicht plötzlich, sondern allmälig eröffnet und verschließt. Damit der Dampf möglichst gleichmäßig und die Maschine möglichst vortheilhaft wirke, ist es nöthig, daß der Schieber den Dampfweg schon zu eröffnen anfange, wenn der Treibkolben noch nicht ganz seinen letzten Weg zurückgelegt hat, weil dann beim Anfange des entgegengesetzten Kolbenweges der neu einströmende Dampf mit aller Stärke wirken kann.

Aus dem entgegengesetzten Grunde ist es ebenso auch vortheilhaft, daß der Schieber schon vor dem Ende des Treibkolbenweges den Dampfzutritt aufhebe und den Dampfabführungsweg eröffne. Man bringt dieses zeitigere Eröffnen der Dampfwege durch gewisse Verhältnisse zwischen den Dimensionen des Schiebers und denen der Dampfwege, sowie durch eine gewisse Stellung des Excentriks zum Krummzapfen hervor, und nennt es das Voreilen (franz. avance; engl. the lead) des Schiebers. Nach den gemachten Erfahrungen ist besonders das zeitigere Eröffnen des Abzugsweges von Vortheil, und man findet bei den bestehenden besseren Maschinen, daß das Voreilen des Schiebers auf der Seite des Abflusses $^1/_{25}$ bis $^1/_{15}$ ist, d. h. daß der Schieber beim tiefsten oder höchsten Kolbenstande eine Abflußöffnung herstellt, deren Höhe $^1/_{25}$ bis $^1/_{15}$ von dem ganzen Wege des Schiebers ist. Das Voreilen des Dampfschiebers auf der Seite des Zutrittes ist dagegen viel kleiner und beträgt oft nur $^1/_{100}$ des ganzen Schieberweges.

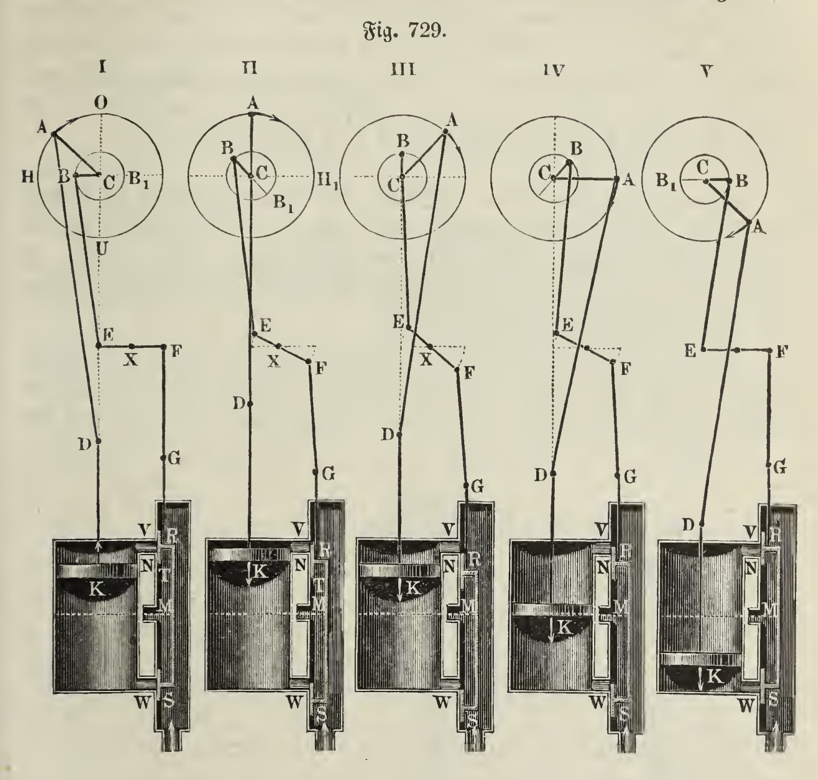
§. 457 **Schieberstellungen.** Die Art und Weise, wie der Dampfschieber durch seine verschiedenen Stellungen die Dampfwege eröffnet und verschließt, wird durch Fig. 729 (I, II, III, IV, V) veranschaulicht. Es sind hier V, W und M die drei Dampfwege; V führt über und W unter den Kolben, hingegen M in die freie Luft. Der Dampf umgiebt vor seinem Eintritte in den Cylinder den Schieber von außen und tritt durch V oder W in den Cylinder, je nachdem der Schieber herab- oder heraufgelassen ist. Diese Einrichtung findet in der Regel bei den Hochdruckmaschinen Statt, wogegen bei den Watt'schen oder Tiefdruckmaschinen der Dampf durch M zugeführt wird und erst nach seiner Wirkung den Schieber von außen umgiebt. Ziehen wir hier jedoch nur die erste Art der Dampfvertheilung in Betracht.

Die mittlere Schieberstellung ist unter I und V dargestellt, bei ihr findet weder ein Dampfzutritt noch ein Dampfabfluß aus dem Cylinder Statt. Rückt der Schieber herab, so daß er in die Stellung II kommt, so werden die Zu- und Abführungswege eben erst eröffnet, und gelangt er in die tiefste Stellung III, so sind beide Wege vollkommen aufgeschlossen; steigt der Schieber wieder bis IV, so tritt der Abschluß beider Wege ein, und kommt er in die Stellung V, so findet wieder wie in I vollkommene Absperrung Statt. Beim weiteren (in der Abbildung nicht dargestellten) Steigen des Schiebers wird anfangs der untere Weg des Dampfes aufgeschlossen, und die Abführung des Dampfes über den Kolben ermöglicht; später, bei der höchsten Schieberstellung, sind die Canäle zum Zu- und Abführen des Dampfes am meisten aufgeschlossen; beim hierauf erfolgenden Niedergehen des Schiebers tritt wieder das Absperren dieser Wege ein, und zuletzt gelangt der Schieber wieder in die Stellung V, wobei ein zweites Spiel desselben beginnt.

Soll nun ein Voreilen des Schiebers stattfinden, sollen also die Dampf-

wege beim höchsten und tiefsten Kolbenstande etwas eröffnet sein, so muß das Excentrik bei diesen Kolbenständen den Schieber in die Stellungen II

Fig. 729.

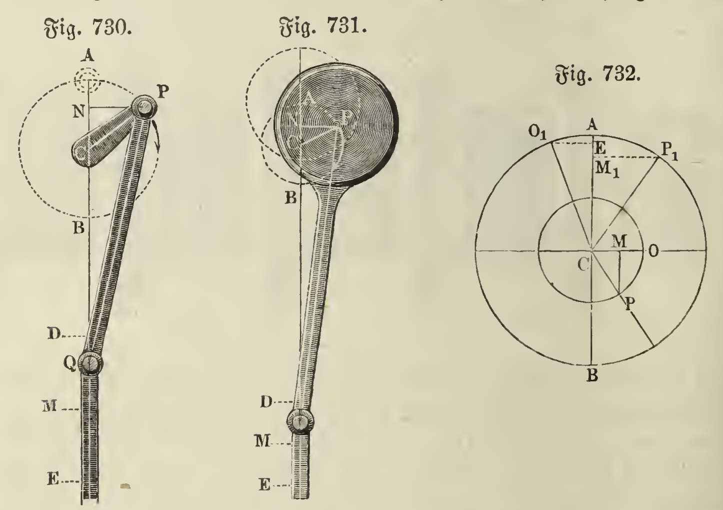


und VI (nicht dargestellt) bringen; und daher die mittlere Schieberstellung schon etwas vor dem höchsten und tiefsten Kolbenstande eintreten. Es wird dann aber auch der tiefsten und höchsten Schieberstellung noch keineswegs der mittlere Kolbenstand entsprechen, und endlich der Dampf eine Zeit lang auf beiden Seiten des Kolbens abgesperrt werden, ehe dieser das Ende seines Weges erreicht hat. Bei diesem Absperren wird der Dampf auf der einen Seite des Kolbens sich ausdehnen und auf der anderen sich comprimiren müssen, wodurch allerdings Kraftverlust, zugleich aber auch eine Dampfersparniß erwächst. Es ist nun auch leicht zu erachten, wie durch Veränderung der Breite RT der Schieberflächen, insbesondere der sogenannten Deckung derselben (franz. recouvrement; engl. lap, cover), die Zeit zum Zulassen, Absperren und Ablassen des Dampfes verändert werden kann. Vermindert man die äußere Deckung, oder die Breite der Schieberfläche

RT durch Wegnahme bei R, von außen, so tritt bei unverändertem Schieberwege eine längere Zulassung des Dampfes durch V oder W ein; vermindert man die **innere Deckung** oder Breite der Schieberfläche durch Wegnahme bei T, von innen, so erfolgt dagegen ein zeitigeres und länger anhaltendes Ablassen des Dampfes durch M. Giebt man dagegen der Schieberfläche und dadurch auch der Deckung eine größere Breite, so findet das Gegentheil in Hinsicht auf das Zulassen, Absperren u. s. w. des Dampfes Statt.

§. 458 **Bewegungsgesetz der Kurbel.** Um nun noch zeigen zu können, wie durch richtige Stellung des Excentriks gegen den Krummzapfen die soeben näher betrachteten Schieberstellungen hervorgebracht werden können, ist es nöthig, vorher die Bewegungsverhältnisse dieser Maschinentheile wenigstens im Allgemeinen kennen zu lernen.

Denken wir uns die Warze P der Kurbel als einen Punkt, und nehmen wir an, daß sich derselbe mit dem Halbmesser $\overline{CA} = \overline{CB} = r$ um die Axe C, Fig. 730, drehe. Kommt die Warze A durch Drehung um den



Winkel $ACP = \beta$ vom höchsten oder sogenannten **todten Punkte** A nach P, so gelangt die Lenkstange $AD = l$ in die Lage PQ, und es ist nun der gleichzeitige Weg des Stangenendes in der Richtung der Centrallinie CD:

$$\overline{DQ} = \overline{AN} + \overline{NQ} - \overline{AD},$$

d. i.:

$$s = r - r\cos.\beta + \sqrt{l^2 - r^2 (\sin.\beta)^2} - l$$

$$= r(1 - \cos.\beta) - l\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r\sin.\beta}{l}\right)^2}\right],$$

oder, da die Stangenlänge l fünf- oder noch mehrmals größer als der Halbmesser r des Warzenkreises ist, annähernd

$$s = r\,(1 - cos.\,\beta) - \frac{r^2\,(sin.\,\beta)^2}{2\,l},$$

wofür wir aber selbst nur den Werth

$$s = r\,(1 - cos.\,\beta)$$

annehmen wollen. Den durch den letzteren Ausdruck angegebenen Weg würde das Stangenende D allerdings nur dann beschreiben, wenn die Stange unendlich lang wäre.

In Wirklichkeit hat die Warze eine Cylinderform; dadurch wird aber in dem Bewegungsverhältnisse nichts geändert, denn der Mittelpunkt des Auges von dem Stangenkopfe fällt stets mit der Warzenaxe zusammen, es hat also dieser Punkt dieselbe Bewegung, als wenn er unmittelbar an die Axe P angeschlossen wäre. Dieses Verhältniß ändert sich nicht, wenn auch die Warze noch so dick ist, selbst wenn sie, wie Fig. 731 zeigt, einen größeren Halbmesser hat als der Warzenkreis. Da in diesem Falle die Kurbel in ein Kreisexcentrik übergeht, so folgt, daß sich die Formel

$$s = r\,(1 - cos.\,\beta)$$

auch auf das Kreisexcentrik anwenden läßt, wenn dessen Stangenlänge $\overline{DA}$ die Excentricität $r = \overline{CA}$ vielfach übertrifft.

Schiebercurve. Bei der mittleren Stellung des Dampfschiebers muß, §. 459
um dem Obigen zu entsprechen, das Excentrikmittel auch in der Mitte O, Fig. 732, die Warzenaxe O_1 hingegen noch um einen gewissen Winkel $O_1\,CA = \alpha$ vor dem todten Punkte A stehen, weil bei dieser Schieberstellung der Dampfkolben sein Spiel noch nicht ganz vollendet haben soll. Dreht sich dann die Welle, auf welcher das Excentrik und die Kurbel zugleich sitzen, um einen Winkel $O\,CP = O_1\,CP_1 = \beta$, so schiebt das Excentrik den Schieber um einen Weg

$$\overline{MP} = y = r\,sin.\,\beta$$

fort, während der Dampfkolben erst noch den Rest

$$\overline{EA} = r_1\,(1 - cos.\,\alpha)$$

seines Aufganges $2\,r_1$ und dann noch den Weg

$$\overline{AM_1} = r_1\,[1 - cos.\,(\beta - \alpha)]$$

niedergehend zurücklegt, so daß er von seinem mittleren Stande um

$$\overline{CM_1} = x = r_1\,cos.\,(\beta - \alpha)$$

absteht. Führt man in die Formeln

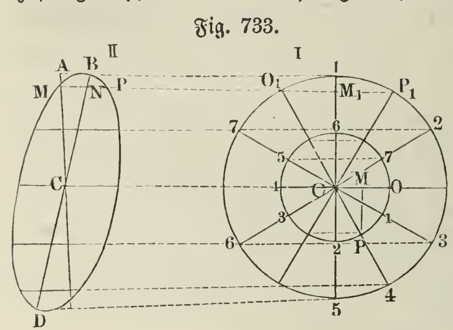
$$x = r_1\,cos.\,(\beta - \alpha)$$

und

$$y = r\,sin.\,\beta$$

für β alle Werthe von 0^0 bis 360^0 ein, so bekommt man dadurch alle möglichen Stellungen des Dampfschiebers gegen den Dampfkolben, und um dieselben zu veranschaulichen, kann man noch die Wege x und y als Coordinaten an einander antragen, und die entsprechende Curve, das sogenannte Schieberdiagramm, aufzeichnen. Die Art und Weise, wie diese Curve anzufertigen ist, wird nun durch Fig. 733, I und II vor Augen geführt. In I stellt der größere Kreis den Kurbelkreis, der kleinere den Excentrikkreis vor, und II führt die aus x und y construirte Curve vor Augen. Gleiche Zahlen an beiden Kreisen bezeichnen entsprechende Stellungen der Kurbel und des Excentriks; steht dieses auf O, 1, 2 u. s. w., so hat jene auch die Stellung O_1, 1, 2 u. s. w.; ist das Excentrik von O bis P gerückt und hat es den Schieber um

Fig. 733.



$$\overline{MP} = y = r\,sin.\beta$$

aus der Mitte geschoben, so ist der Krummzapfen ebenfalls von O_1 nach P_1 gegangen, und es steht der Kolben um

$$\overline{CM_1} = x = r_1\,cos.(\beta - \alpha)$$

von seinem mittleren Stande ab. Tragen wir nun in II, $CM = x$ als Abscisse und $\overline{MP} = y$ als Ordinate auf, so bekommen wir in P einen Punkt der gesuchten Curve. Setzen wir $\beta = \alpha$, so erhalten wir die Coordinaten $\overline{CA} = r_1$ und $\overline{AB} = r\,sin.\alpha$ für den Punkt B, durch den sich eine Axe BD der Curve führen läßt; und nimmt man die Abscissen auf dieser Axe an, so bekommt man eine sehr einfache Gleichung für diese Curve. Es ist für den Winkel $B\,C\,A = \delta$, um welchen die neue Abscissenaxe von der alten abweicht,

$$tang.\delta = \frac{AB}{CA} = \frac{r}{r_1}\,sin.\alpha,$$

daher die neue Abscisse:

$$\overline{CN} = x_1 = \frac{CM}{cos.\delta} = \frac{x}{cos.\delta} = \frac{r_1\,cos.(\beta - \alpha)}{cos.\delta},$$

und die neue Coordinate:

$$\overline{NP} = \overline{MP} - \overline{MN},$$

d. i.:

$$y_1 = y - x\,tang.\delta = r\,sin.\beta - r\,cos.(\beta - \alpha)\,sin.\alpha$$
$$= r\,[sin.(\beta - \alpha + \alpha) - cos.(\beta - \alpha)\,sin.\alpha] = r\,sin.(\beta - \alpha)\,cos.\alpha;$$

da nun

$$[sin.(\beta - \alpha)]^2 + [cos.(\beta - \alpha)]^2 = 1 \text{ ist,}$$

so folgt hier:

$$\left(\frac{y_1}{r\, cos.\, \alpha}\right)^2 + \left(\frac{x_1\, cos.\, \delta}{r_1}\right)^2 = 1.$$

Setzt man $\frac{r_1}{cos.\, \delta} = a$ und $r\, cos.\, \alpha = b$, so erhält man schließlich die bekannte Gleichung der Ellipse:

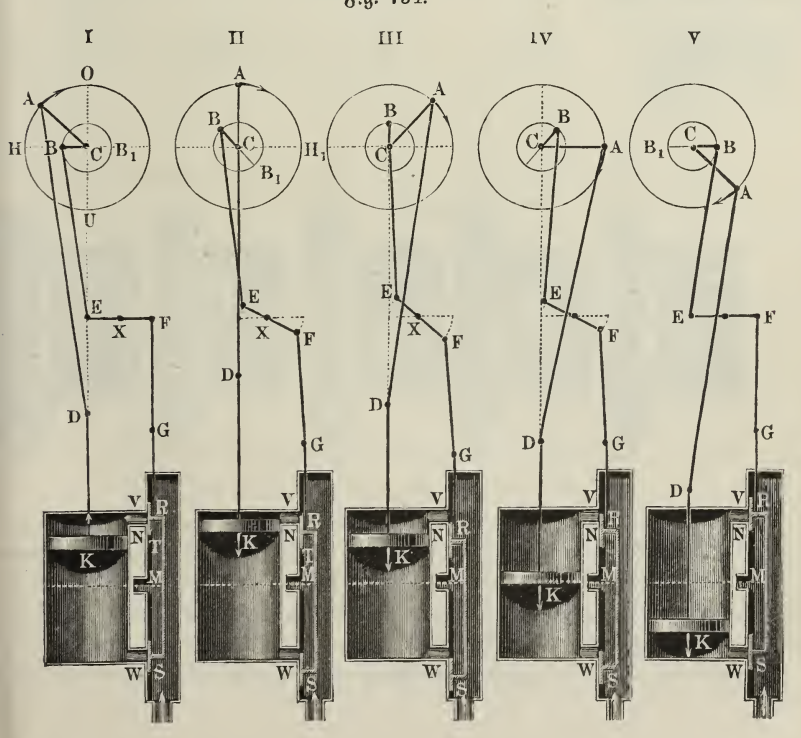
$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1;$$

es ist also auch die behandelte Curve eine Ellipse und es sind die Halbaxen derselben:

$$a = \frac{r_1}{cos.\, \delta} \text{ und } b = r\, cos.\, \alpha.$$

Excentriksteuerung. Die Art und Weise, wie der Dampfschieber mittels eines Excentriks bewegt und die Dampfmaschine gesteuert wird, ist aus der Betrachtung der Abbildung in Fig. 734 I, II, III, IV, V zu ersehen. §. 460

Fig. 734.



Der Dampfkolben K setzt hier mittels der Kolbenstange KD und der Kurbelstange DA den Krummzapfen CA in Umdrehung. Auf der Welle C des letzteren sitzt zugleich das Excentrik für die Steuerung fest, dessen Mittelpunkt B sich wie die Warze eines zweiten Krummzapfens gemeinschaftlich mit der Welle C umdreht und hierbei einen Kreis vom Halbmesser CB durchläuft. Der Schieber RS, dessen Bewegungen oben (§. 457) betrachtet worden sind, ist durch eine gegliederte Stange FGR mit einem gleicharmigen Hebel EF in Verbindung gesetzt, und letzterer wieder mittels einer Stange BE an den Kraft- oder Mittelpunkt B des Excentriks angeschlossen;

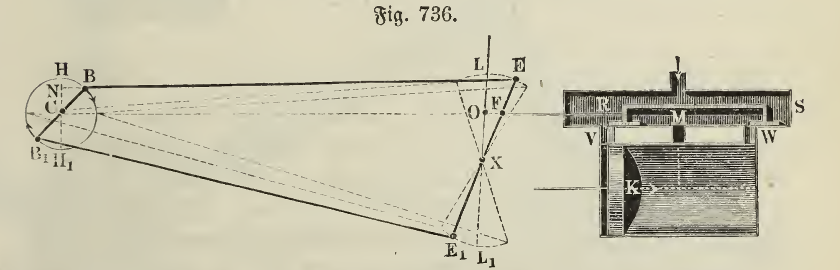
Fig. 735.

in Folge dessen macht daher der Schieber dieselben Bewegungen in entgegengesetzter Richtung, als wenn er unmittelbar in E an die Excentrikstange angeschlossen wäre, und folglich auch genau dieselben Bewegungen in derselben Richtung, wenn letzterer mit einem Excentrik in Verbindung stände, dessen Warze B_1 der Warze B des ersteren genau gegenübersteht. Wäre nun der Centriwinkel ACB_1 zwischen der Warzenmitte des Krummzapfens und der

Mitte B_1 des Excentriks, = 90 Grad, so würde der Schieber RS in der Mitte stehen, sowie der Kolben K am Ende seines Weges ankommt, und dagegen der erstere das eine oder andere Ende seines Weges erreichen, wenn der letztere den halben Hub zurückgelegt hat. Damit aber der Dampfweg bereits ein wenig eröffnet ist, wenn der Dampfkolben seinen Rückweg antritt (s. II, Fig. 735), so muß der Winkel ACB_1 um eine gewisse Größe $ACO = H_1 CB_1 = \alpha$ größer als 90 Grad sein.

Doppelexcentriks mit Steuerrahmen. Um den Schieberweg §. 461 zu verändern und dadurch eine größere oder kleinere Zeit des Dampfzulassens und Dampfabsperrens zu erhalten, hat man nur nöthig, den Drehungspunkt X des Hebels EF zu verändern, und folglich diesen Hebel selbst in einen ungleicharmigen zu verwandeln. Noch leichter erreicht man aber diesen Zweck durch Anwendung eines Doppelexcentriks, wie Fig. 736 darstellt. Die Mittelpunkte B und B_1 zweier um C laufenden Excentriks stehen hier einander genau gegenüber, und beide sind durch Stangen BE und $B_1 E_1$ an einen gleicharmigen Hebel EE_1 angeschlossen, dessen Drehungspunkt X beliebig gehoben oder gesenkt werden kann. Dieser Hebel ergreift den Kopf F der Schieberstange FR, ohne jedoch mit demselben fest verbunden zu sein; es wird daher der Schieber nur in der Richtung seiner Stange FR von diesem Hebel hin- und hergeschoben. Ist die Stangenlänge $BE = B_1 E_1$ sehr groß gegen die Armlängen CB und XE, so kann man annehmen, daß die Angriffspunkte E und E_1 in der Richtung CF dieselben Wege machen wie die Excentrikmittel B und B_1; da nun aber der Weg von E_1 entgegengesetzt ist dem Wege von E, so folgt, daß bei Durchlaufung dieser Wege der Mittelpunkt X des Hebels EE_1 seinen Ort behält, und daß der Weg eines anderen Punktes F in demselben Verhältnisse kleiner als der Weg von E ausfällt, als seine Entfernung XF von der Mitte X kleiner ist als die Entfernung $\overline{XE}$ des Angriffspunktes von eben dieser Mitte. Ist folglich s der Weg $\overline{NB} = \overline{LE}$, welchen der Schieber zurücklegen würde, wenn er unmittelbar an das Excentrik B angeschlossen wäre, so fällt dagegen derselbe hier nur

Fig. 736.



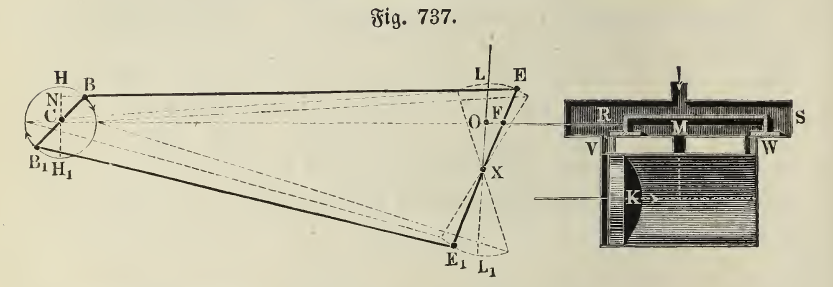
$$\overline{OF} = \frac{XF}{XE} \cdot \overline{LE},$$

d. i.

$$s_1 = \frac{y}{c} s$$

aus, wenn der Angriffspunkt F der Schieberstange von der Hebelmitte X um $\overline{XF} = y$ absteht, während die Armlänge $\overline{XE} = \overline{XL} = c$ ist.

Fig. 737.



Da sich durch Heben und Senken des Hebelcentrums X die Armlänge $\overline{XF} = y$ zwischen c und $-c$ beliebig abändern läßt, so kann man auch den Schieberweg zwischen s und $-s$ beliebig abändern. Hebt man das Centrum X in das Niveau der Schieberstange, so bleibt dieselbe in Ruhe, bringt man aber dasselbe über dieses Niveau, so nimmt diese Stange eine entgegengesetzte Bewegung an, stellt man endlich das eine oder das andere Ende E oder E_1 des Hebels in dieses Niveau, so geht der Schub des einen oder anderen Excentriks unmittelbar auf den Schieber über. Hiernach ist nun auch leicht zu ermessen, wie durch diesen Steuerungsmechanismus leicht ein Umsteuern und ein Stillstand der Dampfmaschine hervorgebracht werden kann (vergl. §. 454). Dieser Steuerungsmechanismus ist unter dem Namen die Stephenson'sche Coulissensteuerung (franz. coulisse de Stephenson; engl. Stephenson's link-motion) bekannt. Die ausführliche Theorie derselben wird im dritten Theile dieses Werkes abgehandelt (s. auch die Schrift des Herrn Professors Zeuner über die Schiebersteuerungen, Freiberg 1862, 2te Aufl., ferner die Schiebersteuerungen bei Dampfmaschinen von T. Hentschel, Leipzig 1859).

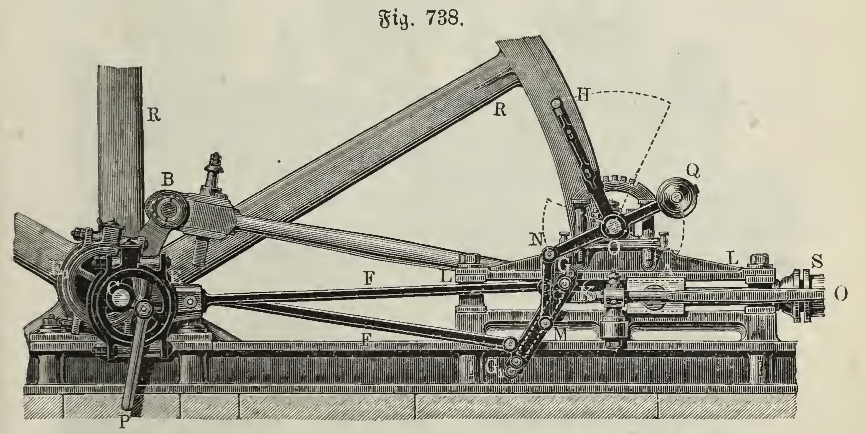
§. 462 **Ventilsteuerung mit Excentriks.** Die Ventile lassen sich zwar auch durch Excentriks in Bewegung setzen, jedoch eignen sich hierzu Hebelwerke besser, weil dieselben ein schnelleres Oeffnen und Verschließen bewirken. Bei den einfachwirkenden Maschinen und überhaupt bei den Dampfmaschinen, an welchen gar keine Rotation vorkommt, läßt sich natürlich nur diese Steuerungsart in Anwendung bringen.

Eine Ventilsteuerung mit Excentriks ist bereits oben §. 448 beschrieben und in Fig. 705 abgebildet worden. Es werden hier die Ventilstangen FG und $F_1 G_1$ durch zwei Excentriks H und H_1 auf- und niederbewegt, und es sitzen die letzteren auf einer horizontalen Welle auf, welche mittels eines Zahnrades durch die Dampfmaschine selbst in Umdrehung gesetzt wird.

Die im Folgenden beschriebene und in den Figuren 738 und 739 abgebildete horizontale Dampffördermaschine von Révollier (s. Armengaud, Publication Industr. 11 Vol., sowie „Civilingenieur“, Bd. 4) hat eine vollkommnere Ventilsteuerung mit Excentrikbewegung.

Fig. 738 giebt nur die Seitenansicht von dem äußeren Steuermechanismus nebst denjenigen Maschinentheilen, wodurch die geradlinig hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange in eine kreisförmige verwandelt wird.

Fig. 738.

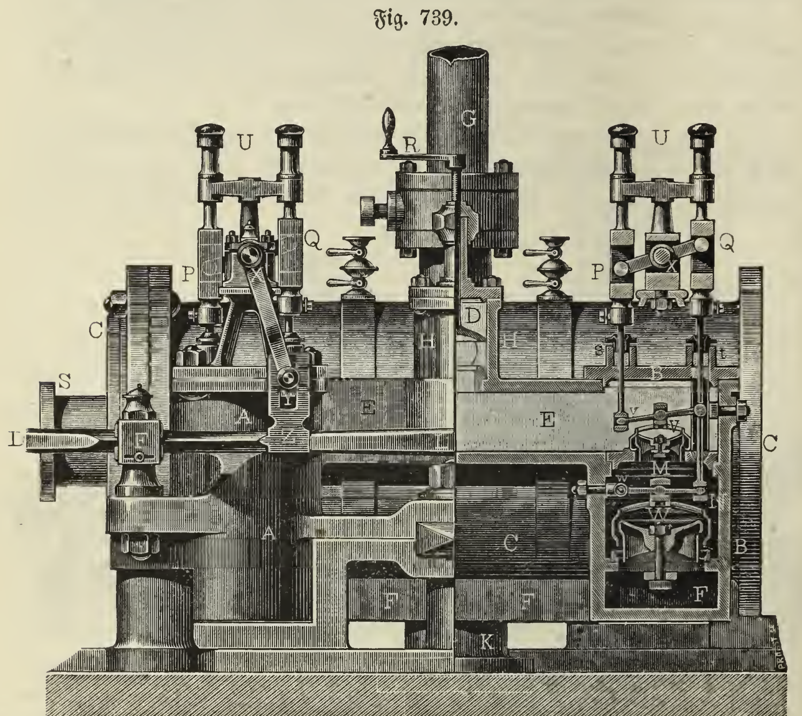


Es ist A der in der Leitung LL gleitende Kopf der Kolbenstange, welche letztere mittels der Stopfbüchse S aus dem hier nicht abgebildeten Dampfcylinder geführt wird; ferner ist AB die Kurbelstange und BC die Kurbel, wodurch die Umsetzung der geradlinigen Bewegung des Stangenkopfes A in die rotirende Bewegung der Welle C des Schwungrades RR erfolgt. Auf dieser Welle sitzen zwei Excentriks E und E_1, wovon an dem ersteren noch die Kurbelstange P für die Speisepumpe angebracht ist, und beide erfassen mittels ihrer Stangen F und F_1 die Stephenson'sche Coulisse GG_1, in welche der Kopf der Stange KO eingreift, wodurch die Steuerventile bewegt werden. Die Coulisse ist in der Mitte M an einem um O drehbaren Hebel NQ aufgehangen, welcher mittels des Gewichtes Q äquilibrirt wird. Mit Hülfe des Armes OH, welcher mit dem Hebel NQ ein Ganzes bildet, kann man die Coulisse heben und senken, und überhaupt so stellen, daß sie

den Stangenkopf K in jeder beliebigen Stelle zwischen den Aufhängepunkten G und G_1 ergreift.

Die Abbildung in Fig. 739 zeigt den eigentlichen Steuerungsapparat halb in einer Seitenansicht und halb im Längendurchschnitte. Es ist CCC der in der Abbildung größtentheils durch den Steuerungsapparat bedeckte Dampfcylinder mit der auch in der vorigen Figur sichtbaren Stopfbüchse S,

Fig. 739.



sowie OL die in der Leitung F gehende Schubstange KOL, deren in der Coulisse sitzende Kopf K die vorige Figur vor Augen führt. Der Dampfcylinder CCC bildet mit den beiden cylindrischen Ventilkästen AA und BB und den beiden Dampfcanälen EE und FF ein Ganzes, und es steht der eine dieser Canäle durch den Aufsatz H mit dem Dampfrohre G, sowie der andere durch den cylindrischen Canal K mit dem Ausblaserohre in Verbindung. Der Dampfzutritt wird mittels der Kurbel R durch das Ventil D regulirt, und füllt nicht allein den ganzen Canal EE, sondern auch die oberen Räume der Ventilkammern AA und BB aus. In jeder dieser Kammern sitzen zwei Ventile, ein kleineres oder Admissionsventil V und ein größeres oder Emissionsventil W. Bei Eröffnung des ersteren tritt der

Dampf in die mittlere Abtheilung M der Ventilkammer und von da in den nach dem Cylinder führenden Dampfweg N; bei Eröffnung des letzteren strömt er dagegen aus N nach M und von da durch W nach F und K.

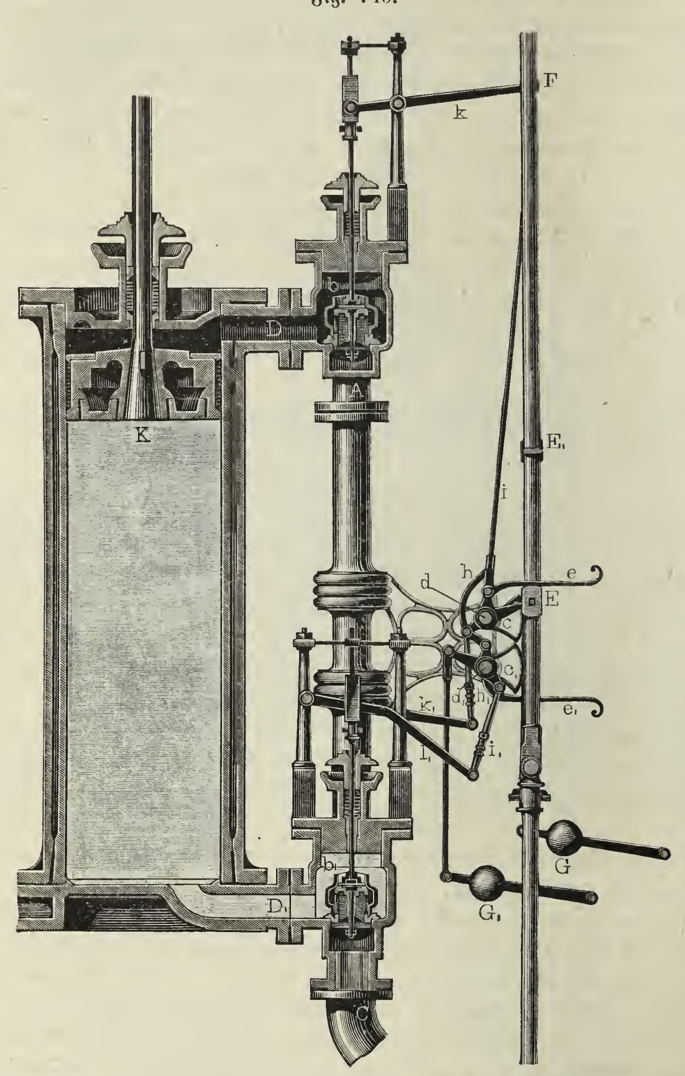
Die Ventile V und W hängen an den einarmigen Hebeln v und w, und diese wieder an den senkrechten Stangen, welche mittels Stopfbüchsen s und t in die Dampfkammer eingeführt sind. Die Ventilstangen sind bei P und Q geschlitzt und bewegen sich mit ihren oberen Enden in den bei U sichtbaren Federgehäusen. Das Auf- und Niederziehen der Ventile erfolgt durch den gleicharmigen Hebel PQ, welcher mittels eines Armes XY und eines Ansatzes YZ an die Stange OL angeschlossen ist. Diese Enden dieses Hebels PQ haben in den Stangenschlitzen P und Q einen tauben Gang und setzen daher die Ventile erst gegen Ende des Ausschubes der Stange OL in Bewegung. Die Gehäuse bei U dienen den Ventilstangen nicht bloß zur Leitung, sondern haben auch den Zweck, mittels der in ihnen eingeschlossenen, durch Schrauben beliebig zu spannenden, Federn den Niedergang der Ventile zu beschleunigen, sowie das Stoßen beim Aufgange derselben zu beseitigen.

Es ist nun leicht, sich eine deutliche Vorstellung von dem ganzen Steuerungsspiel zu machen.

Ventilsteuerung mit Sperrklinken. Die Art und Weise, wie die einzelnen Ventile einer Dampfmaschine durch den aus §. 309 bekannten Hebel- und Sperrklinkenapparat gesteuert, d. i. angehoben und wieder niedergelassen werden, möge an einer in den Figuren 740 u. 741 (a. f. S) abgebildeten doppeltwirkenden Dampfmaschine in Cornwall erklärt werden. Man ersieht aus Fig. 741, daß diese Steuerung aus ein Paar kleineren Ventilen a, a_1 und aus ein Paar größeren Ventilen b, b_1 besteht; wir müssen nur noch hinzufügen, daß jene zum Zulassen, diese aber zum Ablassen des Dampfes dienen. Das erste Paar communicirt mit den nach dem Dampfcylinder führenden Röhren D und D_1 von unten, das zweite aber hiermit von oben. Der Dampf wird durch das Rohr AA_1 zugeführt, und durch das Rohr BB_1 ausgelassen oder vielmehr in den Condensator geleitet. Man sieht nun leicht ein, daß bei Eröffnung der Ventile a und b_1 der frische Dampf durch a nach D gehen und den Dampfkolben K niederdrücken kann und daß gleichzeitig der benutzte Dampf unter K durch D_1 und b_1 zurück und auf dem Wege BB_1C in den Condensator geführt werden kann. Sind umgekehrt die Ventile a_1 und b geöffnet, dagegen a und b_1 geschlossen, so strömt der frische Dampf durch a_1 und D_1 unter den Treibkolben und treibt diesen in die Höhe, wogegen der benutzte Dampf oben durch D zurück und durch b und BB_1C in den Condensator geleitet wird. Die oberen zwei Ventile a und b sind an doppelarmige Hebel k und l, die unte- §. 463

ren zwei aber an einarmige Hebel k_1 und l_1 aufgehangen, und diese Hebel sind wieder durch die Stangen h, i, h_1 und i_1 an die Arme von zwei Wellen d und d_1 angeschlossen, nämlich h und i_1 an d_1 sowie h_1 und i

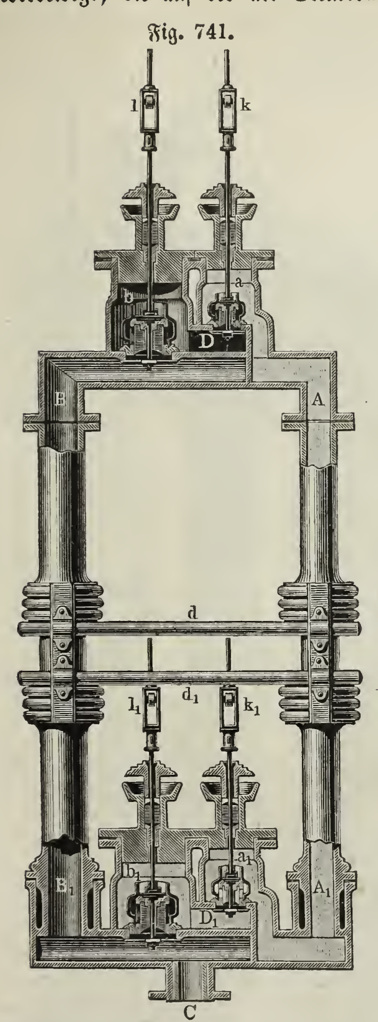
Fig. 740.



an d. Uebrigens sind diese Wellen noch mit den langen Hebeln e und e_1 ausgerüstet, und es werden diese durch zwei Knaggen E und E_1 auf- oder

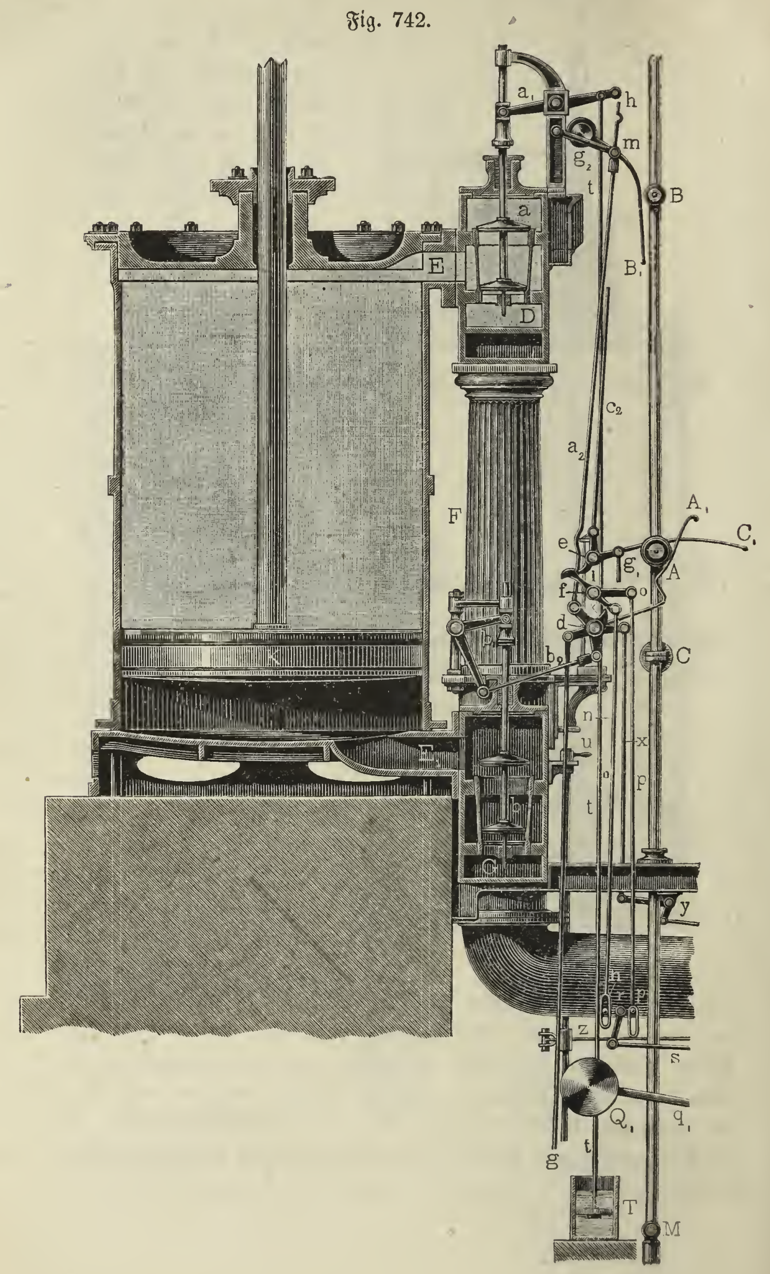
niederbewegt, die auf der als Steuerbaum dienenden Kolbenstange EF der Luftpumpe aufsitzen. Hiernach ist nun der Gang der Steuerung leicht zu erklären. In der Stellung, welche die Figuren vor Augen führen, ist der Treibkolben K eben oben angekommen, es hat die Knagge E den Hebel e emporgehoben und die Welle d um einen gewissen Winkel von rechts nach links gedreht; dabei ist auch ein rechts an d hängendes (von der Stange EF zum Theil verdecktes) Gewicht G gehoben, h_1 und also auch a_1 mittels h_1 sowie b mittels i niedergedrückt, der Sector c emporgehoben und demnach der Sector c_1 frei geworden. Das an d_1 links hängende und nun sinkende Gewicht G_1 dreht d_1 von rechts nach links, und hierbei wird a mittels h sowie b_1 mittels i_1 geöffnet. Der unter dem Kolben K befindliche Dampf strömt nun durch b_1 nach C und in den Condensator und der durch D zuströmende frische Dampf treibt K und EF abwärts und nahe am Ende des Niederganges trifft die Steuerknagge E_1 auf den Hebel e_1 und dreht dabei die Welle d_1 um einen gewissen Winkel von links nach rechts; hierbei wird das Gewicht G_1 wieder angehoben, das Ventil a durch die Stange h sowie b_1 durch i_1 verschlossen und der Sector c_1 so weit niedergedrückt, daß sich c frei bewegen kann. In diesem Momente fällt nun G nieder und wird dadurch a_1 mittels h_1 sowie b mittels i geöffnet, so daß jetzt Dampf durch a_1 und D_1 hindurch und unter den Kolben K treten, diesen also emportreiben kann. Am Ende des Kolbenaufganges wiederholt sich nun das eben beschriebene Steuerungsspiel.

Fig. 741.



§. 464 **Einfachwirkende Dampfmaschinen.** Soll der Dampfzufluß lange vor dem Ende des Kolbenweges aufgehoben werden, damit der Dampf wäh-

Fig. 742.



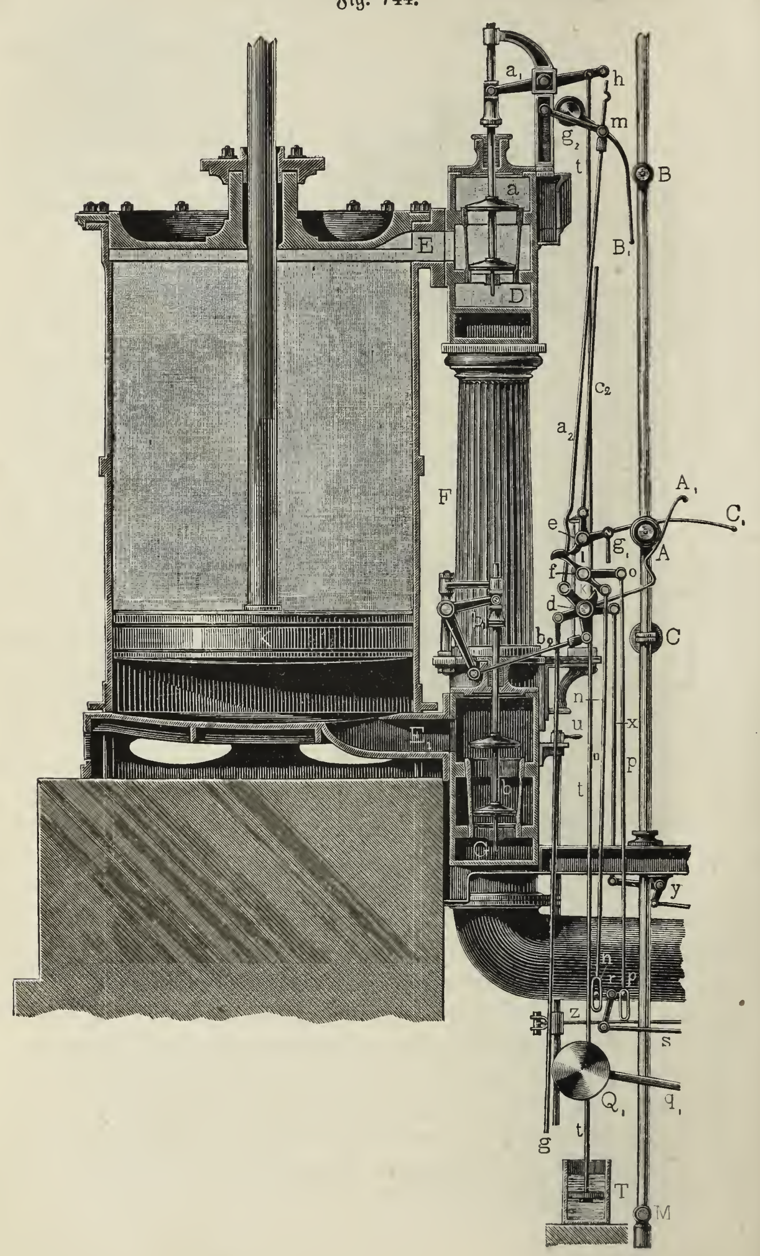
rend Zurücklegung des übrigen Kolbenweges durch Expansion wirken könne, so muß entweder eine besondere Absperrungsklappe angebracht werden, welche durch ein besonderes Hebelwerk in Bewegung zu setzen ist, oder man muß einen besonderen Mechanismus anbringen, durch welchen nicht nur das gleichzeitige Eröffnen des Zu- und Ablaßventiles hervorgebracht, sondern auch ermöglicht wird, daß sich das Zulaßventil eher als das jenseitige Ablaßventil verschließt. Wie dies bei einer einfachwirkenden Dampfmaschine bewerkstelligt werden kann, wird die Erklärung der Figuren 742 und 743, welche eine Wasserhebungsdampfmaschine von Hick in Bolton vorstellen, zeigen.

Fig. 743.

Die Maschine hat drei Doppelventile *a*, *b*, *c*. Das erstere ist das Einlaß- oder Absperrventil (franz. soupape d'admission; engl. steam-valve); bei seiner Eröffnung strömt der mittels *D* zugeführte Dampf durch *E* nach dem Cylinder und treibt den Dampfkolben *K* abwärts. Das Ventil *b* ist das Auslaßventil (franz. soupape d'émission; engl. eduction-valve); durch seine Eröffnung wird dem Dampfe der Abzugsweg *G* nach dem Condensator eröffnet. Das mit *a* in einer und derselben Kammer eingeschlossene Ventil *c* öffnet sich, wenn der Dampfkolben *K* durch ein Gegengewicht emporgehoben wird, damit der erst über dem Kolben *K* befindliche Dampf auf dem Wege EFE_1 unter den Kolben gelangen könne. Da hierbei auf beiden Seiten des Kolbens beinahe ein und derselbe Dampfdruck, im Ganzen also Gleichgewicht vorhanden ist, so nennt man dieses

Ventil auch das Gleichgewichtsventil (franz. soupape d'équilibre; engl. equilibrium-valve). Das Oeffnen und Verschließen dieser drei Ventile

Fig. 744.



muß während eines vollständigen Spieles der Maschine in folgender Ordnung vor sich gehen. Anfangs ist der Dampfkolben K oben und es sind alle drei Ventile verschlossen; bei Beginn des Spieles werden die Ventile a und b gleichzeitig eröffnet; der frische Dampf treibt K nieder und der benutzte Dampf unter K strömt durch E_1 und G in den Condensator. Hat der Kolben K einen Theil seines Weges zurückgelegt, so verschließt sich a, es hört das Zuströmen des Dampfes auf, und es wirkt der nun abgesperrte Dampf während Zurücklegung des übrigen Kolbenweges nur durch Expansion, wie die Abbildung vor Augen führt. Kommt K unten an, so verschließt sich nun auch b, hierauf aber öffnet sich c, der Kolben steigt durch die Wirkung seines Gegengewichtes empor, und treibt den beim Niedergange benutzten Dampf auf dem Wege EFE_1 von oben nach unten. Am Ende des Aufganges verschließt sich auch c und es beginnt nachher ein neues Spiel.

Zur regelrechten Bewegung der Ventile dient der in Fig. 744 abgebildete Sperrklinkenmechanismus, welcher dem in Fig. 559 und Fig. 740 ähnlich ist. Es sind hier d und e die mit Hebeln und Zähnen ausgerüsteten Steuerwellen, und es ist f die zwischen beiden liegende Welle der Sperrklinken, welche von den auf den ersteren Wellen festsitzenden Zähnen k und l abwechselnd ergriffen werden. Der Stiel des Admissionsventiles a ist durch einen geraden Hebel a_1 und eine Stange a_2 mit einem, sowie der Stiel des Emissionsventiles b durch einen Winkelhebel b_1 und eine Stange b_2 mit einem anderen Arme der Steuerwelle d verbunden; wogegen das (in Fig. 744 nicht sichtbare) Gleichgewichtsventil c mittels Stiels, Hebels und einer Stange c_2 an einen Arm der Steuerwelle e angeschlossen ist. An beiden Steuerwellen d und e sind ebenfalls mittels besonderer Arme die Stangen g und g_1 angehangen, welche die Gegengewichte tragen, wodurch nach dem Aushaken der Sperrklinke in k oder l, d von rechts nach links, oder e von links nach rechts gedreht, und folglich entweder die Ventile a und b, oder das Ventil c eröffnet wird. Die Verschließung der Ventile bewirkt dagegen der mit dem Dampfkolben gleichzeitig auf- und niedergehende Steuerbaum BCM mittels der auf ihm festsitzenden Knaggen A, B, C und der Klauen A_1, B_1 und C_1, wovon A_1 auf der Welle d, und C_1 auf der Welle e, dagegen B_1 an dem Ende m der Zugstange a_2 des Admissionsventiles a festsitzt. Die letztere Klaue ist durch ein Gegengewicht g_2 äquilibrirt und trägt einen Arm mh, welcher mittels seines hakenförmigen Endes den Hebel a_1 des Ventiles a erfaßt.

Endlich ist noch zu bemerken, daß sich jede der beiden Sperrklinken fk und fl für sich um f drehen läßt, und daß sich die eine mittels einer Stange n, sowie die andere mittels einer an einem besonderen Arme fo angeschlossenen Stange p um f drehen läßt.

Es ist nun der Gang dieses Steuerungsmechanismus folgender.

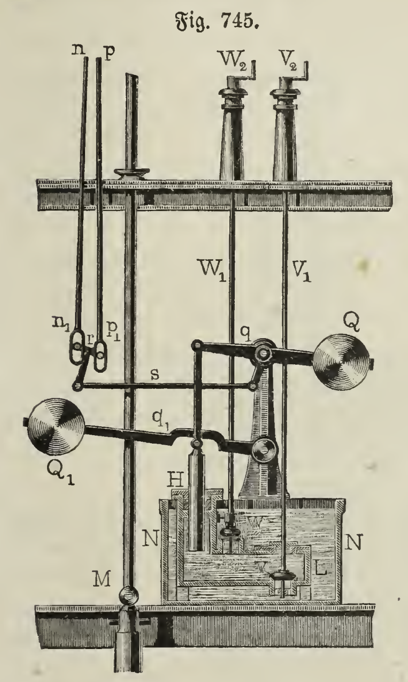
Anfangs steht der Dampfkolben K oben und alle drei Ventile sind geschlossen. Wird nun der Arm fk mittels der Stange n aufwärts bewegt, so erfolgt ein Aushaken bei k und folglich auch das Niederfallen des Gewichtes g, sowie das damit verbundene Eröffnen der Ventile a und b. Der nun durch E zutretende Dampf treibt den Dampfkolben K abwärts, wogegen der unter K befindliche Dampf auf dem Wege $E_1 G$ nach dem Condensator strömt. Hat der Dampfkolben einen gewissen Weg zurückgelegt, so ergreift die Knagge B die Klaue B_1, drückt dieselbe nieder und es erfolgt das Aushaken bei h und das damit verbundene Niederfallen des Admissionsventiles a. Der Dampfkolben legt daher den übrigen Theil seines Weges ohne Zufluß, also mit Expansion des Dampfes, zurück. Gegen Ende dieses Kolbenniederganges wird die Klaue A_1 von der Knagge A ergriffen und niedergedrückt und hierbei das Gewicht g wieder angehoben, sowie das Emissionsventil b geschlossen und h wieder in a_1 eingehakt.

Soll nun der Dampfkolben wieder aufsteigen, so wird die Stange p aufwärts bewegt und der Winkelhebel lfo von rechts nach links gedreht, wobei sich l aushakt, und das nun niederfallende Gewicht an g_1 mittels der Zugstange c_2 u. s. w. das Gleichgewichtsventil c eröffnet. Jetzt zieht der Balancier mittels seines Gegengewichtes den Dampfkolben empor und treibt den über dem letzteren befindlichen Dampf auf dem Wege EFE_1 unter denselben. Ist endlich der Kolben K wieder oben angehoben, so wird die Stange n von Neuem aufwärts geschoben, wobei sich nun a und b eröffnen und ein zweites Spiel beginnt.

§. 465 **Katarakt.** Bei den einfachwirkenden Dampfmaschinen hat man noch besondere Vorrichtungen zur Regulirung ihres Ganges nöthig. Um die Geschwindigkeit zu reguliren, dient ein Stellventil im Dampfrohre, welches der Maschinenwärter durch die Hand stellen kann. Um ferner den Kolbenweg zu reguliren, hebt oder senkt man entweder das Lager der Einlaßklappe oder man verändert die Stellung der Knaggen am Steuerbaume. Um endlich die Zeit des ganzen Kolbenspieles zu reguliren, bedient man sich des sogenannten Kataraktes (franz. cataracte; engl. cataract), eines Apparates, durch den am Ende des Kolbenspieles eine beliebig lange Pause hervorgebracht werden kann. Man hat dem Katarakten verschiedene Einrichtungen gegeben. Einen zu der in Fig. 743 und 744 abgebildeten Dampfmaschine gehörigen Katarakten zeigt Fig. 745. Den Hauptkörper des Kataraktes bildet eine Wasserpumpe HL mit dem Mönchskolben H und zwei Ventilen V und W, wovon sich das eine nach innen und das andere nach außen öffnet. Der Ausschub dieser Ventile läßt sich durch Stellung der Stangen V_1 und W_1 mit Hülfe von Kurbeln V_2 und W_2 beliebig verändern. Der ganze Pumpenkörper steht in dem mit Wasser angefüllten

Kasten *NN*. Beim Aufziehen des Pumpenkolbens *H* fließt durch das Ventil *V* Wasser aus dem Kasten in den Pumpenkörper, wogegen beim Niedergange desselben durch das Ventil *W* Wasser aus dem Pumpenkörper in den Kasten zurückgedrückt wird.

Fig. 745.



Zu diesem Auf- und Niederziehen des Pumpenkolbens dienen zwei mit den Gewichten Q und Q_1 beschwerte Hebel q und q_1, wovon der eine noch einen dritten Arm hat, welcher mittels einer horizontalen Stange s an einen anderen dreiarmigen Hebel r angeschlossen ist, dessen beide Seitenarme in die Scheerenenden n_1 und p_1 der aus dem Obigen bekannten Stangen n und p eingreifen, wodurch die Klinken k und l ausgehakt werden (Fig. 744).

Die Art und Weise, wie dieser Katarakt die Zeit des Spieles der Dampfmaschine in Fig. 744 regulirt, ist nun folgende. Während des Kolbenaufganges ergreift eine vierte Knagge M des Steuerbaumes den Hebel q_1 und hebt dadurch das Gewicht Q_1, so daß nun das Gewicht Q in Wirksamkeit treten und den Kolben H des Kataraktes emporheben kann, welches natürlich um so langsamer erfolgt, je mehr der Hub des Saugventiles V eingeschränkt ist. Da nun das niedersinkende Gewicht Q durch den Mechanismus rs die Stange nn_1 aufhebt, so wird dadurch auch das Aushaken bei k bewirkt und der Anfang eines neuen Spieles der Dampfmaschine eingeleitet. Beim darauf erfolgenden Niedergange des Dampfkolbens zieht sich die Knagge M wieder unter q_1 zurück und es drückt nun das Gewicht Q_1 den Kolben H mittels des Hebels q_1 nieder, wobei durch W wieder Wasser aus dem Pumpenkörper herausgedrückt wird und der Mechanismus sr eine rückgängige Bewegung macht, folglich die Stange p_1p aufhebt und zuletzt das Aushaken bei l hervorbringt. Hierauf wird mittels des fallenden Gewichtes g_1 das Gleichgewichtsventil gehoben und daher auch der Aufgang des Dampfkolbens ermöglicht. Da die Auf- und Niedergangszeit des Kolbens H von der Größe der Eröffnung der Ventile V und W abhängt, so kann man mittels der Stellapparate V_1 V_2 und W_1 W_2 sowohl die Pause vor

dem Niedergange als auch die vor dem Aufgange des Dampfkolbens und dadurch auch die Zeit eines ganzen Kolbenspieles beliebig verlängern oder verkürzen.

Die Abbildung in Fig. 744 zeigt noch folgende Hülfsapparate. Erstens ist an dem Hebel a_1 des Admissionsventiles eine Stange tt mit einem Teller T angebracht, welcher in einem Gefäße mit Wasser beweglich ist und das zu starke Niederschlagen des Admissionsventiles verhindert (s. den Moderator in §. 134). Ferner ist an der Sperrklinke dk eine Stange x angeschlossen, welche mittels eines Winkelhebels y u. s. w. ein Ventil in Bewegung setzt, wodurch der Zutritt des Injectionswassers zum Condensator entweder hergestellt oder aufgehoben werden kann. Beim Niederfallen des Gewichtes g, also am Anfange des Kolbenniederganges, wird x aufgezogen und das Ventil im Injectionsrohre geöffnet, wogegen beim Ende des Kolbenniederganges x durch die Steuerknagge A_1 niedergedrückt, folglich das Ventil im Injectionsrohre geschlossen wird und daher das Injiciren des Wassers in den Condensator während des folgenden Kolbenaufganges ganz aufhört. Endlich läßt sich der Zufluß des Injectionswassers noch durch einen besonderen Hahn reguliren, welcher sich mittels der Handhabe u nebst einer Hebel- und Stangenverbindung z bewegen läßt.

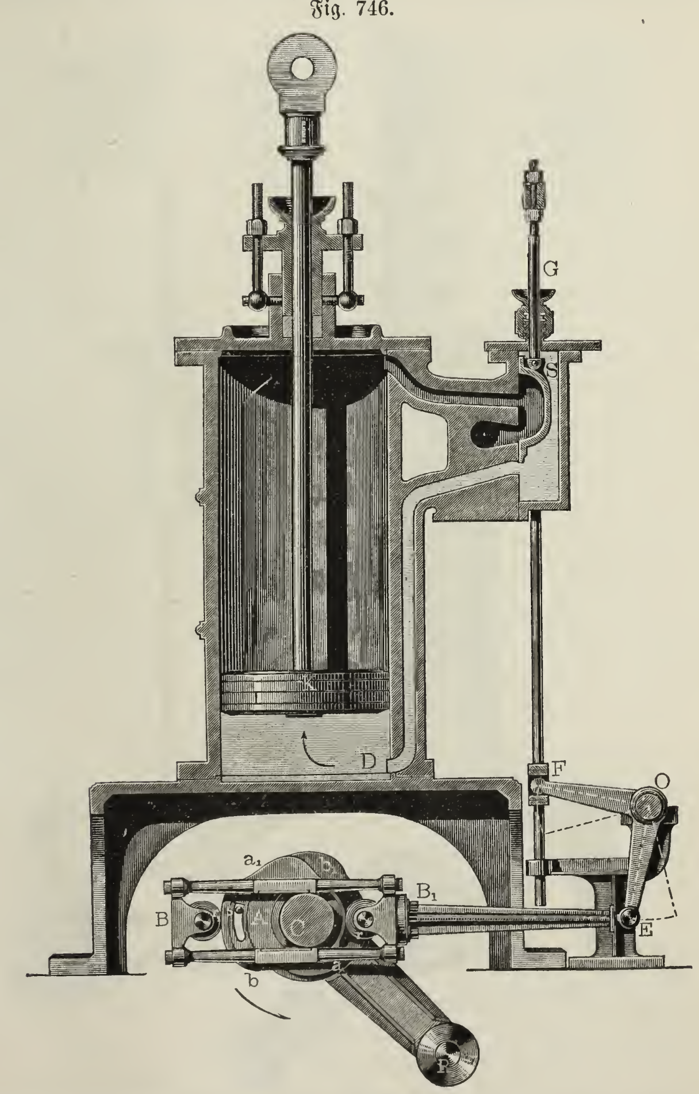
§. 466 **Dampfschieber.** Wir haben oben nur die Steuerung der Dampfmaschinen mit Hülfe des einfachen Vertheilungsschiebers abgehandelt, es sind daher noch die Expansionsschieber, d. i. diejenigen Dampfschieber zu beschreiben, wodurch der Dampf während des Kolbenweges abgesperrt und daher durch Expansion zu wirken genöthigt wird. Im Allgemeinen hat man vier Methoden, die Expansion des Dampfes durch Schieber einzuleiten, nämlich

1) die Steuerung mittels eines einzigen Schiebers,
2) die mittels zweier getrennten Schieber,
3) die mittels zweier über einander liegenden Schieber,
4) die mittels eines Schiebers und eines Ventiles.

Wir haben schon oben §. 457 gesehen, daß ein einziger, durch ein Kreisexcentrik in Bewegung gesetzter Schieber die Wirkung des Dampfes durch Expansion ermöglichen kann; es gehört nur dazu, daß derselbe eine gewisse Bedeckung (franz. recouvrement; engl. cover) erhalte, d. i. daß er bei seinem mittleren Stande nicht bloß die Dampfwege bedecke, sondern daß seine Enden noch über die Einmündungen dieser Wege in die Dampfkammer hinausgreifen. Wird dann das Excentrik gegen den Krummzapfen noch so gestellt, daß sich der Dampfweg unmittelbar vor dem Ende des ganzen Kolbenweges eröffnet, so findet auch eine Absperrung des Dampfes Statt, bevor der Kolben das neue Kolbenspiel vollendet hat; es muß also auch der Dampf durch Expansion wirken, während der Kolben den letzten Theil dieses Weges zurücklegt.

Vollständiger erreicht man diesen Zweck, wenn man ein gezahntes oder abgestuftes Excentrik anwendet. Die Einrichtung, Construction und Wirkungsweise einer Schiebersteuerung mit einem solchen Excentrik läßt sich

Fig. 746.



aus der in Fig. 746 abgebildeten Maschine von Saulnier dem Aelteren ersehen. Es ist *D* der Dampfcylinder und *C* die Welle, welche mittels

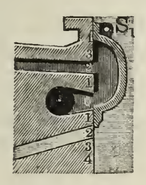
Kurbel CR u. s. w. von der Kolbenstange KL in Bewegung gesetzt wird; ferner S der Dampfschieber, A das Excentrik, sowie BB_1 ein mit Frictionswalzen ausgerüsteter und das Excentrik und die Welle C umfassender Dop-

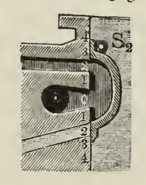
Fig. 747.

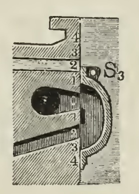
pelrahmen, BE eine mit diesem fest verbundene horizontale Excentrikstange, endlich FG die mit dieser durch einen Winkelhebel EOF verbundene verti-

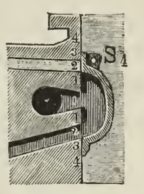
cale Schieberstange. Das Excentrik bildet vier Stufen a, b, a_1, b_1, zwei auf- und zwei absteigende. In der gezeichneten Stellung ist der Schieber oben, hat also die Stellung S_1, Fig. 748; gelangt bei weiterer Umdrehung des

Fig. 748.





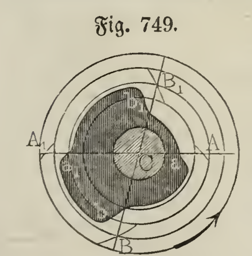




Excentriks die Stufe a an das Rädchen r, so wird der Rahmen nach rechts und daher der Schieber nach unten geschoben und gelangt in die Stellung S_2; schiebt sich ferner b unter r, so rückt die Excentrikstange noch weiter rechts, also der Schieber noch weiter herab, und zwar in die Stellung S_3. Später gelangt die Stufe a unter das linke Rädchen r_1, es schiebt dann das Excentrik die Excentrikstange nach links und daher den Schieber aufwärts, und zwar in die Stellung S_4; endlich aber stellt sich die Stufe b_1 unter r_1; es rückt dabei die Excentrikstange noch weiter links, und folglich der Schieber wieder in die Stellung S_1. Damit durch diese Bewegungen der Schieber die Dampfwege zur rechten Zeit eröffne und verschließe, muß seine innere Länge vier- und seine äußere sechsmal, sein Weg aber dreimal so groß sein, als die Höhe eines Dampfcanales oder einer Zwischenwand; es muß ferner derselbe bei einem mittleren Kolbenstande um ein Drittel, und beim Ende des Hubes um die übrigen zwei Drittel seines Weges fortrücken, deshalb also auch die Stufe b des Excentriks noch einmal so hoch sein als die Stufe a.

Excentrik für veränderliche Expansion. Die Construction der Stufen des Excentriks läßt sich aus Fig. 749 ersehen. Zwei diametrale §. 467

Fig. 749.

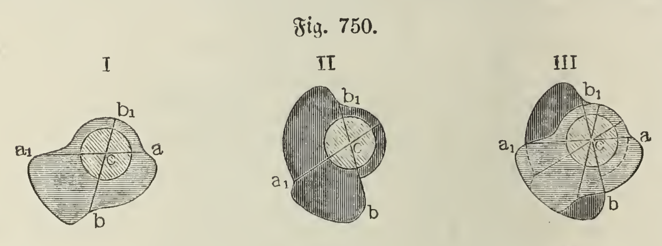


Linien AA_1 und BB_1 theilen das Excentrik in vier gleiche oder ungleiche Theile, und an jedem Endpunkte dieser Linien befindet sich eine Stufe; A und B sind die aufsteigenden, sowie A_1 und B_1 die niedersteigenden Stufen; A und A_1 haben die einfache, B und B_1 die doppelte Höhe. Damit sich das Excentrik zwischen den Rahmen nicht klemme, müssen die Stufen so geformt werden, daß alle diametralen Linien, welche gegenüberliegende Punkte derselben mit einander verbinden, gleich sind der inneren Weite des Rahmens. Da endlich das Excentrik nicht unmittelbar vom Rahmen, sondern vielmehr von Frictionswalzen im Inneren desselben um-

faßt wird, so hat man in einem dem Walzenhalbmesser gleichen Abstande von der zusammengesetzten Curve ABA_1B_1 eine parallele oder äquidistante Curve aba_1b_1 zu zeichnen, und den Excentrikumfang nach derselben zu formen. Das Aufzeichnen dieser Aequidistanten erfolgt dadurch, daß man mit dem Walzenhalbmesser aus sehr vielen Punkten von ABA_1B_1 Kreise beschreibt und einen Zug führt, welcher alle diese Kreise berührt.

Es läßt sich auch sehr leicht der Expansionsgrad verändern, wenn man das Excentrik aus zwei Scheiben, wie I. und II., Fig. 750, zusammensetzt, die eine Scheibe um einen gewißen Winkel gegen die andere verdreht, und mittels einer Schraube s (Fig. 747) an sie befestigt. Der Scheibe I. fehlt die Stufe b, und der Scheibe II. die Stufe a; legt man beide centrisch über

Fig. 750.



einander, so bilden sie ein vollständiges Excentrik, wie Fig. 749, welches vielleicht bei ein Drittel des Kolbenhubes absperrt; dreht man aber I. um einen gewissen Winkel, ehe man es an II. legt, wie z. B. in III., so werden die Centriwinkel zwischen a, b, a_1 und b_1 verändert, es wird z. B. der Centriwinkel von ab_1 und a_1b größer und der von ab und a_1b_1 kleiner, so daß nun das Absperren des Dampfes später, z. B. statt bei einem Drittel erst bei der Hälfte des Hubes statthat. Uebrigens läßt sich der Centriwinkel $aCb_1 = a_1Cb = \beta$, welcher einer gewissen Absperrung oder Expansion entspricht, leicht berechnen. Der dem Drehungswinkel β entsprechende Kolbenweg ist nach §. 458:

$$s = r(1 - cos.\beta),$$

folglich sein Verhältniß zum ganzen Kolbenwege $2r$:

$$\frac{s}{2r} = \frac{1 - cos.\beta}{2};$$

setzen wir dieses $= \frac{1}{n}$, so folgt umgekehrt:

$$cos.\beta = 1 - \frac{2}{n}.$$

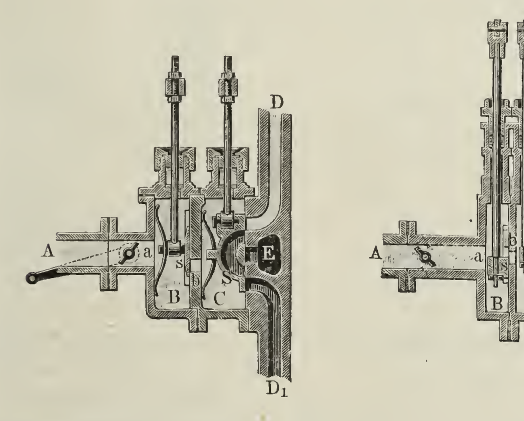
Soll z. B. bei $1/3$ des Kolbenweges abgesperrt werden, so hat man:

$$cos.\beta = 1 - 2/3 = 1/3,$$

daher: $$\beta = \overline{aCb_1} = 70^1/_2 \text{ Grad}.$$

Expansionsschieber. Bei der Expansion mittels eines in einer besonderen Kammer befindlichen Expansionsschiebers können zweierlei Einrichtungen in Anwendung kommen; entweder kann dieser Schieber in einer einfachen, oder er kann in einer durchlochten Platte bestehen, und bei seinem Aufliegen auf der Dampfmündung im ersten Falle den Dampf absperren, im zweiten aber denselben durchlassen. Fig. 751 stellt ein Steuerungssystem der ersten und Fig. 752 eines der zweiten Art vor. Der durch das Dampfrohr A zuströmende Dampf gelangt bei beiden Systemen durch die Mündung a zunächst in die erste Dampfkammer B, aus dieser aber durch §. 468

Fig. 751. Fig. 752.



die Mündung b in die zweite Dampfkammer C, und aus der letzteren durch die Wege D und D_1 in den Dampfcylinder. Es ist S der gewöhnliche Dampfschieber, durch welchen die Vertheilung des Dampfes hervorgebracht wird, ferner E der Canal, welcher den benutzten Dampf abführt, endlich s der die Mündung b auf- und zu deckende Expansionsschieber. Der letztere besteht in Fig. 751 in einer massiven, in Fig. 752 aber in einer durchlochten Platte.

Der massive Expansionsschieber kann sich entweder nur auf der einen Seite der Dampfmündung oder auf beiden Seiten derselben bewegen. Den ersten Fall führt Fig. 753 (a.f.S.) vor Augen. Der Schieber AB geht hier nur mit dem Ende A vor der Dampfmündung D vorbei, muß folglich bei jedem Kolbenzuge einmal hin- und zurückgehen, also zwei Spiele machen, während der Dampfkolben sowie der Vertheilungsschieber deren nur eins verrichtet. Deshalb ist es denn auch nöthig, diesen Expansionsschieber entweder durch ein Kreisexcentrik in Bewegung zu setzen, welches in derselben Zeit zweimal so viel Umdrehungen macht, als das Excentrik des Vertheilungsschiebers, oder denselben mittels einer elliptischen Scheibe oder einer

Verbindung von zwei Daumen durch die Kurbelwelle direct bewegen zu lassen. Um die Expansion an einem solchen Schieber zu verändern, bedarf es nur einer Veränderung der Länge der Schieberstange, und zwar mittels einfacher Schraubenbewegung. Durch Verlängerung der Stange des Schiebers AB rückt der letztere etwas tiefer herab, wie Fig. 754 vor Augen führt; es macht folglich hier der Schieber während der Bedeckung einen größeren Weg $s_1 = \overline{2\,O} + \overline{O\,2}$ als bei der ersteren Schieberstellung.

Fig. 753.

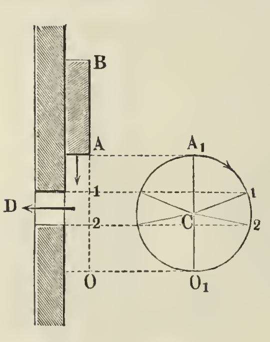
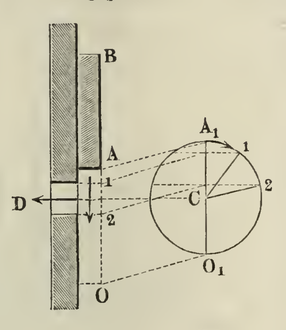
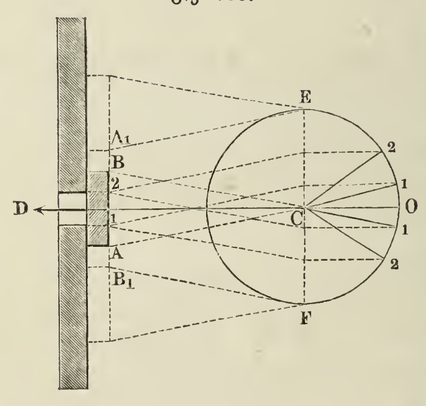


Fig. 754.



Wenn der Expansionsschieber AB, Fig. 755, an den beiden Enden A und B absperrt, so ist die Veränderung der Expansion nur durch Veränderung des Schieberweges zu erreichen. Es findet hier Absperrung Statt während der Schieber den Weg

Fig. 755.



$$s = \overline{A\,1} + \overline{2\,B} = 2\,\overline{A\,1}$$

und das Excentrik desselben den Winkel

$$\beta = 2 . \angle\, O C 1$$

zurücklegt. Nun ist aber bei der Armlänge $\overline{CE} = r$ des Excentriks:

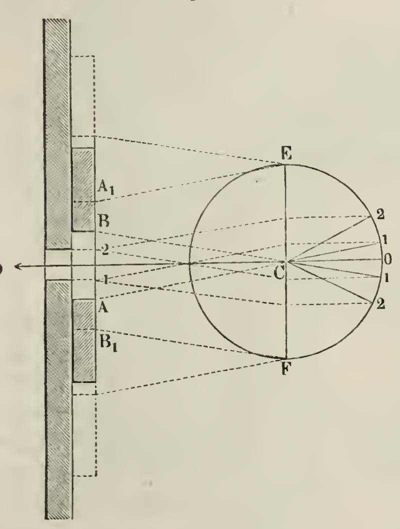
$$sin.\, O C 1 = sin.\, \tfrac{1}{2}\beta = \frac{s}{2r},$$

daher fällt die mit dem Umdrehungswinkel β wachsende Absperrungszeit um so größer aus, je kleiner bei demselben Schieberweg s die Armlänge r des Excentriks ist.

Ist, wie gewöhnlich, der Schieber mittels eines Hebels an die Excentrikstange angeschlossen, so läßt sich der Schieberweg durch Verlängerung oder Verkürzung eines Hebelarms leicht verändern.

Ein ähnliches Verhältniß findet bei dem durchlochten Schieber AB, Fig. 756, Statt. Derselbe sperrt den Dampf ab, während er den Weg

Fig. 756.



$$s = \overline{2A_1} + \overline{A_1 2}$$
$$= \overline{1B_1} + \overline{B_1 1}$$

und folglich das Excentrik den Winkel

$$2\beta = 2.\overline{EC2} = 2.\overline{FC2}$$

zurücklegt, wobei

$$cos.\beta = \frac{r - \frac{1}{2}s}{r}$$

ist.

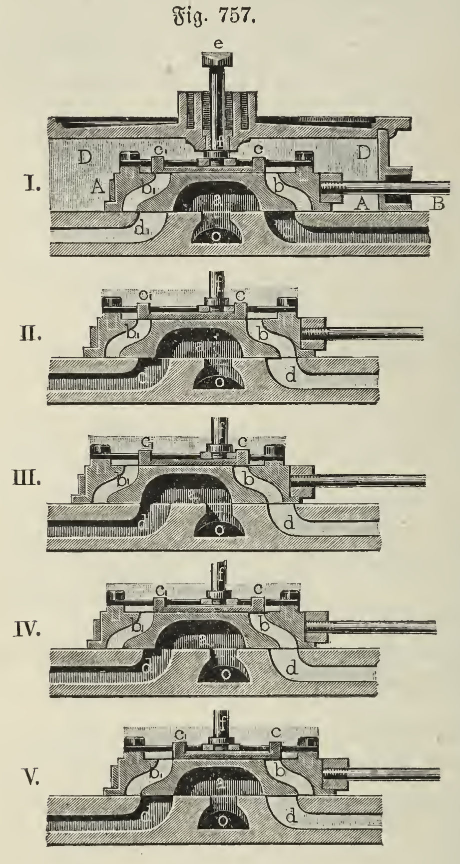
Da nun β wächst, wenn $cos.\beta$ abnimmt, und $cos.\beta$ mit r zugleich kleiner wird, so folgt, daß auch hier die mit dem Winkel β wachsende Absperrungszeit um so größer ausfällt, je kleiner die Armlänge r des Excentriks oder der ganze Schieberweg $2r$ ist.

Uebrigens hängt natürlich der Weg s des Schiebers während der Expansion von der Weite der Dampfmündung D ab.

Doppelschieber. Die Steuerung mittels zweier über einander liegenden Schieber läßt sich auf mannigfaltige Weise einrichten, namentlich aber ist zu unterscheiden, ob der auf dem Rücken des Vertheilungsschiebers aufliegende Expansionsschieber durch jenen mitbewegt oder durch eine besondere Stange bewegt wird. In Fig. 757 und 758 sind Expansionssteuerungen der ersten Art abgebildet, Fig. 759 und 760 führen aber Expansionssteuerungen der zweiten Art vor Augen. Der Vertheilungsschieber AA in Fig. 757 I. II. III. IV. (a. f. S.) enthält außer der gewöhnlichen Höhlung a noch zwei Canäle b und b_1, und es wird der bei D zuströmende Dampf durch diese Canäle in die Dampfwege d und d_1, sowie von da auf die eine oder auf die andere Seite des Dampfkolbens geführt. Der Expansionsschieber ist eine ebene Platte cc_1, an den Enden mit den Nasen c und c_1 ausgerüstet, und in einer Leitung auf dem Rücken des ersten Schiebers verschiebbar. Zwischen beiden Nasen befindet sich ein mittelst einer Welle ef drehbare und durch einen Hebel stellbarer Daumen in Form einer elliptischen §. 469

Scheibe *f*. Wenn der Schieber *A A* nach der einen oder nach der anderen Richtung hin fortgeschoben wird, so geht $c c_1$ nur so weit mit fort, bis die eine Nase den Umfang des Daumens berührt; es kann daher der Expansionsschieber bei der weiteren Bewegung des Vertheilungsschiebers den einen oder den anderen der Canäle b und b_1 bedecken.

Fig. 757.

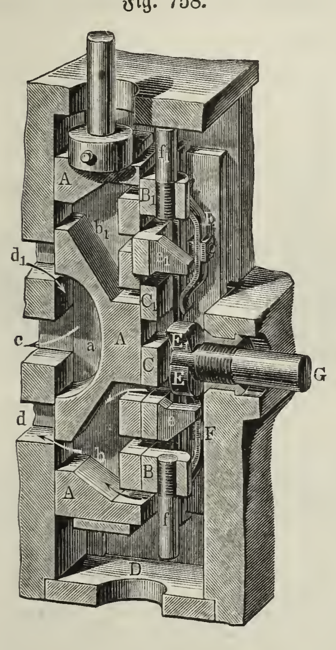


Es ist I. die mittlere Stellung des Vertheilungsschiebers, wo der Dampfkolben das Ende seines Weges erreicht hat; ferner ist II. eine folgende Stellung dieses Schiebers, wo der Kolben bereits seinen entgegengesetzten Weg angetreten hat; III. die Stellung, wo der Expansionsschieber den Dampf abgesperrt, der Steuerschieber das Ende seines Weges erreicht hat und der Dampfkolben durch die Expansion des Dampfes fortgetrieben wird; in IV. ist der Steuerschieber wieder um einen Schritt zurückgegangen und in V nimmt er wieder seine mittlere Stellung ein, während der Dampfkolben an das andere Ende seines Weges gelangt ist. Von nun an erfolgt das entgegengesetzte Schieber- und Kolbenspiel.

Sehr ähnlich dieser Steuerung ist die in Fig. 758 abgebildete Steuerung einer Dampfmaschine von Farcot. Hier ist der Rücken des Steuerschiebers *A A A* mit sechs rectangulären Mündungen zum Eintritt des bei *D* zuströmenden Dampfes versehen, übrigens aber ist die Einrichtung dieses Schiebers die vorige. Den Rücken desselben bedecken zwei Expansionsschieber *B C* und $B_1 C_1$, wovon jeder zwei Löcher hat und durch eine Feder $F F_1$ gegen den Steuerschieber gedrückt wird, damit dieser bei seiner Bewegung jene mit fortführt. Diesem Fortführen wird aber durch die Nasen e und e_1 und

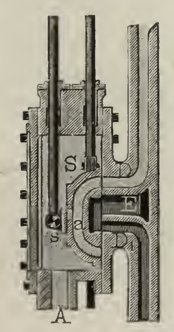
durch die Stifte f und f_1 Grenzen gesetzt, denn jene finden an zwei Daumen E, E_1, welche an dem Ende einer Welle EG festsitzen, diese aber an den Endflächen der Dampfkammer ein Hinderniß der Bewegung. In der Stellung, welche die Figur anzeigt, steht der Treibkolben unten, und der Dampf strömt durch die unteren drei Löcher nach b und von da nach d und unter den Kolben, wogegen der Dampf über dem Kolben auf dem Wege $d_1\,a\,c$ entweicht. Nun steigt der Steuerschieber empor und nimmt den Expansionsschieber BC mit fort, wogegen der Schieber $B_1\,C_1$ stehen bleibt, weil sein Stift f_1 oben anstößt; bei weiterem Fortrücken des Schiebers trifft die Nase e an den Daumen E, es bleibt nun BC zurück und versperrt dadurch die drei unteren Dampfwege, so daß nun Expansion des Dampfes eintreten muß. Später nimmt der Steuerschieber die umgekehrte Bewegung an, und führt hierbei beide Expansionsschieber mit fort, und wenn der Dampfkolben das Ende seines Weges erreicht hat, gelangt AAA wieder in die erste Stellung; zugleich sind die oberen drei Dampfwege eröffnet und es strömt nun frischer Dampf durch diese und auf dem Wege $b_1\,d_1$ über den Kolben, wogegen der benutzte Dampf auf dem Wege $d\,a\,c$ abfließt (s. Principien der Daumensteuerung von Eyth, im „Civilingenieur", Bd. 4).

Fig. 758.



§. 470 Bei dem Steuerungssysteme in Fig. 759 bedeckt der durch ein besonderes Kreisexcentrik in Bewegung zu setzende Expansionsschieber s die Dampföffnung a, wenn der Vertheilungsschieber S seinen höchsten oder tiefsten Stand erreicht hat; bei dem Steuerungssysteme in Fig. 760 (a. f. S.) hingegen sind es zwei durch den Vertheilungsschieber gehende Canäle a und a_1, welche der Expansionsschieber abwechselnd eröffnet und verschließt.

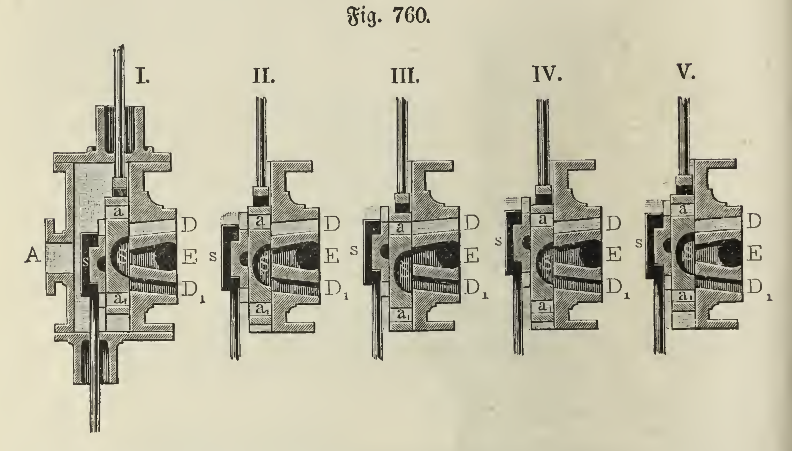
Fig. 759.



Um sich eine genaue Vorstellung von dem Hergange bei dieser Steuerung zu verschaffen, sind in Fig. 760 die Schieber in fünf auf einander folgenden Stellungen dargestellt worden. In der mittleren Stellung I. ver-

sperrt der Vertheilungsschieber S die beiden Dampfwege, und es nähert sich der Treibkolben dem Ende seines Weges; in der tieferen Stellung II. tritt a mit D in Communication, es strömt daher frischer Dampf durch a und D

Fig. 760.

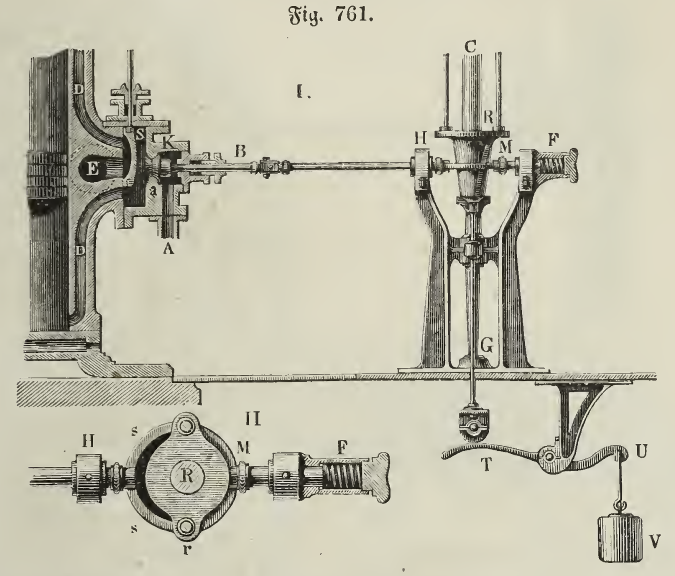


über den Treibkolben, so daß dieser niederzugehen genöthigt wird; in der tiefsten Stellung III. steht a vollkommen über D, so daß der Dampfzufluß zum Dampfcylinder am vollkommensten stattfinden würde, wenn nicht der Expansionsschieber s den Weg a versperrt hätte. Da dies aber gerade der Fall, und der Expansionsschieber allmälig gestiegen ist, während der Vertheilungsschieber niederging, so tritt bei der Stellung III. die Dampfabsperrung ein und es beginnt die Wirkung des Dampfes durch Expansion. Beim Uebergange aus der Stellung III. in die Stellung IV. sind beide Schieber emporgestiegen und es ist deshalb der Canal a verschlossen geblieben; beim Uebergange aus IV. in V. ist nur der Vertheilungsschieber gestiegen, der Expansionsschieber aber gesunken; es ist daher der Canal a wieder eröffnet, doch findet noch immer Absperrung des Dampfes Statt, da der Vertheilungsschieber in V. wieder die mittlere Stellung eingenommen hat. Jetzt ist der Treibkolben dem Ende seines Niederganges nahe, es steigt nun der Vertheilungsschieber gerade so aufwärts, wie er vorher niederging, und er nimmt auch die entgegengesetzten Stellungen ein, weshalb auch bei dem nun erfolgenden Aufgange des Dampfkolbens das Zulassen und Absperren des Dampfes gerade so erfolgt wie bei dem vorhergehenden Niedergange.

Uebrigens ist leicht zu ermessen, wie die Excentriks gegen einander sowie gegen den Krummzapfen zu stellen sind, um das eben beschriebene Steuerungsspiel hervorzubringen. Das Excentrik des Vertheilungsschiebers ist ungefähr um 90^0, das des Expansionsschiebers aber nahe um 180^0 gedreht gegen den Krummzapfen zu stellen.

Meier'sches Expansionsventil. Sehr eigenthümlich ist die in Fig. 761 abgebildete Meier'sche Steuerung mit variabler Expansion. Es wird hier die Mündung *a*, durch welche der bei *A* zufließende Dampf in §. 471

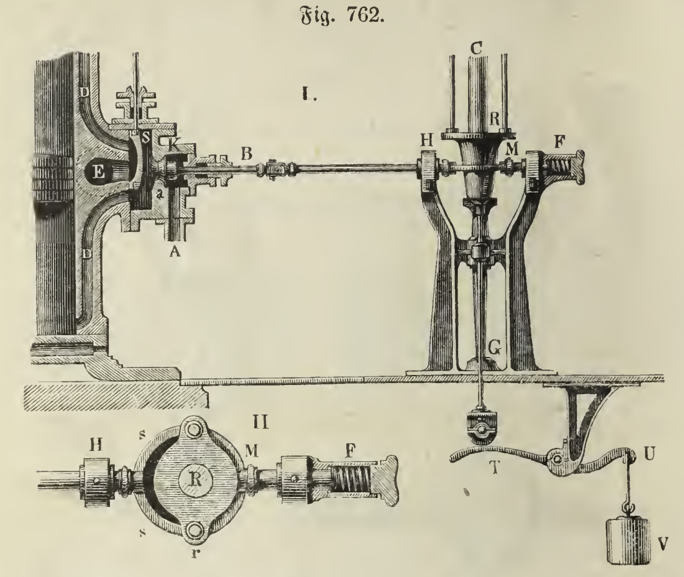
Fig. 761.



die Dampfkammer tritt, durch einen kegelförmigen Spund *K* verschlossen, und es ist zu diesem Zwecke diese Mündung konisch ausgenommen. Uebrigens erfolgt die Vertheilung des Dampfes durch den Schieber *S* ganz so wie in den meisten der oben beschriebenen Steuerungssysteme. Das regelmäßige Auf- und Zuschließen der Mündung *a* durch den Kegel *K* wird auf folgende Weise hervorgebracht. Der Stiel *BH* dieses Kegels *K* läuft in einem Ringe *HM* (II.) aus und stemmt sich gegen eine Spiralfeder *F*. Der Ring *HM* umfaßt einen mit zwei Längenrippen versehenen Kegel *R*, der mittels einer Spindel *CG* durch die Maschine in stetiger Umdrehung erhalten wird. Die Feder *F* schiebt den Ring in der Richtung *MH* und dadurch das Ventil *K* in die Mündung *a*, die konische Hülse *R* hingegen bewegt mittels ihrer etwas spiralförmig laufenden Rippen r und r_1 den Ring in der entgegengesetzten Richtung *HM*, und zieht hierbei den Spund aus der Mündung *a* zurück. Im letzten Falle findet Dampfzufluß, dagegen im ersten Dampfabsperrung und daher Expansion des Dampfes Statt. Macht die Spindel *CG*, und also auch die Hülse *R* mit der Krummzapfenwelle in einerlei Zeit gleichviel Umdrehungen, so wird, wie sehr recht, mittels der Rippen r und r_1 bei jedem Spiele zweimal, und also für jeden Auf- und Niedergang des Kolbens einmal frischer Dampf zugelassen. Wenn man die Hülse *R* höher

hebt, so bringt man eine schwächere Stelle der Rippe *r* in die Ebene des Ringes, und es wird dadurch die Zeit der Eröffnung von *a* eine kleinere,

Fig. 762.

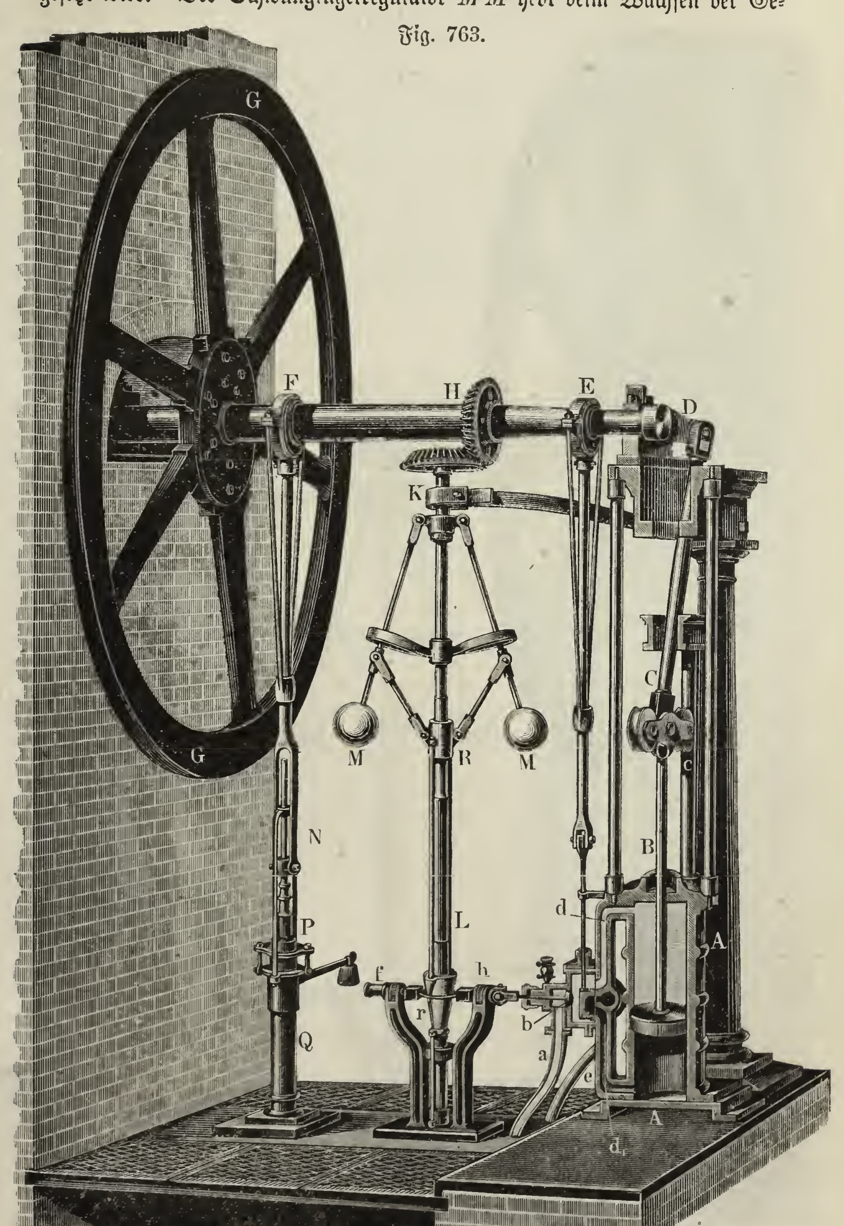


und wenn man umgekehrt die Hülse *R* tiefer stellt, so kommen die stärkeren Stellen von *r* und r_1 in die Ringebene und es wird daher dann bei Umdrehung von *R* die Mündung *a* längere Zeit entstöpselt und daher ein größerer Dampfzufluß eintreten. Um aber dieses Heben oder Niederlassen der Hülse, dem Bedürfniß an Dampf entsprechend, durch die Maschine selbst hervorbringen lassen zu können, verbindet man dieselbe mit dem Schwungkugelregulator durch verticale Stäbe.

Die wesentliche Einrichtung einer Dampfmaschine mit der variabeln Expansionssteuerung nach Meier läßt sich aus der Abbildung in Fig. 763 ersehen. Es ist hier *A* der Dampfcylinder, *B* die Kolbenstange, *CD* die Kurbelstange, *D* der Krummzapfen, *EF* die Welle und *G G* das Schwungrad. Die Stangen *B* und *CD* sind durch ein Gelenk *O* mit einander verbunden, das mit zwei Frictionsrädchen ausgerüstet ist, die an den Leitstangen *c*, *c* auf- und niedergehen. Der frische Dampf strömt durch das Rohr *a* in die Dampfkammer *b*, und von da durch die Canäle *bd* und $b d_1$ abwechselnd oben und unten in den Cylinder; der benutzte Dampf hingegen wird durch das Rohr *e* abgeleitet. Das Expansionsventil oder der Expansionskegel im Inneren von *b* wird, wie wir soeben angegeben haben, durch eine Spiralfeder *f* und eine doppelt gerippte Hülse *r* mittels einer Stange *bh*, wie erforderlich, hin- und zurückgeschoben; die Hülse *r* ist auf der Spindel

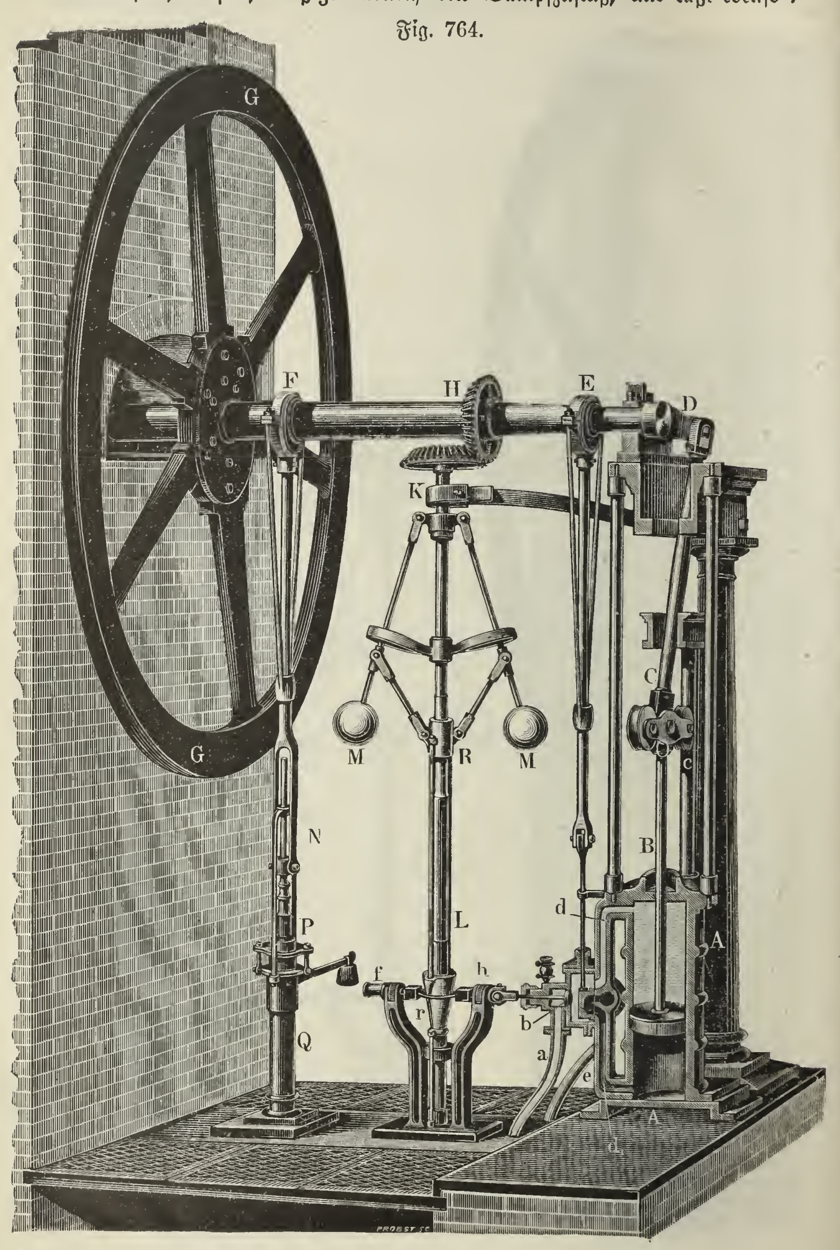
KL verschiebbar, welche mittels des konischen Räderwerkes *HK* in Umdrehung gesetzt wird. Der Schwungkugelregulator *MM* hebt beim Wachsen der Ge=

Fig. 763.



schwindigkeit die Hülse *r* mittels der Stäbe, womit beide unter einander verbunden sind, empor, mäßigt dadurch den Dampfzufluß, und läßt ebenso *r*

Fig. 764.

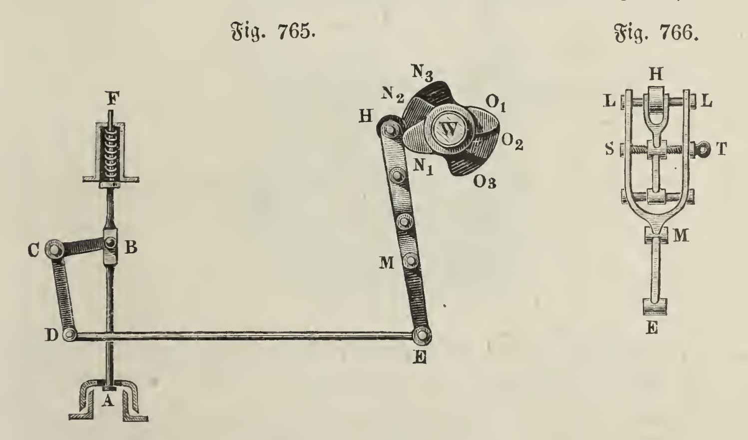


nieder, wenn die Geschwindigkeit abnimmt, so daß nun der Dampfzufluß ein stärkerer und der weiteren Abnahme an Geschwindigkeit eine Grenze gesetzt wird. Uebrigens wird die Hülse noch mittels eines Hebels TU durch ein Gegengewicht V (s. Fig. 762) getragen, damit die Bewegung derselben durch die Schwungkugeln leicht erfolge.

Noch ersieht man in PQ, Fig. 763, die Speisepumpe, welche durch ein Kreisexcentrik F und mittels der Excentrikstange FN im Gange erhalten wird.

Statt des Spundes oder spundförmigen Admissionsventils K, Fig. 762, wendet man in neueren Zeiten ein viel leichter zu bewegendes Glockenventil (s. §. 449) an, und läßt dasselbe auch wohl mittels eines Hebelmechanismus durch auf der Schwungradwelle sitzende Daumen in Bewegung setzen. In Fig. 765 ist die Seitenansicht dieses Steuerungsmechanismus

Fig. 765. Fig. 766.

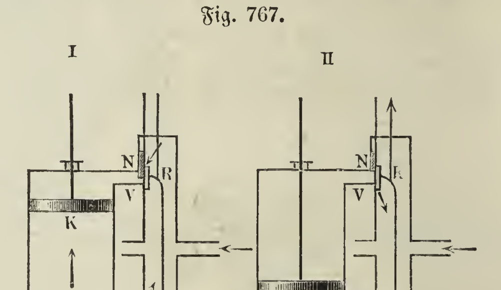


abgebildet. Das Admissionsventil A wird mittels seiner Stange AF durch die Spiralfeder F geschlossen und durch den Winkelhebel BCD eröffnet und letzterer wird mittels einer Stange DE an einen anderen um M drehbaren Hebel EH durch ein Paar der auf der Schwungradwelle W sitzenden Doppeldaumen $N_1 - O_1$, $N_2 - O_2$, $N_3 - O_3$ in Bewegung gesetzt. Das Frictionsrädchen H am Ende des Hebels EH läßt sich mittels einer Schraubenspindel ST, Fig. 766, längs seiner Axe LL verschieben und ist, je nachdem ein größerer oder kleinerer Expansionsgrad gefordert wird, mit dem einen oder anderen Daumenpaar in Berührung zu bringen.

Schiebersteuerung mit beweglichem Sitz. Bei der gewöhnlichen Steuerung mit einem einfachen Schieber werden, wie Fig. 736 darstellt, nahe vor dem Ende des Kolbenwegs beide Dampfwege zugleich eröffnet, beginnt also der Dampfzufluß auf der einen Seite gleichzeitig mit dem Dampf- §. 472

abfluß auf der andern Seite; da aber die bessere Ausnutzung der Dampfkraft fordert, daß das Voreilen des Dampfschiebers auf der Seite des Ablassens größer sei als das Voreilen auf der Seite des Zutritts, so ist bei Anwendung des einfachen Schiebers die Steuerung oder das Zu- und Ablassen des Dampfes eine unvollkommene. Anders ist es dagegen bei Anwendung von zwei Schiebern oder, wie in der neueren Zeit von Napier und Rankine vorgeschlagen worden ist, von einem Schieber mit beweglichem Sitze. Eine ideelle Darstellung eines solchen Schiebermechanismus liefert Fig. 767 I. und II.

Fig. 767.



In I. ist der Kolben K nahe am Ende seines Aufgangs, dagegen in II. nahe am Ende seines Rückgangs; die Dampfwege V und W sind durch die Schieberplatten so bedeckt, daß bei weiterem Niedergang des Schiebers in dem einen Falle durch V der Dampfzutritt und durch W der Dampfabfluß sowie beim weiteren Aufgang desselben im zweiten Falle durch V der Dampfaustritt und durch W der Dampfzufluß erfolgen kann. Um nun aber den Dampfabfluß eher beginnen zu lassen als den Dampfzufluß auf der anderen Seite des Kolbens K, macht man die Weite der Dampfwege V und W variabel, indem man einen beweglichen Sitz NO für die Schieberflächen R und S anbringt. In der Darstellung I. steht dieser gleichsam einen zweiten Schieber bildende Ventilsitz NO in seiner unteren Stellung, wo er den Zutritt des Dampfes durch V, in der Darstellung II. steht derselbe dagegen in seiner oberen Stellung, wo er den Zutritt des Dampfes durch W verzögert, während in beiden Stellungen der Dampfabfluß dadurch gar nicht alterirt wird.

Die specielle Einrichtung eines Adam'schen Entlastungsschiebers mit einem solchen beweglichen Ventilsitz führt Fig. 768 vor Augen. Es ist hier RS der durch die Stange AB zu bewegende Schieber und NO der durch die Stange CN zu verschiebende Schiebersitz, durch welchen die Dampf-

canäle abwechselnd verengt und der Dampfzufluß aus RN und SO verzögert wird. Eine Ansicht des durch ein besonderes Excentrik in Bewegung

Fig. 768.

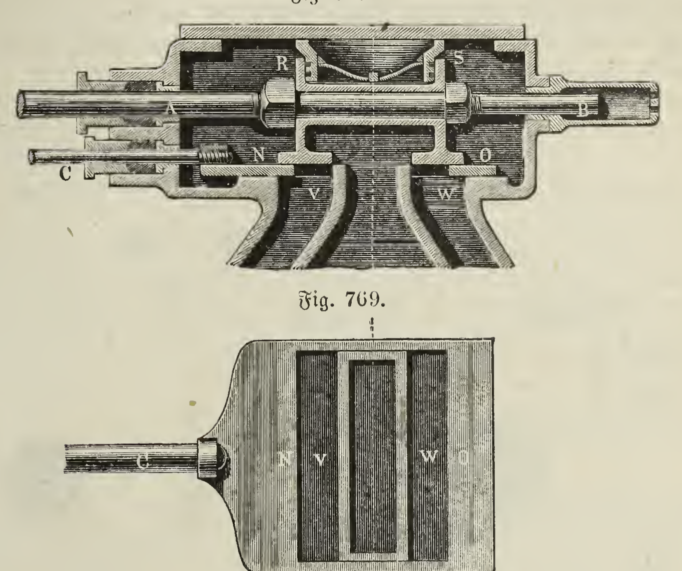
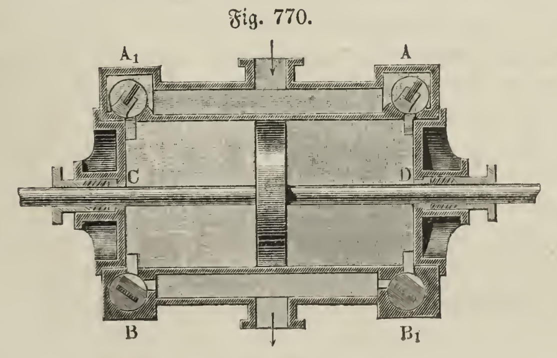


Fig. 769.

zu setzenden Schiebersitzes NO giebt Fig. 769. (Siehe polytechn. Centralblatt, Jahrgang 1867, aus dem Engineer of 18th October 1867.)

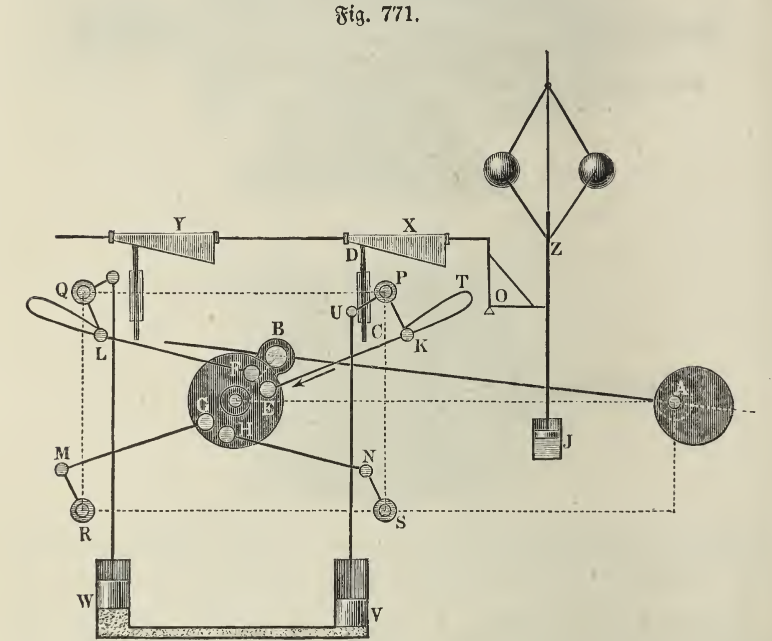
Corliss-Dampfmaschine. Eigenthümlich ist die Steuerung der Corliß-Dampfmaschine. Bei dieser Maschine tritt der Dampf nicht auf demselben Wege aus dem Cylinder, auf welchem er einströmt; es besteht die Steuerung derselben aus vier Drehschiebern, zwei, wie A und A_1, Fig. 770, für die Admission und zwei, wie B und B_1, für die Emission des §. 473

Fig. 770.



Dampfes. Diese Drehschieber sind so nahe wie möglich an den Cylinder *CD* gerückt, damit der schädliche Raum so klein wie möglich ausfalle. Die Steuerung ist theils Excentrik- theils Gewichtssteuerung; ein gewöhnliches Kreisexcentrik *A* setzt durch seine Stange *AB* (siehe die schematische Darstellung in Fig. 771) eine Kreisscheibe *EFGH* in eine schwingende Be-

Fig. 771.



wegung und diese wieder mittels der Stangen *EK*, *FL*, *GM* und *HN* und der zugehörigen Arme *KP*, *LQ*, *MR* und *NS*, theils direct, theils indirect die vier Drehschieber *P*, *Q*, *R* und *S*. Bei den beiden Drehschiebern *R* und *S* für die Emission ist die Verbindung mit den Steuerstangen eine directe; bei den beiden Drehschiebern *P* und *Q* für die Admission ist dagegen ein besonderer Mechanismus eingeschaltet, durch welchen die Verbindung derselben mit den Steuerstangen gelöst wird, so daß nun der eine oder der andere Drehschieber durch ein fallendes Gewicht zurückgedreht und der Dampf abgesperrt wird. Zu diesem Zwecke ist 1) der eine Arm des Winkelhebels, wodurch der Drehschieber in Bewegung gesetzt wird, mit einem Daumen versehen, welcher die Steuerstange *EK* bei ihrem Ausschieben in der Richtung des Pfeils mittels einer Nase ergreift, und dadurch den Drehschieber so stellt, daß der Dampfzutritt zum Cylinder erfolgen kann, ferner ist 2) eine Hemmstange *CD* angebracht, deren Fußende mit der Steuerstange beim wei-

teren Ausschub derselben in Berührung kommt, wodurch das Maul einer am Ende dieser Stange festsitzenden Stahlfeder *T* geöffnet und der Daumen *K* freigemacht wird, so daß nun der Winkelhebel durch das an dem zweiten Arme *PU* desselben hängende Gewicht *V*, sowie der an seiner Axe sitzende Drehschieber in umgekehrter Richtung gedreht und durch denselben der Dampfweg nach dem Cylinder abgesperrt wird, folglich die Expansion des Dampfes in demselben beginnen kann. Gegen Ende des Kolbenwegs wird dann das Emissionsventil *S* mittels der Steuerstange *HN* eröffnet, worauf nun der Abfluß des Dampfes erfolgt.

Der Rückgang des Dampfkolbens beginnt hierauf mit Eröffnung des Admissionsventils *Q* auf der anderen Seite des Kolbens, mittels der Steuerstange *FL*. Mit diesem Rückgange ist auch der Rückgang der ersten Steuerstange und das Wiedereinrücken des Daumens *K* in die Feder *T* verbunden. Später wird das Gewicht *W* am Hebel des anderen Admissionsventils ausgelöst, worauf sich die Vorgänge des ersten Drehschiebers an dem des zweiten wiederholen.

Die Gewichte, durch welche die Drehschieber nach erfolgter Auslösung die Dampfwege abschließen, bewegen sich zur Verhinderung der schädlichen Stöße in mit Luft angefüllten Cylindern *V* und *W*.

Zum Reguliren des Ganges der Maschine dient ein durch einen Winkelhebel *O* an die verschiebbare Hülse des Schwungkugelregulators *Z* angeschlossener horizontaler Steuerbaum mit zwei Keilen *X* und *Y*, deren nach unten gerichtete Flächen dem weiteren Aufsteigen der verticalen Hemmstangen ein Hinderniß entgegensetzen.

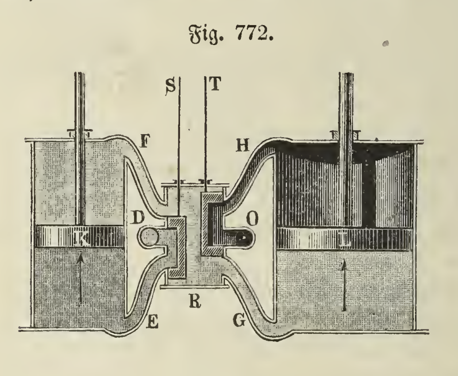
Je nachdem die Umdrehungsgeschwindigkeit dieses Regulators steigt oder fällt, wird der Steuerbaum mehr nach rechts oder links geschoben, dabei die eine oder andere Hemmstange durch die Keile mehr oder weniger herabgedrückt, daher auch das eine oder andere Steuergewicht eher oder später ausgelöst und der zum Cylinder führende Dampfweg verschlossen.

Um die Stöße zwischen den Keilen und den Hemmstangen möglichst sanft zu machen ist endlich noch an der Regulatorhülse ein Kolben angebracht, welcher sich in einem mit Wasser angefüllten Cylinder *J* bewegt, und daher das schnelle Auf- und Niedersteigen der Hülse sowie die plötzliche Verschiebung des Steuerbaums sammt den Keilen verhindert.

Woolf'sche Maschinen. Man kann auch noch dadurch den Dampf §. 474
durch seine Expansion wirken lassen, daß man denselben nach der in einem Cylinder vollbrachten Wirkung noch in einen zweiten und weiteren Cylinder treten und auch auf den Kolben in diesem wirken läßt. Solche aus zwei Cylindern bestehende Expansionsmaschinen werden nach ihrem Erfinder Woolf'sche Maschinen genannt. In Frankreich wurden sie zuerst von

Edward eingeführt, weshalb man sie auch oft nach diesem benennt. Man verwendet durch diese Maschinen Dampf von 3 bis 4 Atmosphären Spannung, läßt denselben im großen Cylinder bis auf das Vierfache sich ausdehnen und condensirt ihn nach vollbrachter Wirkung im großen Cylinder mittels eines gewöhnlichen Condensators. Die Kolbenstangen von beiden Cylindern sind in der Regel an einem und demselben Balancier, und zwar die des kleineren innen und die des größeren außen angeschlossen. Die Einrichtung und Wirkungsweise einer Woolf'schen Dampfmaschine ist aus der ideellen Darstellung in Fig. 772 zu ersehen. Der bei *D* zutretende und in den an der Stange *S* hängenden Schieber eintretende Dampf wird abwechselnd durch die Canäle *E* und *F* in den kleinen Cylinder geführt, setzt daselbst den Kolben *K* in Bewegung, und strömt, nach vollbrachter Wirkung, abwechselnd durch *F* und *E* in die Dampfkammer *R*. Aus dieser wird er durch die Canäle *G* und *H* in den großen Cylinder, sowie von da, nach vollbrachtem Ausschube des Kolbens *L*, in den an der Stange *T* hängenden Schieber geleitet, und gelangt von da zuletzt durch das Rohr *O* zum Abfluß. Beide Dampfkolben gehen, wenn die beiden Dampfschieber die entgegengesetzten Stellungen einnehmen, gleichzeitig auf und nieder.

Fig. 772.

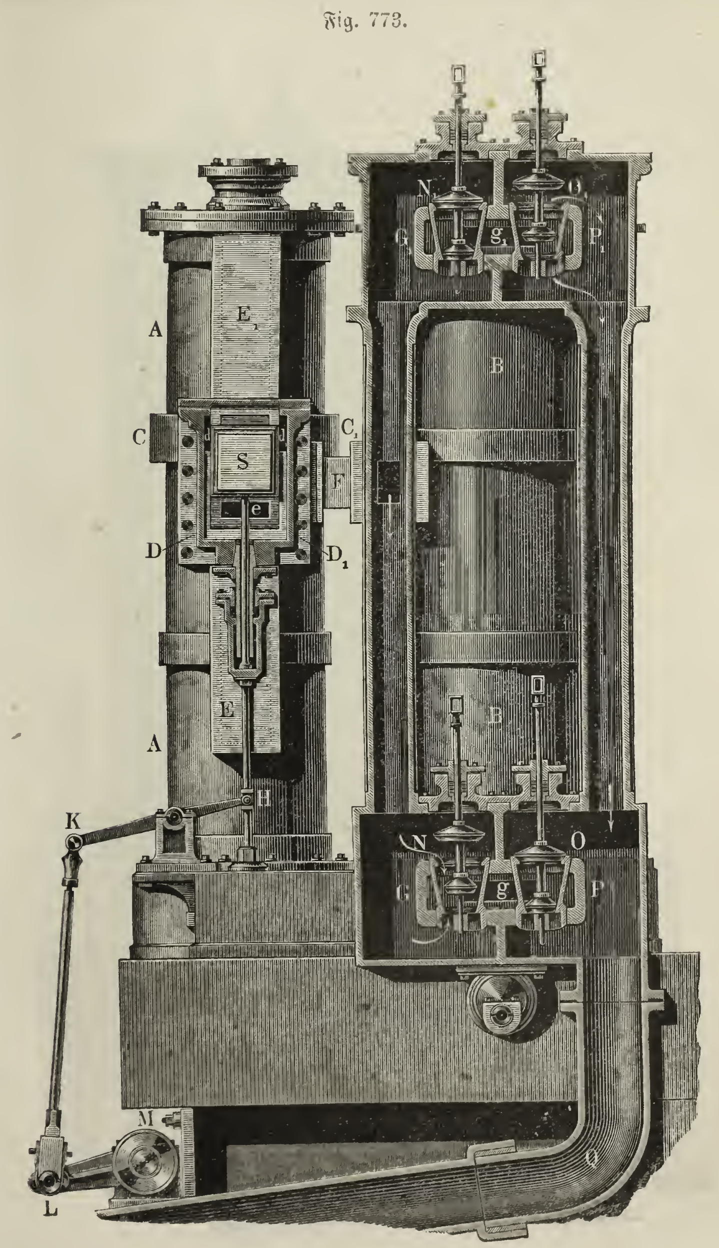


Die Steuerungsverhältnisse einer solchen Maschine lassen sich aus Fig. 773 ersehen.

Hier ist *A A* der kleine Cylinder, in welchem der Dampf zuerst und, nach Befinden, ohne Expansion wirkt, und *B B* der (nur zum Theil sichtbare) große Cylinder, in welchem der Dampf seine Arbeit durch Expansion verrichtet. Der frische Dampf wird dem Cylinder *A A* durch einen ringförmigen, um diesen Cylinder herumlaufenden Canal $C C_1$, welcher mit den Löchern d und d_1 in die Dampfkammer $D D_1$ einmündet, zugeführt. In diese Kammer münden drei andere Canäle E, E_1 und F ein; von denselben führt der eine den Dampf unter, der andere den letztern aber über den Kolben im Cylinder *A A*, der dritte endlich leitet denselben in die Dampfkammer $G G_1$ des zweiten Cylinders. Von den Einmündungen der Canäle E, E_1 und F in die Dampfkammer $D D_1$ bedeckt der Schieber S immer nur je zwei, so daß der frische Dampf stets durch die dritte, z. B. durch e, in einen der Canäle E und E_1 und von da in den Cylinder *A A* strömen, der einmal gewirkt habende Dampf aber durch den anderen Canal E_1 und von

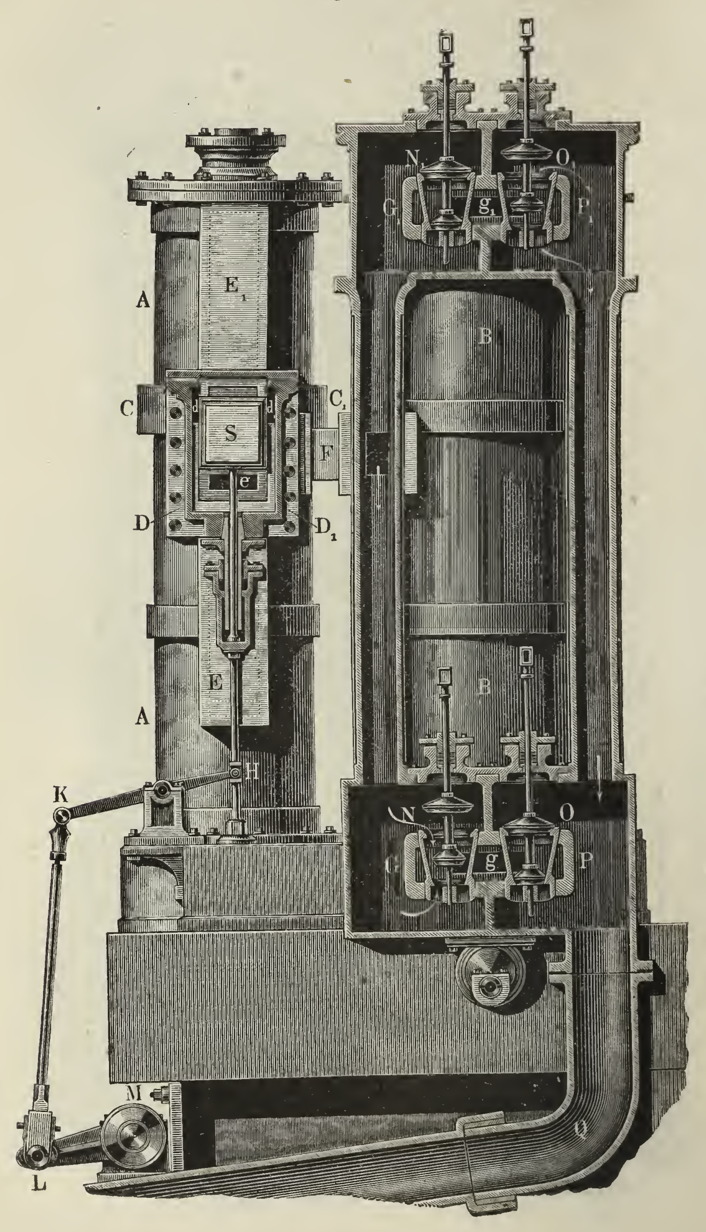
da durch F der Kammer $G\ G_1$ zugeführt werden kann. Der Dampfschieber S erhält seine Bewegung von einem Kreisexcentrik, welches zunächst eine Welle

Fig. 773.



M in schwingende Bewegung setzt, die durch die Hebel *HK* und *LM* und durch die Lenkstange *KL* mit der Schieberstange *SH* in Verbindung gesetzt

Fig. 774.

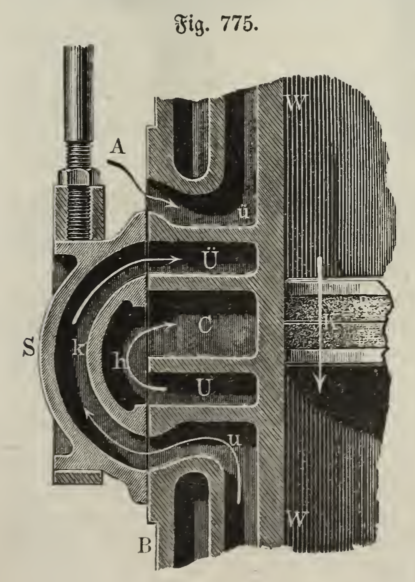


ist. In der Dampfkammer GG_1 befinden sich zwei Doppelventile N und N_1, bei deren Aufziehen die nach dem Cylinder BB führenden Dampfwege g und g_1 eröffnet werden. Neben der Kammer GG_1 befindet sich noch eine andere Kammer PP_1, welche durch zwei andere Ventile O und O_1 ebenfalls mit g und g_1, sowie durch die Röhre Q mit dem Condensator in Communication gesetzt ist. Durch Aufziehen der Ventile O und O_1 wird dem Dampfe, welcher in BB seine zweite und letzte Wirkung hervorgebracht hat, Gelegenheit zum Abflusse in den Condensator verschafft. Das Auf- und Niederlassen der Ventile N, N_1, O und O_1 erfolgt übrigens durch einen aus Stangen und Hebeln zusammengesetzten und an die Welle M angeschlossenen Mechanismus auf eine leicht zu fingirende Weise. Bei der Schieber- und Ventilstellung, welche die Figur vorstellt, strömt der frische Dampf unter den Kolben in AA und treibt folglich diesen empor; gleichzeitig gelangt der in AA einmal wirksam gewesene Dampf auf dem Wege E_1FGN auch unter den Kolben im zweiten Cylinder BB und nöthigt auch diesen zum Aufgange. Bei umgekehrter Stellung des Schiebers und der Ventile findet natürlich auch die umgekehrte Kolbenbewegung Statt. Es steigen also die Kolben in beiden Cylindern gemeinschaftlich auf und nieder.

Die Dampfmaschine von Legavrian ist eine Dampfmaschine nach dem Woolf'schen Principe mit drei Cylindern. (S. Fig. 724, §. 453.)

Statt der Ventilsteuerung oder der Steuerung durch zwei Schieber bringt §. 475

Fig. 775.

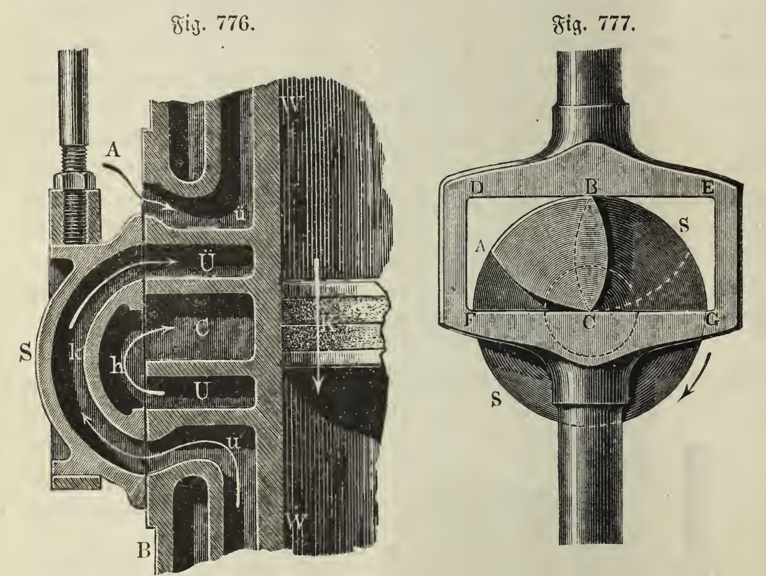


man in neuer Zeit auch den Hick'schen Doppelschieber bei Woolf'schen Dampfmaschinen mit Vortheil zur Anwendung. Dieser Dampfschieber S, Fig. 775, enthält zwei Canäle oder Dampfwege h und k, und bewegt sich auf einem Schieberspiegel AB mit den Ein- und Ausmündungen von fünf Dampfwegen, wovon U und $\ddot{U}$ unter und über den Dampfkolben im großen, sowie u und $\ddot{u}$ unter und über den Dampfkolben im kleinen Cylinder führt, und C mit dem Condensator in Verbindung steht. Bei der Schieberstellung in Fig. 775 tritt der frische Dampf bei $\ddot{u}$ über den kleinen Kolben, während der Dampf

unter dem letzteren, nach vollbrachter Wirkung, von u durch k und bei $\ddot{U}$ über den großen Kolben strömt und der im großen Cylinder zur Wirkung gelangte Dampf vom vorausgegangenen Kolbenaufgang aus U durch h nach C und von da in den Condensator geleitet wird.

Bei der oberen Stellung dieses Doppelschiebers ist die Mündung des Dampfwegs u frei und gelangt unter die Mündung des Schiebercanals k über der Mündung des Dampfwegs $\ddot{u}$, so daß frischer Dampf aus der den Doppelschieber einschließenden Dampfkammer durch u unter den kleinen, und ebenso der Dampf aus dem kleinen Cylinder auf dem Wege k nach U und

Fig. 776. Fig. 777.

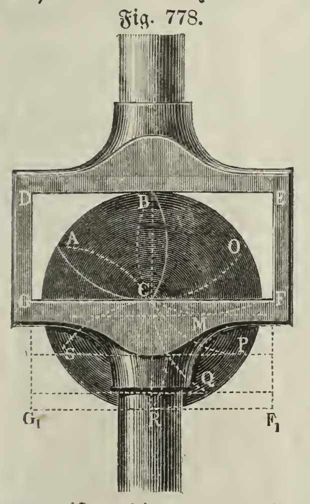


von da unter den großen Kolben treten kann, während der beim vorausgegangenen Niedergang der Kolben verbrauchte Dampf auf dem Wege $U h C$ nach dem Condensator strömt.

Zur Bewegung des Doppelschiebers hat man in neuerer Zeit, nach Hornblower, statt des Kreisexcentriks einen Steuerdaumen in Form eines Bogendreiecks mit Vortheil zur Anwendung gebracht. Dieses Bogendreieck ABC, Fig. 777, wird durch drei gleiche Kreisbögen von je 60 Grad Länge gebildet und sitzt so auf einer rotirenden Scheibe SS, daß es mit der einen Seite AB in den Umfang und mit dem Eckpunkt C in den Mittelpunkt derselben fällt. Zum Angriff der Steuerstange dient ein mit derselben ein Ganzes bildender Rahmen, welcher das Bogendreieck mit den zwei parallelen Seiten DE und FG umfaßt, deren gegenseitiger Abstand $EF = GD$, dem Halbmesser der Scheibe gleich ist.

In der in Fig. 778 abgebildeten Daumenstellung hat der Rahmen soeben seine höchste Stellung erlangt, und es dreht sich nun das Bogendreieck um den Winkel $BCO = 60$ Grad, wobei der Bogen AB mit der Seite DE in Berührung bleibt, folglich ein weiteres Aufsteigen des Schiebers nicht statt hat. Bei der *letzten* Stellung kommt die vordere Dreiecksseite CB mit der Kante FG in geometrische Berührung, und während nun diese Seite allmälig aus der Lage CO in die Lage CP übergeht, sich also wieder um einen Winkel von 60 Grad dreht, rückt der Berührungspunkt M von C nach und nach bis P. Schließlich gelangt die Vorderseite CB durch eine weitere Drehung um 60 Grad noch aus der Lage CP in die Lage CR, wobei der Eckpunkt B aus P nach R kommt und die Rahmenseite FG in die tiefste Stellung geschoben wird. Genau auf dieselbe Weise wie der Niedergang erfolgt nun auch der Aufgang der Schieberstange. Die Bogenseite AB, welche in die Lage PR gekommen ist, gleitet nun an der nach $F_1 G_1$ gelangten unteren Rahmenseite hin, ohne den Rahmen weiter fortzuschieben; ist aber der vordere Eckpunkt nach S und die Vorderseite in die Lage CS gekommen, so gelangt dieselbe mit der oberen Rahmenseite in geometrische Berührung, und es schiebt nun das Bogendreieck den ganzen Rahmen um den der Rahmenweite gleichen Scheibenhalbmesser allmälig wieder empor. Bei diesem Mechanismus der Schieberbewegung ist der Schieber während eines Drittels der Spielzeit in Ruhe, und während zwei Drittel in Bewegung, folglich die Bewegung desselben sowie das Eröffnen und Verschließen der Dampfwege durch denselben rascher als bei Anwendung eines gewöhnlichen Kreisexcentriks.

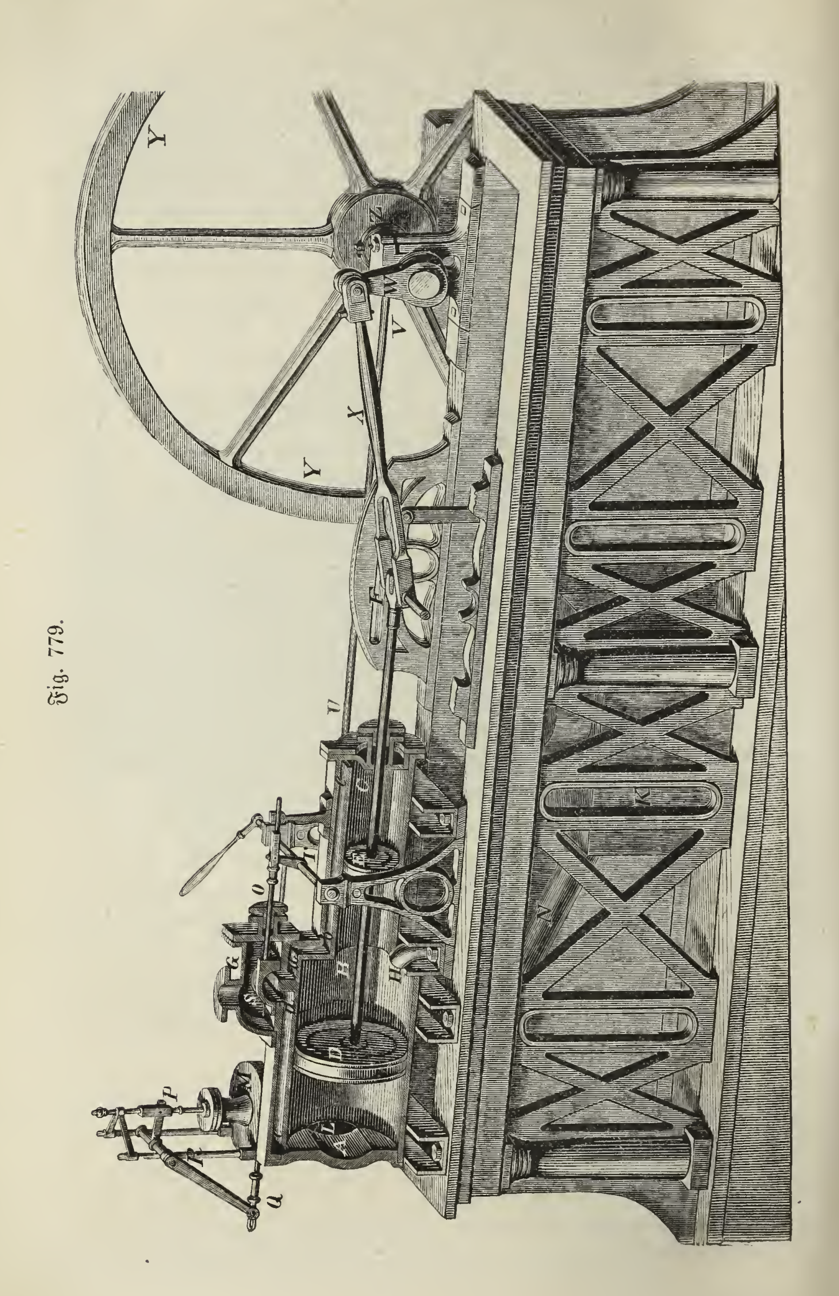
Fig. 778.



Woolf'sche Maschinen, wo der Dampf schon im kleinen Cylinder durch Expansion wirken soll, erhalten außer dem Vertheilungsschieber noch einen besonderen Expansionsschieber.

Sims'sche Maschine. Eine eigenthümliche Construction hat die Expansionsdampfmaschine mit doppelt liegendem Cylinder von Sims. Diese Maschine besteht aus zwei mit ihren Endflächen an einander anstoßenden Cylindern AB und BC, Fig. 779 (a. f. S.), von verschiedenen Weiten und aus zwei auf einer und derselben Kolbenstange DF festsitzenden Kolben D und E, wovon der eine (E) durch den aus der Dampfkammer G mittels §. 476

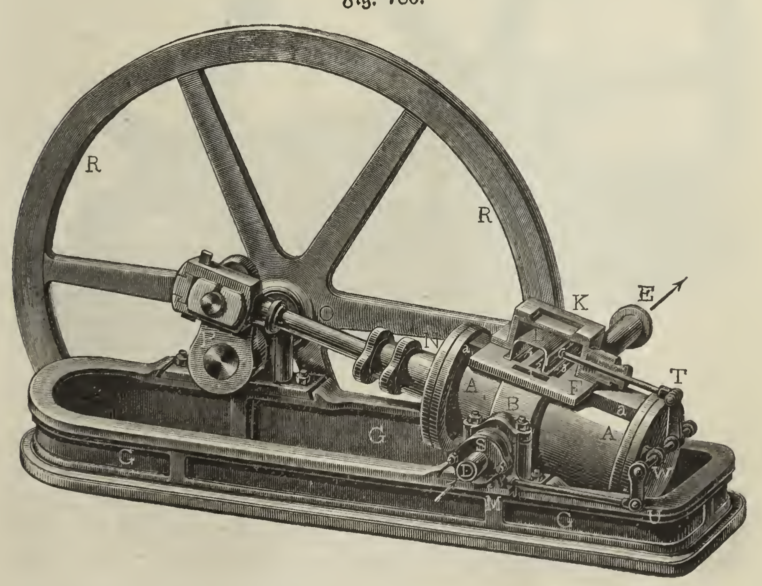
Fig. 779.



des Canales abc zugeführten stark gespannten Dampf nach der einen, und der andere (D) durch den aus dem kleinen Cylinder CE durch die Canäle cba und de strömenden Dampf nach der anderen Richtung bewegt wird. Der Raum DBE zwischen beiden Kolben steht durch ein Rohr H mit dem Condensator K in Verbindung; es findet daher hier ein kleiner Gegendruck Statt, welcher, da D größer als E ist, die Bewegung der Kolbenverbindung in der Richtung ED etwas befördert, und die in der Richtung DE ebenso viel hindert. Der verbrauchte Dampf strömt, nachdem er sich in AB ausgedehnt und den Kolben D ausgeschoben hat, durch einen Canal L in eine (nur von oben zu sehende) Röhre M und von da durch eine Röhre N nach dem Condensator K. Das abwechselnde Zu- und Ablassen des Dampfes wird durch einen Schieber S in der Dampfkammer G und durch ein (hier unsichtbares) Ventil in der Röhre M bewirkt, und beide Theile werden mittels der Stangen O, P und Q, und der Hebel R und T durch die Excentrikstange UV bewegt. Man ersieht auch noch in der Figur die Kurbel W und ihre Stange X, sowie das Schwungrad YY, wodurch die hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange CD in eine nahe gleichförmige Umdrehungsbewegung der Welle Z verwandelt wird (s. The Pract. Mechanic's Journal 1849, July, p. 50, oder das polyt. Centralblatt 1851, Liefer. 1).

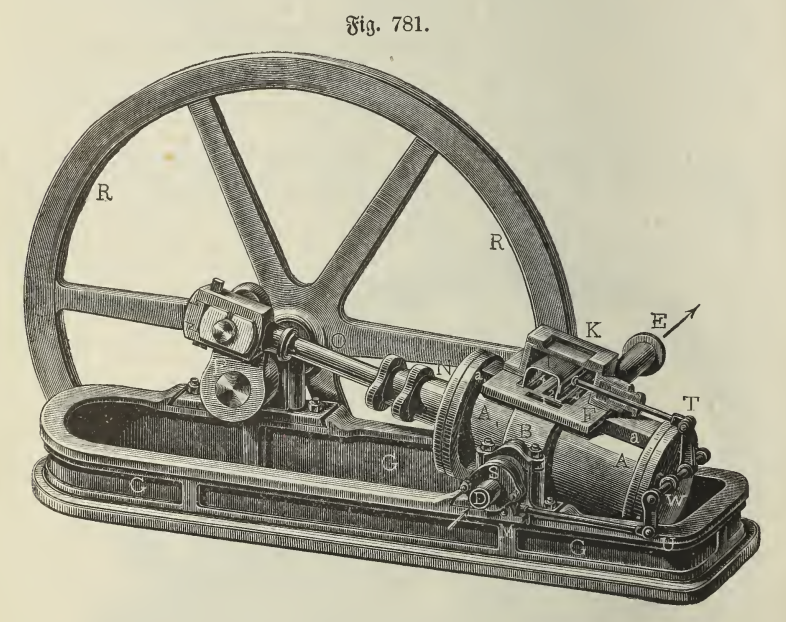
Alban'sche Maschinen. Eine recht einfache oscillirende Dampfmaschine von Dr. Alban in Plau ist Fig. 780 abgebildet (siehe die §. 477

Fig. 780.



„Hochdruckdampfmaschine“ von Alban, Rostock u. s. w.). Es hat hier der Dampfcylinder $A A_1$ zwei angegossene hohle Zapfen, und letztere ruhen in gewöhnlichen Zapfenlagern, wie B (Fig. 401, §. 194), welche auf einem rahmenförmigen Gestelle $G G G$ befestigt sind. Die Röhren D und E, wovon die eine den Dampf zuführt und die andere denselben nach vollbrachter Wirkung ableitet, stehen mit den Zapfenhöhlungen in Communication, und sind darin durch Stopfbüchsen, wie S, abgedichtet. Die Fußplatte F der auf dem Dampfcylinder aufsitzenden, in der Abbildung der Länge nach halb durchschnittenen Dampfkammer K hat vier Mündungen, wovon die vordere (1) durch den Canal B und durch die Höhlung des Zapfens $B S$ mit dem Dampfrohre D, und die mittlere (2) durch einen gleichen Canal auf der anderen Seite des Cylinders und durch die Höhlung des zweiten Zapfens mit dem Austragerohr E communicirt. Die letztere Mündung ist vom (mit abgeschnittener Seitenwand dargestellten) Schieber L stets, und von den ihr zur Seite stehenden Mündungen (3) und (4), ist, je nach der Schieberstellung,

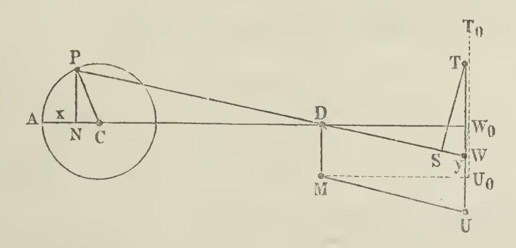
Fig. 781.



nur die eine oder andere bedeckt. Der durch (1) zutretende frische Dampf strömt bei der abgebildeten Schieberstellung durch (3) in den Canal a und von da nahe über dem Boden A in den Cylinder, wogegen der gewirkt habende Dampf durch den Canal a_1 mittels (4) in die Dampfkammer und von da wieder durch (2) in das Austragerohr E geleitet und abgelassen wird. In der ent-

gegengesetzten Schieberstellung, wobei (3) vom Schieber eingeschlossen ist und (4) frei liegt, finden natürlich in a und a_1 die entgegengesetzten Bewegungen des Dampfes Statt. Die Kraft des Dampfkolbens wird hier durch die Kolbenstange O direct auf den Krummzapfen P übertragen. Zur Geradführung der Kolbenstange dient die Stopfbüchse N mit einem ungewöhnlich langen Gehäuse. Um eine möglichst gleichförmige Umdrehungsbewegung zu erhalten, ist noch das Schwungrad RR auf die Krummzapfenwelle aufgesetzt. Zur Bewegung des Schiebers dient ein Hebelmechanismus, dessen Welle W auf dem Boden A des Dampfcylinders gelagert ist. Eine um den festen Punkt M drehbare Lenkstange MU ist an einem und die Schieberstange LT am anderen Arme dieses Hebelmechanismus angeschlossen; in Folge der Schwingung der Welle W um die Axe DE nimmt der Schieber die erforderliche hin- und hergehende Bewegung an. Um sich hiervon die Ueberzeugung zu verschaffen, ist die geometrische Darstellung des ganzen Bewegungsmechanismus der Maschine in Fig. 782 näher zu betrachten. Es bedeutet hier C die Axe der Krummzapfenwelle, D die Drehungsaxe des

Fig. 782.



Dampfcylinders, W die Wellenaxe des Steuerungsmechanismus und M die feste Drehungsaxe des Lenkarmes. Dreht sich der Kurbelarm $CP = r_1$ um den Winkel $ACP = \beta$, so legt der Dampfkolben nahe den Weg

$$AN = x = r_1\,(1 - cos.\,\beta)$$

zurück, und es nimmt die Axe der Kolbenstange die Neigung $ADP = \alpha$ an, welche durch die Formel

$$sin.\,\alpha = \frac{NP}{DP},$$

oder annähernd,

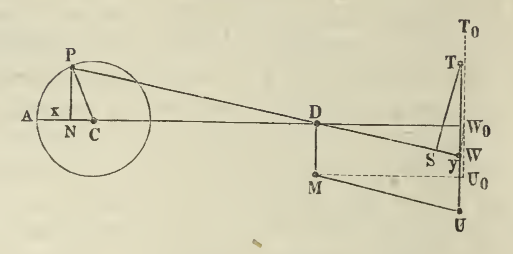
$$sin.\,\alpha = \frac{r_1\,sin.\,\beta}{d}$$

bestimmt ist, wobei d die Entfernung $\overline{CD}$ der Drehungsaxen C und D von einander bezeichnet.

Wenn M senkrecht unter D liegt und die Armlänge WU gleich dem

Abstande DM gemacht wird, so ist das Viereck $DMUW$ bei jeder Lage des Cylinders ein Parallelogramm, und insbesondere ein rechtwinkeliges

Fig. 783.



DMU_0W_0 am Ende des Kolbenhubes, wobei die Axe des Dampfcylinders eine horizontale Lage hat. Bezeichnet nun a die Länge $WT = W_0T_0$ des Schieberarmes, so hat man den dem Neigungswinkel $WDW_0 = STW = \alpha$ entsprechenden Schieberweg:

$$\overline{WS} = \overline{WT} sin. STW,$$

d. i.:

$$y = a\, sin.\, \alpha$$

$$= \frac{a r_1\, sin.\, \beta}{d},$$

oder, wenn man noch $\frac{a r_1}{d}$ durch r bezeichnet,

$$y = r\, sin.\, \beta.$$

Diese Formeln stimmen mit denen für die Schieberbewegung durch Excentriks befundenen (s. §. 459), wenn man darin das Voreilen gleich Null setzt, vollkommen überein.

§. 478 **Dampfleistung ohne Expansion.** Im Folgenden muß nun noch gezeigt werden, wie die Leistung einer Dampfmaschine zu berechnen ist. Fassen wir zunächst den einfachsten Fall ins Auge, setzen wir nämlich eine doppeltwirkende Maschine ohne Expansion voraus, und vernachlässigen wir vorerst auch alle Verluste und Nebenhindernisse. Bezeichnen wir den Dampfdruck auf die Flächeneinheit (auf den Quadratzoll) durch p, und den Inhalt der Kolbenfläche (in Quadratzollen) durch F, so erhalten wir für die Kraft, mit welcher der Dampf den Kolben auf der einen Seite drückt,

$$P = Fp.$$

Ist nun noch s der Kolbenweg, so hat man die Arbeit der Maschine bei einem Auf- oder Niedergange:

$$Ps = Fps = Fs \, . \, p,$$

oder, da Fs zugleich das verbrauchte Dampfvolumen $\dot{V}$ angiebt,

$$Ps = Vp.$$

Macht die Maschine pr. Minute n Spiele, legt also der Kolben in der Minute den Weg $2s$ $n$mal zurück, so ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit

$$v = \frac{n \, . \, 2s}{60} = \frac{ns}{30},$$

und daher auch die theoretische Leistung der Dampfmaschine pr. Secunde:

$$L = Pv = \frac{ns}{30} \cdot Fp = \frac{n}{30} Vp = Qp,$$

wenn Q das pr. Secunde verbrauchte Dampfquantum bezeichnet.

Diese Berechnung gilt aber nur dann, wenn kein Druck auf die Gegenseite des Kolbens statthat, wenn also auf dieser Seite eine vollkommene Condensation vorhanden ist; erleidet aber diese Seite einen Gegendruck q auf jeden Quadratzoll, also den Druck Fq im Ganzen, so fällt die arbeitende Kraft

$$P = F(p - q),$$

und daher die Leistung pr. Secunde

$$L = \frac{ns}{30} F(p-q) = \frac{n}{30} V(p - q) = Q(p - q)$$

aus.

Bei den Condensationsmaschinen ist q der Dampfdruck im Condensator, bei den Maschinen ohne Condensation hingegen ist q der Atmosphärendruck $= 14,10$ Pfund auf den Quadratzoll $= 1,033$ Kilogramme auf das Quadratcentimeter, zu setzen. Giebt man V oder Q in Cubikfuß, und bezieht man p und q auf den Quadratzoll, so muß man natürlich

$$L = \frac{n}{30} \; V \, . \, 144 \, (p - q) = Q \, . \, 144 \, (p - q),$$

d. i.:

$$L = 4,8 \, n V (p - q) = 144 \, Q \, (p - q) \text{ Fußpfund}$$

setzen; giebt man aber V und Q in Cubikmetern und bezieht p und q auf ein Quadratcentimeter, so hat man

$$L = 10000 \cdot \frac{n}{30} V \, (p - q) = 10000 Q \, (p - q) \text{ Kilogrammmeter}$$

anzunehmen, da der Druck auf den Quadratfuß $(12)^2 = 144$mal so groß ist, als auf den Quadratzoll, und der Druck auf das Quadratmeter den Druck auf das Quadratcentimeter $(100)^2 = 10000$mal enthält.

Beispiel. Der innere Cylinderdurchmesser einer Dampfmaschine ohne Condensation ist 18 Zoll und der Hub 40 Zoll; die Zahl der Spiele pr. Minute = 24 und die Spannung der Dämpfe $3^1/_2$ Atmosphären; welche Kraft und Leistung giebt diese Maschine? Die Kolbenfläche ist

$$F = (^{18}/_2)^2 \pi = 81 \pi = 254{,}47 \text{ Quadratzoll},$$

folglich die arbeitende Kraft:

$$P = F(p - q) = 254{,}47 \,.\, 14{,}10\,(3{,}5 - 1) = 8970 \text{ Pfund}.$$

Nun ist noch $n = 24$ und $s = {^{40}/_{12}} = {^{10}/_3}$ Fuß, daher folgt die theoretische Leistung dieser Maschine:

$$L = \frac{ns}{30} P = \frac{24\,.\,10}{30\,.\,3} \cdot 8970 = 23920 \text{ Fußpfund}$$

$$= \frac{23920}{480} = 49{,}8 \text{ Pferdekräfte}.$$

§. 479 **Wirkung durch Expansion.** Wird der Dampf, nachdem der Treibkolben den Weg s durchlaufen hat, abgesperrt, so wirkt er bei Durchlaufung des übrigen Kolbenweges durch Expansion. Hierbei sind aber mehrerlei Fälle denkbar. Entweder bleibt die Temperatur des Dampfes während der Expansion unverändert, oder es vermindert sich dieselbe, je mehr sich der Dampf ausdehnt, wobei sich nach Befinden ein Theil desselben condensirt. Der erste Fall kann nur dann eintreten, wenn der Dampfcylinder von außen mit warmer Luft oder frischem Dampfe umgeben ist und die Bewegung des Dampfkolbens sehr langsam erfolgt, wobei der Dampf die zu seiner Expansion nöthige Wärme in sich aufnehmen kann. Unter der Voraussetzung, daß sich der ungesättigte Dampf wie die atmosphärische Luft verhalte, ist auch vorauszusetzen, daß die Expansivkraft des abgesperrten Wasserdampfes dem Mariotte'schen Gesetze (s. Bd. I, §. 387 und §. 388) folge.

Der zweite Fall ist unter verschiedenen Verhältnissen denkbar. Wenn, wie besonders bei einer lebhaften Dampfbildung vorkommt, der abgesperrte Dampf nicht trocken ist, sondern mit fortgerissenes Wasser enthält, so wird sich letzteres während der Expansion desselben in Dampf verwandeln, und deshalb unter Umständen die ganze abgesperrte Dampfmenge hierbei in gesättigtem Zustande bleiben. Unter dieser Voraussetzung läßt sich nach Pambour bei Beurtheilung der Spannkraft des Dampfes im Dampfcylinder von der Navier'schen Formel (s. §. 390)

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p}$$

für das specifische Dampfvolum Gebrauch machen, während nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$\mu = \frac{\alpha}{p}$$

anzunehmen ist.

Unter der Voraussetzung, daß dem Dampfe während der Expansion weder Wärme zugeführt noch Wärme entzogen wird, können wir ferner auch annehmen, daß die Expansivkraft desselben, in Uebereinstimmung mit dem Poisson'schen Gesetze (§. 376), im umgekehrten Verhältnisse zu einer Potenz des Volumens stehe, wobei aber statt des Exponenten $\varkappa$ für Luft ein durch Versuche zu bestimmender Exponent ν in Anwendung zu bringen ist.

Endlich giebt auch die mechanische Wärmetheorie die Mittel zur Bestimmung der Expansivkraft des Dampfes im Dampfcylinder an die Hand.

Anmerkung. Poncelet und Morin, zunächst auch Tredgold u. s. w. legen bei ihren Theorien der Dampfmaschinen die erste Regel zu Grunde, wogegen Pambour als Verfechter der zweiten Regel aufgetreten ist (s. Théorie des machines à vapeur, par Pambour, Paris 1844, deux. édition, vorzüglich die Introduction). Morin zeigt auf experimentellem Wege, daß die Zugrundelegung des Mariotte'schen Gesetzes bei Entwickelung einer Theorie der Dampfmaschinen eine vollkommen genügende Uebereinstimmung mit der Erfahrung gewähre (s. Leçons de mécanique pratique, 3[me] partie, par A. Morin, Paris 1846). Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Theorie der Dampfmaschinen s. Clausius: Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn, 1864; ferner Zeuner: Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, Leipzig, bei A. Felix, 1866, sowie Combes: Théorie mécanique de la chaleur et de ses applications, Paris 1863, und Hirn: Théorie mécanique de la chaleur, Paris 1865.

Expansion nach dem Mariotte'schen Gesetz. Bei Zugrundelegung des Mariotte'schen Gesetzes läßt sich die Wirkung des Dampfes sowie die eines jeden Gases nach Bd. I, §. 388 bestimmen. Geht 1 Cubikfuß Gas oder Dampf aus der stärkeren Spannung p in die schwächere Spannung p_1 über, so verrichtet derselbe hiernach die Arbeit: §. 480

$$A_1 = p\, Log.\, nat. \left(\frac{p}{p_1}\right) = 2{,}3026\, p\, Log. \left(\frac{p}{p_1}\right).$$

Ist das anfängliche, der Spannung p entsprechende Volumen $= V$ und dagegen das der Spannung p_1 entsprechende Volumen V_1, so hat man:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{V_1}{V},$$

und daher auch die mechanische Arbeit, welche das Volumen V bei seiner Ausdehnung und Zurückführung auf V_1 ausgiebt,

$$A_1 = Vp\, Log.\, nat. \left(\frac{V_1}{V}\right).$$

Bei Anwendung auf die Dampfmaschinen mit Expansion in einem Cylinder ist, wenn s den Weg des Dampfkolbens beim Anfange der Expansion, und dagegen s_1 den ganzen Kolbenweg bezeichnet,

$$V = Fs \quad \text{und} \quad V_1 = Fs_1,$$

daher die gesuchte Arbeit

$$A_1 = Fsp\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right)$$

zu setzen. Addiren wir hierzu noch die Arbeit

$$A_2 = Fsp$$

vor der Absperrung, so erhalten wir die ganze Arbeit:

$$A = Fsp + Fsp\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right)$$

$$= Fsp\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right)\right]$$

$$= Fs_1 p_1 \left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right)\right].$$

Berücksichtigt man noch den Gegendruck q auf der anderen Seite des Kolbens, bringt man also die Leistung $Fs_1 q$ in Abzug, so erhält man die vollständige Arbeit des Dampfes pr. Kolbenschub:

$$A = Fs_1 p_1 \left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right]$$

$$= Fsp\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right].$$

Die Leistung der Maschine pr. Secunde folgt nun wie in §. 479

$$L = \frac{n}{30} Fsp\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right]$$

$$= 144 \cdot \frac{n\,Vp}{30}\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right] \text{ Fußpfund,}$$

wenn V das pr. Auf- oder Niedergang verbrauchte Dampfquantum Fs bezeichnet, oder endlich

$$L = 144\,Qp\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1}\right] \text{ Fußpfund,}$$

wenn Q das pr. Secunde verbrauchte Dampfquantum von der Spannung p ausdrückt.

Beispiel. Welche Leistung giebt die im letzten Beispiele (§. 478) betrachtete Dampfmaschine, wenn dieselbe den Dampf bei 0,4 des ganzen Kolbenweges absperrt? Es ist hier $s_1 = 40$ Zoll $= {}^{10}/_3$ Fuß, $s = 0{,}4 \,.\, 40 = 16$ Zoll $= {}^4/_3$ Fuß; ferner der Druck auf den Kolben vor der Expansion:

$$Fp = 254{,}47 \,.\, 3{,}5 \,.\, 14{,}10 = 12558 \text{ Pfund,}$$

und die Leistung pr. Auf- oder Niedergang:

$$L_1 = 12558 \,.\, {}^4/_3 \left(1 - \frac{1}{0{,}4 \,.\, 3{,}5} + 2{,}3026\ Log.\ {}^{10}/_4\right)$$

$= 16744\,(1 - 0{,}71428 + 2{,}3026\,.\,0{,}39794) = 17872\,(0{,}28572 + 0{,}91630)$
$= 16744\,.\,1{,}20202 = 20126$ Fußpfund,

und folglich die Leistung pr. Secunde:

$$L = \frac{n}{30}\,.\,20126 = \frac{24}{30}\,.\,20126 = 0{,}8\,.\,20126 = 16100 \text{ Fußpfund}$$
$= 33{,}5$ Pferdekräfte.

Dieselbe Maschine leistet zwar ohne Dampfabsperrung nahe 50 Pferdekräfte, erfordert aber auch 2,5mal so viel Dampf als beim Arbeiten mit Expansion.

Pambour's Theorie. Die Leistung der Expansionsdampfmaschinen §. 481
läßt sich mit Zugrundelegung der Navier'schen Regel auf folgende Weise finden. Das specifische Dampfvolumen, oder das Verhältniß des Dampfvolumens zum Wasservolumen ist bei der Spannung p nach §. 390:

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p},$$

und folglich bei der Spannung p_1:

$$\mu_1 = \frac{\alpha}{\beta + p_1}.$$

Die Division beider Gleichungen giebt:

$$\frac{\mu}{\mu_1} = \frac{\beta + p_1}{\beta + p},$$

und daher:

$$p_1 = (\beta + p)\,\frac{u}{\mu_1} - \beta;$$

bezeichnet s den Kolbenweg vor der Dampfabsperrung und s_1 den Weg an einer Stelle während der Expansion, wo die Spannung p in p_1 übergegangen ist, so hat man für diesen Moment den Dampfdruck auf die Kolbenfläche F:

$$P = Fp_1 = F\left(\frac{(\beta + p)\,s}{s_1} - \beta\right) = F\,\frac{(\beta + p)\,s}{s_1} - F\beta.$$

Nun ist aber der erste Theil dieses Druckes dem Kolbenwege s umgekehrt proportional und der zweite Theil $F\beta$ constant; daher bestimmt sich auch die dem ersten Theile entsprechende Arbeit während der Expansion nach dem Mariotte'schen Gesetze wie oben:

$$A_1 = F(\beta + p)\,s\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1}{s}\right),$$

und die dem zweiten Theile entsprechende Leistung, durch einfache Multiplication mit dem Wege $(s_1 - s)$ während der Expansion, also

$$A_2 = -F\beta\,(s_1 - s).$$

Hiernach ist also die mechanische Arbeit des Dampfes während der Expansion:

$$A_1 + A_2 = F(\beta + p)\, s\, Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - F\beta\,(s_1 - s),$$

und daher die während des vollständigen Kolbenweges:

$$A = Fps + A_1 + A_2 = Fps + F(\beta + p)\, s\, Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - F\beta\,(s_1 - s),$$

und mit Berücksichtigung der durch den Gegendruck Fq verloren gehenden Leistung Fqs_1:

$$A = Fs(\beta + p) + Fs(\beta + p)\, Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - F\beta s_1 - Fqs_1$$

$$= Fs\,(\beta + p)\left[1 + Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p}\cdot\frac{s_1}{s}\right],$$

oder, da $\frac{s_1}{s} = \frac{\beta + p}{\beta + p_1}$ ist,

$$A = Fs(\beta + p)\left[1 + Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right]$$

$$= 144\, V(\beta + p)\left[1 + Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] \text{ Fußpfund},$$

wenn V das pr. Kolbenschub verbrauchte Dampfquantum in Cubikfußen bezeichnet.

Die Leistung pr. Secunde ist, bei n Spielen pr. Minute:

$$L = \frac{n}{30}\cdot A$$

$$= \frac{n}{30}\cdot 144\, V(\beta + p)\left[1 + Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right]$$

$$= 144\, Q\,(\beta + p)\left[1 + Log.nat.\left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] \text{ Fußpfund},$$

wenn Q das pr. Secunde verbrauchte Dampfquantum in Cubikfußen ausdrückt.

Setzen wir $\beta = 0$, so geht diese Formel in die vorige, auf das Mariotte'sche Gesetz basirte, über.

Beispiel. Welche Leistung verspricht die in den letzten Beispielen berechnete Dampfmaschine nach der zuletzt gefundenen Regel? Es ist hier

$$144\, Q = \frac{n}{30}\cdot Fs = {}^{24}/_{30}\,.\, 254{,}47\,.\, {}^{4}/_{3} = 271{,}44 \text{ Cubikfuß},$$

ferner nach Bd. II, §. 390, $\beta = 0{,}2922\,.\,14{,}10 = 4{,}120$, also

$$\beta + p = 4{,}120 + 3{,}5\,.\,14{,}10 = 4{,}120 + 49{,}350 = 53{,}47,$$

$$\beta + p_1 = \frac{s_1}{s}\,(\beta + p) = 0{,}4\,.\,53{,}47 = 21{,}388$$

und

$$\beta + q = 4{,}120 + 14{,}10 = 18{,}22,$$

daher die gesuchte Leistung pr. Secunde:

$$L = 271{,}44 \,.\, 53{,}47 \left(1 + 0{,}91630 - \frac{18{,}22}{21{,}38}\right)$$
$$= 271{,}44 \,.\, 53{,}47\,(1{,}91630 - 0{,}85220) = 271{,}44 \,.\, 53{,}47 \,.\, 1{,}0641$$
$$= 15444 \text{ Fußpfund} = 32{,}2 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die vorige Formel gab $L = 33{,}5$ Pferdekräfte.

Expansion in zwei Cylindern. Die Leistungsformel für zweicylindrige Expansionsmaschinen läßt sich auf dem im Vorstehenden betretenen Wege nun auch leicht ableiten. Nehmen wir an, daß der Dampf im kleinen Cylinder ohne Expansion wirke; bezeichnen wir die Kolbenfläche dieses Cylinders durch F, den Kolbenhub in demselben durch s, die Fläche des größeren Kolbens durch F_1, den Hub dieses Kolbens durch s_1, setzen wir ferner die volle Spannung $= p$, die Spannung des ausgedehnten Dampfes $= p_1$ und endlich den Gegendruck auf jeden Quadratzoll des großen Kolbens $= q$. Dann haben wir für jeden einfachen Kolbenweg die Arbeit des in voller Spannung befindlichen Dampfes, auf den kleinen Kolben übergetragen: §. 482

$$A_1 = Fps,$$

dagegen die durch den Gegendruck q auf den großen Kolben verloren gehende Leistung:

$$A_2 = F_1 q s_1,$$

und endlich die durch die Expansion gewonnene Leistung, nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$A_3 = Vp\, Log.\, nat.\, \frac{V_1}{V} = Fsp\, Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right).$$

Demnach folgt die ganze Arbeit beider Kolben bei einem Auf- oder Niedergange:

$$A = A_1 - A_2 + A_3$$
$$= Fsp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right)\right] - F_1 s_1 q$$
$$= Fsp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{q}{p_1}\right]$$
$$= 144\, Vp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{q}{p_1}\right]$$
$$= 144\, Vp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{q}{p}\left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right)\right] \text{ Fußpfund.}$$

Endlich ist die Leistung der Maschine pr. Secunde:

$$L = \frac{n}{30} \cdot 144\, Vp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{q}{p_1}\right]$$
$$= 144\, Qp\left[1 + Log.\, nat. \left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{q}{p_1}\right] \text{ Fußpfund.}$$

Legt man die Pambour-Navier'sche Regel zu Grunde, so erhält man, wie leicht zu ermessen ist,

$$L = 144\, Q\,(\beta + p)\left[1 + Log. nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] \text{ Fußpfund.}$$

Anmerkung. Die Expansionsleistung des Dampfes zerfällt bei den Woolf'schen Dampfmaschinen in eine gewonnene und in eine verloren gehende; jene nimmt der Kolben im großen Cylinder auf, diese wird dem Kolben im kleinen Cylinder entzogen; es ist die oben angegebene Expansionsleistung die Differenz beider. Nach dem Mariotte'schen Gesetze ist die Leistung, welche der große Kolben während der Expansion des Dampfes aufnimmt,

$$= \frac{F F_1 s s_1}{F_1 s_1 - F s}\, p\, Log. nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right),$$

und dagegen die, welche dem kleinen Kolben entzogen wird,

$$= \frac{F^2 s^2}{F_1 s_1 - F s}\, p\, Log. nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right),$$

also das Verhältniß beider zu einander, $= \frac{F_1 s_1}{F s}$, und ihre Differenz, wie oben,

$$= F p s\; Log.\; nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right).$$

Beispiel. Welche Leistung verspricht eine Woolf'sche Dampfmaschine, welche Dämpfe von $3\frac{1}{2}$ Atmosphären Spannung benutzt und diese im Condensator bis auf $\frac{1}{8}$ Atmosphäre Spannung niederschlägt, bei folgenden Dimensionen. Durchmesser des kleinen Cylinders: $d = 18$ Zoll, Hub in demselben, $s = 40$ Zoll, Durchmesser des größeren Cylinders, $d_1 = 30$ Zoll, Hub in demselben, $s_1 = 50$ Zoll, also das Ausdehnungsverhältniß:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{F_1 s_1}{F s} = \frac{d_1^2 s_1}{d^2 s} = \frac{30^2 . 50}{18^2 . 40} = \frac{5^2 . 5}{3^2 . 4} = \frac{125}{36} = 3{,}4722.$$

Die erste auf das Mariotte'sche Gesetz basirte Formel giebt die gesuchte Leistung pr. Secunde, wenn die Maschine pr. Minute 24 Spiele macht:

$$L = {}^{24}/_{30} . (9)^2 \pi . {}^{40}/_{12} . 3{,}5 .. 14{,}10 \left(1 + Log. nat.\; 3{,}4722 - {}^{1}/_{8} . \frac{3{,}4722}{3{,}5}\right)$$
$$= 0{,}8 . 270 . 49{,}35\, \pi\; (1 + 2{,}3026 . 0{,}5406 - 0{,}1240)$$
$$= 10660\, \pi\; (0{,}8760 + 1{,}2448) = 10660 . 2{,}1208 . \pi$$
$$= 71024 \text{ Fußpfund} = 148{,}0 \text{ Pferdekräfte.}$$

Nach der Pambour'schen Theorie folgt hingegen diese Leistung:

$$L = 0{,}8 . 270 . 53{,}47\, \pi \left(2{,}2448 - \frac{4{,}120 + {}^{1}/_{8} . 14{,}10}{53{,}47} . 3{,}4722\right)$$
$$= 11550\, \pi \left(2{,}2448 - \frac{5{,}8825 . 3{,}4722}{53{,}47}\right)$$
$$= 11550\, \pi\; (2{,}2448 - 0{,}3820) = 11550 . 1{,}8628\, \pi$$
$$= 67592 \text{ Fußpfund} = 140{,}8 \text{ Pferdekräfte.}$$

Drittes Expansionsgesetz. Wenn man annimmt, daß sich die Spannung des Dampfes während der Expansion desselben umgekehrt wie eine Potenz des Dampfvolumens verhält, so ergiebt sich für die Leistung des Dampfes ein ähnlicher Ausdruck wie für die Luft (s. §. 378). Ist wieder p die Dampfspannung vor der Expansion, sowie s der Kolbenweg beim Eintritt der Expansion und ν eine Erfahrungszahl, so setzen wir die dem Kolbenwege x entsprechende Dampfspannung: §. 483

$$y = \left(\frac{s}{x}\right)^{\nu} p,$$

und folglich den ganzen Dampfdruck auf die Kolbenfläche F:

$$Fy = F\left(\frac{s}{x}\right)^{\nu} p.$$

Bewegt sich nun der Kolben um das Wegelement σ fort, so verrichtet derselbe in Folge dieses Druckes das Arbeitselement

$$Fy\sigma = Fp\left(\frac{s}{x}\right)^{\nu}\sigma = Fps^{\nu}x^{-\nu}\sigma,$$

und es ist daher die während Durchlaufung des Weges $x - s$ verrichtete mechanische Arbeit:

$$A_1 = Fps^{\nu}\sigma \text{ mal Summe aller Werthe vom } x^{-\nu}$$

$$= Fps^{\nu}\sigma\,[s^{-\nu} + (s + \sigma)^{-\nu} + (s + 2\sigma)^{-\nu} + \cdots + x^{-\nu}]$$

$$= Fps^{\nu}\sigma \begin{Bmatrix} (\sigma)^{-\nu} + (2\sigma)^{-\nu} + (3\sigma)^{-\nu} + \cdots + (m\sigma)^{-\nu} + (m+1)\sigma^{-\nu} \\ + \cdots + (n\sigma)^{-\nu} - (\sigma)^{-\nu} + (2\sigma)^{-\nu} + (3\sigma)^{-\nu} + \cdots + (m\sigma)^{-\nu} \end{Bmatrix}$$

$$= Fps^{\nu}\sigma \begin{Bmatrix} (\sigma)^{-\nu}[1^{-\nu} + 2^{-\nu} + 3^{-\nu} + \cdots + m^{-\nu} + (m+1)^{-\nu} + \cdots + n^{-\nu}] \\ - (\sigma)^{-\nu}(1^{-\nu} + 2^{-\nu} + 3^{-\nu} + \cdots + m^{-\nu}) \end{Bmatrix}$$

oder, da $1^{-\nu} + 2^{-\nu} + 3^{-\nu} + \cdots + m^{-\nu} = \frac{m^{-\nu+1}}{-\nu+1}$ ist,

$$A_1 = Fps^{\nu}\sigma^{-\nu+1}\left(\frac{n^{-\nu+1}}{-\nu+1} - \frac{m^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right)$$

$$= \frac{Fps^{\nu}\sigma^{-\nu+1}}{\nu - 1}(m^{-\nu+1} - n^{-\nu+1}),$$

folglich da $s = m\sigma$ und $x = n\sigma$, also $m = \frac{s}{\sigma}$ und $n = \frac{x}{\sigma}$ zu setzen ist:

$$A_1 = \frac{Fps^{\nu}\sigma^{-\nu+1}}{\nu - 1}\left(\frac{s^{-\nu+1} - x^{-\nu+1}}{-\nu+1}\right) = \frac{Fps^{\nu}}{\nu - 1}\left(\frac{1}{s^{\nu-1}} - \frac{1}{x^{\nu-1}}\right),$$

oder, wenn man für x den ganzen Kolbenweg s_1 einführt:

$$A_1 = \frac{Fps^{\nu}}{\nu - 1}\left(\frac{1}{s^{\nu-1}} - \frac{1}{s_1^{\nu-1}}\right).$$

Addirt man noch hierzu die gewonnene Arbeit Fps vor der Expansion, und bringt die durch den Gegendruck Fq verloren gehende Arbeit in Abzug, so erhält man die gewonnene Arbeit eines Kolbenschubes:

$$A = Fps + \frac{Fps^\nu}{\nu - 1}\left(\frac{1}{s^{\nu-1}} - \frac{1}{s_1{}^{\nu-1}}\right) - Fqs_1$$
$$= Fps\left[1 + \frac{1}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\nu-1}\right] - Fqs_1$$
$$= Fsp\left[1 + \frac{1}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\nu-1} - \frac{qs_1}{ps}\right].$$

Nach Rankine (s. dessen Manual of Applied Mechanics) ist für Dampfspannungen unter 12 Atmosphären annähernd $\nu = {}^{10}/_9$, folglich

$$\nu - 1 = {}^1/_9 \text{ und}$$

$$A = Fsp\left[10 - 9\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/9} - \frac{qs_1}{ps}\right]$$

zu setzen.

Macht die Maschine pr. Minute n Spiele, so ist das verbrauchte Dampfquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{2\,n}{60}Fs = \frac{nFs}{30},$$

und die Leistung der Dampfmaschine pr. Secunde:

$$1)\qquad L = Qp\left[10 - 9\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/9} - \frac{qs_1}{ps}\right],$$

oder, wenn man den Dampfdruck p auf den Quadratzoll bezieht:

$$L = 144\ Qp\left[10 - 9\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/9} - \frac{qs_1}{ps}\right] \text{ Fußpfund.}$$

Für $s_1 = s$ ist $\frac{s}{s_1} = 1$, und daher:

$$L = 144\ Qp\left(1 - \frac{q}{p}\right) \text{ Fußpfund, wie §. 478 angiebt.}$$

Für Woolf'sche oder zweicylindrige Dampfmaschinen ist

$$L = 144\,Qp\left[10 - 9\left(\frac{Fs}{F_1 s_1}\right)^{1/9} - \frac{qF_1 s_1}{pFs}\right] \text{ Fußpfund.}$$

Nach Professor Grashof ist $\nu = 1{,}14$ (s. das Vorwort desselben zu Völker's Werk „der Indicator" Berlin 1863) und Professor Zeuner findet $\nu = 1{,}135$ (s. dessen Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, Leipzig 1866.

Führt man $\nu = 1{,}135$, also $\nu - 1 = 0{,}135$ und $\frac{1}{\nu - 1} = \frac{1}{0{,}135}$ $= 7{,}4074$ ein, so erhält man

$$2)\ L = Qp\left[8{,}4074 - 7{,}4074\left(\frac{s}{s_1}\right)^{0,135} - \frac{q s_1}{p s}\right].$$

Beispiel 1. Für die eincylindrige Expansionsdampfmaschine in den Beispielen zu den §§. 480, und 481 ist

$$\frac{s_1}{s} = {}^{40}\!/_{16} = {}^{5}\!/_{2},\ \frac{q}{p} = \frac{1}{3^1\!/_2} = {}^{2}\!/_{7} \text{ und}$$

$$144\,Qp = 16744 \,.\, \frac{n}{30} = 16744 \,.\, {}^{24}\!/_{30} = 16744 \,.\, 0{,}8 = 13395 \text{ Pfund},$$

folglich die theoretische Leistung derselben nach Rankine:

$$L = 144\,Qp\left[10 - 9\left(\frac{s}{s_1}\right)^{1/9} - \frac{q s_1}{p s}\right] = 13395\,.\left(10 - 9\sqrt[9]{0{,}4} - {}^{2}\!/_{7}\cdot\frac{5}{2}\right)$$

$$= 13395\,.\,(10 - 8{,}1288 - 0{,}7143) = 13395\,.\,1{,}1569 = 15500 \text{ Fußpfund}$$
$$= 32{,}3 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die Berechnung nach der ersten, auf das Mariotte'sche Gesetz gegründeten Formel gab

$$L = 33{,}5 \text{ Pferdekräfte,}$$

und die nach der Pambour'schen Formel

$$L = 32{,}2 \text{ Pferdekräfte.}$$

Beispiel 2. Für die Woolf'sche Dampfmaschine im Beispiele zu §. 482 ist

$$\frac{V_1}{V} = \frac{F_1 s_1}{F s} = 3{,}4722,\ \frac{q}{p} = \frac{1}{8\,.\,3{,}5} = {}^{1}\!/_{28}$$

und

$$144\ Qp = 10660\,\pi \text{ Fußpfund,}$$

daher folgt nach der letzten Theorie für dieselbe Maschine:

$$L = 10660\,\pi\left(10 - \frac{9}{\sqrt[9]{3{,}4722}} - {}^{1}\!/_{28}\cdot 3{,}4722\right)$$

$$= 10660\,\pi\,(10 - 7{,}8375 - 0{,}1240)$$
$$= 10660\,\pi\,.\,2{,}0385 = 68270 \text{ Fußpfund}$$
$$= 142{,}2 \text{ Pferdekräfte,}$$

während oben mittels der ersten Formel

$$L = 148{,}0 \text{ Pferdekräfte}$$

und mittels der zweiten

$$L = 140{,}8 \text{ Pferdekräfte}$$

gefunden worden ist.

Beispiel 3. Für die eincylindrige Expansionsdampfmaschine in den obigen Beispielen, wo $\frac{s_1}{s} = \frac{40}{16} = \frac{5}{2}$, $\frac{q}{p} = {}^{2}\!/_{7}$ und $144\ Qp = 13395$ ist, hat man nach Formel 2)

$$L = 13395\,[8{,}4074 - 7{,}4074\,(0{,}4)^{0,135} = 0{,}7143]$$
$$= 13395\,(8{,}4074 - 7{,}2597) = 13395\,.\,1{,}1477$$
$$= 15374 \text{ Fußpfund} = 32{,}0 \text{ Pferdekräfte,}$$

während oben mittels verschiedener anderen Formeln

$L = 32{,}3$; $33{,}5$ und $32{,}2$ Pferdekräfte gefunden worden ist.

(§. 484) **Anwendung der mechanischen Wärmetheorie.** Wenn die Gewichtseinheit (1 Pfund) Wasser das Volumen σ hat, und unter dem constanten Drucke p in Dampf vom Volumen ϱ verwandelt wird, so läßt sich die hierbei verrichtete mechanische Arbeit des letzteren

$$L = p\,(\varrho - \sigma)$$

setzen, wie leicht zu finden ist, wenn man annimmt, daß ein anfangs über dem Wasser stehender Kolben KK, Fig. 784, vom Querschnitt Eins den Weg $BK = AK - AB = \varrho - \sigma$ zurücklegt, und beachtet, daß dieser Weg auch zugleich das Volumen $BKKB = \varrho - \sigma$, die d. i. Differenz zwischen dem Dampfvolumen ϱ und dem anfänglichen Wasservolumen σ ist.

Fig. 784.

Nach der mechanischen Wärmetheorie ist nun die bei Verrichtung dieser Arbeit verschwundene Wärmemenge

$$m = \frac{L}{A} = \frac{1}{A}\,p\,(\varrho - \sigma),$$

wenn A das mechanische Aequivalent der Wärme (s. §. 379) bezeichnet, wofür wir auch

$$m = \frac{1}{A}\,pu$$

schreiben können, wenn wir die Differenz $s - \sigma$ zwischen dem Dampf- und dem Wasservolumen durch u bezeichnen.

Diese verschwundene Wärme ist jedenfalls ein Theil der sogenannten latenten oder Verdampfungswärme $W - \omega t$, welche wir hier mit w bezeichnen wollen, und wie oben §. 380, nach Regnault

$$w = W - \omega t = 606{,}50 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$$

setzen können, und wird die äußere latente Wärme genannt, während der in den Dampf wirklich übergegangene Theil

$$r = w - m = w - \frac{1}{A}\,pu$$

den Namen die innere latente Wärme erhalten hat.

Den Vergleichungen des Herrn Professor Zeuner zufolge ist mit großer Genauigkeit

$$r = 575{,}40 - 0{,}791\,t \text{ und daher}$$

$$m = \frac{1}{A}\,pu = w - r$$

$$= 31{,}10 + 0{,}096\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3$$

zu setzen, wenn t die Temperatur des aus Wasser von Null Grad Wärme erzeugten Dampfes angiebt.

Aus $m = w - r$ folgt

$$u = \frac{A m}{p} = \frac{A}{p}(w - r),$$

und daher das Volumen der Gewichtseinheit Dampf:

$$\varrho = u + \sigma = \frac{A m}{p} + \sigma, \text{ und zwar}$$

$$\varrho = \frac{424\, m}{p} + 0{,}001,$$

da anzunehmen ist, daß 1 Kilogramm Wasser das Volumen $\sigma = 1$ Decimeter $= 0{,}001$ Cubikmeter habe, und daß das mechanische Wärmeäquivalent $A = 424$ Kilogrammeter betrage (s. §. 379).

Nun folgt schließlich das sogenannte specifische Dampfvolumen, d. i. das Verhältniß des Dampfvolumens zu dem des Wassers bei einem und demselben Gewicht:

$$\mu = \frac{\varrho}{\sigma} = 1 + \frac{424\, m}{\sigma p} = 1 + \frac{424000\, m}{p}$$

$$= 1 + \frac{424000}{p}(31{,}10 + 0{,}096\, t - 0{,}00002\, t^2 - 0{,}0000003\, t^3),$$

oder, wenn man p in Atmosphären zu 10335 Kilogramm pr. Quadratmeter Fläche angiebt,

$$\mu = 1 + \frac{1275{,}9 + 3{,}9385\, t - 0{,}00082051\, t^2 - 0{,}000012308\, t^3}{p},$$

wie schon oben in §. 391 angegeben wird.

Mit ziemlicher Genauigkeit läßt sich nach den Berechnungen des Herrn Professor Zeuner annähernd, wenn der Dampfdruck p in Atmosphären angegeben wird,

$$p\varrho^{1{,}0646} = 1{,}704 \text{ setzen, wonach}$$

$$\varrho = 1{,}6498\, p^{-0{,}9393} \text{ und}$$

$$\mu = 1649{,}8\, p^{-0{,}9393} \text{ folgt.}$$

Wenn in einem Gefäße AKK, Fig. 785 (a. f. S.), eine Gewichtseinheit (§. 485)
Flüssigkeit vorhanden ist, wovon sich ein Theil ξ in Dampfgestalt befindet, und der übrige Theil $(1 - \xi)$ im liquiden Zustand (Wasser) ist, so können wir nach dem Obigen setzen:

Das Volumen des Dampfes:

$$v_1 = \xi \varrho, \text{ sowie das des Wassers:}$$

$$v_2 = (1 - \xi)\sigma, \text{ und daher das der Mischung}$$

$$v = v_1 + v_2 = \xi \varrho + (1 - \xi)\sigma = \xi(\varrho - \sigma) + \sigma = \xi u + \sigma.$$

Um durch fortgesetzte Wärmezuführung die Dampfmenge v um ein Element $\partial v = u \partial \xi$ zu vergrößern, ist der elementare Wärmezusatz

1) $\partial Q = w \partial \xi = \frac{w\, dv}{u}$ nöthig.

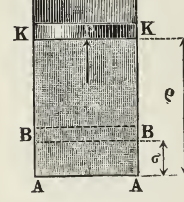
Der mechanischen Wärmetheorie zufolge ist auch, wenn Y eine Function der Temperatur und Pressung bezeichnet,

$$\partial Q = \frac{1}{A}\, Y \partial v, \text{ und}$$

$$\frac{Y}{T} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

wobei $T = a + t = 273^0 + t$, die absolute Temperatur bezeichnet, und ∂p das einer unendlich kleinen Temperaturzunahme ∂t entsprechende Wachsthum der Pressung p bezeichnet; daher hat man

Fig. 785.



$$2)\quad \partial Q = \frac{1}{A}\, T\, \frac{\partial p}{\partial t}\, \partial v,$$

und es ergiebt sich durch Gleichsetzen beider Ausdrücke für ∂Q unter 1) und 2)

$$3)\quad \frac{w}{u} = \frac{T}{A}\, \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{a + t}{A} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right).$$

Die Wärmemenge einer aus ξ Dampf und $(1 - \xi)$ Wasser zusammengesetzten Flüssigkeit, d. i. die Summe $n + \xi r$ der Flüssigkeitswärme $n = \int w \partial t$ und der inneren latenten Wärme ξr, geht in

$$n_1 + \xi_1 r_1$$

über, wenn die Temperatur t in t_1, das Dampfquantum ξ in ξ_1, die Flüssigkeitswärme n in n_1 und die innere latente Wärme r in r_1 umgesetzt wird; es hat folglich bei dieser Zustandsveränderung die anfängliche Wärme der zusammengesetzten Flüssigkeit um

$$n_1 + \xi_1 r_1 - (n + \xi r), \text{ oder}$$

$$n_1 - n + \xi_1 r_1 - \xi r$$

zu- oder abgenommen, je nachdem t_1 größer oder kleiner als t ist.

Die entsprechende innere Arbeit der Wärme ist

$$4)\quad L = A\, (n_1 - n + \xi_1 r_1 - \xi r),$$

daher das Element derselben, wenn man $q_1 - q$ durch ∂q und $\xi_1 r_1 - \xi r$ durch $\partial\, (\xi r)$ ersetzt,

$$\partial L = A\, [\partial n + \partial\, (\xi r)],$$

und addirt man hierzu die mechanische Arbeit $p \partial v$, welche bei der Ausdehnung der Flüssigkeitsmasse um das Volumelement ∂v verrichtet wird, so erhält man die der vorausgesetzten Zustandsveränderung entsprechende Arbeit

$$\partial L = A\, [\partial n + \partial\, (\xi r)] + p \partial v,$$

sowie umgekehrt, die der Flüssigkeit mitzutheilende Wärmemenge

$$\partial Q = \frac{\partial L}{A} = \partial n + \partial\, (\xi r) + \frac{1}{A}\, p \partial v.$$

Da ferner $v = \xi u + \sigma$ ist, so läßt sich

$$p \partial v = p \partial (\xi u) = \partial (\xi p u) - \xi u \partial p$$ setzen, so daß nun

$$\partial Q = \partial n + \partial (\xi r) + \frac{1}{A} [\partial (\xi p u) - \xi u \partial p]$$ folgt.

Dem Obigen zufolge ist aber

$$r = w - m = w - \frac{1}{A} p u,$$ also auch

$$\xi r = \xi w - \frac{1}{A} \xi p u,$$ und

$$\partial (\xi r) = \partial \left(\xi w - \frac{1}{A} \xi p u\right),$$ sowie

$$\frac{u T}{A} \partial p = w \partial t, \text{ oder } \frac{u \partial p}{A} = \frac{w \partial t}{T},$$ daher folgt

$$\partial Q = \partial n + \partial (\xi w) - \frac{\xi w \partial t}{T}.$$

Ferner ist noch der bekannten Differenzialformel:

$$\partial \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \partial x - x \partial y}{y^2}$$ zufolge,

$$\partial (\xi w) - \frac{\xi w \partial t}{T} = \frac{T \partial (\xi w) - \xi w \partial (T - a)}{T} = T \left(\frac{T \partial (\xi w) - \xi w \partial T}{T^2}\right)$$

$$= T . \partial \left(\frac{\xi w}{T}\right),$$ daher läßt sich auch

5) $$\partial Q = \partial n + T . \partial \left(\frac{\xi w}{T}\right)$$ setzen.

Endlich hat man noch $\partial n = w \partial t$, und $x \partial n = w x \partial t$, daher auch

$$\partial Q = \partial n + \partial (\xi w) - \frac{\xi w \partial t}{T}$$

$$= w \partial t - \xi w \partial t + w \partial \xi + \xi \partial w + \xi w \partial t - \frac{\xi w \partial t}{T}$$

$$= (1 - \xi) w \partial t + w \partial \xi + \xi \left(w + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{T}\right) \partial t,$$

wofür man nach Clausius

6) $$\partial Q = (1 - \xi) w \partial t + w \partial \xi + \xi h \partial t$$

schreibt, und wobei man die von der Temperatur t abhängige Function

$$w + \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{w}{T}$$ durch h bezeichnet.

In der letzten Formel 6) giebt das Glied $(1 - \xi) w \partial t$ denjenigen Theil der aufgenommenen Wärme an, welcher auf die Erhöhung ∂t der Temperatur der Flüssigkeitsmenge $(1 - \xi)$ verwendet worden ist; ferner stellt das

Glied $w \partial \xi$ den Wärmeaufwand vor, welchen die Flüssigkeitsmenge $\partial \xi$ bei ihrer Verwandlung in Dampf in Anspruch nimmt, und endlich repräsentirt $\xi h \partial t$ den Theil der Wärme ∂Q, welcher auf die bereits vorhandene Dampfwärme übergeht, und als die specifische Wärme des Dampfes angesehen werden kann.

(§. 486) **Das adiabatische Pressungsgesetz.** Wenn während der Expansion oder Compression einer Flüssigkeit weder Wärme zu- noch abgeführt wird, so ändert sich der Druck p derselben nach dem sogenannten adiabatischen Pressungsgesetz, und die Curve, welche dasselbe graphisch darstellt, heißt auch die adiabatische Curve. Bei der atmosphärischen Luft fällt dieses Pressungsgesetz mit dem in §. 376 gefundenen Poisson'schen Gesetze zusammen; für den Wasserdampf ist es aber ein besonderes, dasselbe wird durch die Formel 5) des letzten Paragraphen ausgedrückt, wenn man der Voraussetzung entsprechend darin $\partial Q =$ Null setzt, so daß man die Gleichung

$$\partial n + T \partial \left(\frac{\xi w}{T}\right) = 0 \text{ erhält.}$$

Hiernach ist $\partial \left(\frac{\xi w}{T}\right) = -\frac{\partial n}{T}$, daher

$$\frac{\xi w}{T} = -\int \frac{\partial n}{T} = -\tau, \text{ oder } \frac{\xi w}{T} + \tau = 0,$$

wenn man das zwischen den Grenzen $T = 0$ und $T = t$ genommene Integral $\int \frac{\partial n}{T}$ mit τ bezeichnet. Da

$n = \omega t = t + 0{,}00002\, t^2 + 0{,}0000003\, t^3$ ist (siehe §. 380), so hat man

$$\partial n = (1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2)\, \partial t, \text{ daher}$$

$$\frac{\partial n}{T} = (1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2)\, \frac{\partial t}{T}$$

$$= [1 + 0{,}00004\,(T - a) + 0{,}0000009\,(T - a)^2]\, \frac{\partial T}{T}$$

$$= \frac{1 - 0{,}00004\, a + 0{,}0000009\, a^2}{T}\, \partial T$$

$$+ (0{,}00004 - 0{,}0000018\, a)\, \partial T + 0{,}0000009\, T \partial T,$$

so daß nun, wenn man $a = 273$ einsetzt,

$$\frac{\partial n}{T} = 1{,}05615\, \frac{\partial T}{T} - 0{,}0004514\, \partial T + 0{,}0000009\, T \partial T, \text{ daher}$$

$$\int \frac{\partial n}{T} = 1{,}05615\, Log.nat.\, T - 0{,}0004514\, T + 0{,}00000045\, T^2,$$

und die gesuchte Temperaturfunction

$$1)\ \tau = \int_a^T \frac{\partial n}{T} = 1{,}05615\ Log.\ nat. \left(\frac{T}{a}\right) - 0{,}0004514\ (T - a)$$
$$+ 0{,}00000045\ (T^2 - a^2) = 1{,}05615\ Log.\ nat. \left(\frac{a + t}{a}\right)$$
$$- 0{,}0004514\, t + 0{,}00000045\, (2\, a\, t + t^2) \text{ folgt.}$$

Nimmt man annähernd im Mittel $\omega = 1{,}0224$ an, so erhält man

$$2)\ \tau = \omega \int_a^T \frac{\partial T}{T} = \omega\ Log.\,nat. \left(\frac{T}{a}\right)$$
$$= 1{,}0224\ Log.\,nat. \left(\frac{a + t}{a}\right).$$

Sind für eine gewisse Anfangstemperatur $T_1 = a + t_1 = 273 + t_1$ die Werthe von w, n und ξ, w_1, n_1 und ξ_1, so hat man auch

$$\frac{\xi_1\, w_1}{T_1} + \tau_1 = 0, \text{ und daher}$$

$$3)\qquad \frac{\xi\, w}{T} + \tau = \frac{\xi_1\, w_1}{T_1} + \tau_1.$$

Kennt man die Werthe von ξ_1, w_1, T_1 und τ_1 für den Anfangszustand, so kann man mit Hülfe der letzteren Gleichung die einer anderen Temperatur entsprechende specifische Dampfmenge berechnen, indem man setzt:

$$\xi = \frac{T}{w} \left(\frac{\xi_1\, w_1}{T_1} + \tau_1 - \tau\right).$$

Hat man dann noch die Volumendifferenz

$$4)\ u = \varrho - \sigma = \frac{A\, m}{p} = \frac{424}{p}\ (31{,}10 + 0{,}096\, t - 0{,}00002\, t^2$$
$$- 0{,}0000003\, t^3)$$

ermittelt, so kann man in dem einen oder anderen Fall die Volumina der z. B. aus Dampf und Wasser bestehenden zusammengesetzten Flüssigkeit:

$$v_1 = \xi_1\, u_1 + \sigma \text{ und } v = \xi\, u + \sigma,$$

sowie das Expansions- oder Compressionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{\xi\, u + \sigma}{\xi_1\, u_1 + \sigma_1} \text{ berechnen.}$$

Fällt ξ kleiner aus als ξ_1, so folgt, daß während der Volumenveränderung eine Verminderung der specifischen Dampfmenge und daher ein theilweises Niederschlagen des Dampfes als Wasser stattgefunden hat, wie bei der Expansion des Dampfes im Cylinder einer Dampfmaschine gewöhnlich eintritt.

Beispiel. Wenn sich in einem Dampfcylinder 1 Kilogramm gesättigter Wasserdampf von 4 Atmosphären Druck ohne Beimischung von Wasser befindet, und

sich derselbe beim Ausschieben des Kolbens bis auf den Druck von 1 Atmosphäre ausdehnt, so läßt sich fragen: welche Veränderung erleidet hierbei das specifische Dampfvolumen, die Dichtigkeit des Dampfes u. s. w.

Es ist hier $p_1 = 4$ Atmosphären, und die Temperatur des Dampfes $t_1 = 144$ Grad (s. Tabelle II, Seite 875), folglich $T_1 = 273 + 144 = 417^0$, und nach der obigen Formel (1)

$$\tau_1 = 1{,}05615\, Log. nat. \left(\frac{417}{273}\right) - 0{,}0004514 \,.\, 144 + 0{,}00000045\,(144\,.\,546 + 144^2)$$
$$= 0{,}4474 - 0{,}0650 + 0{,}0447 = 0{,}4271;$$

ferner hat man für $t_1 = 144^0$,

$$w_1 = 606{,}50 - 0{,}695 \,.\, 144 - 0{,}00002 \,.\, 144^2 - 0{,}0000003 \,.\, 144^3$$
$$= 606{,}50 - 100{,}08 - 0{,}41 - 0{,}90 = 505{,}11,$$

und daher, wenn man noch $x_1 = 1$ einführt, weil man es mit trockenem Dampf zu thun hat,

$$\frac{\xi_1 w_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{505{,}11}{417} + 0{,}4271 = 1{,}6384.$$

Nach der Expansion ist der Dampfdruck $p = 1$ Atmosphäre, daher, unter der Voraussetzung, daß sich derselbe hierbei noch im gesättigten Zustande befindet, die Temperatur desselben: $t = 100$ Grad, und $T = 373^0$. Hiernach folgt

$$\tau = 1{,}05615\, Log. nat. \left(\frac{373}{273}\right) - 0{,}0004514 \,.\, 100 + 0{,}00000045\,(100\,.\,546 + 100^2)$$
$$= 0{,}32964 - 0{,}01607 = 0{,}31356, \text{ ferner}$$
$$w = 606{,}50 - 69{,}50 - 0{,}20 - 0{,}30 = 536{,}50 \text{ und}$$
$$\frac{\xi w}{T} + \tau = \frac{536{,}5\,\xi}{373} + 0{,}31356 = \frac{w_1}{T_1} + \tau_1 = 1{,}6384.$$

Die Auflösung dieser Gleichung giebt die specifische Dampfmenge nach erfolgter Expansion:

$$\xi = \frac{(1{,}6384 - 0{,}31356)\,.\,373}{536{,}5} = 0{,}9211 \text{ Kilogramm.}$$

Da das ursprüngliche Dampfquantum 1 Kilogramm betrug, so hat sich folglich bei der Expansion des Dampfes im Dampfcylinder 0,0789 Kilogramm Dampf als Wasser niedergeschlagen, und es ist hiernach auch die Annahme, daß der Dampf während der Expansion gesättigt bleibt, gerechtfertigt.

Ferner hat man noch die Volumendifferenz

$$u_1 = \varrho_1 - \sigma = \frac{424}{p_1}\,(31{,}10 + 0{,}096\, t - 0{,}00002\, t^2 - 0{,}0000003\, t^3),$$

oder, da der Dampfdruck pr. Quadratmeter $p = 10335$ Kilogramm zu setzen ist,

$$u_1 = \frac{424}{4\,.\,10335}\,(31{,}10 + 0{,}096\,.\,144 - 0{,}00002\,.\,144^2 - 0{,}0000003\,.\,144^3)$$
$$= \frac{106}{10335} \cdot 43{,}613 = 0{,}4474, \text{ folglich das anfängliche Dampfvolumen:}$$

$v_1 = u_1 + \sigma = 0{,}4484$; und ebenso ist für das Ende des Kolbenschubs

$$u = \varrho - \sigma = \frac{424}{10335}\,(31{,}10 + 0{,}096\,.\,100 - 0{,}00002\,.\,100^2 - 0{,}0000003\,.\,100^3)$$
$$= \frac{424\,.\,40{,}20}{10335} = 1{,}6492,$$

daher das Volumen des Dampf- und Wassergemenges

$$v = \xi u + \sigma = 1{,}6492 \,.\, 0{,}9211 + 0{,}0010 = 1{,}5200,$$

und das Expansionsverhältniß:

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{1{,}5200}{0{,}4484} = 3{,}390.$$

Wenn anfänglich im Dampfcylinder das Flüssigkeitsgemenge aus 0,9 Kilogr. Dampf und 0,1 Kilogramm Wasser bestanden hätte, welches vielleicht vom Dampf aus dem Dampfkessel mit fortgerissen sein könnte, so wäre

$$\frac{\xi_1 w_1}{T_1} + \tau_1 = \frac{0{,}9 \,.\, 505{,}11}{417} + 0{,}4271 = 1{,}5173, \text{ daher}$$

$$\xi = \left(\frac{1{,}5173 - 0{,}3136}{536{,}5}\right) \,.\, 373 = 0{,}8369 \text{ Kilogramm.}$$

Hierbei würde folglich 0,9000 — 0,8369 = 0,0631 Kilogramm Dampf während der Expansion condensirt werden, und es wäre

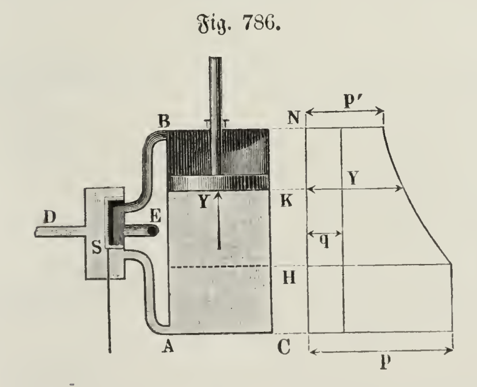
$$v_1 = \xi_1 u + 0{,}001 = 0{,}9 \,.\, 0{,}4474 + 0{,}001 = 0{,}4037 \text{ und}$$
$$v = \xi u + 0{,}001 = 0{,}8369 \,.\, 1{,}6492 + 0{,}001 = 1{,}3812,$$

daher das Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{v}{v_1} = \frac{1{,}3812}{0{,}4037} = 3{,}419.$$

§. 487 **Theoretische Leistung einer Dampfmaschine nach der mechanischen Wärmetheorie.** Bei der Dampfmaschine $CABD$, Fig. 786, sei s der Kolbenhub CH während des vollen Dampfdrucks p, s_1 der ganze Kolbenweg CN, nach dessen Zurücklegung der Dampfdruck in p_1 übergegangen ist, und x der veränderliche Kolbenweg CK, welchem die allmälig abnehmende Dampfspannung y entspricht, endlich sei q der Gegendruck, welcher längs des ganzen Kolbenwegs s_1 der Bewegung des Kolbens entgegenwirkt.

Fig. 786.



Bei Durchlaufung des Kolbenwegs s wirkt der Dampf auf die Kolbenfläche F mit der Kraft $P = Fp$, und leistet die durch die Formel

$$L_0 = Fps = Fsp = Vp = \frac{Mp}{\gamma} = \varrho M p$$

auszudrückende mechanische Arbeit, in welcher V das verbrauchte Dampfquantum nach dem Volumen, und $M = V\gamma = \frac{V}{\varrho}$ dasselbe nach dem Gewichte bezeichnet.

Wenn der Dampfkolben nach dem Absperren des Dampfes durch den Schieber s noch den Weg $HN = s_1 - s$ zurücklegt, hierbei das specifische Dampfvolumen aus ξ in ξ_1, die Flüssigkeitswärme n in n_1 und die innere latente Wärme des Dampfes aus r in r_1 übergeht, so liefert dem adiabatischen Gesetze zufolge, welches voraussetzt, daß weder eine Wärmezuführung noch eine Wärmeableitung statthat, der Dampf die Expansionsarbeit

$$L_1 = AM\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1),$$ s. Formel 4) des (§. 485).

Nun geht aber noch durch den Gegendruck q die mechanische Arbeit

$$L_2 = Fqs_1 = Fs_1 q = \frac{Vs_1}{s}\,q = \frac{Ms_1 q}{\gamma s} = \varrho\,Mq\,\frac{s_1}{s}$$

verloren, daher folgt schließlich die gewonnene Arbeit bei einem Kolbenausschube:

$$1)\ L = L_0 + L_1 - L_2 = L_1 + L_0 - L_2$$
$$= AM\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + V\left(p - \frac{s_1}{s}\,q\right)$$
$$= V\left[A\gamma\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + p - \frac{s_1}{s}\,q\right]$$
$$= M\left[A\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + \varrho\left(p - \frac{s_1}{s}\,q\right)\right].$$

Hierzu ist das specifische Dampfvolumen des expandirten Dampfes nach der Formel

$$2)\qquad \xi_1 = \frac{T_1}{w_1}\left(\xi\,\frac{w}{T} + \tau - \tau_1\right)$$ zu berechnen.

Macht die Dampfmaschine pr. Minute n Spiele, so ist das verbrauchte Dampfquantum pr. Secunde im Durchschnitt

$$Q = \frac{2\,n\,As}{60} = \frac{nV}{30},$$

und daher die Leistung derselben pr. Secunde:

$$3)\ L = Q\left[A\gamma\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + p - \frac{s_1}{s}\,q\right],$$

oder, wenn p und q die Drücke auf den Quadratzoll Kolbenfläche angeben und das Dampfquantum Q in Cubikfuß ausgedrückt wird,

$$4)\ L = Q\left[A\gamma\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + 144\left(p - \frac{s_1}{s}\,q\right)\right]$$ Fußpfd.

Beispiel. Für die in dem Beispiel (von §. 480 u. s. w.) berechnete Dampfmaschine war $p = 3\frac{1}{2}$ Atmosphären und $q = 1$ Atmosphäre $= 14{,}1$ Pfund pr. Quadratzoll, sowie das Expansionsverhältniß $\frac{s_1}{s} = \frac{5}{2}$, daher hat man für dasselbe,

$$144\left(p - \frac{s_1}{s}\,q\right) = 144\,.\,14{,}1\,(3{,}5 - 2{,}5\,.\,1) = 2030{,}4 \text{ Pfund}.$$

Auch war der Inhalt der Kolbenfläche: $F = 254{,}47$ Quadratzoll und der

Kolbenhub während des Volldrucks: $s = 0{,}4\ s_1 = 16$ Zoll, daher das verbrauchte Dampfquantum pr. Kolbenhub:

$$V = \frac{Fs}{1728} = \frac{254{,}47 \,.\, 16}{1728} = \frac{254{,}47}{108} = 2{,}356 \text{ Cubikfuß},$$

und, da die Maschine $n = 24$ Spiele pr. Minute macht, das Dampfquantum pr. Secunde:

$$Q = \frac{n\,V}{30} = 0{,}8 \,.\, 2{,}356 = 1{,}885 \text{ Cubikfuß}.$$

Bei $3\frac{1}{2}$ Atmosphären Druck ist die Temperatur des gesättigten Dampfes, $t = 139$ Grad und die absolute Temperatur $T = 273^0 + t = 412$ Grad, ferner die Temperaturfunction

$$\tau = 1{,}0224\ Log.\,nat.\left(\frac{412}{273}\right) = 1{,}0224 = 0{,}4208,$$

und die Dichtigkeit des Dampfes, nach Tab. in §. 391,

$$\gamma = \frac{61{,}75}{\mu} = \frac{61{,}75}{508{,}2} = 0{,}1215 \text{ Pfund}.$$

Unter der Voraussetzung, daß der Dampf am Ende des Kolbenschubs wie anfangs noch gesättigt sei und den Druck $p = 1{,}3$ Atmosphären habe, ist die Temperatur desselben $t_1 = 107{,}5$ Grad, so daß $T_1 = 380{,}5$, und $\tau = 0{,}3395$ ausfällt.

Da noch die Verdampfungswärme für

$t = 139^0$, $w = 606{,}50 - 0{,}695 \,.\, 139 - 0{,}00002 \,.\, 139^2 - 0{,}0000003 \,.\, 139^3 = 508{,}7$

und für

$t_1 = 107{,}0$, $w_1 = 531{,}1$, sowie $\xi = 1$ ist,

so folgt das specifische Volumen des Dampfes am Ende des Kolbenschubs:

$$\xi_1 = \frac{380{,}5}{531{,}1}\left(\frac{508{,}2}{412} + 0{,}4208 - 0{,}3395\right)$$
$$= \frac{380{,}5}{531{,}1} \cdot 1{,}316 = 0{,}943.$$

Ferner ist für $t = 139^0$, die Flüssigkeitswärme

$n = 139 + 0{,}00002 \,.\, 139^2 + 0{,}0000003 \,.\, 139^3 = 140{,}19$

und für $t_1 = 107{,}5^0$, $n_1 = 107{,}09$,

daher $n - n_1 = 140{,}19 - 107{,}09 = 33{,}10$,

sowie für $t = 139^0$, die innere latente Wärme

$r = 575{,}40 + 0{,}791\ t = 575{,}40 + 0{,}791 \,.\, 139 = 464{,}5$

und für $t_1 = 107{,}5^0$, $r_1 = 490{,}4$, folglich, da $\xi = 1{,}00$ und $\xi_1 = 0{,}943$,

$\xi r - \xi_1 r_1 = 464{,}5 - 0{,}943 \,.\, 490{,}4 = 2{,}10$.

Noch hat man das mechanische Wärmeäquivalent $A = 1351$ Fußpfund, daher ist schließlich die Leistung der gedachten Dampfmaschine pr. Secunde.

$$L = Q\left[A\gamma\,(n - n_1 + \xi r - \xi_1 r_1) + 144\left(p - \frac{s_1}{s}\,q\right)\right]$$
$$= 1{,}885\ [1351 \,.\, 0{,}1215\ (33{,}10 + 2{,}10) + 2030{,}4]$$
$$= 1{,}885\ (5625{,}4 + 2030{,}4) = 1{,}885 \,.\, 7656 = 14431 \text{ Fußpfund}.$$

In dem Beispiel 1 zu §. 483 ist bei dem Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{s_1}{s} = \frac{10}{4} = 2{,}50,$$

$L = 15500$ Fußpfund gefunden worden, während hier

$$\varepsilon = \frac{\xi_1\,u_1}{u} = 0{,}943\,\frac{u_1}{u} = 0{,}943\,\frac{u_1}{u} = 0{,}943 \cdot \frac{1289}{508{,}2} = 2{,}39,$$

d. i. $4\frac{1}{2}$ Procent kleiner ausfällt.

Zur Erleichterung der Berechnung einer Dampfmaschine nach der mechanischen Wärmetheorie ist folgende Tabelle beigefügt worden, welche allerdings in den meisten Fällen der Anwendung noch die Interpolation von Zwischenwerthen nöthig macht. Wie aus der Formel 4) zu ersehen, finden bei Berechnung der Leistung einer Dampfmaschine vorzüglich die in der 7ten und 10ten Columne angegebenen Werthe ihre Anwendung.

Tabelle

zur Berechnung der theoretischen Leistung einer Dampfmaschine nach der mechanischen Wärmetheorie.

Pressung p in Atmosphären	Temperatur t des Dampfes in Centesimalgrad	Absolute Temperatur $T = 243^0 + t$	Temperaturfunction τ	Specifisches Dampfvolumen μ	Gesammtwärme W	Flüssigkeitswärme n	Verdampfungswärme $w = W - n$	Aeußere latente Wärme $m = \frac{1}{A} ps$	Innere latente Wärme $r = w - m$
0,1	46,2	319,2	0,1584	14556	620,6	46,3	574,3	35,5	538,8
0,5	81,7	354,7	0,2627	3172	631,4	82,0	549,4	38,6	510,8
1,0	100,0	373,0	0,3136	1650	637,0	100,5	536,5	40,2	496,3
1,5	111,7	384,7	0,3475	1127	640,6	112,4	528,2	41,2	487,0
2,0	120,6	393,6	0,3681	859,8	643,3	121,4	521,9	41,9	480,0
2,5	127,8	400,8	0,3890	697,1	645,5	128,8	516,7	42,4	474,3
3,0	133,9	406,9	0,4020	587,4	647,3	135,0	512,3	42,9	469,4
4,0	144,0	417,0	0,4271	448,4	650,4	145,3	505,1	43,6	461,3
5,0	152 2	425,2	0,4469	363,6	652,9	153,7	499,2	44,2	455,0
6,0	159,2	432,2	0,4639	306,4	655,1	160,9	494,2	44,7	449,5
7,0	165,3	438,3	0,4784	265,2	656,9	167,2	489,7	45,1	444,6
8,0	170,8	443,8	0,4912	233,9	658,6	172,9	485,7	45,4	440,3

Brennstoffmenge. Wir haben in dem Vorstehenden die Leistung des Dampfes bei Dampfmaschinen durch das verbrauchte Dampfquantum und durch die Dampfspannung ausgedrückt; da aber die letzteren Factoren von dem Wärmequantum und dieses wieder von dem Brennmaterialaufwand abhängt, so können wir nun auch die Leistung einer Dampfmaschine durch den Brennstoffaufwand ausdrücken. §. 488

Setzt man das specifische Dampfvolumen, oder das Verhältniß des Dampfvolumens zum Wasservolumen

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p},$$

so bekommt man das in der Dampfmenge Q liegende Wasserquantum

$$Q_1 = \left(\frac{\beta + p}{\alpha}\right) Q,$$

und dessen Gewicht, da ein Cubikfuß Wasser 61,75 Pfund wiegt,

$$Q\gamma = 61{,}75 \left(\frac{\beta + p}{\alpha}\right) Q \text{ Pfund.}$$

Nach §. 401 ist die Wärmemenge, welche $Q\gamma$ Pfund Wasser von der Temperatur t_1^0 zur Verwandlung in Dampf von t^0 Wärme erfordern:

$$W = (606{,}5 + 0{,}305\, t - t_1)\, Q\gamma \text{ Calorien;}$$

nehmen wir aber dafür den Mittelwerth

$$W = (640 - t_1)\, Q\gamma$$

an, so bekommen wir

$$W = 61{,}75\,(640 - t_1) \cdot \frac{\beta + p}{\alpha}\, Q,$$

sowie umgekehrt:

$$Q = \frac{\alpha W}{61{,}75\,(640 - t_1)(\beta + p)}.$$

Kennen wir nun die Anzahl ψ der Wärmeeinheiten, welche aus der Verbrennung von 1 Pfund Brennstoff hervorgeht, entnehmen wir diese Zahl z. B. aus der Tabelle in §. 400, so können wir nun auch den der Dampfmenge Q entsprechenden Brennstoffaufwand K berechnen; wir setzen nämlich $W = \psi K$, also

$$K = \frac{W}{\psi} = 61{,}75\,(640 - t_1) \cdot \frac{\beta + p}{\alpha \psi}\, Q,$$

sowie umgekehrt:

$$Q = \frac{\alpha \psi K}{61{,}75\,(640 - t_1)(\beta + p)}.$$

Nehmen wir an, daß ein Pfund Kohlenstoff bei seiner Verbrennung 7500 Wärmeeinheiten giebt und daß hiervon nur 60 Procent zur Wirkung

kommen (vergl. §. 399), setzen wir ferner für t_1 den Mittelwerth $= 40^0$, so erhalten wir

$$Q = \frac{0,6 . 7500\, \alpha K}{61,75 . 600\, (\beta + p)} = {}^4/_{33} \cdot \frac{\alpha}{\beta + p} K,$$

sowie

$$K = {}^{33}/_4 \cdot \frac{\beta + p}{\alpha} Q.$$

Für Maschinen mit Condensation oder Tiefdruck ist nach Pambour

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p} = \frac{27238}{1,637 + p},$$

und für solche ohne Condensation oder Hochdruck

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p} = \frac{28961}{4,120 + p},$$

also im ersten Falle

1) $$Q = {}^4/_{33} \cdot \frac{27283}{1,637 + p} K = \frac{3307\, K}{1,637 + p},$$

und im zweiten

2) $$Q = {}^4/_{33} \cdot \frac{28961}{4,120 + p} K = \frac{3510\, K}{4,120 + p}.$$

Auch kann man das specifische Dampfvolumen nach der Formel

$$\mu = 1649,8\, p^{-0,9393} \text{ Atmosphären}$$

berechnen, oder aus der Tabelle in §. 391 entnehmen.

Anmerkung. Rechnet man mit Hülfe der Formel

3) $$\gamma = \frac{0,003539\, p}{1 + 0,00367\, t}$$ des Paragraphen 393 in Bd. I,

für die Dichtigkeit des Dampfes, so erhält man das Gewicht von Q Cubikfuß Dampf:

$$Q\gamma = \frac{0,003539\, p\, Q}{1 + 0,00367\, t},$$

daher die entsprechende Wärmemenge:

$$W = \frac{0,003539\, (640 - t_1)\, p\, Q}{1 + 0,00367\, t},$$

und den Brennmaterialaufwand bei Erzeugung der Dampfmenge Q:

$$K = \frac{0,003539\, (640 - t_1)\, p\, Q}{\psi\, (1 + 0,00367\, t)};$$

also umgekehrt, die Dampfmenge, welche bei Verbrennung der Kohlenmenge K erzeugt werden kann:

$$Q = \frac{(1 + 0,00367\, t)\, \psi K}{0,003539\, (640 - t_1)\, p}.$$

Setzen wir $t_1 = 40$ und $\psi = 4500$ ein, so erhalten wir

$$Q = 2119\, (1 + 0,00367\, t) \frac{K}{p},$$

und zwar für $t = 100^0, \quad 120^0, \quad 140^0, \quad 160^0,$

$$Q = \frac{2897\,K}{p}, \quad \frac{3052\,K}{p}, \quad \frac{3708\,K}{p}, \quad \frac{3363\,K}{p} \text{ Cubikfuß.}$$

Beispiel. Wie viel Dampf von $3\frac{1}{2}$ Atmosphären Spannung giebt die Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff? Nach der Tabelle in §. 391 ist hier $\mu = 508{,}2$, daher

$$Q = \frac{4}{33} \,.\, 5087 = 61{,}6 \text{ Cubikfuß;}$$

nach der Formel 1) hat man dagegen

$$Q = \frac{3307\,K}{1{,}637 + p} = \frac{3307}{1{,}637 + 3{,}5\,.\,14{,}11} = 64{,}8 \text{ Cubikfuß,}$$

und nach der Formel 2)

$$Q = \frac{3510\,K}{4{,}120 + p} = \frac{3510}{4{,}120 + 3{,}5\,.\,14{,}11} = 65{,}6 \text{ Cubikfuß.}$$

Ferner ist nach der Formel $\mu = 1649{,}8\,p^{-0{,}9393}$, $\mu = 1649{,}8\,.\,3{,}5^{-0{,}9393}$ $= 535{,}1$, und daher $Q = \frac{4}{33}\,\mu = 64{,}8$ Cubikfuß, und endlich nach der obigen Formel

$$Q = 2119\,(1 + 0{,}00367\,t)\,\frac{K}{p},$$

da der Spannung von $3\frac{1}{2}$ Atmosphären die Temperatur von 140^0 entspricht,

$$Q = \frac{3203}{3{,}5\,.\,14{,}10} = \frac{3203}{49{,}35} = 64{,}9 \text{ Cubikfuß.}$$

Leistungsformeln. Verbinden wir die Formeln des letzten Paragraphen mit den weiter oben gefundenen Leistungsformeln, so erhalten wir eine Gleichung, welche die Beziehung zwischen Leistung und Brennmaterialaufwand ausdrückt. Legen wir gleich die allgemeine Leistungsformel von Pambour, §. 489

$$L = 144\,Q\,(\beta + p)\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] \text{ Fußpfund}$$

zum Grunde, setzen wir darin

$$Q = \frac{\psi}{640 - t_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta + p} \cdot \frac{K}{61{,}75},$$

so bekommen wir

$$L = \frac{144\,\psi}{640 - t_1} \cdot \frac{\alpha}{\beta + p} \cdot \frac{K}{61{,}75} (\beta + p)\left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right]$$

$$\frac{58}{25}\,\frac{\psi\,\alpha}{640 - t_1} \cdot \left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] K;$$

nehmen wir $t_1 = 40$ und $\psi = 4500$ an, so folgt daher

$$L = \frac{87}{5} \cdot \left[1 + Log.\,nat.\left(\frac{F_1 s_1}{Fs}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] \alpha K \text{ Fußpfund.}$$

Für Tiefdruckmaschinen ist $\alpha = 27283$ und daher

$$L = 474724 \left[1 + Log. nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] K,$$

sowie für Hochdruckmaschinen, für welche sich $\alpha = 28961$ setzen läßt,

$$L = 503922 \left[1 + Log. nat. \left(\frac{F_1 s_1}{F s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right] K \text{ Fußpfund.}$$

Setzt man noch $F_1 = F$, so erhält man die Leistungsformeln für Dampfmaschinen mit einem Cylinder, und nimmt man auch noch $s_1 = s$, sowie $p_1 = p$ an, bekommt man die Leistungsformeln für Maschinen ohne Expansion, und zwar für Tiefdruck

$$L = 474724 \left(1 - \frac{\beta + q}{\beta + p}\right) K,$$

und für Hochdruck

$$L = 503922 \left(1 - \frac{\beta + q}{\beta + p}\right) K \text{ Fußpfund.}$$

Bei Condensationsmaschinen läßt sich die Condensation nur bis auf $1/_{10}$ und die Expansion bis auf circa $1/_2$ Atmosphäre treiben, während bei Maschinen ohne Condensation letztere nur bis auf $3/_2$ Atmosphären Druck gesteigert werden kann; legen wir diese Verhältnisse zu Grunde, und drücken wir die Spannungen p, p_1 und q in Atmosphären aus, so erhalten wir

1) für Dampfmaschinen mit Tiefdruck und Expansion

$$\frac{F_1 s_1}{F s} = \frac{\beta + p}{\beta + p_1} = \frac{0{,}1161 + p}{0{,}1161 + 0{,}5} = \frac{0{,}1161 + p}{0{,}6161} = 0{,}188 + 0{,}1623\, p,$$

und

$$\frac{\beta + q}{\beta + p_1} = \frac{0{,}1161 + 0{,}1}{0{,}1161 + 0{,}5} = \frac{0{,}2161}{0{,}6161} = 0{,}351;$$

2) für Dampfmaschinen mit Hochdruck und Condensation

$$\frac{F_1 s_1}{F s} = \frac{\beta + p}{\beta + p_1} = \frac{0{,}2922 + p}{0{,}2922 + 0{,}5} = \frac{0{,}2922 + p}{0{,}7922} = 0{,}369 + 1{,}262\, p$$

und

$$\frac{\beta + q}{\beta + p_1} + \frac{0{,}2922 + 0{,}1}{0{,}2922 + 0{,}5} = \frac{0{,}3922}{0{,}7922} = 0{,}495;$$

3) für Dampfmaschinen mit Hochdruck und ohne Condensation

$$\frac{F_1 s_1}{F s} = \frac{\beta + p}{\beta_1 + p_1} = \frac{0{,}2922 + p}{0{,}2922 + 1{,}5} = \frac{0{,}2922 + p}{1{,}7922} = 0{,}163 + 0{,}558\, p$$

und

$$\frac{\beta + q}{\beta + p_1} = \frac{0{,}2922 + 1}{0{,}2922 + 1{,}5} = \frac{1{,}2922}{1{,}7922} = 0{,}721;$$

4) für Tiefdruckmaschinen ohne Expansion

$$\frac{\beta + q}{\beta + p} = \frac{0{,}1161 + 0{,}1}{0{,}1161 + p} = \frac{0{,}2161}{0{,}1161 + p};$$

5) für Maschinen mit Hochdruck, ohne Expansion und mit Condensation

$$\frac{\beta + q}{\beta + p} = \frac{0,2922 + 0,1}{0,2922 + p} = \frac{0,3922}{0,2922 + p};$$

6) für Maschinen mit Hochdruck, ohne Expansion und ohne Condensation

$$\frac{\beta + q}{\beta + p} = \frac{0,2922 + 1}{0,2922 + p} = \frac{1,2922}{0,2922 + p}.$$

Hiernach ist die Leistung einer Dampfmaschine vom System I:

$$L = 474724\ [0,649 + 2,3026\ Log.\,nat.\,(0,188 + 1,623\,p)]\,K;$$

ferner vom System II:

$$L = 503922\ [0,505 + 2,3026\ Log.\,nat.\,(0,369 + 1,262\,p)]\,K;$$

ferner vom System III:

$$L = 503922\ [0,279 + 2,3026\ Log.\,nat.\,(0,163 + 0,558\,p)]\,K;$$

ferner vom System IV:

$$L = 474724\left(1 - \frac{0,2161}{0,1161 + p}\right)K;$$

ferner vom System V:

$$L = 503922\left(1 - \frac{0,3922}{0,3922 + p}\right)K \text{ und}$$

ferner vom System VI:

$$L = 503922\left(1 - \frac{1,2922}{0,2922 + p}\right)K \text{ Fußpfund.}$$

Beispiel. Welche Leistung verspricht eine eincylindrige Dampfmaschine mit Expansion und Condensation, welche stündlich 40 Pfund Kohle verbraucht und mit Dampf von 4 Atmosphären Spannung arbeitet? Nach Formel III. ist

$$L = 503922\ [0,505 + 2,3026\ Log.\,nat.\,(0,369 + 1,262\,.\,4)]\,K$$
$$= 503922\ (0,505 + 2,1026\ Log.\ nat.\,5,417)\cdot\frac{40}{3600}$$
$$= 503922\ (0,505 + 1,689)\cdot {}^{1}/_{90} = \frac{503922\,.\,2,194}{90}$$
$$= 12285 \text{ Fußpfund} = 25,8 \text{ Pferdekräfte.}$$

Setzen wir in den letzten Formeln II, III, V und VI, $K = 1$ und $p = 1, 2, 3, 4$ Atmosphären u. s. w. ein, so erhalten wir für diese vier Maschinensysteme die theoretischen Leistungen, welche einem Pfunde Kohlenstoff bei verschiedenen Dampfspannungen entsprechen. §. 490

Folgende Tabelle giebt diese Leistungen in Pferdekräften, jede zu 480 Fußpfund für 1 Pfund Kohlenstoff pr. Secunde an.

Dampfspannung in Atmosphären		1	1½	2	3	4	5	6	7	8	∞
Expansionsmaschinen	mit Condensation	1044	1388	1646	2026	2304	2524	2701	2863	2996	∞
	ohne Condensation	0	293	551	931	1210	1430	1625	1766	1901	∞
Maschinen ohne Expansion	mit Condensation	731	820	870	925	954	972	985	993	1000	1050
	ohne Condensation	0	293	458	638	732	796	834	864	886	1050

Man ersieht aus dieser Tabelle, daß die Maschinen mit Expansion und Condensation weit größere Leistungen versprechen als die übrigen Maschinen, und daß die Leistungen um so größer ausfallen, je größer die Spannung des Dampfes ist. Während bei der Spannung von 3 Atmosphären die Leistung auf jedes Pfund Kohlenstoff 2026 Pferdekräfte beträgt, ist dieselbe bei 8 Atmosphären Spannung 2996 Pferdekräfte. Ferner zeigt diese Tabelle, daß die Expansionsmaschinen ohne Condensation viel weniger leisten als die mit Condensation, und daß bei letzteren der Nutzen der Expansion erst bei höheren Dampfspannungen hervortritt. Bei 3 bis 4 Atmosphären Spannung ist z. B. die Leistung der Expansionsmaschine mit Condensation noch einmal so groß, als die einer solchen Maschine ohne Condensation. Ferner ist aus dieser Tabelle zu entnehmen, daß die Maschinen ohne Expansion und mit Condensation eine mit der Spannkraft des Dampfes wenig wachsende Leistung geben, welche z. B. bei 3 Atmosphären ungefähr gleichkommt der Leistung einer Expansionsmaschine ohne Condensation, und bei 8 Atmosphären ungefähr die Hälfte ist von der Leistung der letztgenannten Maschinen. Es gewährt also die Anwendung einer hohen Spannung hier keinen großen Gewinn. Endlich führt diese Tabelle vor Augen, daß die Dampfmaschinen ohne Expansion und ohne Condensation bei kleinen und mittleren Dampfspannungen sehr wenig leisten, und nur bei hohen Spannungen der dritten Classe an Wirkung nahe gleichkommen.

Obgleich es hiernach stets vortheilhafter ist, Dämpfe mit hoher Spannung anzuwenden, als solche mit schwacher Spannung, so darf man doch erfahrungsmäßig mit der Spannkraft der Dämpfe nicht zu weit gehen, namentlich 8 Atmosphären nicht übersteigen, weil bei hohen Spannungen die Nebenhindernisse, besonders aber die Wärmeverluste sehr groß ausfallen, so daß der

Gewinn, welchen hohe Spannungen auf der einen Seite gewähren, durch einen Verlust auf der anderen wieder aufgehoben oder gar übertroffen wird. Hierzu kommt noch, daß die Gefahr des Zerspringens und die Verwüstungen beim Zerspringen der Kessel viel größer ausfallen, wenn diese stark gespannte Dämpfe erzeugen, als wenn sie zur Erzeugung schwach gespannter Dämpfe dienen.

Setzen wir das mechanische Aequivalent der Wärme 1351 Fußpfund (s. §. 379) und die durch die Verbrennung von 1 Pfund Kohlenstoff erlangte Wärmemenge = 7500 Calorien, so erhalten wir die theoretische Leistung von 1 Pfund Kohlenstoff:

$$1351 \,.\, 7500 = 10132500 \text{ Fußpfund} = 21094 \text{ Pferdekräfte},$$

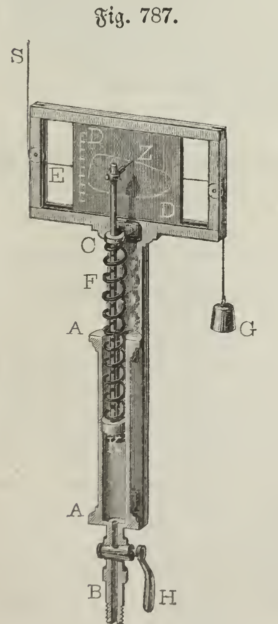
also über 7mal so groß, als der größte Zahlenwerth (2996 Pferdekräfte) in der letzten Tabelle. Wenn bei der Verbrennung von 1 Pfund Kohle nur 4500 Calorien nutzbar gemacht werden, so ist auch die entsprechende Leistung nur

$$1351 \,.\, 4500 = 6079500 \text{ Fußpfund} = 12660 \text{ Pferdekräfte},$$

also nahe 4mal so groß als der größte Werth in der Tabelle.

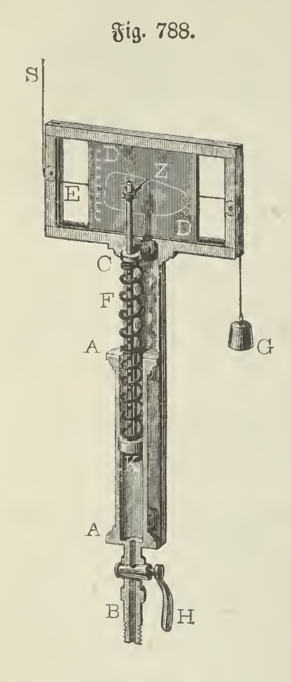
Dampfindicator. Die Spannung des Dampfes in dem Treibcylinder wird durch ein Instrument angegeben, welches den Namen Indicator (franz. indicateur; engl. indicator) erhalten hat, und wohl auch Spannungsmesser genannt wird. Ein sehr einfacher Indicator von Watt ist in Fig. 787 abgebildet; seine Einrichtung ist folgende: AA ist ein genau ausgebohrter Cylinder von ungefähr $1^1/_2$ Zoll Weite und 1 Fuß Länge, unten in einer engeren Röhre B auslaufend, und oben durch einen Kolben K verschlossen. Das zu diesem Zwecke schraubenförmig geschnittene Ende der Röhre B wird in ein Loch im Deckel des Treibcylinders eingesetzt, so daß nach Eröffnung eines in B sitzenden Hahnes H der Dampf in AA treten und gegen K drücken kann. Die Kolbenstange KC geht durch eine ringförmige Führung C und ist mit einer Spiralfeder F umgeben, welche mittels K durch die Spannung des Dampfes so viel zusammengedrückt wird, bis sie dieser das Gleichgewicht hält. Der Zeiger Z am Ende dieser Stange giebt durch seinen höheren oder tieferen Stand die Stärke der Dampfkraft an. §. 491

Fig. 787.



Da diese Kraft, zumal bei den Expansionsmaschinen, während des ganzen Kolbenweges veränderlich ist, so kommt es darauf an, den mittleren Werth der Spannung, oder, was am Ende einerlei ist, den mittleren Stand von Z anzugeben. Deshalb ersetzt man auch den Zeiger durch einen Zeichnenstift Z und läßt denselben an eine Tafel DD drücken, die mittels einer Schnur ES durch die Stange des Treibkolbens nach der einen und durch ein Gegengewicht G nach der entgegengesetzten Seite hin fortgezogen wird. Durch diesen Stift wird während eines Kolbenspieles eine Curve auf DD gezeichnet, deren Flächeninhalt als Maß der vom Treibkolben verrichteten Arbeit während eines Kolbenschubes dienen kann: dividirt man daher die hiernach bestimmte Arbeit durch den ganzen Kolbenweg, so erhält man natürlich die mittlere Kraft oder Dampfspannung.

Fig. 788.



Ist die Spannung des Dampfes unter K beim Aufgange des Treibkolbens, $= p$, der Atmosphärendruck über K, $= a$ und die Spannung der Feder, auf jeden Quadratzoll der Kolbenfläche vertheilt, $= y_1$, so erhält man für den Aufgang des Treibkolbens:

$$p = y_1 + a;$$

bezeichnet man aber mit q die Spannung beim Niedergange, und mit y_2 die entsprechende Kraft zum Ausdehnen der Feder, so hat man:

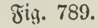
$$a = q + y_2;$$

verbindet man daher beide Gleichungen mit einander, so ergiebt sich die bewegende Kraft des Treibkolbens auf jeden Quadratzoll seiner Fläche:

$$p - q = y_1 + a - (a - y_2) = y_1 + y_2.$$

Sind die Ausdehnungs- und Zusammendrückungskräfte der Feder den Ausdehnungen und Zusammendrückungen derselben proportional, so kann man y_1 und y_2 durch die Abstände des Stiftes von einer horizontalen Grundlinie messen, welche der Stift beschreiben würde, wenn die Feder weder zusammengedrückt noch ausgedehnt wäre, wenn also der Kolben K von unten wie von oben mit der Atmosphäre communicirte. Wenn nun die Tafel die verjüngte Bewegung des Kolbens annimmt, so wird daher auch das Product aus der mittleren Summe der Abstände des Zeigers von der Grundlinie und aus der Länge des Tafelweges, oder die Summe der Inhalte der von

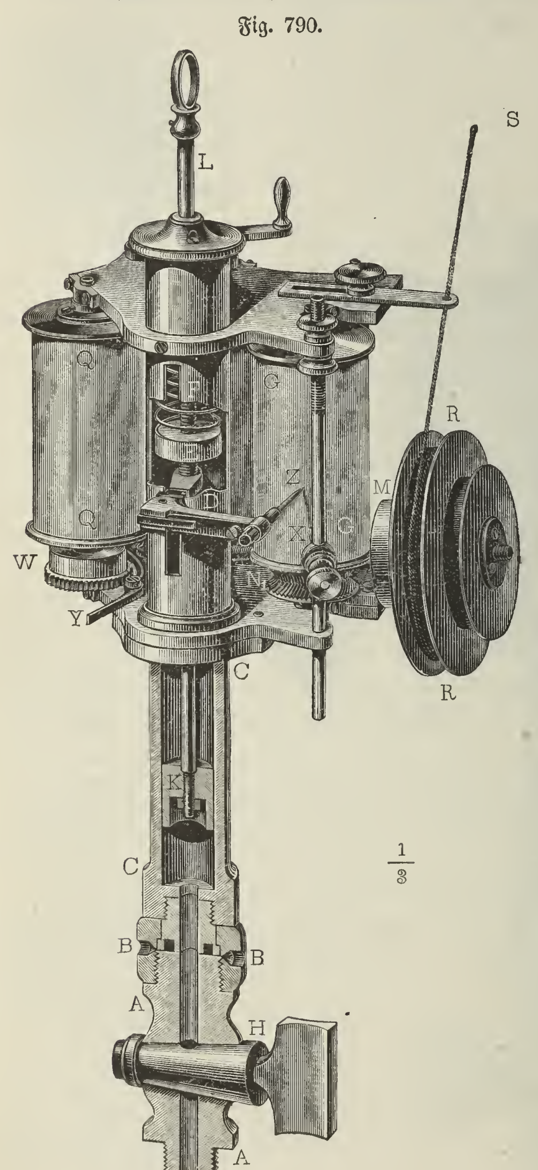
dem Stifte über und unter der Grundlinie während eines Kolbenspieles beschriebenen Figuren das Maß der Arbeit des Dampfes bei einem halben Spiele oder bei einem Auf- oder Niedergange des Kolbens angeben.


Fig. 789.

Die Einrichtung §. 492
eines **Dampfindicators** vom Herrn **Clair** in Paris führt Fig. 789 vor Augen. Es ist hier *CC* der Cylinder, in welchem der Kolben *K* spielt, ferner *AA* ein Fußstück mit dem Hahne *H*, welches auf den Deckel des Dampfcylinders aufgeschraubt und durch das Gewinde *BB* mit dem Cylinder *CC* verbunden wird. Um die Kolbenstange *KL* ist eine Spiralfeder *F* gewunden, welche mittels eines Tellers *E* diese Stange nach unten drückt, während sie von der Kraft des Dampfes aufwärts geschoben wird. Unterhalb des Tellers *E* ist die Kolbenstange *KL* noch mit einem Querarme *D* versehen, welcher mittels eines Gelenkes und einer Hülse den Zeichnenstift *Z* trägt. Die Spitze dieses Stiftes berührt während des

Gebrauches einen Papierstreifen, welcher den Umfang eines hohlen Metallcylinders *G G* bedeckt; wenn sich folglich dieser Papierstreifen unter jenem Zeichnenstift hinzieht, so entsteht auf dem ersteren eine Curve, deren verticale Ordinaten der Dampfkraft proportional sind. Die Bewegung des Cylinders sammt dem darauf liegenden Papierstreifen erfolgt durch die Kolbenstange der zu prüfenden Dampfmaschine mittels einer Schnur *R S*, welche auf eine Trommel *R R* aufgewickelt und mit einem Ende am Kopfe der gedachten Kolbenstange befestigt wird. Da diese Trommel durch die Dampfmaschine mittels der Schnur nur nach der einen Richtung umgedreht wird, so ist um die Welle derselben noch eine in dem Gehäuse *M* eingeschlossene Spiralfeder gewunden, welche diese Trommel bei dem Rückwege des Dampfkolbens zurückdreht.

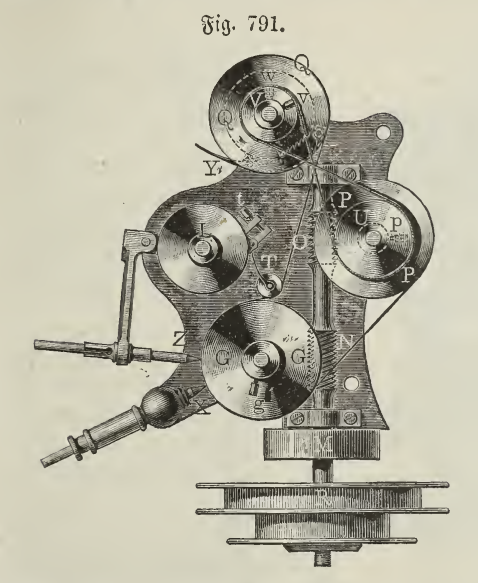
Fig. 790.



Die Welle *N O* der Trommel *G G* ist, wie sich aus dem Grundriß in Figur 791 ersehen läßt, an zwei Stellen *N* und *O* mit Schrau-

bengewinden versehen, welche in die auf den Wellen der Trommeln GG und PP sitzenden Schraubenräder N_1 und O_1 eingreifen und dieselben in entgegengesetzten Richtungen umdrehen. Da nun diese Welle mittels der Schnur u. s. w. während eines Kolbenspieles um einen gewissen Winkel hin- und zurückgedreht wird, so wickelt sich hierbei der auf der Trommel PP befestigte Papierstreifen erst von PP auf GG und dann wieder zurück von GG auf PP, und es beschreibt hierbei der Zeichnenstift Z auf demselben eine geschlossene Curve. Aus der von dieser Curve begrenzten Fläche läßt sich dann, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die Veränderlichkeit der Kraft des Dampfes ersehen, sowie Arbeit und mittlere Größe derselben bestimmen.

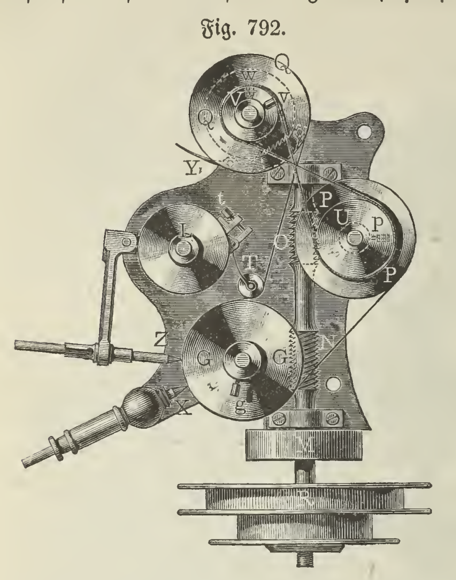
Fig. 791.



Der hier abgebildete Indicator von Clair unterscheidet sich von dem gewöhnlichen englischen Indicator von Mac-Naught dadurch, daß man mit Hülfe desselben nicht bloß geschlossene, sondern auch fortlaufende Curven, wie z. B. mittels eines Dynamometers (s. §. 125), darstellen kann. Zu diesem Zwecke ist die Welle der Trommel GG mit zwei Zahnrädern, wie N_1, ausgerüstet und das Stück N der horizontalen Welle NO in entgegengesetzten Richtungen doppelt schraubenförmig ausgeschnitten. Wenn man nun durch Zurückziehen der Schraube p das Zahnrad O_1 von der Welle der Trommel PP löst, und dagegen durch Anziehen der Schraube g die feste Verbindung des zweiten Zahnrades N_1 mit der Welle der Trommel GG herstellt, so wird, wenn auch die Welle NO durch die auf ihr sitzende Rolle R nur eine schwingende Bewegung erhält, dennoch die Trommel GG eine fortlaufende Bewegung annehmen und natürlich auch der Zeichnenstift Z eine fortlaufende Curve aufzeichnen. Damit sich hierbei der Papierstreifen gleichmäßig von der Trommel PP ab- und auf eine dritte Trommel QQ aufwickele, ist noch nöthig, daß die Scheibe V durch Anziehen der Schraube v mit der Welle der Trommel QQ fest verbunden werde, weil dann mittels der um die Scheiben U und V liegenden Kreuzschnur die Bewegung der Trommel PP in

entgegengesetzter Richtung auf die Trommel $Q\,Q$ übertragen wird. Um bei dieser fortlaufenden Aufwickelung den Papierstreifen in Spannung zu erhalten, ist nöthig, daß die Spannrolle T mittels der Schraube t auf den Papierstreifen $G\,Q$ aufgedrückt werde. Noch ist für die Darstellung fortlaufender Curven noch ein zweiter Zeichnenstift X angebracht, welcher die Basis oder Nulllinie auf das Papier aufzeichnet.

Fig. 792.



Um bei Darstellung einer geschlossenen Curve den Papierstreifen zwischen G und Q stets gespannt zu erhalten, ist um die Welle von $Q\,Q$ eine Spiralfeder gewunden, welche sich mittels des Sperrrades W und der Sperrklinke Y beliebig spannen läßt. Damit diese Spiralfeder auf die Welle von $Q\,Q$ wirken könne, hat man nur durch Anziehen einer Schraube w die Hülse, welche das innere Ende der Spiralfeder trägt, fest mit dieser Welle zu verbinden.

Um endlich das Verhältniß zwischen Dampfkraft und Zeiger- oder Kolbenweg zu finden, hat man natürlich mit Gewichten, womit man die Feder F ausdehnt und zusammendrückt, besondere Versuche anzustellen. An dem Instrumente, welches der Verfasser in seinen Händen hat, mißt der Durchmesser des Kolbens K, 22 Millimeter, und giebt bei 1 Kilogramm Spannung, die eine Spiralfeder 2 Millimeter, und die andere Spiralfeder 5 Millimeter Zeigerweg. Damit sich eine möglichst constante und vom Dampfdrucke unabhängige Kolbenreibung herausstelle, lidert man den Kolben K nicht ab, sondern dreht denselben sorgfältig ab und bedeckt ihn mit einer Oelschicht. Wenn nun hiernach die Kolbenreibung bei dem Vorversuche, wo die Feder durch Gewichte gespannt wird, dieselbe ist wie beim wirklichen Gebrauch des Indicators, wo die Feder den Dampfdruck aufnimmt, so sind die Angaben des Indicators gar nicht von dieser Reibung abhängig und es ist dieselbe nicht weiter in Betracht zu ziehen.

Anmerkung. In der neueren Zeit hat man bei den Indicatoren statt der Spiralfeder auch Federschienen nach Poncelet angewendet. Die wesentlichste Ein-

richtung eines solchen Indicators führt Fig. 793 vor Augen. Es ist hier der Cylinder A horizontal, und mit der Stange KE desselben die parabolische Feder FG sowie der Zeichnenstift Z verbunden, welcher seine Curve auf einen um zwei bewegliche Trommeln gelegten Papierstreifen aufzeichnet (vergl. §. 125 und §. 127, sowie **Morin**: Leçon de mécanique pratique, Ire partie, 1855). Einen anderen Dampfindicator mit zwei Federn hat Herr **Welkner** construirt (s. dessen Schrift, „die Locomotive," Göttingen 1859).

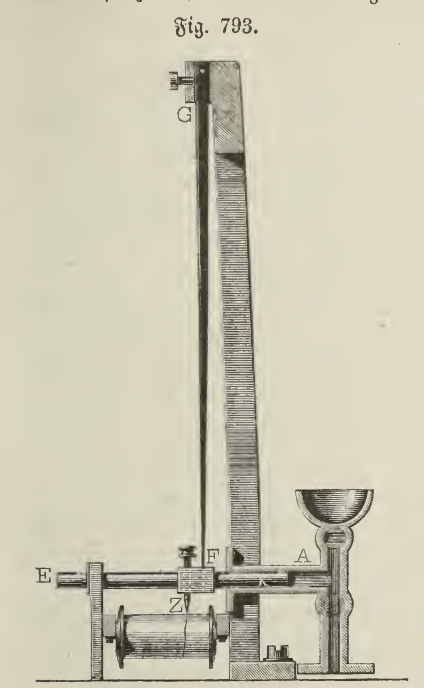


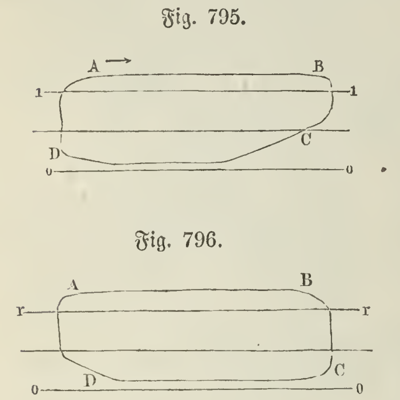
Fig. 793.

Fig. 794.

Indicatordiagramm. Je §. 493
nachdem eine Maschine mit Tief- oder Hochdruck, mit oder ohne Expansion wirkt, je nachdem ferner die Steuerung dem Treibkolben voreilt oder nicht u. s. w., fällt die von dem Dampfindicator beschriebene und die Leistung des Dampfes angebende Curve sehr verschieden aus. Bei einer **Maschine mit Tiefdruck** und ohne Expansion hat diese Curve die Hauptform eines Rechteckes, wie $ABCD$, Fig. 794. Beim Anfange des Kolbenniederganges steht der Stift in A, während des Niederganges beschreibt er eine mit der Linie $0 \div 0$ ziemlich parallel laufende Linie; während des tiefsten Kolbenstandes legt der Stift den Weg BC zurück, beim darauf folgenden Aufgange beschreibt er den nur wenig über der Nulllinie weggehenden Curventheil CD, und während des höchsten Kolbenstandes durchläuft er den ziemlich senkrechten Weg DA, da dann die Spannung von etwa $^1/_{10}$ Atmosphäre auf etwa $^6/_5$ Atmosphäre steigt. Die Ordinaten y_1 über der einer Atmosphäre Spannung entsprechenden Grundlinie $1 \div 1$ sind viel kleiner als die Ordinaten y_2 unter dieser Linie, weil jene den Ueberschuß des Dampfdruckes über eine Atmosphäre, diese aber den Ueberschuß des Atmosphärendruckes über den Druck im Condensator ausdrücken. Ein mit

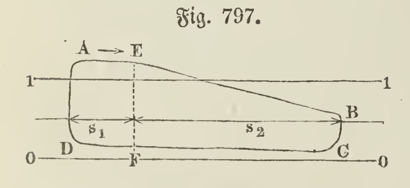
dem unteren Theile des Cylinders communicirender Indicator würde natürlich eine entgegengesetzte Curve liefern.

Wenn der Dampf erst am Anfange des Kolbennieder- oder Kolbenaufganges zugelassen wird, so fällt die Curve nicht so vollkommen aus, sondern es hat dieselbe bei *A* und *C*, Fig. 795, bedeutendere Abstufungen. Es stellen sich diese aber dann besonders groß heraus, wenn, wie bei der Schiebersteuerung mit Kreisexcentrik, die Eröffnungen sehr allmälig erfolgen, so daß der Dampf während des Umsteuerns durch verengte Mündungen strömen muß, und dadurch an Spannung verliert. Durch das langsame Eröffnen des Abzugweges wird die Abstumpfung bei *C* zumal noch deshalb sehr groß, weil der ausströmende Dampf reagirend und anfänglich beinahe mit voller Kraft auf den Dampfkolben zurückwirkt. Zur Verhinderung dieser großen Abstumpfung ist denn auch ein Voreilen der Steuerung beim Ablassen des Dampfes unbedingt nothwendig. Durch zu großes Voreilen beim Zu- und Ablassen wird aber auch leicht das Gegentheil, nämlich, wie in Fig. 796, eine zu große Abstumpfung an den anderen Ecken *B* und *D* herbeigeführt.



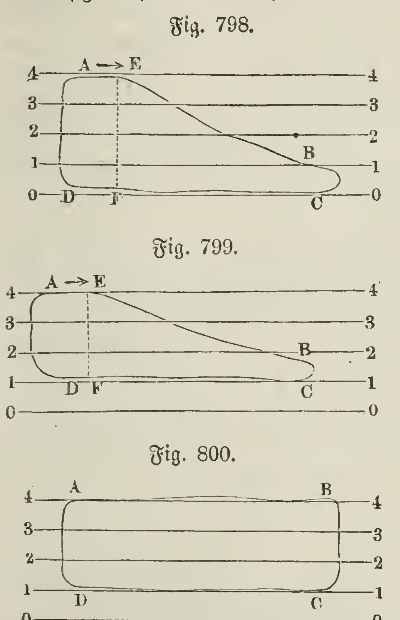
§. 494 Bei den Maschinen mit Expansion nimmt die Indicatorcurve nahe die Form einer aus einem Rechtecke und einem Trapeze zusammengesetzten Figur an; der rectanguläre Theil entspricht der Wirkung des Dampfes vor, und der trapezoidale Theil der Wirkung desselben während der Expansion.

Eine Niederdruckmaschine mit Expansion liefert eine Curve *AC*, Fig. 797. Dem Theile s_1 des Kolbenweges vor Eintritt der Expansion entspricht das Curvenstück *AE*, welches ziemlich mit $0 \div 0$ oder $1 \div 1$ parallel läuft; dem übrigen Theile s_2 aber entspricht das Curvenstück *EB*, welches sich allmälig tiefer herabzieht und der Linie $0 \div 0$ nähert. Der Flächenraum *EBCF* mißt die Leistung, welche durch die Expansion allein gewonnen wird.



Die Curve *AC* in Fig. 798 beschreibt der Indicator einer Dampfmaschine mit Hochdruck, Expansion und Condensation, die in

Fig. 799 aber eine solche ohne Condensation; während sich bei jener der rückläufige Theil CD nahe über der Nulllinie hinzieht, läuft derselbe bei dieser nahe über der Linie 1 ÷ 1 hin, ist also auch das Maß der Leistung der Maschine um ein zwischen den Linien 0 ÷ 0 und 1 ÷ 1 befindliches Rechteck kleiner.

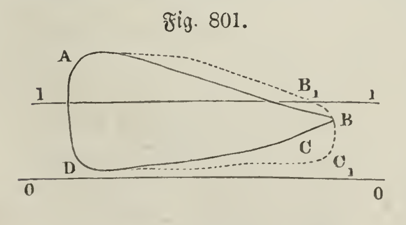


In Fig. 800 ist endlich noch die Indicatorcurve für eine Hochdruckmaschine (von 4 Atmosphären) ohne Expansion und Condensation vor Augen geführt. Es ist auch hier der Raum zwischen 0 ÷ 0 und 1 ÷ 1 leer, und daher die Leistung dieser Maschine um ein zwischen diese Linien zu legendes Rechteck kleiner, als wenn die Maschine mit Condensation arbeitete.

Der Dampfindicator ist nicht allein ein vorzügliches Instrument zur Bestimmung der Kraft und Leistung einer Dampfmaschine, sondern auch das beste Hülfsmittel zur Beurtheilung der Güte und Zweckmäßigkeit der Steuerung derselben, da die Gestalt der Indicatorcurve über die Wirksamkeit der Steuerung vielfache Aufschlüsse giebt und vor Allem die Mängel derselben nachweist. Die Mängel der Schiebersteuerung können folgende sein: §. 495

1) Die Dampfcanäle haben nicht die gehörige Weite. Ist der Querschnitt des Dampfcanals zu klein, so muß der Dampf mit einer zu großen Geschwindigkeit zu treten und abfließen, und dabei einen namhaften Theil seiner Spannung zusetzen. Deshalb nimmt auch dann die Indicatorcurve die zugespitzte Form $ABCD$, Fig. 801, an. Bei der gehörigen Größe dieser Mündungen würde das Indicatordiagramm etwa die durch die punktirte Linie $AB_1\,C_1\,D$ angegebene Gestalt haben.

Fig. 801.



2) Die Schieberstange hat nicht die erforderliche Länge, wobei der Schieber auf der einen Seite der Dampfwege einen größeren Weg durch-

läuft, als auf der anderen Seite. Es findet dann bei einem Dampfwege eine längere Eröffnung Statt als beim anderen, wobei die Länge der Indicatorcurve auf der einen Seite eine größere und auf der anderen eine kleinere wird.

In gewissem Grade findet eine Verschiedenheit in der Eröffnungszeit der Dampfwege auch deshalb Statt, weil der Dampfkolben die eine Hälfte seines Weges nicht in derselben Zeit zurücklegt wie die andere. Bezeichnet r die Armlänge des Krummzapfens und l die Länge der Kurbelstange, so beträgt (s. §. 458) der Kolbenweg, welcher dem ersten und vierten Quadranten der Umdrehung des Krummzapfens entspricht:

$$s_1 = r - \frac{r^2}{2l},$$

und der, welcher dem zweiten und dritten Quadranten zukommt:

$$s_2 = r + \frac{r^2}{2l};$$

es ist also die Differenz dieser Wege:

$$s_2 - s_1 = \frac{r^2}{l},$$

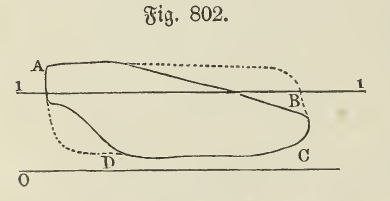
und folglich ihr Verhältniß zum ganzen Kolbenschube $2r$:

$$\frac{s_2 - s_1}{2r} = \frac{r}{2l}.$$

Da die Expansion des Dampfes vorzüglich in der zweiten Hälfte des Kolbenschubes statthat, so ist auch die Wirkung des Dampfes auf der einen Seite des Kolbens nicht genau dieselbe wie auf der anderen, und daher zur genauen Ermittelung der Leistung einer Dampfmaschine noch nöthig, daß man mit dem Indicator auch auf der zweiten Seite des Dampfcylinders Beobachtungen anstelle. Man kann zu diesem Zwecke von dem Indicator aus sowohl eine Röhre nach der einen als auch eine Röhre nach der anderen Seite des Dampfcylinders führen, muß jedoch während eines Versuches stets nur die Communication mit einer Seite herstellen. Am besten ist es gleichzeitig zwei Indicatoren in Anwendung zu bringen.

3) Die Schieberflächen haben nicht die angemessene Breite; es findet z. B. eine zu große Bedeckung Statt, welche dadurch angezeigt wird, daß die Indicatorcurve Fig. 802 sich einerseits zu zeitig herab- und andererseits zu früh heraufzieht.

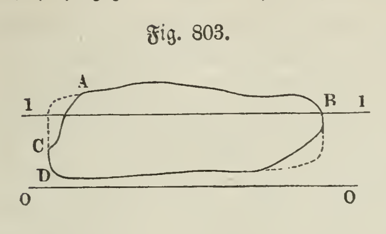
Fig. 802.



4) Das Excentrik hat nicht die richtige Stellung zur Warze des Krummzapfens, es findet daher nicht der zweckmäßige Grad des Voreilens Statt.

Ist das Voreilen zu stark, so fällt die Indicatorcurve ähnlich wie Fig. 802 aus; ist hingegen dasselbe nicht vorhanden oder zu schwach, so tritt das umgekehrte Verhältniß ein, nämlich eine starke Abstumpfung der Ecken *A* und *C*, Fig. 803, der von der Schiebercurve umschlossenen Fläche.

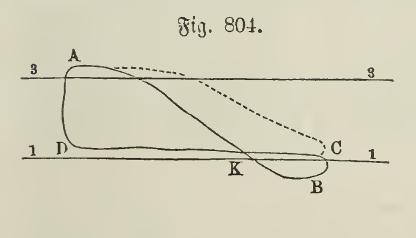
Fig. 803.



5) Das Excentrik hat nicht die richtige Excentricität oder der Schieberweg nicht die erforderliche Größe. Ist dieser Weg zu klein, so findet nicht die nöthige Eröffnung der Wege Statt, und es entsteht daher eine Indicatorcurve wie Fig. 802, ist aber derselbe zu groß, so fällt die Expansion des Dampfes zu klein aus, und es findet ein zu großer Dampfverbrauch Statt, wie es auch bei einer zu kleinen Schieberbedeckung der Fall ist.

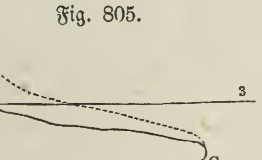
Eine eigenthümliche Gestalt, Fig. 804, nimmt die Schiebercurve einer Dampfmaschine ohne Condensation dann an, wenn die Expansion des Dampfes zu weit getrieben wird. Es ist dann gegen Ende des Kolbenschubes der Gegendruck größer als der Dampfdruck, und es bildet deshalb das Indicatordiagramm einen Knoten *K*.

Fig. 804.



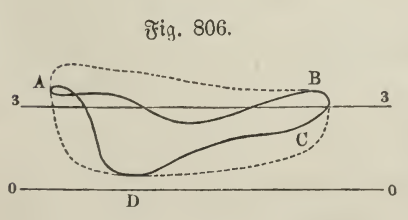
Ist ferner die Dampfklappe oder das Regulirungsventil im Dampfrohre zu stark geschlossen, so findet ebenfalls eine schlechte Dampfbenutzung Statt, wie auch durch die Gestalt der Indicatorcurve in Figur 805 angezeigt wird.

Fig. 805.



Wenn der Dampfkolben nicht dampfdicht abschließt, so nimmt die Indicatorcurve ebenfalls eine eigenthümliche Form an, weil dadurch der Dampfdruck herabgezogen und der Gegendruck vergrößert wird. Findet dieses undichte Abschließen in sehr hohem Grade Statt, so kann die Indicatorcurve die Gestalt in Fig. 806 anneh-

Fig. 806.



men. Ein ähnliches Verhältniß findet Statt, wenn die Dampfschieber nicht dampfdicht abschließen.

Uebrigens ist bei dem Gebrauche des Indicators auch darauf zu sehen, daß er in gutem Zustande sei, daß namentlich der Kolben desselben vor dem Gebrauche eingeölt werde und die Schnur desselben die richtige Länge erhalte.

Man kann auch den Dampfindicator an den Schieber anschließen, wobei man ein sogenanntes Schieberdiagramm erhält, welches die Dampfspannung bei den verschiedenen Schieberstellungen angiebt und die Function der Steuerung gegen Anfang und Ende des Kolbenhubs sehr gut erkennen läßt. Um einen vollständigen Aufschluß über den Gang der Steuerung einer Dampfmaschine zu erhalten, nimmt man bei Absperrung des Dampfes ein drittes Diagramm ab, welches den Zusammenhang zwischen Kolben- und Schieberweg direct anzeigt und, wie aus §. 459 folgt, nahe die Form einer Ellipse hat.

Auch thut der Dampfindicator seine nützlichen Dienste, wenn man ihn auf die Luft- und Warmwasserpumpe aufsetzt.

Anmerkung. Ausführliche Mittheilungen über die Indicatorcurven, welche bei Versuchen mit verschiedenen Maschinen erhalten worden sind, macht Morin im dritten Theile seiner Leçons de Mécanique pratique (s. auch die Schrift: Catéchisme du Mécanicien à vapeur, par E. Paris, art. Indicateur de P. Garnier, sowie Bornemann's Abhandlung über den Indicator (von Combes) in der Zeitschrift „der Ingenieur"). Besonders ist zu empfehlen der Indicator, Anleitung zum Gebrauch desselben bei der Prüfung von Dampfmaschinen ꝛc. von J. Völckers, Berlin 1863.

§. 496 **Arbeitsverluste einer Dampfmaschine.** Die theoretische Leistung einer Dampfmaschine, welche sich mittels der im Obigen entwickelten Formeln berechnen läßt, wird durch mehrere Nebenhindernisse, wie z. B. Kolbenwirkung, Abkühlung, Druckverlust in den Leitungen u. s. w., bedeutend herabgezogen, so daß die effective Leistung derselben nur 40 bis 70 Procent der theoretischen ausfällt, wie insbesondere durch Brems- und Indicatorversuche nachgewiesen wird. Was zunächst die Leitungen anlangt, wodurch der Dampf aus dem Kessel in die Dampfkammer und von da durch die Dampfcanäle in den Dampfcylinder geführt wird, so verursachen dieselben jedenfalls eine Verminderung in der Dampfspannung, und es ist deshalb die Spannung p des Dampfes im Cylinder, welche man (s. oben §. 478) in die Leistungsformel einzusetzen hat, nicht die Dampfspannung p_0 im Kessel, sondern um einen den Hindernissen in der Dampfleitung entsprechenden Verlust kleiner. Es entspringen diese Verluste aus der Reibung des Dampfes in den Leitungen, aus der wirbelnden Bewegung bei Querschnitts- und Richtungsänderungen der Dampfwege, und aus der Abkühlung an den Umfangswänden derselben. Die Verminderung des Dampfdrucks in den Leitungen beträgt bei ganz geöffneter Dampfklappe nur 1 bis 5 Procent. Durch

Stellung dieser gewöhnlich in einem Drosselventil bestehenden Klappe läßt sich, dem geforderten Gang der Maschine entsprechend, die Differenz $p_0 - p$ zwischen Dampfspannung im Kessel und der im Cylinder beliebig vergrößern. Bei dem Durchgang durch das Drosselventil bleibt der Dampf in seinem gesättigten Zustande; es nimmt daher auch die Dichtigkeit desselben mit der Spannung nahe gleichmäßig ab, und es bleibt die Arbeitsfähigkeit des Dampfes fast unverändert. Es ist hier das Bewegungsverhältniß ein ganz anderes als bei dem Wasser; das Arbeitsquantum $\frac{(v_1 - v)^2}{2g} Q\gamma$, welches eine Flüssigkeitsmenge $Q\gamma$ in Anspruch nimmt, wenn deren Geschwindigkeit v_1 durch Wirbelbildung in v übergeht, liefert ein entsprechendes Wärmequantum, welches nur beim Wasser verloren geht, dagegen beim Dampf während der Ausdehnung desselben mit nutzbar gemacht wird.

Ein anderer Arbeitsverlust geht beim Ausströmen des Dampfes aus dem nöthigen Ueberschuß des Dampfdrucks über dem Druck im Condensator oder, nach Befinden, über dem äußeren Luftdruck, hervor. Auch erwächst durch das Fortreißen von Kesselwasser, welches dem durch die Dampfleitung abgeführten Dampf mechanisch beigemengt ist, zuweilen ein nicht ganz unbedeutender Arbeitsverlust.

Die Kolbenreibung einer Dampfmaschine ist genau wie bei den Wassersäulenmaschinen (nach §. 320) in Rechnung zu ziehen, und ebenso sind die Arbeitsverluste, welche die Bewegung der Steuerung verursacht, ähnlich wie bei diesen Maschinen zu berechnen.

Schädlicher Raum. Durch den schädlichen Raum erwächst einer §. 497
Dampfmaschine ein weiterer Verlust. Wir verstehen hier unter demselben den Raum, welchen der Dampfkolben am Ende seines Weges zwischen sich und zwischen dem Dampfschieber oder Ablaßventil übrig läßt, welcher also beim folgenden Rückwege von Neuem mit Dampf angefüllt werden muß, ehe dieser vollständig auf den Kolben wirken kann. Es besteht dieser Raum aus zwei ungleich weiten Theilen, ein Theil wird durch den Dampfweg und der andere von einem Theile des Dampfcylinders gebildet. Bezeichnet F_2 den Querschnitt sowie l_2 die Länge des Dampfcanals, so ist der Inhalt desselben $= F_2 l_2$, und setzen wir die Höhe des kleinsten Zwischenraumes zwischen der Kolbenfläche und dem Cylinderboden oder Cylinderdeckel, $= \sigma_1$, so erhalten wir für den Inhalt dieses Raumes $= F\sigma_1$. Es ist also der ganze schädliche Raum:

$$V_1 = F_2 l_2 + F\sigma_1 = F\left(\sigma_1 + \frac{F_2}{F}\, l_2\right).$$

Der Einfachheit wegen drückt man den den Dampfweg bildenden Raumtheil ebenfalls durch einen Cylindertheil aus, setzt deshalb die Höhe des schädlichen Raumes:

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{F_2}{F} l_2,$$

und den schädlichen Raum selbst:

$$V_1 = F\sigma.$$

In der Regel ist σ nicht größer als $\frac{s}{20}$ oder 5 Procent des ganzen Kolbenweges; daher auch der schädliche Raum = $^1/_{20}$ des ganzen vom Dampfkolben zurückgelegten Weges. Wäre der schädliche Raum Null, so würde bei einem einfachen Kolbenwege das Dampfquantum $V = Fs$ verbraucht werden, da aber derselbe immer eine gewisse Größe $F\sigma$ hat, anfänglich mit Dampf von der Spannung q angefüllt ist, und am Ende des Kolbenweges s Dampf von der Spannung p enthält, so erwächst bei jedem Kolbenwege der Dampfverlust $F\sigma \left(1 - \frac{q}{p}\right)$ oder annähernd $= F\sigma$, da, zumal bei Condensationsmaschinen, $\frac{q}{p}$ ein kleiner Bruch ist. Hiernach ist bei Maschinen ohne Expansion das verbrauchte Dampfquantum pr. Spiel:

$$V = F(s + \sigma),$$

daher umgekehrt:

$$Fs = \frac{s}{s + \sigma} V,$$

und die Leistung nach §. 478 zu setzen:

$$L = \frac{n}{30} Fs\ (p - q) = \frac{n}{30} \cdot \frac{s}{s + \sigma} V (p - q),$$

d. i.:

$$L = \frac{s}{s + \sigma} (p - q)\ Q,$$

oder, aus bekannten Gründen,

$$L = 144 \cdot \frac{s}{s + \sigma} (p - q)\ Q \text{ Fußpfund.}$$

Beispiel. Eine Dampfmaschine ohne Expansion hat bei dem schädlichen Raume $\sigma = 0{,}05\,s$, die Leistung:

$$L = \frac{s}{s + 0{,}05\,s} \cdot 144\ (p - q)\ Q = 0{,}952 \,.\, 144\ (p - q)\ Q;$$

also ungefähr um 5 Procent kleiner als ohne schädlichen Raum; wäre also die theoretische Leistung (s. Beispiel §. 478) $L = 50$ Pferdekräfte, so würde sie wegen des schädlichen Raumes auf $50 \,.\, 0{,}95 = 47{,}5$ Pferdekräfte herabsinken.

§. 498 Bei den Expansionsmaschinen hat der schädliche Raum einen namhaften Einfluß, da hier bei jedem Kolbenwege das Dampfvolumen $F(s + \sigma)$ in das Dampfvolumen $F(s_1 + \sigma)$ übergeht. Es ist daher auch die Expansionsleistung pr. Kolbenschub, nach der Mariotte'schen Regel

$$A_1 = F\,(s + \sigma)\,p\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) = V p\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right).$$

Ueberdies ist die durch den Gegendruck Fq verlorene Arbeit nicht Fsq, sondern $= F s_1\, q = \frac{V s_1}{s + \sigma}\, q$, daher folgt die Gesammtleistung pr. Kolbenschub:

$$A = \frac{s}{s + \sigma}\, V p - \frac{s_1}{s + \sigma}\, V q + V p\, Log\ nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)$$

$$= V p\left[\frac{s}{s + \sigma} - \frac{s_1}{s + \sigma}\,\frac{q}{p} + Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)\right],$$

also pr. Secunde:

$$L = 144\ Q p\left[\frac{s}{s + \sigma} + Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_1}{s + \sigma}\,\frac{q}{p}\right].$$

Legt man die Pambour'sche Theorie zu Grunde, so hat man nach §. 481 die Expansionsleistung pr. Spiel, wenn man $s + \sigma$ statt s und $s_1 + \sigma$ statt s_1 einführt:

$$A_1 = F\,(\beta + p)\,(s + \sigma)\ Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - F\beta\,(s_1 - s)$$

$$= V\left[(\beta + p)\ Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{\beta\,(s_1 - s)}{s + \sigma}\right];$$

es ist daher hiernach die Gesammtleistung pr. Kolbenschub:

$$A = \left[\frac{p\,s}{s + \sigma} - \frac{q\,s_1}{s + \sigma} + (\beta + p)\ Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \beta\,\frac{(s_1 - s)}{s + \sigma}\right] V$$

$$= \left[\frac{s}{s + \sigma}(\beta + p) + (\beta + p)\,Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_1}{s + \sigma}(\beta + q)\right] V$$

$$= (\beta + p)\, V\left[\frac{s}{s + \sigma} + Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_1}{s + \sigma}\cdot\frac{\beta + q}{\beta + p}\right];$$

endlich die Leistung pr. Secunde:

$$L = 144\ Q\,(\beta + p)\left[\frac{s}{s + \sigma} + Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_1}{s + \sigma}\cdot\frac{\beta + q}{\beta + p}\right]$$

$$= {}^{58}/_{25}\,\frac{\psi\,\alpha}{640 - t_1}\cdot K\left[\frac{s}{s + \sigma} + Log.\,nat.\left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_2}{s + \sigma}\cdot\frac{\beta + q}{\beta + p}\right] \text{Fußpfund.}$$

Bei den zweicylindrigen oder Woolf'schen Maschinen hat man zwei schädliche Räume σ und σ_1, den einen im kleinen, den anderen im großen Cylinder, deshalb ist dann auch nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{F_1\,(s_1 + \sigma_1) + F\sigma}{F\,(s + \sigma) + F_1\,\sigma_1},$$

daher die Leistung pr. Kolbenschub:

$$A = Vp\left[\frac{s}{s+\sigma} - \frac{s_1}{s+\sigma}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{q}{p} + Log.nat.\left(\frac{F_1(s_1+\sigma_1)+F\sigma}{F(s+\sigma)+F_1\sigma_1}\right)\right],$$

und die pr. Secunde:

$$L = 144\, Qp\left[\frac{s}{s+\sigma} - \frac{s_1}{s+\sigma}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{q}{p} + Log.nat.\left(\frac{F_1(s_1+\sigma_1)+F\sigma}{F(s+\sigma)+F_1\sigma_1}\right)\right].$$

Nach der Pambour'schen Theorie folgt hingegen:

$$L = 144\, Q\,(\beta + p)\left[\frac{s}{s+\sigma} - \frac{s_1}{s+\sigma}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{\beta+q}{\beta+p} + Log.nat.\left(\frac{F_1(s_1+\sigma_1)+F\sigma}{F(s+\sigma)+F_1\sigma_1}\right)\right] \text{ Fußpfund.}$$

Beispiel. Wie viel verliert eine eincylindrige Dampfmaschine durch den schädlichen Raum an Leistung, wenn dieser ein Zwanzigstel des Kolbenweges beträgt, wenn ferner die Maschine ohne Condensation und mit Dämpfen von 4 Atmosphären Spannung arbeitet, und wenn man diese bei $^3/_8$ des Kolbenweges absperrt? Ohne schädlichen Raum wäre

$$L = 144\left(1 + Log.nat.\,{}^8/_3 - {}^8/_3\cdot\frac{0{,}2922+1}{0{,}2922+4}\right)(\beta+p)\,Q$$

$$= 144\,(1 + 0{,}9808 - 0{,}8028)\,(\beta+p)\,Q = 169{,}6\,(\beta+p)\,Q \text{ Fußpfund,}$$

mit dem schädlichen Raume hingegen, da $\frac{\sigma}{s_1} = {}^1/_{20}$ und $s = {}^8/_3\, s_1$, also:

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{8}{3\,.\,20} = {}^2/_{15} \text{ ist,}$$

$$L = 144\left(\frac{15}{15+12} + Log.nat.\frac{40+2}{15+2} - \frac{40}{17}\cdot\frac{1{,}2922}{4{,}2922}\right)(\beta+p)\,Q$$

$$= 144\,(0{,}8823 + 0{,}9045 - 0{,}7083)\,(\beta+p)\,Q = 155{,}3\,(\beta+p)\,Q;$$

folglich ist der durch den schädlichen Raum herbeigeführte Arbeitsverlust

$$= \frac{169{,}6 - 155{,}3}{169{,}6}\,.\,100 = 8{,}4 \text{ Procent.}$$

§. 499 **Kolbenreibung.** Ein bedeutender Arbeitsverlust erwächst jeder Dampfmaschine aus der Kolbenreibung. Dieselbe ist wie bei den Wassersäulenmaschinen (s. Bd. II, §. 320) in Rechnung zu ziehen. Bei der Breite e der Liderung, beim Kolbendurchmesser d und bei der Spannung p läßt sich die Kraft, mit welcher die Liderung an die Cylinderwand andrückt oder andrücken muß, setzen $= \pi d e p$, und folglich die entsprechende Reibung:

$$R = \varphi\,.\,\pi d e p.$$

Da nun die Dampfkraft $P = \frac{\pi d^2}{4}\,p$ ist, so hat man das Verhältniß:

$$\frac{R}{P} = \frac{4\varphi e}{d},$$

und daher den Dampfdruck auf den Kolben durch $1 - \frac{4\varphi e}{d}$ zu multipliciren, um die von der Kolbenwirkung übrig gelassene Bewegungskraft des Kolbens zu erhalten. Hierin ist nach Bd. I, §. 174, und auch in Uebereinstimmung mit den Annahmen Tredgold's für Metallliderung, $\varphi = 0{,}08$ und für Hanfliderung $\varphi = 0{,}15$ zu setzen.

Da während der Expansion die Spannung abnimmt, so würde die Kolbenreibung auch kleiner ausfallen, wenn die Liderung eine autoclave wäre, d. h. wenn dieselbe durch den Dampf an die Cylinderfläche angedrückt würde; da aber dieselbe in der Regel nur durch Federn oder Schrauben angedrückt wird, so müssen wir dieselbe während des ganzen Kolbenspieles constant annehmen. Uebrigens ist auch noch der Gegendruck in Abzug zu bringen, da dem Durchdringen des Dampfes zwischen der Cylinderwand und der Liderung durch diesen Druck entgegengewirkt wird. Es wird demnach durch die Kolbenreibung die Leistung einer Dampfmaschine pr. Spiel um den Werth

$$\frac{4\varphi e}{d} F (p - q) s_1$$

herabgezogen, so daß sich für eine Maschine ohne Expansion, wo $s_1 = s$ ist,

$$L = 144\, Q\, (p - q) \left(1 - \frac{4\varphi e}{d}\right) \text{ Fußpfund,}$$

für eine solche mit Expansion aber:

$$L = 144\, Qp \left[1 + Log. nat. \left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1} - \frac{4\varphi e}{d} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \frac{p - q}{p}\right]$$

$$= 144\, Qp \left[1 + Log. nat. \left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{q}{p_1} - \frac{4\varphi e}{d} \cdot \frac{p - q}{p_1}\right],$$

oder nach Pambour:

$$L = 144\, (\beta + p)\, Q \left[1 + Log. nat \left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q}{\beta + p_1} - \frac{4\varphi e}{d} \cdot \frac{s_1}{s} \cdot \frac{p - q}{\beta + p}\right]$$

$$= 144\, (\beta + p)\, Q \left[1 + Log. nat. \left(\frac{s_1}{s}\right) - \frac{\beta + q + \frac{4\varphi e}{d}(p - q)}{\beta + p_1}\right]$$

herausstellt.

Hierzu gehört noch die Reibung der Kolbenstange in der Stopfbüchse, welche sich übrigens genau so berechnen läßt, wie die Kolbenreibung. Ist d_1 der Durchmesser dieser Stange und e_1 die Breite der Stopfbüchsenliderung, so hat man diese Reibung:

$$R_1 = \varphi \pi d_1 e_1 (p - q),$$

wo q wieder den Gegendruck bezeichnet; es ist daher bei gleicher Liderung

$$\frac{R_1}{R} = \frac{d_1 e_1}{d e},$$

und man hat folglich die Kolbenreibung um den Theil $\frac{d_1 e_1}{d e}$ zu vergrößern, um beide Reibungen zusammen zu erhalten.

Durch den Querschnitt der Kolbenstange erwächst der Druckfläche ein Verlust, welcher macht, daß die Kraft beim Niedergange des Kolbens kleiner ist als beim Aufgange; da aber der Niedergang diesem Verluste entsprechend weniger Dampf erfordert als der Aufgang, so hat man nicht nöthig, ihn besonders zu beachten, vielmehr sich damit zu begnügen, in der Berechnung der Leistung statt F den Mittelwerth

$$F = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - \frac{d_1^2}{2}\right)$$

einzusetzen.

Anmerkung. Die Arbeitsverluste, welche die Steuerung verursacht, sind zu mannigfaltig, als daß sich zur Ermittelung derselben besondere Regeln angeben ließen; meist wird man sich hier mit einer Abschätzung oder oberflächlichen Rechnung begnügen können.

Beispiel. Welche Leistung verliert die in den Beispielen §. 478 und §. 480 behandelte Dampfmaschine durch die Kolbenreibung? Nehmen wir nach §. 320, $\frac{e}{d} = 1/8$, sowie $\varphi = 0{,}08$ an, so erhalten wir, da

$$p - q = (3{,}5 - 1) \,.\, 14{,}10 = 35{,}25 \text{ Pfund},$$

und da $d = 1{,}5$ Fuß ist, die Kolbenreibung:

$$R = 0{,}08\,\pi \,.\, 1/8 \,.\, 1{,}5^2 \,.\, 35{,}25 \,.\, 144 = 3{,}24 \,.\, 35{,}25 \,.\, \pi = 359 \text{ Pfund};$$

daher die Arbeit der Reibung pr. Kolbenweg, da dieser $10/3$ Fuß mißt,

$$Rs = 10/3 \,.\, 359 = 1197 \text{ Fußpfund},$$

und folglich bei 24 Spielen pr. Minute, der Arbeitsverlust durch die Reibung pr. Secunde

$$Rv = 1197 \,.\, 24/30 = 1197 \,.\, 4/5 = 954 \text{ Fußpfund} = 2 \text{ Pferdekräfte}.$$

Da das Beispiel in §. 478 die Leistung 49,8 Pferdekräfte findet, so consumirt hiervon die Reibung $= 2/49{,}8 \,.\, 100 = 4$ Procent der Leistung.

§. 500 **Maximalleistung.** Um zu vereinfachen, können wir die Kolbenreibung R mit Inbegriff der übrigen Nebenhindernisse als einen Druck Fr ansehen, welcher in Vereinigung mit dem Gegendrucke Fq im Condensator u. s. w. der Bewegung des Kolbens entgegenwirkt, und nun in den obigen Formeln statt q überall $q + r$ einsetzen. Hierbei bezeichnet natürlich r den Theil der Kolbenreibung u. s. w., welcher auf jeden Quadratzoll der Kolbenfläche kommt

$$\text{und} = \frac{R}{F} + \cdots = \frac{4\,\varphi\, e}{d}(p - q) + \ldots \text{ zu setzen ist.}$$

Die allgemeinste Pambour'sche Leistungsformel für eincylindrige Expansionsmaschinen nimmt dann die Form

$$L = 144\, Q(\beta + p)\left[\frac{s}{s + \sigma} + Log. nat. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) + \frac{s_1}{s + \sigma} \cdot \frac{\beta + q + r}{\beta + p}\right]$$

an.

Es ist nun die Frage, wie weit soll man die Expansion treiben, um die Maximalleistung bei einer gegebenen Dampfmenge zu erlangen, welches Verhältniß muß man also für $\frac{s_1}{s}$ in Anwendung bringen? Die Expansion bringt gewiß noch Vortheil, so lange sie eine Leistung giebt, welche die Arbeit des Gegendruckes, der Kolbenreibung u. s. w. übertrifft, d. h. so lange die Dampfspannung noch größer ist als der Gegendruck $q + r$; wäre dieselbe aber kleiner als der Gegendruck, so würde natürlich die arbeitende Kraft negativ ausfallen, und die Maschine auf Kosten ihrer Totalleistung in Folge ihrer Trägheit die Expansion noch weiter ausdehnen können. Damit ein solcher Verlust nicht eintrete und gleichwohl von der Dampfkraft der größte Gewinn gezogen werde, ist es nöthig, gerade so weit expandiren zu lassen, daß die Dampfspannung p_1 am Ende des Kolbenspieles dem Gegendrucke $q + r$ gleichkomme. Nun ist aber nach der Navier'schen Regel:

$$\frac{s + \sigma}{s_1 + \sigma} = \frac{\beta + p_1}{\beta + p};$$

setzen wir daher statt p_1, $q + q_1$, so bekommen wir die Regel:

$$\frac{s + \sigma}{s_1 + \sigma} = \frac{\beta + q + r}{\beta + p},$$

oder wenn wir σ vernachlässigen,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\beta + q + r}{\beta + p},$$

oder:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{1}{\beta + p} \cdot \frac{1}{\beta + q + r},$$

also, wenn man die den Spannungen p und $q + q_1$ entsprechenden specifischen Dampfvolumina $\frac{\alpha}{\beta + p}$ und $\frac{\alpha}{\beta + q + r}$ durch μ und μ_1 bezeichnet,

$$\frac{s}{s_1} = \frac{\mu}{\mu_1};$$

d. h. die vortheilhafteste Dampfbenutzung findet dann Statt, wenn sich der Kolbenweg vor der Expansion zum ganzen Kolbenwege verhält, wie das specifische Dampfvolumen, welches dem eintre-

tenden Dampfe entspricht, zum Dampfvolumen, welches dem Gegendrucke $q + r$ angehört.

Nimmt man, dem Mariotte'schen Gesetze folgend, $\beta = 0$ an, so erhält man die Regel:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{q + r}{p},$$

welche bei bedeutenden Dampfspannungen auf zu kleine Werthe führt.

Beispiel. Wie weit ist die Expansion bei der im Beispiele zu §. 480 und §. 481 behandelten Maschine zu treiben, um von dem Dampfe den größten Gewinn zu ziehen? Es ist hier $p = 3{,}5 \, . \, 14{,}10 = 49{,}35$ Fußpfund, ferner $q = 14{,}10$, sowie $r = \frac{R}{F} = \frac{359}{254{,}47} = 1{,}411$, rechnen wir indessen wegen anderer Verluste das Doppelte, also $r = 2{,}821$, so bekommen wir:

$$q + r = 16{,}92.$$

Nun entspricht der Spannung $p = 3{,}5$ Atmosphären das specifische Dampfvolumen $= 508$ und der Spannung $q + r = 16{,}92$ Pfund $= 1{,}2$ Atmosphären das specifische Dampfvolumen $= 1390$; daher ist hier das zweckmäßigste Expansionsverhältniß:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{508}{1390} \text{ oder ungefähr } {}^4/_{11},$$

nach der Mariotte'schen Regel hingegen:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{1{,}2}{3{,}5} \text{ oder ungefähr } \frac{s}{s_1} = {}^{40}/_{117}.$$

§. 501 **Wirkungsgrade der Dampfmaschinen.** Die effectiven Leistungen der Dampfmaschinen lassen sich auch annähernd mit Zuhülfeziehung von Erfahrungscoefficienten, welche sich allerdings bei Maschinen von verschiedenen Größen und verschiedenen Systemen etwas ändern, durch die Formeln für die theoretische Leistung berechnen. Diesen Weg der Berechnung haben besonders Poncelet und Morin eingeschlagen, und der Letztere theilt in seinen Schriften, namentlich in seinem Aide-Mémoire de Mécanique pratique, und in seinen Leçons de Mécanique pratique folgende aus Beobachtungen und Versuchen gezogene Erfahrungszahlen mit.

Für Maschinen ohne Expansion ist die Leistung

$$L_1 = \eta \, . \, 144 \; Q \, (p_0 - q_0) \text{ Fußpfund},$$

wo Q das verbrauchte Dampfquantum pr. Secunde, p_0 die Dampfspannung im Kessel und q_0 die im Condensator oder, nach Befinden, die in der freien Luft bezeichnet. Der Erfahrungscoefficient η oder der sogenannte Wirkungsgrad wächst mit der Größe der Maschine, scheint jedoch bei einer gewissen Größe der Maschine ein Maximum zu erreichen; folgende Tabellen enthalten seine vorzüglichsten Werthe.

1) Für Tief- oder Niederdruckmaschinen.

Stärke der Maschine in Pferdekräften.	Wirkungsgrad η bei gutem Zustande der Unterhaltung.	Wirkungsgrad η bei gewöhnlichem Zustande der Unterhaltung.
4 bis 8	0,50	0,42
10 „ 20	0,56	0,47
30 „ 50	0,60	0,54
60 „ 100	0,60	0,54

2) Für Hochdruckmaschinen.

Stärke der Maschine in Pferdekräften.	Wirkungsgrad η bei gutem Zustande der Unterhaltung.	Wirkungsgrad η bei gewöhnlichem Zustande der Unterhaltung.
unter 10	0,50	0,40
10 bis 20	0,55	0,44
20 „ 30	0,60	0,48
30 „ 40	0,65	0,52
40 „ 50	0,70	0,56

Beispiel. Welche Leistung giebt eine Dampfmaschine mit Tiefdruck und ohne Expansion, welche bei einem Kolbenhub von 6 Fuß eine Cylinderweite von $2\frac{1}{2}$ Fuß hat, pr. Minute 18 Spiele macht, übrigens mit Dämpfen von 104° Temperatur gespeist wird und im Condensator eine Temperatur von 35° unterhält? Das pr. Spiel verbrauchte Dampfquantum ist

$$V = \pi \cdot (5/4)^2 \cdot 6 = 29{,}45 \text{ Cubikfuß},$$

und die den Temperaturen 104° und 35° entsprechenden Spannungen sind 1,148 und 0,057 Atmosphären, folglich ist die theoretische Leistung dieser Maschine pr. Kolbenweg:

$$Ps = 144\, V\, (p_0 - q_0) = 144 \cdot 29{,}45 \cdot 14{,}10\, (1{,}148 - 0{,}057)$$
$$= 4240{,}8 \cdot 14{,}10 \cdot 1{,}091 = 65236 \text{ Fußpfund},$$

oder, da die Maschine pr. Secunde diesen Weg $\frac{2 \cdot 18}{60} = 0{,}6$mal macht, die theoretische Leistung pr. Secunde

$$L_1 = 0{,}6 \cdot 65236 = 39142 \text{ Fußpfund} = 81{,}5 \text{ Pferdekräfte}.$$

Nehmen wir nun den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}60$ an, so bekommen wir die effective Leistung dieser Maschine:

$$L_1 = 0{,}6 \,.\, 41779 = 23985 \text{ Fußpfund} = 48{,}9 \text{ Pferdekräfte.}$$

Das Dampfquantum $Q = 0{,}6 \,.\, 29{,}45 = 17{,}67$ Cubikfuß, welches diese Maschine pr. Secunde verbraucht, wiegt nach der Tabelle in §. 391, bei 1,152 Atmosphären Spannung,

$$Q\gamma = \frac{61{,}75 \,.\, 17{,}67}{1451} = \frac{1166{,}22}{1451} = 0{,}7520 \text{ Pfund,}$$

und erfordert, wenn das Speisewasser mit 30^0 Wärme in den Kessel tritt, annähernd die Wärmemenge

$$W = (640 - 30) \,.\, 0{,}7520 = 610 \,.\, 0{,}7520 = 459 \text{ Calorien.}$$

Wenn nun 1 Pfund Brennmaterial, welches zur Erzeugung dieser Dämpfe angewendet wird, nur $^3/_4 \,.\, 7500 = 5625$ Calorien giebt und bei der Dampferzeugung hiervon nur 0,6 zu Gute gemacht werden, so folgt der nöthige Brennstoffaufwand stündlich

$$= \frac{60 \,.\, 60 \,.\, 459}{0{,}6 \,.\, 5625} = \frac{27520300}{5625} = 489 \text{ Pfund.}$$

Da nun die Maschine 48,9 Pferdekräfte leistet, so folgt hiernach der Brennmaterialaufwand stündlich und pr. Pferdekraft:

$$K = \frac{489}{48{,}9} = 10 \text{ Pfund.}$$

§. 502 Für Expansionsmaschinen ist ebenso die effective Leistung

$$L_1 = \eta \,.\, 144\, Q p_0 \left(1 + Log.\, nat. \frac{p_0}{p_1} - \frac{q_0}{p_1}\right) \text{ Fußpfund}$$

zu setzen, und hierin für $\frac{p_0}{p_1}$ der Werth $\frac{F_1 s_1}{F s}$ einzuführen. Uebrigens bezeichnet natürlich auch hier p_0 die Spannung des Dampfes im Kessel und q_0 die im Condensator. Der Wirkungsgrad η wächst hier ebenfalls mit der Stärke der Maschine. Sein Werth für jede Maschine von gegebener Stärke ist aus folgender Tabelle zu entnehmen.

Stärke der Maschine in Pferdekräften.	Wirkungsgrad η bei gutem Zustande der Unterhaltung.	Wirkungsgrad η bei gewöhnlichem Zustande der Unterhaltung.
4 bis 8	0,33	0,30
10 „ 20	0,42	0,35
20 „ 30	0,47	0,38
30 „ 40	0,49	0,39
40 „ 50	0,57	0,46
50 „ 60	0,62	0,50
60 „ 70	0,66	0,53
70 „ 100	0,76	0,61

Diese Coefficienten sind sowohl bei den ein- als auch bei den zweicylindrigen Expansionsmaschinen anwendbar.

Es versteht sich von selbst, daß diese Coefficienten nur bei mittleren Geschwindigkeiten, mittleren Querschnitten der Dampfleitungen u. s. w. ihre Gültigkeit haben.

Anmerkung. Ueber die Leistungen der Locomotiven und über die der einfachwirkenden Maschinen, welche zum Wasserheben dienen, namentlich über die der Cornwaller Wasserhebungsmaschinen, wird im dritten Theile das Nöthige abgehandelt. Auch findet dann die Theorie der Schiebersteuerung eine ausführliche Behandlung.

Beispiel. Welche Leistung kann man von einer Woolf'schen Expansionsdampfmaschine erwarten, die, wie im Beispiele zu §. 482, die Dimensionen $d = 18$ Zoll, $s = 40$ Zoll, $d_1 = 30$ Zoll und $s_1 = 50$ Zoll hat, welche ferner 24 Spiele pr. Minute macht und im Dampfkessel $3\frac{1}{2}$, dagegen im Condensator $\frac{1}{8}$ Atmosphäre Spannung besitzt? Nach der im angeführten Paragraphen ausgeführten Berechnung ist die theoretische Leistung $L = 148$ Pferdekräfte; setzen wir den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}7$, so erhalten wir die effective Leistung der Maschine:

$$L_1 = 0{,}7\ .\ 148 = 103{,}6 \text{ Pferdekräfte;}$$

wofür jedoch der Sicherheit wegen nur 100 Pferdekräfte anzunehmen sein möchten. Das Dampfquantum pr. Secunde ist

$$Q = \frac{24}{30} \cdot (\tfrac{3}{4})^2\, \pi \cdot \frac{40}{12} = \frac{3\pi}{2} = 4{,}7124 \text{ Cubikfuß;}$$

dasselbe wiegt $\frac{61{,}75\ .\ 4{,}7124}{535} = 0{,}5439$ Pfund, und erfordert $610\ .\ 0{,}5813 = 354{,}6$ Calorien zu seiner Erzeugung. Wenn nun 1 Pfund Brennstoff bei der Verbrennung 5625 Calorien giebt, und hiervon nur 0,6 zur Wirkung gelangen, so folgt, daß diese Maschine an Brennstoff stündlich $\frac{60\ .\ 60\ .\ 354{,}6}{0{,}6\ .\ 5439} = 391$ Pfund, und folglich pr. Pferdekraft die Brennstoffmenge $K = \frac{391}{100} = 3{,}91$ Pfund verbraucht.

Pambour's Theorie. Pambour setzt bei seiner Theorie der Dampfmaschinen die Kraft des Dampfkolbens der auf die Kolbenfläche reducirten Last der Maschine gleich und nimmt diese aus drei Theilen bestehend an, nämlich aus der Nutzlast P_1, aus einem constanten Theile R und aus einem veränderlichen, der Nutzlast P_1 proportionalen Theil $\delta\, P_1$ der Nebenlast (vergl. § 140). Es ist also hiernach die mittlere Kolbenkraft: §. 503

$$P = P_1 + R + \delta\, P_1 = P_1\,(1 + \delta) + R,$$

sowie umgekehrt die Nutzlast:

$$P_1 = \frac{P - R}{1 + \delta}.$$

Ferner bezieht dieser Schriftsteller diese Kräfte auf die Einheit der Kolbenfläche

$$F = \frac{\pi d^2}{4},$$

z. B. auf den Quadratzoll, indem er

$$P = Fp,\; P_1 = Fp_1 \text{ und } R = Fr$$

setzt. Hiernach erhält er:

$$p = (1 + \delta)\, p_1 + r,$$

sowie die Nutzlast pr. Quadratzoll Kolbenfläche:

$$p_1 = \frac{p - r}{1 + \delta}.$$

Der der constanten Nebenlast R entsprechende Druckverlust r_1 besteht wieder aus zwei Theilen; aus dem Drucke q, welchen der Kolben auf seiner Gegenfläche durch die Spannung im Condensator oder in der freien Luft wirklich erleidet, und aus dem Theile r, welcher hauptsächlich durch die Kolben- und andere Reibungen verloren geht. Pambour setzt diesen Theil

$$r = \frac{300}{d} \text{ engl. Pfund}$$

auf jeden engl. Quadratfuß; führen wir aber das preußische Maß ein, so erhalten wir diesen Druckverlust pr. Quadratzoll Kolbenfläche:

$$r = \frac{25}{d} \text{ Pfund},$$

wobei der Durchmesser d des Kolbens in Zollen auszudrücken ist. Den Coefficienten δ giebt derselbe $= 0{,}14$ an, weshalb man hiernach erhält:

$$p = 1{,}14\, p_1 + q + r,$$

und umgekehrt:

$$p_1 = \frac{p - (q + r)}{1{,}14} = 0{,}878\, [p - (q + r)].$$

Es ist daher die Nutzlast einer Dampfmaschine ohne Expansion

$$P_1 = Fp_1 = \frac{F[p - (q + r)]}{1 + \delta} = 0{,}878\, F[p - (q + r)] \text{ Pfund},$$

und die Nutzleistung:

$$L_1 = P_1 v = \frac{Fv}{1 + \delta}\, [p - (q + r)]$$

$$= \frac{144\ Q}{1 + \delta}\, [p - (q + r)]$$

$$= 0{,}878 \,.\, 144\ Q\, [p - (q + r)]$$

$$= 126{,}4\ Q\, [p - (q + r)] \text{ Fußpfund}.$$

Bei den Expansionsmaschinen ist p veränderlich und deshalb nach §. 500

$$L_1 = \frac{144\,Q}{1+\delta}\left[\left(\frac{s}{s+\sigma} + Ln.\,\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)(\beta+p) - \frac{s_1}{s+\sigma}(\beta+q+r)\right]$$

$$= 126{,}4\,Q\left(\left[\frac{s}{s+\sigma} + Ln.\left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right](\beta+p) - \frac{s_1}{s+\sigma}(\beta+q+r)\right)$$

Fußpfund zu setzen.

Herr Völkers nimmt den Gegendruck pr. Quadratzoll für Maschinen mit Condensation, $q = 2{,}4$ Pfd. und für solche ohne Condensation, $q = 15$ Pfd. an. Uebrigens setzt derselbe die übrige constante Nebenlast

$$r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4,$$

indem er unter r_1 die Reibung des Schwungrades, unter r_2 die Reibung des Dampfkolbens, und unter r_3 den Widerstand der Luftpumpe, sowie unter r_4 den Widerstand der Kaltwasserpumpe versteht, und nimmt auf Grund seiner Versuche

1) für Dampfmaschinen ohne Condensation

$$r = 0{,}00033\;\frac{G}{d^2} + \frac{1{,}212}{d},$$

2) für gewöhnliche Dampfmaschinen mit Condensation

$$r = 0{,}00033\;\frac{G}{d^2} + \frac{1{,}212}{d} + 0{,}48 + 0{,}009\,h,$$

3) ferner für Woolf'sche Dampfmaschinen

$$r = 0{,}00024\;\frac{G}{d^2} + \frac{1{,}32}{d} + 0{,}41 + 0{,}008\,h, \text{ und}$$

4) für Corliß-Dampfmaschinen

$$r = 0{,}00033\;\frac{G}{d^2} + \frac{1{,}212}{d} + 0{,}41 + 0{,}008\,h$$

an, wobei das Gewicht G des Schwungrades in Pfunden, ferner der Durchmesser d des Dampfkolbens in Zollen, sowie die Förderhöhe h der Kaltwasserpumpe in Fußen auszudrücken sind, und r die constante Nebenlast in Pfunden pr. Quadratzoll Kolbenfläche angiebt.

Beispiel. Die in den Beispielen zu §. 481 und §. 482 berechnete eincylindrige Expansionsmaschine hat nach Morin, da die theoretische Leistung $L = 33{,}5$ Pferdekräfte gefunden wurde und deshalb $\eta = 0{,}50$ anzunehmen ist, die effective Leistung $L_1 = 0{,}50\,.\,33{,}5 = 16{,}25$ Pferdekräfte. Nach der Pambour'schen Theorie ist, wenn man $\sigma = \frac{1}{20}\,s_1$, $r = \frac{25}{18} = 1{,}39$ und die Spannung p im Dampfcylinder um 10 Procent kleiner als im Kessel annimmt, also $p = 0{,}9\,.\,p_0 = 0{,}9\,.\,3{,}5\,.\,14{,}10 = 44{,}415$ Pfund, und dagegen beim Austritt des Dampfes die Spannung im Dampfcylinder um 10 Procent größer als im Condensator, also $q = 1{,}1\,q_0 = 1{,}1\,.\,14{,}10 = 15{,}51$ Pfund setzt, die effective Leistung

$$L_1 = 0{,}878\,.\,271{,}44\left(\left[\frac{0{,}4}{0{,}4+0{,}05} + Log.\,nat.\,\left(\frac{1{,}05}{0{,}45}\right)\right].\,48{,}53 - \frac{21{,}02}{0{,}45}\right)$$

$$= 238{,}3\,[(0{,}8888 + 0{,}8473)\,.\,48{,}53 - 46{,}71]$$

$$= 238{,}3\,(1{,}7361\,.\,48{,}53 - 46{,}71) = 238{,}3\,(84{,}25 - 46{,}71)$$

$$= 238{,}3\,.\,37{,}54 = 8946 \text{ Fußpfund} = 18{,}6 \text{ Pferdekräfte},$$

also um 14,5 Procent größer, als nach Morin. Bei Annahme einer größeren Spannungsdifferenz würden die Resultate einander näher gekommen sein.

§. 504 **Leistungsformeln nach der Pambour'schen Theorie.** Führt man statt des Dampfquantums Q die entsprechende Speisewassermenge M ein, setzt man also

$$Q = \frac{\alpha\, M}{\beta + p},$$

so erhält man die Leistungsformel:

$$L_1 = \frac{144\, \alpha}{1 + \delta} M \left[\frac{s}{s + \sigma} + Ln. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right) - \frac{s_1}{s + \sigma} \cdot \frac{\beta + q + r}{\beta + p}\right],$$

oder:

$$L_1 = \frac{144}{1 + \delta} \left(\left[\frac{s}{s + \sigma} + Ln. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)\right] \alpha\, M - \frac{s_1}{s + \sigma} (\beta + q + r)\, Q\right),$$

und es ist hiernach zur Berechnung der Leistung einer Dampfmaschine die Dampfspannung p im Cylinder gar nicht nöthig.

Noch hat man $Q = \frac{n}{30} F (s + \sigma)$ und $v = \frac{n}{30} s_1$, daher läßt sich auch

$$Q = \frac{v}{s_1} F (s + \sigma) = \frac{s + \sigma}{s_1} F v$$

einführen, so daß sich ergiebt:

$$1)\quad L_1 = \frac{144}{1 + \delta} \left(\left[\frac{s}{s + \sigma} + Ln. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)\right] \alpha M - (\beta + q + r) F v\right) \text{ Fußpfd.}$$

Mittels dieser Formel läßt sich also die Leistung der Maschine vorzüglich aus dem Verdampfungsvermögen des Dampfkessels oder aus der Wassermenge M berechnen, welche durch denselben pr. Secunde in Dampf verwandelt wird.

Setzt man noch

$$M = \frac{\psi\, K}{61{,}75\, (640 - t_1)},$$

wobei ψ die Wärmemenge pr. Pfund Brennstoff bezeichnet, so erhält man die Leistung ausgedrückt durch den Brennmaterialaufwand K, nämlich:

$$2)\quad L_1 = \frac{144}{1 + \delta} \left(\left[\frac{s}{s + \sigma} + Ln. \left(\frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)\right] \frac{\alpha\, \psi\, K}{61{,}75 (640 - t_1)} - (\beta + q + r) F v\right)$$

Fußpfund.

Herr Völker nennt das Verhältniß $\frac{L_1}{M \gamma}$ der Nutzleistung L_1 zur Dampfmenge, $M \gamma = \frac{Q \gamma}{\mu}$ das Güteverhältniß der Dampfmaschine.

Dieses Verhältniß ist dem Obigen zu Folge:

$$\frac{L_1}{M\gamma} = \frac{144}{1+\delta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} \left[\frac{s}{s+\sigma} + Ln. \left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right) - \frac{s_1}{s+\sigma} \cdot \frac{\beta+q+r}{\beta+p}\right],$$

und wächst mit der Dampfspannung p und mit dem Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{s_1}{s}.$$

Uebrigens giebt Pambour keine Regel zur Bestimmung der Dampfspannung p_0 im Kessel; um dieselbe aus M und Q oder mittels der Formel

$$p = \frac{\alpha M}{Q} - \beta$$

zu berechnen, bleibt nichts übrig, als die Spannungsverluste durch Versuche zu ermitteln und diese zu der Spannung p im Cylinder zu addiren.

Herr Völker setzt auf Grund seiner Versuche den Spannungsverlust bei ganz geöffneter Dampfklappe, $p_0 - p = 0{,}031 \frac{Fv}{F_1}$ Pfund, wobei F den Querschnitt des Dampfkolbens, F_1 den der Dampfcanäle und v die Geschwindigkeit des ersteren in Fußen bezeichnen.

Hat man so die Spannung p_0 im Kessel bestimmt, so erhält man das entsprechende Dampfvolumen, unter dieser Spannung gemessen:

$$Q_0 = \left(\frac{\beta+p}{\beta+p_0}\right) Q,$$

während das Dampfquantum, gemessen unter dem mittleren Druck im Cylinder

$$Q = \frac{s+\sigma}{s_1} Fv$$

zu setzen ist.

Um durch Versuche den Factor r der constanten Nebenlast zu finden, vermindert man die Spannung p des Dampfes im Kessel soweit bis sie eben noch hinreicht, die unbelastete Maschine in Bewegung zu setzen. Dann ist die Nutzleistung der Maschine = Null, also

$$\frac{s_1}{s+\sigma}(\beta+q+r) = \left[\frac{s}{s+\sigma} + Ln. \left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right](\beta+p_m),$$

wenn p_m die entsprechende Dampfspannung bezeichnet, und daher das gesuchte Maß der constanten Nebenlast

$$r = \left[\frac{s}{s_1} + \frac{s+\sigma}{s_1} Ln. \left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right](\beta+p_m) - (\beta+q).$$

Um dagegen den Factor $1+\delta$ der variablen Nebenlast zu ermit-

teln, vergrößere man bei ganz geöffneter Dampfklappe die Last nach und nach so viel bis die Maschine zum Stillstand kommt, und beobachte die hierbei stattfindende Dampfspannung p_n.

Es ist dann zu setzen:

$$p_n = \frac{L_1}{Fv} = \frac{30}{n s_1}\frac{L_1}{F} = \frac{s+\sigma}{s_1}\frac{L_1}{144\,Q}$$

$$= \frac{1}{1+\delta}\left(\left[\frac{s}{s+\sigma} + Ln.\left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right](\beta + p_n)\frac{s+\sigma}{s_1} - (\beta + q + r)\right),$$

und daher der gesuchte Factor

$$1 + \delta = \frac{1}{p_n}\left(\left[s + (s+\sigma)\,Ln.\left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right]\frac{\beta + p_n}{s_1} - (\beta + q + r)\right).$$

Beispiele. 1) Welche Leistung ist von einer Hochdruckmaschine zu erwarten, deren Kessel stündlich 20 Cubikfuß Wasser in Dampf verwandelt, und deren Treibcylinder $1^3/_4$ Fuß Durchmesser hat, die ferner pr. Minute 24 fünffüßige Spiele macht, bei $^1/_4$ des ganzen Kolbenweges schon absperrt und im Condensator eine Spannung von $^1/_{10}$ Atmosphäre erhält? Nach der Leistungsformel 1) ist

$$L_1 = 126{,}4\left((^5/_6 + Ln.\,^7/_2)\cdot\frac{31053\,.\,20}{60\,.\,60} - (4{,}120 + 1{,}410 + {}^{25}/_{21})\,(^7/_8)^2.\pi.\frac{24.2.5}{60}\right)$$

$$= 126{,}4\left((0{,}8333 + 1{,}2528)\cdot\frac{31053}{180} - 6{,}720\cdot\frac{49}{16}\,\pi\right)$$

$$= 126{,}4\left(\frac{2{,}0861\,.\,31053}{180} - 6{,}720\,.\,3{,}0625\,\pi\right)$$

$= 126{,}4\,(359{,}9 - 64{,}6) = 126{,}4\,.\,295{,}3 = 37326$ Fußpfd. $= 77^3/_4$ Pferdekräfte.

Die Spannung des Dampfes im Kessel bleibt hierbei unbekannt, die im Cylinder aber ist vor der Expansion, da das pr. Secunde im Cylinder verbrauchte Dampfvolum

$$Q = \frac{s+\sigma}{s_1}\,Fv = 0{,}3\cdot\frac{49\,\pi}{16} = 2{,}886 \text{ Cubikfuß}$$

beträgt,

$$p = \frac{\alpha M}{Q} - \beta$$

$$= \frac{28961}{180\,.\,2{,}886} - 4{,}120 = 55{,}750 - 4{,}120 = 51{,}630 \text{ Pfund.}$$

2) Welche Wassermenge muß die letzte Maschine pr. Secunde in Dampf verwandeln, damit sie eine mittlere Kolbenkraft von 7500 Pfund ausübe? Da

$$v = \frac{24\,.\,2\,.\,5}{60} = 4 \text{ Fuß}$$

ist, so hat man die geforderte Leistung:

$$L_1 = 4\,.\,7500 = 30000 \text{ Fußpfund.}$$

Setzen wir daher in der Formel

$$M = \frac{1{,}14\,L_1 + 144\,(\beta + q + r)\,Fv}{144\,\alpha\left[\frac{s}{s+\sigma} + Ln.\left(\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right)\right]} \text{ Cubikfuß}$$

statt L_1 diesen Werth ein, so erhalten wir mit Beibehaltung der übrigen Werthe die gesuchte Wassermenge pr. Secunde:

$$M = \frac{1,14 \,.\, 30000 + 144 \,.\, 64,6}{144 \,.\, 28961 \,.\, 2,0861} = \frac{34200 + 9302}{28961 \,.\, 300,39} = 0,005001 \text{ Cubikfuß},$$

also stündlich $= 3600 \,.\, 0,005001 = 18$ Cubikfuß.

Anordnung einer Dampfmaschine. Nachdem wir im Vorstehenden die vorzüglichsten Regeln zur Berechnung der Leistung einer Dampfmaschine abgehandelt haben, bleibt uns nur noch übrig, die Auflösung der umgekehrten Aufgabe zu zeigen, nämlich Regeln mitzutheilen, nach welchen die Hauptdimensionen einer Dampfmaschine von gegebener Leistung zu berechnen sind. §. 505

Das erste der zu bestimmenden Elemente ist das Dampfquantum. Dasselbe ergiebt sich auch durch Umkehrung der Leistungsformel unmittelbar. Legen wir die Morin-Poncelet'sche Theorie zu Grunde, setzen wir also die Nutzleistung

$$\text{I.} \quad L_1 = \eta \,.\, 144 \; Q \; p_0 \left(1 + Ln. \frac{F_1 s_1}{F s} - \frac{q_0}{p_1}\right) \text{ Fußpfund},$$

so erhalten wir hiernach das Dampfquantum:

$$\text{II.} \quad Q = \frac{L_1}{\eta \,.\, 144 p_0 \left(1 + Ln. \frac{F_1 \, s_1}{F s} - \frac{q_0}{p_1}\right)} \text{ Cubikfuß},$$

wenn außer der Leistung L_1 nur noch die Spannungen p_0 und q_0, das Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{F_1 \, s_1}{F s}$$

gegeben sind und der Wirkungsgrad η bekannt ist. In der Regel nehmen die Maschinenbauer η selbst noch etwas kleiner an, als die Versuche gegeben haben, weshalb die effectiven Leistungen meist noch größer ausfallen, als die nominellen.

Den oben (§. 501 und §. 502) angegebenen, sowie auch vielen anderen Versuchsresultaten zufolge, läßt sich annehmen, daß der Wirkungsgrad einer Dampfmaschine mit der Stärke der Maschine wachse, und sich hierbei einem gewissen Grenzwerthe immer mehr und mehr nähere. Deshalb läßt sich derselbe auch

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{\mu \sqrt{L}}{1 + \nu \sqrt{L}}$$

setzen, wobei μ und ν aus den Versuchsresultaten berechnete Coefficienten bezeichnen und L die theoretische Leistung in Pferdekräften ausdrückt.

1) Bei Watt'schen oder Niederdruckdampfmaschinen ist mit ziemlicher Sicherheit für $L = 4$ Pferdekräfte, $\eta = 0,40$ und für $L = 100$ Pferdekräfte, $\eta = 0,50$ zu setzen, daher folgt hier:

$$0{,}4 = \frac{2\mu}{1 + 2\nu} \text{ und } 0{,}5 = \frac{10\mu}{1 + 10\nu},$$

oder:

$$\mu = 0{,}2 + 0{,}4\nu \text{ und } = 0{,}05 + 0{,}5\nu,$$

so daß sich nun

$$\nu = 1{,}5 \text{ und } \mu = 0{,}8,$$

also der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{0{,}8\sqrt{L}}{1 + 1{,}5\sqrt{L}}$$

ergiebt.

Hiernach ist für

$L =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	114	225 Pferdekräfte.
$\eta =$	0,32	0,40	0,44	0,46	0,47	0,48	0,49	0,495	0,49	0,50	0,51	0,51

2) Bei Woolf'schen oder Mitteldruckdampfmaschinen mit zwei Cylindern ist nach Morin

für $L = 4$, $\eta = 0{,}30$ und für $L = 100$ Pferdekräfte, $\eta = 0{,}566$, wonach sich allgemein

$$\eta = \frac{0{,}255\sqrt{L}}{1 + 0{,}351\sqrt{L}}$$

berechnet, und folgt für

$L =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225 Pferdekräfte
$\eta =$	0,19	0,30	0,37	0,42	0,46	0,49	0,52	0,54	0,55	0,565	0,585	0,61

3) Bei Hochdruckmaschinen mit Condensation hat man ferner

für $L = 4$, $\eta = 0{,}34$ und für $L = 100$, $\eta = 0{,}465$;

wonach allgemein

$$\eta = \frac{0{,}506\sqrt{L}}{1 + 0{,}988\sqrt{L}}$$

ist, und sich ergiebt für

$L =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225 Pferdekräfte
$\eta =$	0,25	0,34	0,38	0,41	0,43	0,44	0,45	0,45	0,46	0,465	0,47	0,48

4) Bei Hochdruckmaschinen ohne Condensation hat man endlich für $L = 4$, $\eta = 0{,}35$ und für $L = 100$, $\eta = 0{,}517$, wonach allgemein

$$\eta = \frac{0{,}433\,\sqrt{L}}{1 + 0{,}738\,\sqrt{L}}$$

ist, und sich ergiebt für

$L =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225 Pferdekräfte
$\eta =$	0,25	0,35	0,39	0,43	0,46	0,48	0,49	0,50	0,51	0,515	0,525	0,535

Ist das Dampfquantum Q gegeben, oder hat man es mit Hülfe der Formel II. des vorigen Paragraphen berechnet, so kommt es nun darauf an, die mittlere Kolbengeschwindigkeit v zu kennen, und hierauf die nöthige Größe F der Kolbenfläche zu bestimmen. §. 506

Um einen sanften Gang der Maschine zu erzielen, und um die Nebenhindernisse, zumal die Spannungsverluste, in den Dampfleitungen möglichst herabzuziehen, läßt man die Dampfmaschinen nur mit einer mäßigen Geschwindigkeit gehen. Nach Watt's Vorschrift soll die mittlere Kolbengeschwindigkeit $3^1/_2$ Fuß, und zwar 3 Fuß bei kleinen, und 4 Fuß bei großen Maschinen, betragen. Das Wachsen der Geschwindigkeit mit der Stärke der Maschine gewährt den Vortheil, daß stärkere Dampfmaschinen verhältnißmäßig kleinere Dimensionen, kleinere Schwungräder u. s. w. erfordern, als schwache Maschinen. Die Watt'sche Scala der Kolbengeschwindigkeiten v ist folgende:

$L_1 =$	4 bis 8	8 bis 15	15 bis 25	25 bis 40	40 bis 60	60 bis 100 Pferdekräfte
$v =$	34	37	40	43	46	50 Zoll
$=$	2,83	3,08	3,33	3,58	3,83	4,17 Fuß.

Da jedenfalls diese mittlere Kolbengeschwindigkeit eine gewisse Grenze hat, so kann man wieder

$$v = \frac{\mu\,\sqrt{L_1}}{1 + \nu\,\sqrt{L_1}}$$

setzen, wo μ und ν noch zu ermittelnde Zahlenwerthe bezeichnen.

Für $L_1 = 4$, ist $v = 32$ Zoll, und für $L_1 = 100$, $v = 50$ Zoll, also

$$0{,}34 = \frac{2\mu}{1 + 2\nu} \text{ und } 0{,}50 = \frac{10\mu}{1 + 10\nu}$$

gesetzt, folgt für Niederdruck- oder Watt'sche Dampfmaschinen:

$$\text{I a.)}\ v = \frac{42{,}5\sqrt{L_1}}{1 + 0{,}75\sqrt{L_1}}\ \text{Zoll}.$$

Setzt man in dieser Formel $L_1 = \infty$, so giebt sie den größten Werth der mittleren Kolbengeschwindigkeit:

$$v = \frac{42{,}5}{0{,}75} = 57\ \text{Zoll} = 4{,}75\ \text{Fuß}.$$

Uebrigens berechnet sich nach dieser Formel folgende Scala:

$L_1 =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225 Pferdekräfte
$v =$	24	34	39	42,5	45	46	47	48	49	50	51	52 Zoll
	2,00	2,83	3,25	3,54	3,75	3,83	3,92	4,00	4,08	4,17	4,25	4,33 Fuß

Die Mittel- und Hochdruckmaschinen läßt man nicht selten mit größeren Geschwindigkeiten arbeiten; hier ist

für $L_1 = 4$, $v = 40$ und für $L_1 = 100$, $v = 56$ Zoll

zu setzen, wonach nun

$$\text{I b.)}\ v = \frac{56\sqrt{L_1}}{1 + 0{,}9\sqrt{L_1}}$$

folgt und sich daher der Maximalwerth

$$v = \frac{56}{0{,}9} = 62\ \text{Zoll} = 5{,}17\ \text{Fuß}$$

ergiebt.

In der Praxis sieht man eine mittlere Kolbengeschwindigkeit von 6 Fuß als die äußerste und bei Balanciermaschinen sogar nicht zulässige Geschwindigkeit an.

Mittels dieser Formel berechnet sich folgende Geschwindigkeitsscala:

$L_1 =$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225 Pferdekräfte
$v =$	30	40	46	49	51	53	54	55	55,5	56	57	58 Zoll
	2,50	3,33	3,83	4,08	4,25	4,42	4,50	4,57	4,62	4,67	4,75	4,83 Fuß

Die in der letzten Tabelle enthaltenen Geschwindigkeitswerthe sind eigentlich nur die Maxima derselben, da in den meisten Fällen die Geschwindigkeiten der Mittel- und Hochdruckmaschinen zwischen den von beiden Tabellen enthaltenen Werthen mitten inne liegen. Nach Morin sollen sogar die

Hochdruckmaschinen dieselben Geschwindigkeiten erhalten wie die Niederdruckmaschinen.

Aus dem Dampfquantum Q und der mittleren Kolbengeschwindigkeit v folgt nun mittels des Ausdehnungsverhältnisses $\varepsilon = \frac{s_1}{s}$ oder genauer $\varepsilon = \frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}$, die Kolbenfläche:

$$\text{II.)} \quad F = \varepsilon \frac{144\, Q}{v} \text{ Quadratzoll,}$$

und hieraus die Cylinderweite:

$$\text{III.)} \quad d = \sqrt{\frac{4\, F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon\, Q}{v}} \text{ Zoll.}$$

Dimensionen der Dampfmaschinen. Um ferner den Hub- oder §. 507
Kolbenweg, sowie die übrigen Elemente einer Dampfmaschine zu berechnen, ist es nöthig, die Anzahl n der Kolbenspiele pr. Minute zu kennen. Bei den bestehenden Maschinen ist diese Anzahl zwischen 16 und 38 enthalten; es findet also in Betreff dieser Zahl eine große Mannigfaltigkeit nicht Statt. Nach Morin ist die erforderliche Anzahl (n) der Kolbenspiele:

	Bei der effectiven Stärke der Dampfmaschine von					
	4—8	8—15	15—25	25—40	40—60	60—100
	Pferdekräften					
1) für Watt'sche Maschinen . . .	28	25	22	20	18	16
2) für Woolf'sche Maschinen . .	30	27	25	23	21	19
3) für eincylindrige Hochdruckmaschinen mit Condensation:						
a. ohne Balancier	38	34	30	28	26	25
b. mit Balancier oder oscilirendem Cylinder	30	25	22	19	17	16
4) für Hochdruckmaschinen ohne Condensation	38	34	30	28	26	24

Hat man aus der vorstehenden Tabelle die angemessene Anzahl n der Spiele pr. Minute entnommen, so kann man nun auch mittels der Formeln

$$s_1 = \frac{30\, v}{n}$$

und

$$s = \frac{s_1}{\varepsilon} = \frac{30\,v}{\varepsilon\,n}$$

sowohl den ganzen Hub s_1 als auch den Hub s im Augenblicke der Absperrung des Dampfes berechnen.

Da das Verhältniß $\frac{s_1}{d}$ des ganzen Kolbenhubes s_1 zu dem Kolbendurchmesser d bei den stationären Dampfmaschinen mittlerer Größe meist innerhalb der Grenzen 2 und $2^3/_4$ enthalten ist, und diese Grenzen nur bei sehr kleinen und bei sehr großen stationären Maschinen etwas überschritten werden, so ist es angemessener, die verschiedenen Werthe von $\frac{s_1}{d}$ bei verschiedenen Maschinensystemen und verschiedenen Durchmessern im Voraus zu berechnen, und hiernach den Kolbenschub s_1 selbst, sowie die Anzahl der Spiele

$$n = \frac{30\,v}{s}$$

zu bestimmen.

Die Anzahl der Spiele ist bei starken Maschinen kleiner als bei schwachen; es erhalten aus diesem Grunde die ersteren verhältnißmäßig kleinere Kolbenschübe als die letzteren, und es ist deshalb angemessen

$$\frac{s_1}{d} = \frac{\varphi}{1 + \varphi\,d}$$

zu setzen.

1) Bei den Watt'schen oder Tiefdruckmaschinen hat man gewöhnlich

$$\text{für } d = 12 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 2{,}7 \text{ und}$$

$$\text{für } d = 48 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 2{,}0;$$

wonach das Verhältniß des Kolbenhubes zum Kolbendurchmesser

$$\frac{s_1}{d} = \frac{3{,}058}{1 + 0{,}01106\,d} \text{ folgt, und für}$$

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60 Zoll
$\frac{s_1}{d} =$	2,87	2,70	2,56	2,42	2,30	2,19	2,09	2,00	1,91	1,84

ist.

2) Bei Woolf'schen oder doppelcylindrigen Mitteldruckmaschinen kann man dasselbe Verhältniß in Anwendung bringen, nur ist hier

$$\frac{s_1}{d_1} = \frac{3,058}{1 + 0,01106\, d_1}$$

zu setzen, und unter s_1 und d_1 der Hub und Durchmesser des Kolbens im großen Cylinder zu verstehen.

3) Bei Hochdruckmaschinen mit Condensation ist zu unterscheiden, ob dieselben mit oder ohne einen Balancier arbeiten. Die Maschinen ohne Balancier können mehr Spiele machen als die mit Balancier, und erhalten deshalb einen kleineren Hub als diese.

a) Bei Hochdruckmaschinen ohne Balancier hat man

$$\text{für } d = 12 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 2,50 \text{ und}$$

$$\text{für } d = 36 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 1,75,$$

wonach allgemein das Verhältniß des Kolbenhubes zum Kolbendurchmesser

$$\frac{s_1}{d} = \frac{3,182}{1 + 0,02273\, d} \text{ folgt, und für}$$

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60 Zoll
$\frac{s_1}{d} =$	2,80	2,50	2,25	2,06	1,89	1,75	1,63	1,52	1,43	1,35

ist.

b) Bei Hochdruckmaschinen mit Balancier hat man

$$\text{für } d = 12 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 3,25 \text{ und}$$

$$\text{für } d = 36 \text{ Zoll, } \frac{s_1}{d} = 2,70;$$

wonach allgemein das Verhältniß des Kolbenhubes zum Kolbendurchmesser

$$\frac{s_1}{d} = \frac{3,618}{1 + 0,00945\, d} \text{ folgt und für}$$

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60 Zoll
$\frac{s_1}{d} =$	3,42	3,25	3,09	2,95	2,82	2,70	2,59	2,49	2,40	2,31

ist.

4) Die Hochdruckmaschinen ohne Condensation erfordern bei gleicher Leistung einen im Mittel um 8 Procent größeren Kolbendurchmesser,

als die Maschinen mit Condensation; da nun aber für beide Maschinen der Hub $s_1 = \frac{30\,v}{n}$ einer und derselbe ist, so folgt, daß für diese Maschinen das Verhältniß $\frac{s_1}{d}$ kleiner ausfallen muß als für die Dampfmaschinen mit Condensation von gleicher Leistung. Deshalb ist

a) für Maschinen ohne Condensation und ohne Balancier:

$$\frac{s_1}{d} = \frac{3{,}182\,(1 - 0{,}08)}{1 + 0{,}02273\,(1 - 0{,}08)\,d} = \frac{2{,}927}{1 + 0{,}02091\,d},$$ und für

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60 Zoll
$\frac{s_1}{d} =$	2,60	2,34	2,13	1,95	1,80	1,67	1,56	1,46	1,37	1,30

Endlich ist

b. bei Hochdruckmaschinen ohne Condensation und mit Balancier:

$$\frac{s_1}{d} = \frac{3{,}618\,(1 - 0{,}08)}{1 + 0{,}00945\,(1 - 0{,}08)\,d} = \frac{3{,}3285}{1 + 0{,}00869\,d},$$

wonach für

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60 Zoll
$\frac{s_1}{d} =$	3,16	3,01	2,88	2,76	2,64	2,54	2,44	2,35	2,27	2,19

folgt.

§. 508 Bei einer Maschine ohne Expansion ist natürlich $s = s_1$; bei einer zweicylindrigen oder Woolf'schen Maschine ist aber der Kolbenhub s_1 im großen oder Expansionscylinder vom Kolbenhube s im kleinen Cylinder zu unterscheiden. Bei Balanciermaschinen stellt oder legt man die Cylinder nicht neben, sondern hinter einander, so daß der kleine Cylinder der Axe des Balanciers näher zu stehen kommt als der große Cylinder, und s ungefähr nur $^3/_4\, s_1$ ausfällt. Es ist also stets das Verhältniß $\nu = \frac{s_1}{s}$ zwischen s und s_1 als gegeben anzusehen, und nur das Verhältniß zwischen F und F_1 zu finden. Eine im vorigen Paragraphen gegebene Regel dient zur Bestimmung der Geschwindigkeit v des Kolbens im großen Cylinder, und die folgende Formel zur Berechnung der Fläche F des Kolbens im kleinen Cylinder. Da das Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s}$$

als gegeben anzusehen ist, so folgt die Fläche F_1 des großen Kolbens:

$$\text{IV.)}\ F_1 = \varepsilon \frac{F s}{s_1} = \frac{\varepsilon}{v} F,$$

und der Durchmesser der größeren Kolbenfläche:

$$\text{V.)}\ d_1 = 1{,}128 \sqrt{\frac{\varepsilon F}{v}}.$$

Wenn, wie nicht selten, auch im kleinen Cylinder eine gewisse Expansion des Dampfes statthat, wobei der Dampf am Ende des Kolbenweges s_0 abgesperrt wird, so hat man das Expansionsverhältniß

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s_0}$$

zu setzen, oder, wenn man noch das Expansionsverhältniß des Dampfes im kleinen Cylinder durch ε_0 bezeichnet, also $s = \varepsilon_0 s_0$ setzt,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{F_1 s_1}{F s}.$$

Hiernach ist nun die kleine Kolbenfläche F und deren Durchmesser d durch die Formeln

$$\text{IV a.)}\ F = \varepsilon_0 \frac{144\, Q}{v} \text{ Quadratzoll,}$$

$$\text{V a.)}\ d = \sqrt{\frac{4\, F}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, Q}{v}} \text{ Zoll,}$$

sowie die große Kolbenfläche F_1 und deren Durchmesser d_1 durch die Ausdrücke

$$\text{IV b.)}\ F_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{F s}{s_1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{F}{v} = \frac{\varepsilon}{v} \frac{144\, Q}{v} \text{ Quadratzoll und}$$

$$\text{V b.)}\ d_1 = \sqrt{\frac{4\, F_1}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F_1} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon\, Q}{v v}} \text{ Zoll}$$

bestimmt.

Hat man nun aus der Tabelle in §. 507 die angemessene Anzahl n der Spiele entnommen, so berechnen sich endlich die Kolbenschube s_1 und s mittels der Formeln

$$\text{VI a.)}\ s = \frac{30\, v}{n}$$

und

$$\text{VII a.)}\ s_1 = v s = v \frac{30\, v}{n}.$$

Auch kann man mittels der (in §. 507) berechneten Verhältnißzahlen

$$\frac{s_1}{d_1} = \frac{\varphi}{1 + \varphi d}$$

diese Kolbenschübe s_1 und s unmittelbar bestimmen, indem man

$$\text{VI b.)} \quad s_1 = \frac{s_1}{d_1} \cdot s$$

und

$$\text{VII b.)} \quad s = \frac{s_1}{\nu} = \frac{30\,v}{v n}$$

setzt.

Beispiel. Man will eine Woolf'sche Dampfmaschine von 25 Pferdekräften Nutzleistung construiren, und soll nun die hierbei anzuwendenden Verhältnisse angeben. Nehmen wir $p_0 = 3{,}6$, $p_1 = 0{,}6$ und $q_0 = 0{,}1$ Atmosphäre, sowie $\varepsilon_0 = {}^3/_2$ an, so erhalten wir das Expansionsverhältniß:

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s_0} = \frac{3{,}6}{0{,}6} = 6,$$

und das fragliche Dampfquantum pr. Secunde, da hier $\eta = 0{,}48$ zu setzen ist,

$$Q = \frac{25 \,.\, 480}{0{,}48 \,.\, 144 \,.\, 3{,}6 \,.\, 14{,}10 \left(1 + Ln.\, 6 - \frac{0{,}1}{0{,}6}\right)}$$

$$= \frac{12000}{3509\,(1 + 1{,}7918 - 0{,}1666)} = \frac{12000}{3509 \,.\, 2{,}6252} = 1{,}303 \text{ Cubikfuß.}$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des großen Kolbens:

$$v_1 = 48 \text{ Zoll} = 4 \text{ Fuß},$$

so folgt die des kleinen Kolbens:

$$v = \frac{s}{s_1}\, v_1\, \frac{v}{\nu} = {}^3/_4\, v_1 = 36 \text{ Zoll} = 3 \text{ Fuß},$$

daher der Inhalt dieses Kolbens:

$$F = \varepsilon_0 \cdot \frac{144\ Q}{v} = {}^3/_2 \cdot \frac{1{,}303}{3} = 0{,}6515 \text{ Quadratfuß} = 93{,}8 \text{ Quadratzoll},$$

und der Durchmesser desselben:

$$d = 1{,}128\, \sqrt{93{,}8} = 10{,}92 \text{ Zoll}.$$

Ferner ist der Inhalt der großen Kolbenfläche:

$$F_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\, \frac{F}{\nu} = \frac{6}{{}^3/_2} \cdot \frac{0{,}6515}{{}^4/_3} = 3 \,.\, 0{,}6515 = 1{,}9545 \text{ Quadratfuß}$$
$$= 312{,}7 \text{ Quadratzoll},$$

und daher der Durchmesser desselben:

$$d_1 = 1{,}128\, \sqrt{3127} = 19{,}95 \text{ Zoll, also nahe } 20 \text{ Zoll.}$$

Nimmt man $\frac{s_1}{d_1} = 2{,}40$ an (s. Tabelle in §. 507), so erhält man den Hub des großen Kolbens:

$$s_1 = 2{,}40 \,.\, 20 = 48 \text{ Zoll} = 4 \text{ Fuß},$$

folglich den des kleinen Kolbens:

$$s = \frac{s_1}{\nu} = \frac{3}{4} \cdot 48 = 36 \text{ Zoll} = 3 \text{ Fuß},$$

und endlich die Anzahl der Spiele der Maschine pr. Minute:

$$n = \frac{30\, v_1}{s_1} = \frac{30\, v}{s} = \frac{30 \cdot 4}{4} = 30.$$

Injectionswassermenge. Bei den Maschinen mit Condensation §. 509
erfordert der Condensator mit seinen Pumpen eine besondere Berechnung. Zunächst ist die Injectionswassermenge M_1 zu ermitteln.

Aus dem zu condensirenden Dampfquantum Q Cubikfuß oder

$$61{,}75\, M = \frac{61{,}75\, Q}{\mu} = \frac{61{,}75}{27238}\,(1{,}637 + p)\, Q = \frac{(1{,}637 + p)\, Q}{441} \text{ Pfd.},$$

sowie aus der Temperatur t_0 des Injectionswassers und aus der Temperatur t_2 im Inneren des Condensators folgt nach der Regel von Watt u. s. w. für das Quantum M_1 des Wassers, indem man die Wärmemenge

$$61{,}75\, M_1\, (t_2 - t_0),$$

welche M_1 bei der Condensation in sich aufnimmt, gleich setzt der Wärmemenge

$$61{,}75\, M\, (640 - t_2),$$

welche der Dampf bei der Umsetzung in Wasser von t_2 Wärme verliert, die Gleichung:

$$(t_2 - t_0)\, M_1 = (640 - t_2)\, M,$$

daher ist:

$$M_1 = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) M = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) \frac{Q}{\mu} \text{ Cubikfuß}.$$

Nach Regnault (s. §. 380) hat man

$$(t_2 - t_0)\, M_1 = (606{,}5 + 0{,}305\, t - t_2)\, M$$

zu setzen, weil hiernach die Gesammtwärme des Dampfes von t^0 Temperatur $606{,}5 + 0{,}305\, t$ ist, also Dampf von t^0 Wärme $606{,}5 + 0{,}305\, t$ Wärmeeinheiten zu seiner Bildung aus kaltem Wasser erfordert. Es ist also hiernach das zur Condensation nöthige Wasserquantum:

$$M_1 = \left(\frac{606{,}5 + 0{,}305\, t - t_2}{t_2 - t_0}\right) M,$$

oder das Verhältniß des Injectionswasserquantums zum Speisewasserquantum:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{606{,}5 + 0{,}305\, t - t_2}{t_2 - t_0}.$$

Nimmt man die Temperatur des Injectionswassers $= 12^0$ und die im Condensator $= 35^0$ an, so erhält man durch die erste Regel das Verhältniß:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{640 - 35}{35 - 12} = \frac{605}{23} = 26{,}3;$$

und durch die zweite, wenn man $t = 105^0$ setzt,

$$\frac{M_1}{M} = \frac{606,5 + 32 - 35}{35 - 12} = \frac{603,5}{23} = 26,2;$$

also sehr unbedeutend weniger.

Etwas größer stellt sich aber die Differenz bei Mitteldruckmaschinen heraus. Nehmen wir z. B. $p = 4$ Atmosphären an, und führen wir die entsprechende Temperatur $t = 144^0$ ein, so erhalten wir nach der zweiten Formel:

$$\frac{M_1}{M} = \frac{606,5 + 43,9 - 35}{35 - 12} = \frac{615,4}{23} = 26,8;$$

während die erste Formel wieder

$$\frac{M_1}{M} = 26,3$$

giebt.

Da hiernach die Condensationswassermenge über 26mal so groß ausfällt als das Speisewasserquantum, so läßt sich ermessen, daß die Anwendung von Condensationsmaschinen nicht überall möglich ist.

§. 510 **Kaltwasserpumpe und Speisepumpe.** Aus dem Injections- oder Kaltwasserquantum M_1 kann man nun auch die Dimensionen der dieses Wasser liefernden Kaltwasserpumpe berechnen. Es ist

$$M_1 = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) M = \left(\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0}\right) \frac{Q}{\mu};$$

setzen wir nun $\frac{640 - t_2}{t_2 - t_0} = 26$ und für Tiefdruck $\mu = 1390$, dagegen für den Mitteldruck $p = 4$ Atmosphären, $\mu = 448$, so erhalten wir das Injectionswasserquantum für Maschinen mit Nieder- oder Tiefdruck:

$$M_1 = \frac{26\,Q}{1390} = 0,0187\,Q,$$

und dagegen für Mitteldruckmaschinen mit 4 Atmosphären Dampfdruck:

$$M_1 = \frac{26\,Q}{448} = 0,0580\,Q.$$

Wenn die Kaltwasserpumpe einfachwirkend ist, so läßt sich das Product V_1 aus der Fläche und dem Wege des Kolbens dieser Pumpe gleichsetzen dem pr. Spiel von dieser Pumpe gehobenen Wasserquantum. Vergleichen wir nun dieses Wasserquantum mit dem Volumen $2\,V = 2\,Fs$ des pr. Spiel verbrauchten Dampfquantums, setzen wir also

$$\frac{V_1}{2\,V} = \frac{M_1}{Q} = \frac{M_1}{\mu M},$$

so erhalten wir

$$\frac{V_1}{V} = \frac{2\,M_1}{\mu\,M} = \frac{2\,(640 - t_2)}{\mu\,(t_2 - t_0)} = 0{,}0375 \text{ für Niederdruck,}$$

und

$$= 0{,}1160 \text{ für Mitteldruck.}$$

Da aber immer etwas Wasser zurückfällt, muß man bei V_1 mindestens 10 Procent zusetzen, also bei Tiefdruckmaschinen den Fassungsraum der Kaltwasserpumpe

$$V_1 = 0{,}041\,V$$

machen.

Nach Watt ist

$$V_1 = {}^1/_{24}\,V,$$

und nach Anderen sogar

$$V_1 = {}^1/_{18}\,V$$

in Anwendung zu bringen.

Bei den Dampfmaschinen mit Mitteldruck ist, wenn man ebenfalls 10 Procent zusetzt,

$$V_1 = 0{,}128\,V.$$

In der Regel nimmt man auch wirklich $V_1 = {}^1/_8$ bis ${}^1/_6$ des Cylinderraumes V, welcher mit frischem Dampf angefüllt wird.

Aus dem Speisewasserquantum $M = \frac{Q}{\mu}$ ergiebt sich sehr leicht der Fassungsraum V_2 der Speisepumpe, oder das Product aus der Fläche und dem Wege des Kolbens dieser Pumpe. Jedenfalls ist

$$\frac{V_2}{2\,V} = \frac{M}{Q} = \frac{1}{\mu},$$

daher der Fassungsraum der Speisepumpe:

$$V_2 = \frac{2}{\mu}\,V.$$

Für Tiefdruckmaschinen mit 1,2 Atmosphären Spannung, wo $\mu = 1390$ zu setzen ist, hat man daher

$$V_2 = {}^2/_{1390}\,V = \frac{V}{695} = 0{,}00144\,V,$$

dagegen für Maschinen mit 4 Atmosphären Spannung, wo $\mu = 448$ anzunehmen ist,

$$V_2 = {}^2/_{448}\,V = \frac{V}{224} = 0{,}00446\,V.$$

Um nach Bedürfniß schnell speisen lassen zu können, macht man aber diesen Raum drei- bis sechsmal so groß, als diese Formeln angeben.

Luft- und Warmwasserpumpe. Die Luft- und Warmwasserpumpe muß, da sie das aus dem Dampfe und aus dem Injectionswasser §. 511

sich bildende warme Wasser nebst dem übrigbleibenden Dampfe von etwa $^1/_{10}$ Atmosphäre Spannung und der sich aus dem Wasser entwickelnden Luft fortzuschaffen hat, eine gewisse Größe haben. Das pr. Secunde fortzuschaffende Wasserquantum ist $M + M_1$, oder ungefähr 28 M. Da aber das Injectionswasser ungefähr $^1/_{14}$ seines Volumens an Luft enthält, und diese im Condensator aus der Spannung von 1 Atmosphäre in die von $^1/_{10}$ Atmosphäre, sowie aus der Temperatur von 12⁰ in die von 35⁰ übergeht, so nimmt dieses Luftquantum im Condensator den
$^{10}/_{14}\,[1 + 0{,}00367\,(35 - 12)] = {^5/_7}\,(1 + 0{,}00367 \,.\, 23) = 0{,}775$sten Theil von dem Raume des Wassers ein; da ferner diese Luft mit Dampf von gleicher Temperatur und Spannung gemengt ist, so findet sich auch ein fast gleiches Volumen Dampf vor (s. §. 394), und es ist deshalb das pr. Secunde durch die Luftpumpe fortzuschaffende Wasser-, Luft- und Dampfvolumen

$$= M + M_1\,(1 + 2 \,.\, 0{,}775) = M + 2{,}55\,M_1,$$

oder ungefähr

$$= (1 + 2{,}55 \,.\, 26)\,M = 67\,M.$$

Bezeichnen wir nun den Raum, welchen der Kolben der Luftpumpe bei einem Aufgange durchläuft, durch V_3, so erhalten wir wie oben, indem wir setzen:

$$\frac{V_3}{2\,V} = \frac{67\,M}{Q},$$

den Fassungsraum der Luft- und Warmwasserpumpe:

$$V_3 = \frac{134}{\mu} \cdot V.$$

Bei Tiefdruckmaschinen, wo $\mu = 1390$ ist, hat man demnach:

$$V_3 = {^{134}/_{1390}}\,V = {^1/_{10}}\,V;$$

bei Maschinen von 4 Atmosphären Spannung, wo $\mu = 448$ gesetzt werden kann, ist dagegen

$$V_3 = {^{134}/_{448}}\,Q = {^3/_{10}}\,V.$$

Nach Watt soll man der Sicherheit wegen diesen Fassungsraum verdoppeln. Bei den Watt'schen Maschinen ist übrigens der Hub der Luftpumpe $= {^1/_2}$ von dem des Dampfkolbens und der Durchmesser derselben $= {^2/_3}$ von dem des Dampfkolbens, folglich hat man hier

$$V_3 = {^1/_2} \,.\, ({^2/_3})^2\,V = {^2/_9}\,V,$$

also reichlich das Doppelte von dem theoretisch bestimmten Werthe.

Was endlich den Condensator selbst anlangt, so giebt man diesem den Fassungsraum

$$V_4 = \frac{V}{4} \text{ bis } \frac{V}{3}.$$

Dimensionen der Dampfmaschinen. Aus dem Dampfquantum §. 512
$V = Fs$ ergeben sich auch noch die Dimensionen der übrigen Theile einer Dampfmaschine. Um den Querschnitt der Dampfleitung = $1/_{25}$ der Kolbenfläche zu erhalten, macht man die Weite derselben, $d_1 = 1/_5$ des Kolbendurchmessers d. Bei Maschinen mit Hochdruck und wenig Expansion, wie z. B. bei Locomotiven, soll dieses Querschnittverhältniß wie bei dem Austragerohr, sogar $2/_{25}$ sein, weshalb man hier die Weite $d_1 = 2/_7\, d$ macht.

Ferner hängen noch die Hauptdimensionen der Kessel- und Feuerungsanlage von dem Dampfquantum Q oder der Wärmemenge W ab. Die allgemeinen Regeln, nach welchen dieselben berechnet werden müssen, sind schon §. 404 u. s. w. mitgetheilt worden, weshalb hier nur nöthig ist, das Wesentlichste hervorzuheben.

Den Fassungsraum des Dampfkessels macht man 15- bis 20mal so groß als das Wasserquantum 3600 W, welches der Kessel in jeder Stunde verdampft; es ist also hiernach dieser Raum = 54000 W bis 72000 W und es kommen hiervon (s. §. 405) 0,4 auf den Dampf- und 0,6 auf den Wasserraum. Das Hauptelement eines Dampfkessels ist natürlich die Heiz- oder Erwärmungsfläche. Wir haben schon oben (§. 404) angegeben, daß man auf einen Quadratfuß Erwärmungsfläche stündlich 4 Pfund Dampf rechnen kann. Legt man diese Regel zu Grunde, so hat man für W Cubikfuß stündlich in Dampf zu verwandelndes Wasser die nöthige Erwärmungsfläche:

$$F = 66/_4 \,.\, 3600\, W = 32400\, W \text{ Quadratfuß.}$$

Nach den Versuchen von Wickſteed ist die Wassermenge, welche 1 Quadratfuß Erwärmungsfläche stündlich verdampft, bei Kofferkesseln in Cornwall

$$= 0{,}09 \text{ Cubikfuß} = 5{,}94 \text{ Pfund;}$$

dagegen bei den Cornwaller Cylinderkesseln mit innerer Heizung, wo eine sehr langsame Verbrennung statthat, nur

$$= 0{,}0143 \text{ Cubikfuß} = 0{,}94 \text{ Pfund.}$$

Bei den Dampfschiff- und Dampfwagenkesseln findet eine viel lebhaftere Verbrennung Statt; hier ist das Dampfquantum zwei- bis dreimal so groß als das der gewöhnlichen Dampfkessel stehender Maschinen bei gleicher Heizfläche.

Was endlich noch den Brennmaterialaufwand anlangt, welcher zur Verdampfung der Wassermenge $M = \frac{Q}{\mu}$ nöthig ist, so hängt allerdings dieser auch von der Güte dieses Materials ab. Nach den Versuchen von Wicksteed, sowie nach vielfältigen neueren Versuchen giebt 1 Pfund gute englische Steinkohle 7 bis 8 Pfund Dampf; umgekehrt erfordern daher $M\gamma$ Pfund Dampf:

$$K = \frac{M\gamma}{8} \text{ bis } \frac{M\gamma}{7} \text{ Pfund gute Steinkohle.}$$

Bei Watt'schen Maschinen ohne Expansion rechnet man stündlich auf jede Pferdekraft 10 bis 13 Pfund gute Steinkohle, bei Maschinen mit Hochdruck und ohne Condensation aber nur 8 bis 11 Pfund, bei solchen mit Condensation 5 bis 7 Pfund, und endlich bei Hochdruckmaschinen ohne Expansion und ohne Condensation sogar 17 bis 20 Pfund Kohle.

Anmerkung. Mehrere specielle Angaben, Regeln über Dampfmaschinenanlagen u. s. w. enthält der „Ingenieur".

Von den zu den Dampfmaschinen gehörigen Maschinentheilen: der Krummzapfen, das Schwungrad, der Centrifugalregulator u. s. w., wird im dritten Theile dieses Werkes gehandelt. Ebenso findet hier die Theorie der Steuerung insbesondere der Schiebersteuerung einen Platz.

Anhang.

§. 513 **Princip der calorischen Maschinen.** Wenn ein Luftquantum V durch Ausdehnung von der Pressung p in die Pressung p_1 versetzt wird, ohne daß die Temperatur eine andere wird, so verrichtet dasselbe die mechanische Arbeit:

$$L = Vp\, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)$$

(s. Bd. I, §. 388).

Wird aber dieses Luftvolumen bei unveränderter Spannung durch Erwärmung in V_1 umgeändert, z. B. in $2\,V$, also verdoppelt, so geht dadurch die Arbeitsfähigkeit desselben in

$$L_1 = V_1 p\, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right),$$

also im angenommenen speciellen Falle in

$$L_1 = 2\,Vp\, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right)$$

über, fällt also dann doppelt so groß aus als vor der Erwärmung.

Allgemein ist die durch die Vergrößerung des Luftvolumens um $V_1 - V$ hervorgebrachte Vergrößerung der Arbeitsfähigkeit

$$L_1 - L = (V_1 - V)\, p\, Ln. \left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Ist t die anfängliche Temperatur und t_1 die Temperatur der Luft nach der Erhitzung, so hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$ (s. Bd. I, §. 392),

daher:

$$\delta t_1 = (1 + \delta t)\frac{V_1}{V} - 1,$$

und die Temperaturerhöhung:

$$t_1 - t = \frac{(V_1 - V)(1 + \delta t)}{\delta V}.$$

Ist ferner die specifische Wärme der Luft bei gleichem Drucke:

$$\omega = \varkappa \omega_1 = 1,41 . 0,2375 = 0,335,$$

so folgt der zu dieser Temperaturerhöhung nöthige Aufwand an Wärme:

$$W = \omega (t_1 - t) V\gamma = 0,335 . (V_1 - V)\left(\frac{1 + \delta t}{\delta}\right)\gamma,$$

wobei noch γ die Dichtigkeit der gegebenen Luftmenge V bezeichnet.

Setzen wir endlich noch das mechanische Aequivalent der Wärme 1351 Fußpfund (s. §. 379), so erhalten wir hiernach das Verhältniß des durch die angegebene Temperaturerhöhung erlangten Gewinnes an Arbeitsvermögen zum entsprechenden Wärmeaufwand:

$$\eta = \frac{A_1 - A}{1351\, W} = \frac{(V_1 - V)\, p\, Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right)}{0,335 . 1351\, (V_1 - V)(1 + \delta t)\frac{\gamma}{\delta}}$$

$$= \frac{\delta}{453} \cdot \frac{p}{\gamma (1 + \delta t)} \cdot Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right),$$

da noch $\delta = 0,00367$ und $\gamma = \frac{0,005672\, p}{144\, (1 + \delta t)}$,

also

$$\frac{p}{(1 + \delta t)\gamma} = \frac{144}{0,005672}$$

ist, so folgt einfacher der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{144 . 0,00367}{0,005672 . 453}\, Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right) = 0,2057\, Ln.\left(\frac{p_1}{p}\right).$$

Ist z. B. das Spannungsverhältniß $\frac{p_1}{p} = 2$, so hat man diesen Wirkungsgrad:

$$\eta = 0,2057\, Ln.\, 2 = 0,0257 . 0,6931 = 0,1425,$$

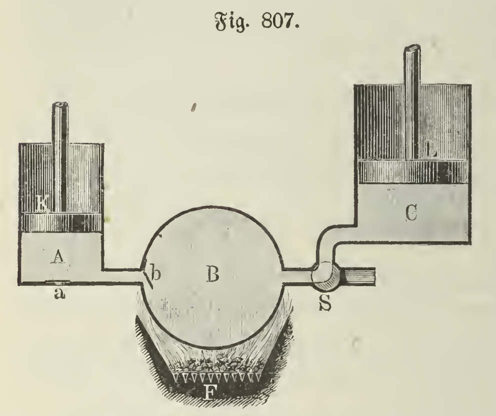
also circa $^1/_7$.

Es wird also bei dieser Arbeitsverrichtung der Luft von der ganzen Arbeitsfähigkeit des verbrauchten Wärmequantums ein Siebentel nutzbar gemacht. Nach der Zusammenstellung und Berechnung in §. 490 ist dieser

theoretische Wirkungsgrad bei einer Dampfmaschine unter den günstigsten Umständen, und nur bei sehr hohen Dampfspannungen ebenfalls nur $^1/_7$.

§. 514 **Calorische Maschinen.** Die ideelle Einrichtung einer calorischen Maschine ist aus Fig. 807 zu ersehen. Es ist A der kleinere Cylinder, dessen Kolben K beim Aufgange äußere Luft durch das Ventil a einsaugt und beim Niedergange durch das Ventil b in das Reservoir B eindrückt; ferner ist F ein Feuerheerd, wodurch die Luft in B erwärmt wird, bevor sie in den größeren Cylinder C tritt und den Kolben L desselben in Bewegung setzt; endlich ist noch S ein Steuerungsmechanismus, wodurch der Zutritt der Luft von B nach C und der Ausfluß derselben aus C in die äußere Luft abwechselnd gestattet und aufgehoben wird.

Fig. 807.



Bezeichnet p die Spannung der äußeren Luft und p_1 die im Reservoir oder Ueberhitzer B, ferner s_0 den Hub des Kolbens L vor der Expansion und s_1 den ganzen Kolbenhub, so hat man:

$$\frac{s_0}{s_1} = \frac{p}{p_1},$$

und daher

$$s_0 = \left(\frac{p}{p_1}\right) s_1.$$

Ist ferner $V = Fs$ der Raum der Druckpumpe A, und also auch das pr. Kolbenspiel in den Hitzer eingedrückte Luftquantum, gemessen unter dem äußeren Drucke p, so hat man für den ganzen Raum des Arbeitscylinders, und also auch das pr. Kolbenspiel verbrauchte und in die freie Luft geführte Luftquantum von der Temperatur t_1 und gemessen unter dem äußeren Drucke p:

$$V_1 = F_1 s_1 = \left(\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}\right) V.$$

Bei Beginn der Expansion nimmt dieses Luftquantum natürlich nur den Raum

$$V_0 = F_1 s_0 = F_1 s_1 \left(\frac{p}{p_1}\right) = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} \cdot \frac{p}{p_1} \cdot V$$

ein.

Ist $\frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t} = \frac{p_1}{p}$, so fällt $V_0 = V$, also der von der erhitzten Luft bei Beginn der Expansion eingenommene Raum des Arbeitscylinders C gleich dem Raume des Cylinders A aus. In diesem Falle hat man für die entsprechende Temperatur der erhitzten Luft:

$$t_1 - t = \frac{p_1 - p}{p}\left(\frac{1}{\delta} + t\right),$$

z. B. für $\frac{p_1}{p} = 2$ und $t = 10^0$,

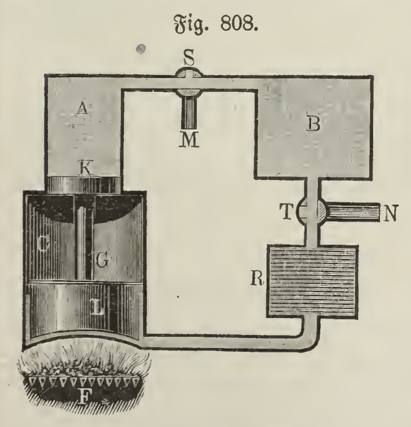
$$t_1 - t = \frac{1}{0{,}00367} + 10 = 282{,}5^0.$$

Diese hohe Temperatur ist das vorzüglichste praktische Hinderniß, welches der Einführung der calorischen Maschinen entgegensteht. Um der Verdampfung der Kolbenschmiere möglichst entgegenzuwirken, macht man den Treibkolben L hohl und füllt ihn mit schlechten Wärmeleitern, z. B. mit klarer Kohle u. s. w. aus.

Um ferner die mit der in das Freie abströmenden Luft verbundene Wärme so viel wie möglich in der Maschine zurückzuhalten, und dieselbe zur Erwärmung der Luft beim folgenden Kolbenspiele benutzen zu können, ließ Erikson dieselbe vor ihrem Austritte durch einen sogenannten Regenerator strömen, welcher in seinem Innern eine Reihe von Drahtnetzen enthielt. Da sich derselbe nicht ausdauernd bewährt hat, so ist er bei neueren Maschinen weggefallen.

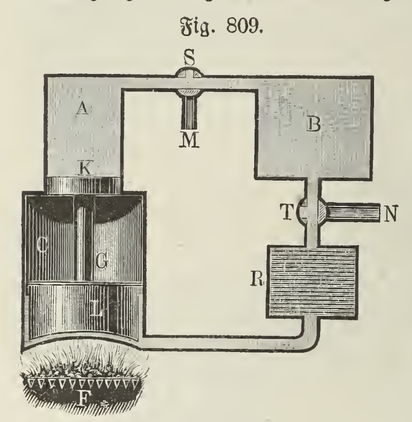
Die wesentliche Einrichtung der ersten calorischen Maschine von Erikson ist aus Fig. 808 zu ersehen. Es sind hier die in den Cylindern A und C spielenden Kolben K und L durch eine Stange G fest mit einander verbunden, und es befindet sich der Brennheerd F unmittelbar unter dem Treibcylinder C, so daß folglich dieser zugleich als Erhitzer dient. Ferner ist B ein besonderes Luftreservoir und R der Regenerator. Endlich sind S und T die beiden Steuerungsmechanismen, wodurch der Zu- und Austritt, sowie die Fortführung der Luft von A nach B und von B nach R regulirt wird. Um die Drücke auf die inneren Flächen der Kolben K und L aufzuheben, wird der Raum zwischen diesen Kolben luftleer erhalten.

Fig. 808.



Beim Anfange der Kolbenverbindung KL wird die vorher durch M eingesaugte Luft von A nach B, sowie weiter nach R und unter L gedrückt; und nach Zurücklegung eines gewissen Kolbenweges, wird durch Drehung des Steuerhahnes T die Communication der Luft in RL mit dem Reservoir B aufgehoben, so daß folglich bei Zurücklegung des übrigen Kolbenweges die Luft mit Expansion arbeitet. Ist die Kolbenverbindung oben angekommen, so werden die Steuerhähne S und T so weit herumgedreht, daß A bei M, sowie R bei N mit der äußeren Luft in Communication tritt, und nun die ganze Kolbenverbindung durch ihr eigenes Gewicht niedergehen kann. Hierbei wird durch M frische Luft eingeführt, dagegen durch N die verbrauchte Luft ausgeblasen, und zugleich ein Theil ihrer Wärme an die Drahtnetze im Respirator abgesetzt. Ist die Kolbenverbindung in die erste Stellung zurückgekehrt, so werden die Steuerhähne S und T wieder so gestellt, daß die Luft von Neuem von A nach B, R u. s. w. treten und ein neues Spiel beginnen kann.

Fig. 809.



Der von dieser Maschine erlangte Arbeitsgewinn pr. Spiel ist auch hier

$$L = (V_1 - V)\, p\, Log. nat. \left(\frac{p_1}{p}\right),$$

oder, wenn während der Ausdehnung der Luft keine Wärmezuführung statthat,

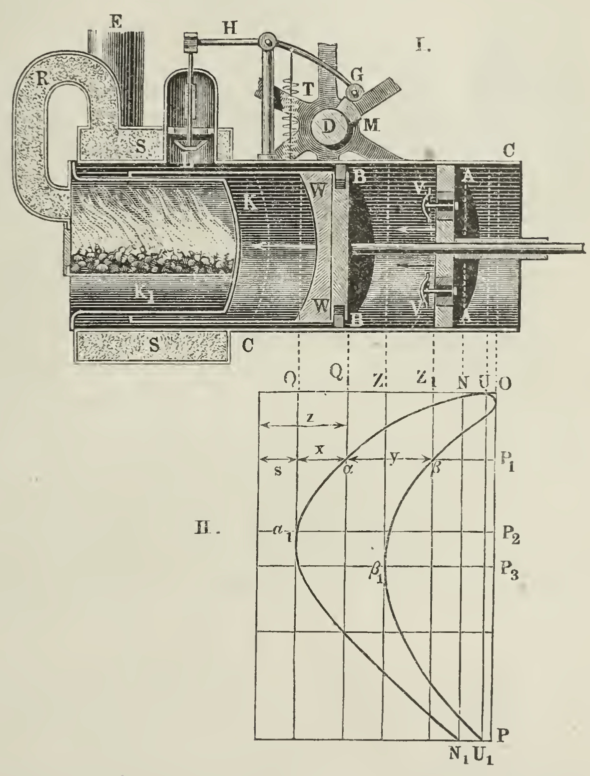
$$L = (V_1 - V)\, p \cdot \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right],$$

wobei V den vom Kolben K, und V_1 den vom Kolben L durchlaufenen Raum, ferner p die Pressung der äußeren Luft und p_1 die Pressung der erhitzten Luft beim Eintritte der Expansion und $\varkappa$ das bekannte specifische Wärmeverhältniß $\frac{\omega}{\omega_1}$ bezeichnet.

§. 515 Eine schematische Darstellung der neueren calorischen Maschinen von Ericsson führt Fig. 810 vor Augen. Der Feuerherd F befindet sich im Inneren eines Kessels KK_1, welcher von der einen Seite her in den Arbeits- oder Treibecylinder CC eindringt, und die Verbrennungsluft durch ein Rohr R in eine rund um den Cylinder herumlaufende Kammer SS führt, von welcher aus sie dann in die Esse E strömt. Im Treibecylinder CC bewegen sich zwei Kolben, der Arbeits- oder Treibkolben AA, und

der Verdränger oder Speisekolben BB, und zwar so, daß sie während eines Spieles sich anfangs von einander entfernen und nachher einander wieder

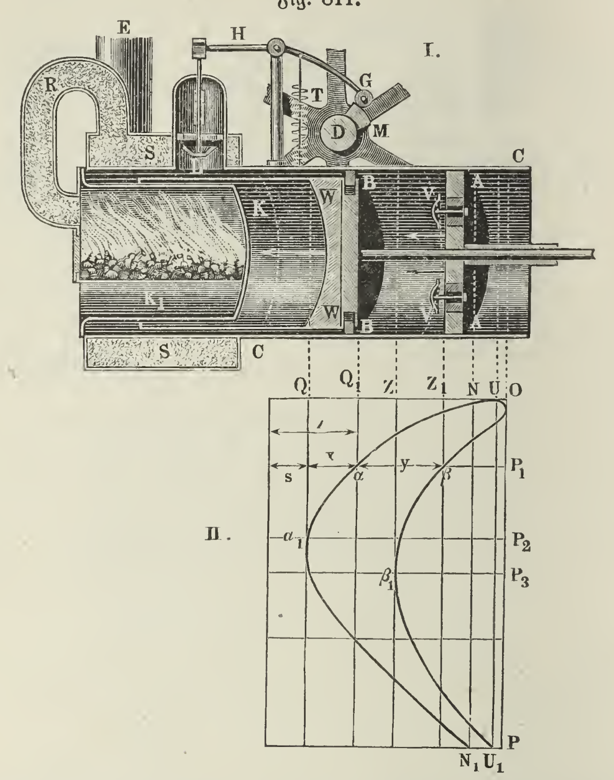
Fig. 810.



näher rücken, so daß sie am Ende des Spieles, wieder wie anfangs, nahe hinter einander zu stehen kommen. Beide Kolben sind ventilirt; die Ventile V, V des Treibkolbens haben einen axialen Ausschub, das eigenthümlich construirte Ventil WW des Verdrängers hat dagegen einen radialen Ausschub, wodurch es abwechselnd gegen die Cylinderwand angedrückt und von derselben zurückgezogen, so daß im letzteren Falle Communication zwischen beiden Seiten dieses Kolbens hergestellt wird. Eigenthümliche Kurbel-, Stangen- und Hebelmechanismen setzen diese Kolben mit der Schwungradwelle D in Verbindung. Beim Rückgange oder der Bewegung der beiden Kolben in der Pfeilrichtung, wobei der Abstand derselben von einander allmälig größer und größer wird, sind die Ventile V, V geöffnet und ist das Ventil WW geschlossen; es strömt deshalb durch die ersteren frische Luft in den Raum zwischen beiden Kolben, während die Luft vor dem

Kolben BB vom Vordränger zurück und unter das Austrittsventil L gedrückt wird. Letzteres wird mittels eines doppelarmigen Hebels GH durch einen auf einen auf der Schwungradwelle D aufsitzenden Daumen eröffnet,

Fig. 811.



dagegen durch eine Spiralfeder T wieder geschlossen. Während des Rückganges der beiden Kolben ist sowohl der Raum $BBVV$ zwischen denselben als auch der Raum $WWKL$ vor dem Verdränger BB mit der äußeren Luft in Communication; es ist daher hierbei der Druck auf beiden Seiten der beiden Kolben nahe einer und derselbe, nämlich der Atmosphärendruck, und die mechanische Arbeit Null.

Während des Hinganges der beiden Kolben (entgegengesetzt der Pfeilrichtung), wobei die Ventile V, V und L verschlossen und das Ringventil WW eröffnet ist, befindet sich in beiden Räumen BBV und WWK vor und hinter dem Verdränger erhitzte Luft, deren mittlerer Druck den Atmosphärendruck übertrifft, es wird daher dann der Arbeitskolben AA mit einer der Differenz zwischen diesem inneren Luft- und dem äußeren Atmosphärendruck

gleichen Kraft vorwärtsgeschoben, wogegen sich die Drücke der erhitzten Luft auf den beiden Seiten des Verdrängers das Gleichgewicht halten. Die Leistung dieser calorischen Maschine pr. Kolbenspiel ist hiernach das Product aus der gedachten Kraft des Arbeitskolbens und dem Wege desselben beim Rückgange.

Das Diagramm II. in Fig. 811 giebt eine graphische Darstellung des Zusammenhanges der beiden Kolbenbewegungen und der Veränderung des zwischen beiden Kolben befindlichen Raumes. Die Horizontalen desselben messen die Kolbenwege, und die Verticalen entsprechen den Wegen der Warze des Krummzapfens an der Schwungradwelle D. Während die Kurbelwarze bei einer Umdrehung den durch die Gerade OP angegebenen Weg $2\pi r$ macht, geht der Speisekolben BB auf dem Wege NQ sowie der Arbeitskolben AA auf dem Wege UZ hin und zurück. Steht die Warze in P_1, so ist der Speisekolben in Q_1 und der Arbeitskolben in Z_1, steht ferner die Kurbelwarze in P_2 so ist der Speisekolben in Q, und befindet sich die Kurbelwarze in P_3, so steht der Arbeitskolben am Ende Z seines Weges u. s. w. Während ferner die beiden Kolben am Anfang und am Ende ihres Weges um NU von einander abstehen, ist nach Zurücklegung des Warzenweges OP_1 der Abstand zwischen den beiden Kolben: $y = Q_1 Z_1$ u. s. w. Schiebt man diesen Abstand herab auf die Horizontale durch P_1, so erhält man zwei zusammengehörige Punkte α und β der Curven $N\alpha\alpha_1\, N_1$ und $U\beta\beta_1\, U_1$, welche die Abhängigkeit der Kolbenbewegungen von der Kurbelbewegung und unter einander vor Augen führen.

Theorie der Ericsson'schen calorischen Maschine. Mit Hülfe (§. 516) der mechanischen Wärmetheorie läßt sich die Leistungsfähigkeit einer Ericsson'schen calorischen Maschine (nach Zeuner) wie folgt berechnen.

Bezeichnet F den Inhalt der Kolbenfläche, p den inneren Ueberdruck über den äußeren Atmosphärendruck und ∂s ein Wegelement des Arbeitskolbens, so ist die Arbeit desselben bei Zurücklegung des ersteren:

$$\partial L_1 = Fp\partial s.$$

Ist T_1 die absolute Temperatur der Luft im Raume zwischen der Feuerung und dem Kolben BB, und T dieselbe im Raume zwischen beiden Kolben, so hat man (nach §. 364) die entsprechenden specifischen Luftvolumina (pr. Gewichtseinheit)

$$v_1 = \frac{RT_1}{p} \text{ und } v_2 = \frac{RT}{p}, \text{ daher folgt aus}$$

$$F\partial s = (v_1 - v_2)\,\partial G_1,$$

$$\partial L_1 = R\,(T_1 - T)\,\partial G_1,$$

wo ∂G_1 das Luftquantum bezeichnet, welches bei Zurücklegung des Wegelementes ∂s von der einen Seite des Verdrängers nach der anderen strömt.

Ferner ist das gesammte Luftquantum $G = G_1 + G_2$ in der Maschine die constante Summe aus den Luftmengen zu beiden Seiten des Verdrängers, daher

$$\partial G_1 + \partial G_2 = 0, \text{ oder } \partial G_1 = - \partial G_2;$$

auch hat man $G_2 v_2 = Fy$, wenn y den veränderlichen Abstand $\alpha\beta$ der beiden Kolben von einander bezeichnet, folglich ist

$$G_2 = \frac{Fy}{v_2} = \frac{Fpy}{RT}, \text{ sowie}$$

$$\partial G_1 = - \partial G_2 = - \frac{F}{RT} \partial (py) \text{ und}$$

$$\partial L_1 = - \left(\frac{T_1 - T}{T}\right) F \partial (py),$$

so daß durch Integration

$$L_1 = - \left(\frac{T_1 - T}{T}\right) Fpy + Con. \text{ folgt.}$$

Ist die anfängliche Pressung p_1 und der Kolbenabstand y_1, so hat man

$$0 = - \frac{T_1 - T}{T} F p_1 y_1 + Con.,$$

und schließlich die Leistung der Maschine

$$L_1 = \left(\frac{T_1 - T}{T}\right) F (p_1 y_1 - py).$$

Ferner ist

$$G = G_1 + G_2 = \frac{Fp}{R}\left(\frac{z}{T_1} + \frac{y}{T}\right) \text{ auch } = \frac{Fp_1}{R}\left(\frac{s}{T_1} + \frac{y_1}{T}\right),$$

wenn unter s die Länge des anfänglichen Luftprismas hinter dem Verdränger verstanden und die veränderliche Länge $s + x$ desselben durch z bezeichnet wird; daher

$$p = \frac{zT + y_1 T_1}{zT + y T_1} p_1, \text{ sowie}$$

$$p_1 y_1 - py = \frac{(z y_1 - sy) T p_1}{zT + y T_1},$$

und das gesuchte Arbeitsvermögen

$$L_1 = \frac{(T_1 - T)(z y_1 - sy)}{zT + y T_1} F p_1.$$

Bringt man noch die Arbeit

$$L_2 = Fp . \overline{ZU} = Fp (\overline{QU} - QZ)$$
$$= Fp (x + y - y_1) = Fp (z - s + y - y_1)$$

des äußeren Gegendrucks Fp in Abzug, so bleibt die Nutzarbeit

$$L_0 = L_1 - L_2 = \left(\frac{(T_1 - T)(z y_1 - sy)}{zT + y T_1} - (x + y - y_1)\right) Fp$$

übrig, und zwar unter der Voraussetzung, daß die innere Luftspannung p_1 am Ende des Kolbenspieles bis zum äußeren Luftdruck p herabgesunken sei.

Macht die Maschine pr. Minute n Spiele, so ist das Gewicht des verbrauchten Luftquantums pr. Secunde:

$$G = Q\gamma = F(y_1 - y)\frac{p}{RT}\cdot\frac{n}{60},$$

und daher die gesuchte Leistung dieser calorischen Maschine pr. Secunde:

$$L = \frac{n}{60}L_0 = \left(\frac{(T_1 - T)(zy_1 - sy)}{zT + yT_1} - (x + y - y_1)\right)\frac{RT}{y_1 - y}\cdot G.$$

In der praktischen Anwendung ist das verbrauchte Luftquantum G viel größer als das nach der vorletzten Formel berechnete, und daher auch die Leistung ansehnlich kleiner als die letzte Formel angiebt.

Beispiel. Bei einer Ericsson'schen calorischen Maschine ist der Durchmesser der Kolbenfläche: $d = 2$ Fuß, die Länge des Luftraumes hinter dem Verdränger bei Beginn des Rückganges: $s = \frac{1}{4}$ Fuß, der ganze Schub des Speisekolbens: $x = 1{,}5$ Fuß, der anfängliche Abstand zwischen den beiden Kolbenflächen: $y_1 = 1{,}1$ Fuß und der am Ende desselben: $y = 0{,}1$ Fuß, ferner die mittlere Temperatur der heißen Luft während des Kolbenschubs: $t_1 = 300^0$, und die der äußeren Luft: $t = 10^0$, daher $T_1 = 573$ und $T = 283^0$; wenn nun diese Maschine pr. Secunde 50 Spiele macht, und der äußere Luftdruck $p = 14{,}1$ Pfund pr. Quadratzoll angenommen wird; welche Leistung ist dann von dieser Maschine zu erwarten?

Es ist hier $T_1 - T = t_1 - t = 290^0$, $F = \frac{\pi d^2}{4} = 3{,}14$ Quadratfuß, $p = 14{,}1 . 144 = 2030$ Pfund, $z_1 = s = 0{,}25$, $z = s + x = 1{,}75$.

$$zy_1 - sy = 1{,}75 . 1{,}1 - 0{,}25 . 0{,}1 = 1{,}90,$$
$$zT + yT_1 = 1{,}75 . 283 + 0{,}1 . 573 = 552,$$
$$x + y - y_1 = 1{,}5 + 0{,}1 - 1{,}1 = 0{,}5,$$

daher folgt die gesuchte theoretische Leistung der Maschine pr. Spiel:

$$L_0 = \left(\frac{290 . 1{,}9}{552} - 0{,}5\right) 3{,}14 . 2030 = (0{,}998 - 0{,}5)\, 6374$$
$$= 0{,}498 . 6374 = 3174 \text{ Fußpfund, folglich die pr. Secunde:}$$

$$L = \frac{n}{60}L_0 = \frac{5}{6} . 3174 = 2645 \text{ Fußpfund, wobei das Luftquantum}$$

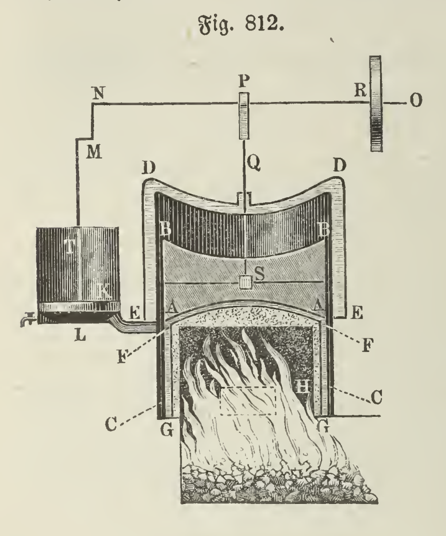
$$G = F(y_1 - y)\frac{p}{RT}\cdot\frac{n}{60} = F(y_1 - y)\gamma\cdot\frac{n}{60}$$
$$= 3{,}14 . 1 . 0{,}0800 . \frac{5}{6} = 0{,}2093 \text{ Pfund verbraucht wird.}$$

Geschlossene calorische Maschinen. Während bei den offenen calorischen Maschinen von Ericsson bei jedem Spiel eine neue Luftmenge zur Wirksamkeit gelangt, arbeiten dagegen die geschlossenen calorischen Maschinen mit einem und demselben Luftquantum, indem man dasselbe nach vollbrachter Arbeit bei jedem Kolbenspiele wieder von §. 517

Neuem erwärmen läßt. Zu diesen calorischen Maschinen gehören die von Schwarzkopf und Laubereau sowie die von Belou u. s. w.

Eine schematische Darstellung der Laubereau'schen geschlossenen calorischen Maschinen führt Fig. 812 vor Augen. Der Verdränger $AABB$, welcher auch hier mit einem mantelförmigen Blechansatz $ACCA$ versehen ist, bewegt sich im Inneren eines Doppelcylinders $DEED$ zwischen dessen Wänden kaltes Wasser circulirt, welches durch eine besondere Pumpe auf der einen Seite stetigen Zufluß erhält, während es auf der anderen Seite stetigen Abfluß hat. Die durch Verbrennung auf dem Herd H erzeugte heiße Luft trifft den concaven Deckel FF des Ofens und geht von da an dem cylindrischen Mantel $FGFG$ herab nach dem Boden GG und von da in die Esse (deren Einmündung in der Abbildung durch ein punktirtes Rechteck dargestellt ist).

Fig. 812.



Es ist hiernach leicht zu ermessen, daß beim Aufgang des Kolbens $AABB$ die kalte Luft aus der Kammer $BBDD$ in die erwärmte Kammer $AAFF$ herab-, und daß umgekehrt, beim Niedergange dieses Kolbens die erhitzte Luft aus dem Raume $AAFF$ unter demselben in die kühle Kammer $BBDD$ hinaufgepreßt wird. Während des Kolbenaufganges dehnt sich die aus der kalten in die warme Kammer strömende Luft aus, strömt durch das Communicationsrohr EL in den Arbeits- oder Treibcylinder T und drückt hier den Treibkolben K in die Höhe, welcher mittels des Stangen- und Krummzapfenmechanismus KMN die Welle NO in Umdrehung setzt. Letztere trägt außer einem (nicht abgebildeten) Schwungrad und dem Transmissionsrad R ein Excentrik in Form eines Bogendreiecks (Fig. 777), welches von einem der den Kopf der Kolbenstange QS bildenden Rahmen umgeben wird, und die regelrechte Auf- und Niederbewegung des Kolbens $AABB$ hervorbringt. Beim Niedergang des letzteren kühlt sich die aus $AAFF$ nach $BBDD$ strömende Luft an den Umfangswänden von $EDDE$ wieder ab, in Folge dessen sie eine kleinere Pressung annimmt, und der äußere Luftdruck auf den Kolben K das Uebergewicht über den inneren gewinnt, so daß letzterer zum Niedergange genöthigt wird. Sind beide Kolben unten ange-

kommen, so gewinnt der Druck der in $AAFF$ von Neuem erwärmten Luft wieder das Uebergewicht über dem Druck in $BBDD$; es steigt in Folge dessen dieser Kolben wieder in die Höhe und beginnt auf diese Weise ein neues Spiel der Maschine, wobei jedes Mal ein gewisses Arbeitsquantum der erwärmten Luft auf den Arbeitskolben K und von diesem durch den Krummzapfenmechanismus auf die Umtriebswelle NO übertragen wird.

Die Belou'sche Heißeluftmaschine besteht aus zwei doppeltwirkenden Gebläsecylindern, einem kleineren, dem Speisecylinder, einem größeren, dem Arbeitscylinder, und aus einem zwischen beiden Cylindern liegenden geschlossenen Feuerherd. Durch den ersten Cylinder wird atmosphärische Luft angesaugt und in den Feuerherd getrieben, aus welchem sie in erhitztem und verdünntem Zustande nach dem großen Cylinder strömt, wo sie den Arbeitskolben in Bewegung setzt und dessen Kraft durch einen gewöhnlichen Kurbelmechanismus auf die mit einem Schwungrade versehene Umtriebswelle überträgt. Dieselbe setzt durch einen anderen Kurbelmechanismus den Speisekolben sowie durch gewöhnliche Kreisexcentriks die beiden Ventile des Arbeitscylinders in Bewegung, wodurch das abwechselnde Zulassen der warmen Luft auf der einen Seite und Ablassen der verbrauchten Luft auf der anderen bewirkt wird.

Auch diese Heißeluftmaschine verbraucht wie alle übrigen calorischen Maschinen viel mehr Brennstoff als eine Dampfmaschine von gleicher Leistung.

S. Tresca's Bericht über die Versuche mit einer Belou'schen Heißeluftmaschine im Bulletin de la Société d'Encouragement, Jan. 1867; ebenso Dingler's polytechn. Journal, Bd. 185, Delabar's Aufsätze über die Heißeluftmaschine von Belou sowie von Lauberau.

Gaskraftmaschinen. Mit dem Erfolg in der Anwendung der Gaskraftmaschinen ist man bis jetzt nicht glücklicher gewesen, als bei den calorischen Maschinen, auch diese Maschinen verbrauchen bei gleicher Leistung eine viel größere Menge Brennmaterial als die Dampfmaschinen. Man hat bis jetzt vorzüglich dreierlei Systeme von Gaskraftmaschinen in Anwendung gebracht. §. 518

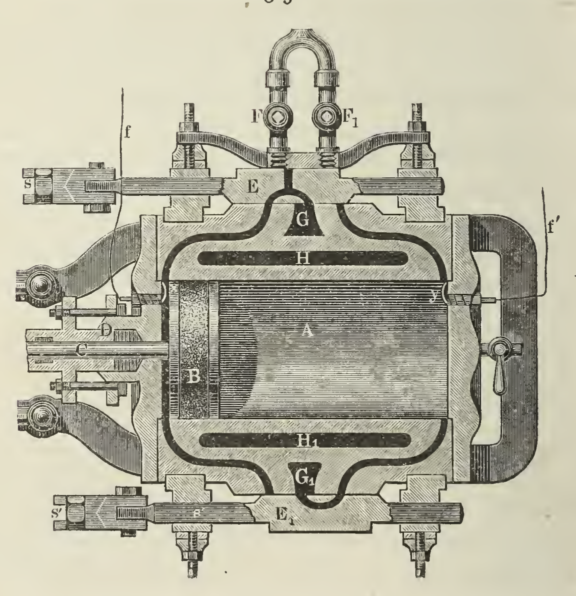
1) Das System von Lenoir,
2) das System von Hugon und
3) das System von Otto und Langen.

Bei allen diesen Maschinen wird die bewegende Kraft durch ein entzündetes Gasgemisch, bestehend aus gewöhnlichem Leuchtgas und einem 10- bis 40mal größeren Quantum atmosphärischer Luft, hervorgebracht. Die beiden ersteren Gasmaschinensysteme sind doppeltwirkend; dort wird das Gasgemisch abwechselnd auf beiden Seiten des Kraftkolbens in den Treibcylinder eingeführt und entzündet, und daher dieser Kolben durch die Explosion des ersteren

hin- und zurückbewegt, das dritte Maschinensystem ist dagegen nur einfachwirkend. Hier wird nur auf der einen Seite des Kraftkolbens Gas in den Treibcylinder geleitet und entzündet. Auch dient hierbei die Explosion des Gasgemenges nicht als Umtriebskraft, sondern nur dazu, einen luftverdünnten Raum zu erzeugen, wobei die Atmosphäre in den Stand gesetzt wird, Arbeit zu verrichten. Bei einer solchen Gasmaschine wird hiernach der Rückgang des Kolbens durch den Druck der äußeren Luft hervorgebracht, dieselbe wirkt deshalb genau wie eine sogenannte atmosphärische Dampfmaschine (s. §. 439) und läßt sich deshalb mit Recht eine atmosphärische Gasmaschine nennen. Was die Entzündung des Gasgemenges betrifft, so erfolgt dieselbe bei der Lenoir'schen Gasmaschine durch die elektrischen Funken eines Rhumkorff'schen Apparats, dagegen bei den Gasmaschinen von Hugon sowie bei denen von Otto und Langen durch eine gewöhnliche Gasflamme.

Die Lenoir'sche Gasmaschine (Moteur à air dilaté par la combustion du gaz d'éclairage) hat im Ganzen das Ansehen einer gewöhnlichen Dampfmaschine mit liegendem Cylinder. Nur hat dieselbe wie die Corliß-Dampfmaschine (Fig. 770) vier Gaswege und zwei Vertheilungsschieber, wodurch abwechselnd je zwei der ersteren eröffnet und geschlossen werden. Die wesentliche Einrichtung und Wirkungsweise einer Lenoir'schen Gasmaschine ist aus Fig. 813 zu ersehen. Es ist A der Kraftcylinder, B der Treibkolben und C die Kolbenstange, wodurch die Kraft dieses Kolbens auf einen ge-

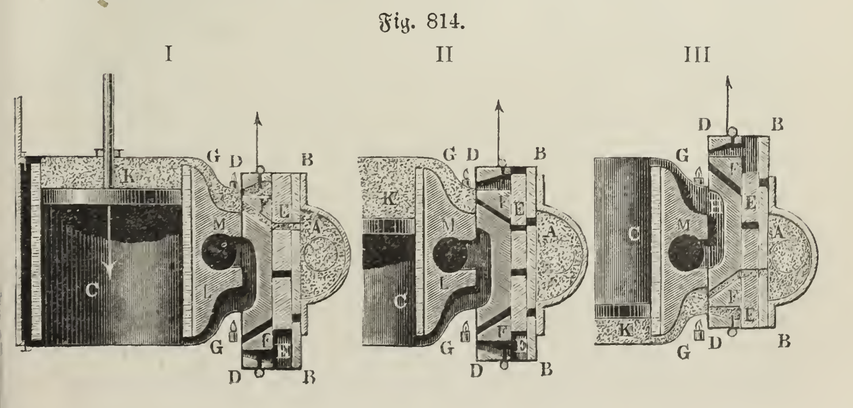
Fig. 813.



wöhnlichen Kurbelmechanismus sammt Schwungrad übergetragen wird, ferner sind E und E_1 die beiden durch Excentriks zu bewegenden Vertheilungsschieber, F und F_1 die das Leuchtgas zuführenden Röhren, und schließlich G und G_1 die mit der äußeren Luft communicirenden Canäle, wodurch die atmosphärische Luft zu- und das Verbrennungsgas abgeleitet wird. Bei der Schieberstellung in der Abbildung strömt die äußere Luft aus G, sowie bald nachher auch das Gas aus F in den linken Gascanal und wird von demselben auf die linke Seite des Kolbens B geführt, wogegen das Verbrennungsgas auf der rechten Seite durch G_1 in die äußere Luft geleitet wird. Rückt hierauf der Schieber E nach der rechten Seite, so wird G und F mit dem rechten Luftcanal in Verbindung gesetzt; es strömt nun das Gasgemisch auf der rechten Seite des Kolbens B in den Arbeitscylinder und treibt nun nach erfolgter Entzündung den Kraftkolben B wieder nach der linken Seite zurück, während die Verbrennungsgase vom Hingange durch den unteren linken Luftcanal nach G_1 und von da in die freie Luft strömen. Nach erfolgtem Rückgange beginnt nun ein neues Spiel. Zur Entzündung des Gasgemenges dienen die elektrischen Ströme der durch die Cylinderdeckel isolirt hindurchgeführten Platin- oder Kupferdrähte x und y, welche mit ihren Spitzen gegen die Cylinderwand gerichtet sind. Bei der Verbrennung verbindet sich ein Theil des Sauerstoffs der Luft mit dem Kohlenstoff zu Kohlensäure und ein anderer Theil derselben mit dem Wasserstoff des Leuchtgases zu Wasser, und die hierbei entstehende Wärme geht dann theils als Arbeit auf den Treibkolben, theils auf das Kühlwasser über, welches in dem hohlen Raum H rings um den Cylinder circuliren muß, um die große Erhitzung desselben zu verhindern. Die **Lenoir**'sche Gasmaschine eignet sich vorzüglich zum Umtrieb kleiner Maschinen von $^1/_2$ bis 2 Pferdekräften, und verbraucht stündlich pr. Pferdekraft nahe $2^1/_2$ Cubikmeter Gas.

Bei der **Hugon**'schen **Gasmaschine**, wovon Fig. 814, I, II, III, eine

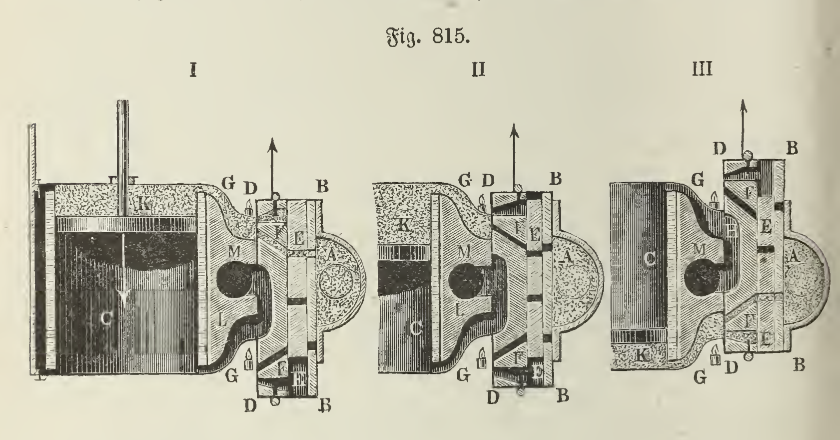
Fig. 814.



schematische Darstellung liefert, wird das Gasgemisch durch zwei mit dem Vertheilungsschieber verbundene Gasbrenner, welche bei gewissen Stellungen des letzteren vor zwei anderen feststehenden Gasbrennern vorbeigehen, entzündet.

Außer der Speisung dieser Maschine durch Gas und Luft wird derselben bei jedem Kolbenschube noch eine kleine Menge Wasser zugeführt, wodurch nicht allein die zur Erhaltung der Maschine nöthige Abkühlung, sondern auch eine Erhöhung der Leistungsfähigkeit derselben erzielt werden soll. Ueberdies ist der Arbeitscylinder noch durch eine Umhüllung von fließendem Wasser vor zu starker Erhitzung geschützt. In der Abbildung ist *C* der Arbeitscylinder mit dem Kolben *K*, *A* die Gaskammer, welcher das Gasgemisch durch eine Luftpumpe unter dem Drucke von einer 0,6 bis 0,7 Meter hohen Wassersäule zugeführt wird, ferner *BB* der Sperr- und *DD* der Vertheilungs-

Fig. 815.



schieber. Beide Schieber umgiebt die mit zwei Durchgangsöffnungen versehene Scheidewand *EE* zu beiden Seiten, und werden vereinigt durch ein gewöhnliches Kreisexcentrik auf- und niederbewegt. Der Vertheilungsschieber *DD* hat außer den gewöhnlichen Durchgangswegen noch zwei Canäle *F*, *F*, worin die beweglichen Gasbrenner ausmünden, welche beim Vorbeigehen an den permanenten Entzündungsbrennern *G*, *G* entzündet werden, und die Entzündung des im Cylinder *C* angesammelten Gasgemisches bewirken.

Bei der Schieberstellung in Fig. 815 I. strömt frisches Gas aus der Kammer *A* durch die Schiebercanäle über den Kolben *K* im Cylinder *C*; wird hierauf die Schieberverbindung etwas gehoben und in die Stellung II. gebracht, so tritt die Explosion des nun von der Kammer *A* abgesperrten Gases im Cylinder ein, und es treibt die sich hierbei entwickelnde Expansiv-

kraft desselben den Treibkolben K abwärts, wobei das beim vorhergegangenen Kolbenschub verbrauchte Gasquantum auf dem gewöhnlichen Wege LM durch den Schieber DD hindurch und nach dem Austragerohr M geleitet wird. Hat schließlich die Schieberverbindung ihren höchsten Stand III. erreicht, so strömt durch die unteren Schiebercanäle Gas in den Kraftcylinder, welches bei Beginn des darauf erfolgenden Niedergangs der Schieberverbindung entzündet wird, und nun den Kolben K wieder emportreibt, während das beim Niedergange verbrauchte Gas auf dem Wege HM fortgeht.

Die atmosphärische Gaskraftmaschine. Trotz der Abkühlung des Treibcylinders durch eine Kaltwasserhülle und durch Einspritzen von kaltem Wasser strömt doch das verbrauchte Gasgemenge der Hugon'schen Gaskraftmaschine noch mit der bedeutend hohen Temperatur von circa 186 Grad ab, wodurch daher diese Maschine noch einen beträchtlichen Arbeitsverlust erleidet. Um denselben zu vermeiden oder wenigstens möglichst zu vermindern, läßt man bei der Otto-Langen'schen Gaskraftmaschine den Treibkolben während der Gasexplosion unbelastet, und verwendet die bei der letzteren freiwerdende mechanische Arbeit nur auf die Ueberwindung des Gewichts G und der Trägheit des armirten Kolbens, wobei derselbe auf die ganze Hubhöhe emporgeschleudert wird. Ist F die Kolbenfläche, p_1 der mittlere Werth des Gasdrucks während der Explosion, q der Gegendruck der Atmosphäre und s_1 der Kolbenweg während der Explosion, wobei die Kolbengeschwindigkeit den Maximalwerth v erlangt, so hat man die Explosionsarbeit der Maschine §. 519

$$A = \frac{G v^2}{2 g} = [F(p_1 - q) - G]\, s_1.$$

Bei Eintritt der gedachten Maximalgeschwindigkeit ist die Ueberwucht oder bewegende Kraft $F(p_1 - q) - G$ des Kolbens = Null, und daher der innere Gasdruck

$$p_1 = q + \frac{G}{F};$$

bei Fortsetzung des Kolbenweges fällt $p_1 < q + \frac{G}{F}$ und daher die treibende Kraft negativ aus. Hierbei nimmt die Kolbengeschwindigkeit allmälig ab und wenn nun das Arbeitsvermögen $A = \frac{G v^2}{2 g}$ des Kolbens durch diese negative Kraft aufgezehrt ist, so kommt der Kolben wieder in Ruhe. Bezeichnet p_2 den mittleren Gasdruck, s_2 den Kolbenweg während derselbe statt hat, und die Kolbengeschwindigkeit aus v in Null übergeht, so hat man auch

$$A = \frac{G v^2}{2 g} = [F(q - p_2) + G]\, s_2,$$

daher $[F(q - p_2) + G]\, s_2 = [F(p_1 - q) - G s_1]$,
und das Wegverhältniß

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{F(p_1 - q) - G}{F(q - p_2) + G}.$$

Nach Zurücklegung des Kolbenweges s_2 wird die Kolbenstange mit der Schwungradwelle der Maschine verbunden, welche bei dem darauf folgenden Niedergang des Kolbens das Arbeitsquantum $A = P s_2 = [F(q - p_2) + G]\, s_2$ aufnimmt, welches der Atmosphärendruck Fq in Vereinigung mit dem Kolbengewichte G nach Abzug des mittleren Gegendrucks Fp_2 beim Rückweg s_2 des Kolbens verrichtet. Am Ende dieses Wegs ist der Ueberdruck $F(q - p_3)$ sammt Kolbengewicht G mit der gewonnenen Arbeitskraft P im Gleichgewicht, also $F(q - p_3) + G = P$, daher der Gasdruck:

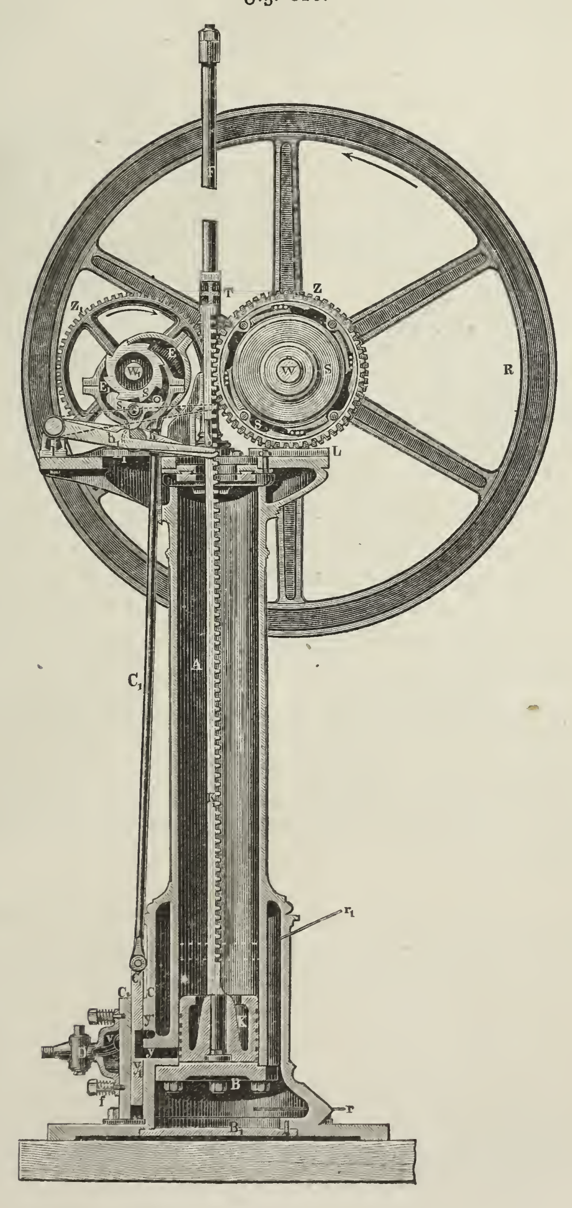
$$p_3 = q + \frac{G}{F} - \frac{P}{F} = p_1 - \frac{P}{F}.$$

Schließlich legt hierauf der Kolben noch einen kleinen Weg s zurück, wobei er das verbrauchte Gas zum Austritt nöthigt, wie er auch bei dem folgenden Aufgang zuerst nur die zu demselben nöthige Gasmenge ansaugt.

Die allgemeine Einrichtung einer Otto-Langen'schen Gaskraftmaschine ist aus dem senkrechten Durchschnitt Fig. 816 zu ersehen. Der Treib- oder Arbeitscylinder A ist unten durch eine Fußplatte B verschlossen und von einem Mantel C mit Bodenplatte B_1 umgeben, welcher die Kammer des Kühlwassers bildet, dessen Circulation durch die beiden Röhrchen r und r_1 vermittelt wird. Der Treibkolben K hat eine gezahnte Kolbenstange K_1, welche mittels eines Querhauptes T von einer Senkrechtführung F umgeben ist und beim Rückgang in das auf der Schwungradwelle W sitzende Zahnrad Z eingreift, wobei die Kolbenkraft P auf diese Welle übergetragen wird. Damit die durch das Schwungrad R in stetiger Umdrehung erhaltene Welle W dem Rückgang des Kolbens kein Hinderniß in den Weg lege, ist das Zahnrad Z nicht fest mit W verbunden, sondern über einer auf W festsitzenden Scheibe S verschiebbar, und sind in den ringförmigen Raum zwischen Z und S lose Keile und Rollen angebracht, welche sich beim Niedergang des Kolbens zwischen den Keilflächen und dem inneren Umfang des Zahnrades einkeilen, und dadurch die Verbindung des letzteren mit der Welle W vermitteln, wogegen sich beim Aufgang des Kolbens diese Rollen frei bewegen und das Zahnrad Z durch die gezahnte Kolbenstange K_1 in umgekehrter Richtung umgedreht wird, ohne die in der ersten Richtung umlaufende Welle W zu stören.

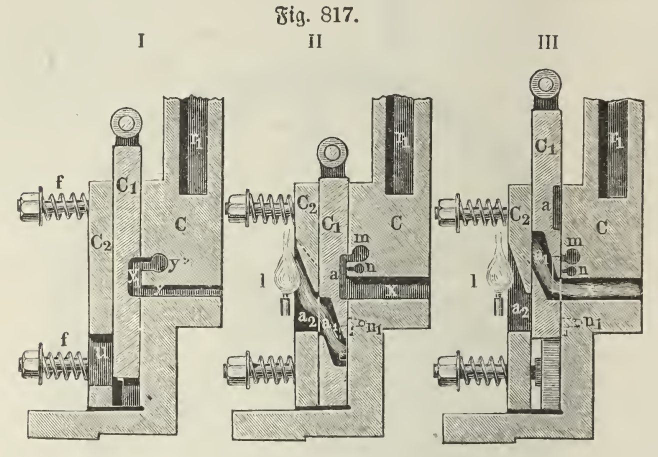
Die Steuerung dieser Maschine, wodurch in gehöriger Aufeinanderfolge das Zulassen und Anzünden des Gasgemisches, sowie die Expansion und

Fig. 816.



das Vorlassen desselben erfolgt, wird in der Hauptsache durch einen Schieber C_1 besorgt, welcher mittels Stange, Excentrik, Sperrrad u. s. w. an eine Welle W_1 angeschlossen ist, deren Umdrehung das Zahnräderwerk z, z_1 vermittelt. Die verticalen Durchschnitte I, II, III in Fig. 817 führen den

Fig. 817.

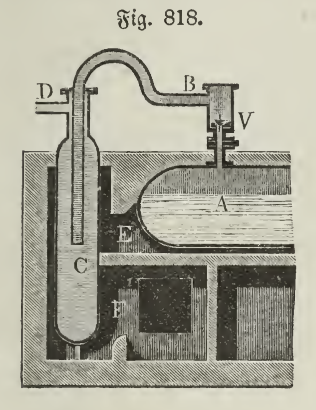


Steuerschieber in drei verschiedenen Stellungen vor Augen. In der mittleren Stellung I. tritt, während der Treibkolben das Ende seines Niederganges erreicht, das verbrauchte Gas durch den Canal y in die Höhlung y_1 des Schiebers und von da in den Canal y_2, welcher es nach dem mit einem Kugelventil versehenen Austragrohre führt. Kommt hierauf bei Beginn des Kolbenaufgangs der Schieber in die tiefste Stellung II, so füllt sich der Raum unter dem Kolben mit dem Gasgemisch, welches durch die Canäle m und n zugeleitet wird, auch gelangt ein Theil des Gases durch den Canal n_1 nach der Kammer a_1 und entzündet sich daselbst an der Gasflamme l. Gelangt endlich der Schieber in die Stellung III, so wird der Canal a_1 mit dem Canal x in Verbindung gesetzt und das ganze Gasgemenge unter dem Kolben entzündet u. s. w.

§. 520 **Maschinen mit überhitzten Dämpfen.** Man hat in neueren Zeiten das Princip der calorischen Maschinen auch auf den Dampf angewendet und zu diesem Zwecke denselben nicht gleich vom Dampfkessel aus in den Dampfcylinder, sondern erst in ein besonderes Gefäß, den sogenannten Ueberhitzer, geführt und ihn durch Zuführung von neuer Wärme in überhitzten Dampf (s. §. 382) umgeändert. Die wesentliche Einrichtung eines Dampfkessels mit Ueberhitzer, nach Chaigneau und Bichon, ist aus Fig. 818 zu ersehen. Es ist hier A das hintere Ende des Dampfkessels, C der Ueberhitzer, B das vom ersteren nach dem letzteren, sowie D das vom

letzteren nach dem Dampfcylinder führende Dampfrohr. Die Erwärmung des Ueberhitzers erfolgt durch die bei E aus den Zügen abziehende Heizluft, welche erst den ganzen Ueberhitzer einmal umspielen muß, bevor sie bei F in den Schornstein treten kann. Ein leicht bewegliches Ventil V in der Röhre B regulirt die Dampfspannung im Ueberhitzer so, daß sie von der Dampfspannung im Kessel nur wenig übertroffen wird und folglich die Wirkung des Ueberhitzers hauptsächlich nur in der Ausdehnung des Dampfvolumens besteht.

Fig. 818.



Ist p die Dampfspannung und V das pr. Kolbenschub verbrauchte Dampfvolumen, sowie ε das Expansionsverhältniß, mit welchem die Dampfmaschine arbeitet, so läßt sich (s. §. 480) die Arbeit dieser Maschine pr. Kolbenschub

$$A = Vp\,(1 + Log.\,nat.\,\varepsilon)$$

setzen; wird nun aber dieses Volumen V im Ueberhitzer in V_1 umgeändert, ohne daß sich p ansehnlich ändert, so beträgt diese Arbeitsfähigkeit:

$$A_1 = V_1 p\,(1 + Log.\,nat.\,\varepsilon),$$

und es ist daher das Verhältniß:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}.$$

Zur Erzeugung des Dampfquantums $V\gamma$ ist annähernd die Wärmemenge

$$W = 630\, V\gamma$$

nöthig (s. §. 401), und es erfordert die Umänderung dieser Dampfmenge in überhitzten Dampf das Wärmequantum:

$$W_1 = 0{,}480\,.\,(t_1 - t)\, V\gamma,$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die specifische Wärme des Wasserdampfes $= 0{,}480$ sei. Hiernach ist das Verhältniß der Wärmemenge bei Anwendung von überhitztem Dampfe zu der bei Anwendung von gesättigtem Dampfe:

$$\frac{W + W_1}{W} = 1 + \frac{0{,}480\,(t_1 - t)}{630} = 1 + 0{,}000762\,(t_1 - t),$$

und folglich das Verhältniß des Wirkungsgrades der Dampfmaschine mit überhitztem Dampfe zu dem der Dampfmaschine mit gesättigtem Dampfe:

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{A_1}{A} \cdot \frac{W}{W + W_1} = \frac{1}{1 + 0{,}001344\,(t_1 - t)} \cdot \frac{1 + \delta t_1}{1 + \delta t}$$

$$= \frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{[1 + 0{,}000762\,(t_1 - t)]\,(1 + 0{,}00367\,t)},$$

z. B. für $t = 120$ und $t_1 = 300$ Grad:

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{2{,}001}{1{,}137 \,.\, 1{,}4404} = \frac{2{,}001}{1{,}633} = 1{,}25;$$

es fällt also die Leistung der Maschine im ersteren Falle um 25 Procent größer aus als im letzteren.

Bei den Versuchen an einer solchen Maschine von der Pariser Ausstellung im Jahre 1855 soll dieses Verhältniß auf 1,58 gestiegen sein.

Die Verwendung überhitzter Dämpfe bei Dampfmaschinen scheint in neueren Zeiten besonders im Elsaß eine größere Verbreitung erlangt zu haben, wie aus einer Abhandlung im Bulletin de la soc. ind. de Mulhouse, Avril et Mai 1867, auch deutsch im polytechnischen Centralblatt 1868, Lief. 1, hervorgeht. Die Ueberhitzungsapparate sind Systeme neben- und übereinanderliegender gußeiserner Röhren, worin der aus dem Dampfdom eines gewöhnlichen Dampfkessels kommende Wasserdampf auf 220° C. erwärmt wird. In der neuesten Zeit sind auch vom Herrn Professor Hartig in Dresden Versuche über die Leistung einer Dampfmaschine mit erhitztem Dampf angestellt worden, welche ebenfalls die Nützlichkeit der Ueberhitzung nachzuweisen scheinen (siehe den „Civilingenieur", Jahrgang XIII, Heft 3). Der hierbei zur Anwendung gekommene Dampfkessel war nach dem patentirten System von Herrn J. T. Romminger in Dresden construirt und bestand aus einem gußeisernen Gerippe, in dessen Knoten 14 schmiedeeiserne Röhren von 25 Millimeter Weite und 1,6 Meter Länge saßen, worin das durch eine Pumpe gedrückte Speisewasser fast momentan in Dampf verwandelt wurde, und wobei natürlich die Gefahr einer Kesselexplosion ganz vermieden wird.

Die Gebrüder Wethered in Baltimore wenden statt der einfachen überhitzte Dämpfe, ein Gemisch aus 1 Theil gesättigtem und 3 Theilen überhitztem Dampf, zum Betrieb der Dampfmaschinen an, und verhindern dadurch das zu starke Verdampfen der Schmiere, Ablösen der Dichtungsmittel u. s. w. Zu diesem Zwecke ist außer dem gewöhnlichen Dampfrohre, welches den gesättigten Dampf nach der Dampfkammer führt, noch ein schlangenförmiges Dampfrohr angebracht, welches durch den Feuercanal geht, und daher den Dampf in überhitztem Zustande in die Dampfkammer leitet.

Ferner hat man noch Dampfmaschinen mit combinirten Dämpfen in Anwendung gebracht, wobei die Condensation des abströmenden Wasserdampfes durch Verdampfen einer anderen Flüssigkeit erfolgt, und der so

erzeugte Dampf dieser Flüssigkeit zum Umtriebe einer anderen Maschine benutzt wird. Da der Schwefeläther schon bei 37,8^0 verdampft (s. §. 372), und derselbe bei gleicher Temperatur eine viel höhere Spannung hat als der Wasserdampf (s. §. 392), so ist er zur Anwendung bei solchen Maschinen mit combinirten Dämpfen ganz besonders geeignet. Es gehören hierher die Maschinen von Trembley (s. Annales des mines 1853, T. 4, auch „Polytechn. Centralblatt" 1854).

Endlich hat man in neuerer Zeit auch Dampfmaschinen mit regenerirten Dämpfen in Anwendung gebracht, wo der Dampf, nachdem er seine Arbeit verrichtet hat, wieder von Neuem erwärmt (regenerirt) und der Maschine als Motor zugeführt wird. Es gehört hierher die Dampfmaschine von Siemens sowie die von Segnin. Bei diesen Maschinen kommt es wesentlich darauf an, den Dampf abwechselnd zu überhitzen und in den Zustand der Sättigung zurückzuführen; er wirkt im ersten Zustande activ, indem er den Dampfkolben ausschiebt, im zweiten Zustande dagegen passiv, wo er vom zurückgehenden Dampfkolben in den Condensator getrieben wird. Um ein regelmäßiges Maschinenspiel zu erhalten, ist es nöthig, zwei solche Maschinen so mit einander zu verbinden, damit die Kraft beim Hingange des einen Dampfkolbens zugleich auch den Rückgang des anderen Dampfkolbens bewirkt.

Ueber die Dampfmaschinen von Siemens siehe: Cosmos, Revue encyclopédique 1855, sowie Dingler's polytechn. Journal 1855, über die von Seguin siehe: le Génie industrielle par Armengaud, T. XIII, 1857.

Schlußanmerkung. Die Literatur über Dampfmaschinen hat eine so große Ausdehnung erlangt, daß es nicht möglich ist, hier eine vollständige Anzeige derselben zu liefern. Namentlich sind wir nicht im Stande, auf die vielen einzelnen Aufsätze und Abhandlungen über Dampfmaschinen einzugehen, sondern es ist uns nur gestattet, die größeren Werke und die sich durch Eigenthümlichkeit auszeichnenden Schriften über diesen Gegenstand anzuführen. Eine Schrift, welche die neueren Fortschritte des Dampfmaschinenwesens behandelt, ist folgende: R. Schmidt, die Fortschritte in der Construction der Dampfmaschine während 1854 bis 1857 und während 1857 bis 1862, 2 Bände, Leipzig 1857 und 1862.

Immer noch als vorzügliche Werke über Dampfmaschinen sind anzusehen: Tredgold's sowie Farey's Treatise on the Steam-Engine; vorzüglich aber die französische Uebersetzung des ersten Werkes von Mellet, welche 1828 unter dem Titel: Traité des machines à vapeur etc. erschienen ist. Eine gedrängte, vorzüglich aber nur historisches Interesse habende Abhandlung über Dampfmaschinen findet man in Barlow's Treatise on the Manufactures and Machinery of Great-Britain. Dem jetzigen Standpunkt entsprechender abgehandelt ist: A Treatise on the Steam-Engine etc. by the Artizan-Club, edited by J. Bourne, 5th. edition, London 1861; auch Catechism of the Steam-Engine, by Bourne, new edition 1865, sowie Traité sur les machines à vapeur, par Bataille et Jullien. Die erste Abtheilung dieses Werkes ist eine bloße Uebersetzung des englischen Werkes. Die zweite Abtheilung, welche von der

Construction der Dampfmaschinen handelt, hat besonders praktischen Werth, zumal auch wegen ihrer vielen Kupfertafeln. Ferner gehört hierher das Handbuch über den Bau, die Aufstellung, Behandlung u. s. w. der Dampfmaschinen, nach dem Französischen von Grouvelle, Jaunez und von Jullien, Weimar 1848. Vorzüglich in theoretischer Beziehung ist zu empfehlen die zweite Ausgabe von Pambour's Théorie des machines à vapeur, Paris 1844. Eine deutsche Uebersetzung hiervon theilt Crelle mit in seinem Journal der Baukunst, Bd. 23 ꝛc. Das vorzüglichste theoretische Werk über Dampfmaschinen ist der dritte Theil der Leçons de Mécanique pratique etc., par A. Morin, Paris 1846. Dasselbe enthält auch Auszüge aus der interessanten Abhandlung von Thomas Wicksteed „On the Cornish Engines etc.“ Formeln, Tabellen und Regeln zur Berechnung der Dampfmaschinen enthalten Redtenbacher's Resultate über den Maschinenbau. Speciell über Wärme, Dampf und Dampfmaschinen handelt auch Redtenbacher's Maschinenbau, Bd. II, Mannheim 1863.

Bernoulli's Handbuch der Dampfmaschinenlehre ist in der 5. Auflage, Stuttgart 1865, vom Hrn. Prof. Böttcher in Chemnitz gänzlich umgearbeitet und vermehrt worden, und Denjenigen, welche sich nur allgemeine Kenntnisse im Dampfmaschinenwesen verschaffen wollen, sehr zu empfehlen. Ebenso ist Rühlmann's Allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, besonders wegen literarischer und geschichtlicher Notizen sehr schätzbar. Noch immer werthvoll, namentlich wegen seiner Gründlichkeit, ist auch das Werk von Verdam: „Die Grundsätze, nach welchen alle Arten von Dampfmaschinen zu beurtheilen und zu behandeln sind, deutsch von Schmidt u. s. w.“ Neue theoretische Ansichten über die Wirkung des Dampfes von Clapeyron und Holzmann findet man in der Abhandlung von Ersterem über die bewegende Kraft der Wärme, Poggendorff's Annalen, Bd. 59, und in der Schrift des Zweiten: „Ueber die Wärme und Elasticität der Dämpfe und Gase.“ Ueber die Anwendung der Wärmetheorie auf die Dampfmaschinen von Clausius siehe Poggendorff's Annalen, Bd. 97. Auch gehört hierher die Abhandlung von M. Rankine: „On the mechanical action of heat, in Philosophical-Magazine, Vol. VII, 1854. Tyndall, die Wärme als Art der Bewegung, Braunschweig 1867.

Die mechanische Wärmetheorie ist vertreten vorzüglich: 1) in den Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie von R. Clausius, Braunschweig 1864 und 1867. 2) in Zeuner's Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie, 2. Auflage, Leipzig 1866. 3) im Manual of the Steam-Engine and other prime movers by W. J. Macquorn Rankine, London and Glasgow 1859. Ferner 4) Théorie mécanique de la chaleur, par G. A. Hirn, seconde édition, Paris 1865. Auch gehört hierher: Die Theorie der Dampfmaschinen von Gustav Schmidt, Freiberg 1861, sowie: Die Dampfmaschinen-Berechnung mittels praktischer Tabellen und Regeln u. s. w. von Josef Hrabák, 2. Auflage, Prag 1869.

Gute Zeichnungen und Beschreibung von neuen Dampfmaschinen findet man in der Schrift von Nottebohm: „Sammlung von Zeichnungen einiger ausgeführten Dampfkessel und Dampfmaschinen u. s. w., Berlin 1841;“ ebenso von alten Maschinen in der Abhandlung von Severin: Beiträge zur Kenntniß der Dampfmaschinen, Berlin 1826 („Abhandlung der königl. Deputation der Gewerbe).“ Uebrigens ist noch zu empfehlen: Reech, „Mémoire sur les machines à vapeur, Paris 1844“, auch Alban, „die Hochdruckdampfmaschine, Rostock 1843.“ Ferner „The Steam-Engine etc. by Hodge, Newyork 1840,“

und der Catéchisme du mécanicien à vapeur ou traité des machines à vapeur etc., par E. Paris, Paris 1850. Neuerlich ist erschienen: Jul. Gaudry „Traité élément et prat. des machines à vapeur", 2. Vol., Paris 1856. Zum praktischen Gebrauche ist zu empfehlen: „Der Führer des Maschinisten" von Scholl, Braunschweig 1864, 6. Auflage. Ferner: „Anleitung für Anlage und Wartung der stationären Dampfkessel" von Marin, Brünn 1859. Mehrere andere Schriften über Dampferzeugung u. s. w. sind oben am Schluß des dritten Capitels citirt worden. Noch ist anzugeben: Les applications de la chaleur etc., par Valerius, Bruxelles 1867, in zweiter Auflage. Ferner: der Indicator und seine Anwendung u. s. w. von Rosenkranz, Berlin 1868.

Das Dampfmaschinenwesen ist ferner stark vertreten in G. Weissenborn's American engineering, embracing various branches of mechanics, Newyork 1861 etc., mit 52 Tafeln. Ueber die Dampf- und Gasmaschinen in der letzten Pariser Weltausstellung 1867 ist nachzusehen: die Motoren der Pariser Weltausstellung 1867, vom Bergrath Prof. Jenny, Wien 1868; ferner: Oppermann, Visite d'un Ingenieur à l'exposition universelle de 1867, sowie: Revue de l'exposition de 1867; mines, métallurgie, chimie, mécanique etc. par Noblet, Paris et Liège 1868. Aus den Verhandlungen des Vereins für Gewerbefleiß in Preußen ist besonders abgedruckt: Die atmosphärische Gaskraftmaschine von Otto und Langen, Berlin 1868. Die Heißluftmaschine von Windhausen und Huch, so wie die Roper'sche Heißluftmaschine ist behandelt von Herrn Conrector Delabar in Dingler's Journal Band 187.

Alphabetisches Sachregister.

Die beigefügten Ziffern geben die Seitenzahl an.

A.

B.

F.

G.

H.

S.

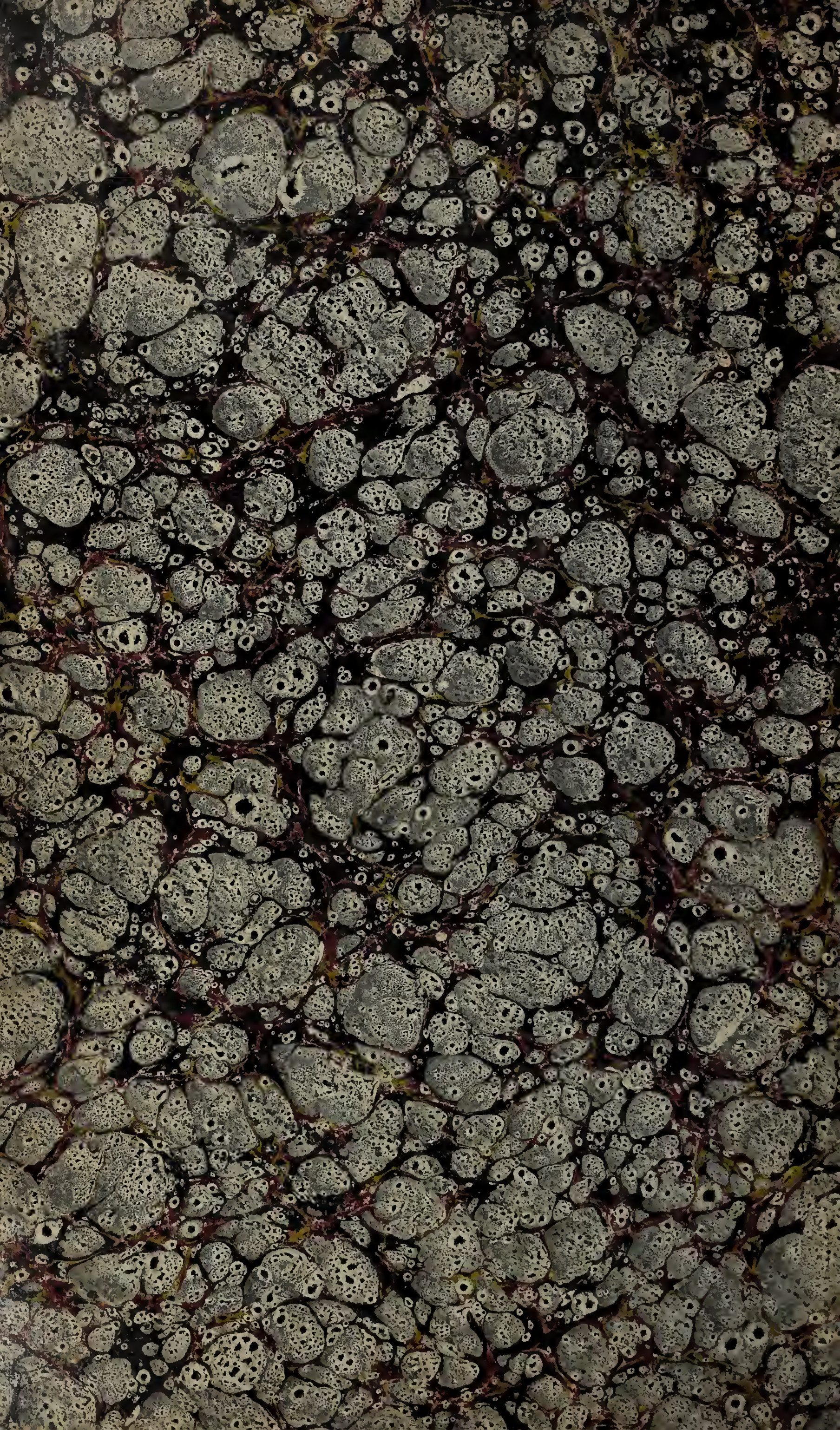
T.

U.

V.

W.

Z.




Colibri

